



**HAL**  
open science

# Modèles Mathématiques Statiques de Marchés Financiers

Serguei Pergamenchtchikov

► **To cite this version:**

Serguei Pergamenchtchikov. Modèles Mathématiques Statiques de Marchés Financiers. Doctorat. France. 2022. hal-03649728

**HAL Id: hal-03649728**

**<https://hal.science/hal-03649728>**

Submitted on 22 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèles Mathématiques Statiques de Marchés Financiers

Serguei Pergamenchtchikov  
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem,  
UMR 6085 CNRS, Université de Rouen,  
Avenue de l'Université, BP.12,  
76801 Saint Etienne du Rouvray (France).  
email : Serge.Pergamenchtchikov@univ-rouen.fr

## Résumé

Le but de ce cours est d'introduire les méthodes mathématiques de la finance. En particulier, nous étudions le modèle d'équilibre des Actifs Financiers. Puis, on étudions la notion l'efficience des marchés. Comme une application on considère le modèle de Grossman-Stiglitz.

# 1 Introduction

## 1.1 Espace de probabilité

Soient  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  un ensemble fini quelconque et  $(p_1, \dots, p_k)$  est un vecteur dans  $\mathbb{R}^k$  tel que  $0 < p_j < 1$  pour tout  $1 \leq j \leq k$  et  $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ . On désigne par  $\mathcal{S}$  l'ensemble de tous sousensembles de  $\Omega$ , c'est-à-dire,

$$\mathcal{S} = \{A : A \subseteq \Omega\}.$$

La fonction  $\mathbf{P}$  définie sur  $\mathcal{S}$  par

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j$$

s'appelle la *probabilité*. Dans ce cas on dit que  $(\Omega, \mathbf{P})$  est un *espace de probabilité*. Dans ce cas chaque partie  $A$  de  $\Omega$  s'appelle un événement et  $\mathbf{P}(A)$  s'appelle sa probabilité.

Deux événements  $A$  et  $B$  sont dits *indépendants* lorsque

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

En générale,  $l$  événements  $A_1, \dots, A_l$  sont dits *indépendants* ou mutuellement *indépendants* si on a :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_l) = \mathbf{P}(A_1) \cdots \mathbf{P}(A_l).$$

Une famille des événements  $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_l)$  s'appelle une *partition* si pour tous  $i \neq j$  on a  $A_i \cap A_j = \emptyset$  et

$$\bigcup_{j=1}^l A_j = \Omega.$$

Notons que  $l \leq k$ . On va désigner par  $\sigma\{\mathcal{A}\}$  la tribu engendrée par partition  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire

$$\sigma\{\mathcal{A}\} = \{B : B = \bigcup_{j \in J} A_j, \quad J \subseteq \{1, \dots, l\}\}.$$

Deux partitions  $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_l)$  et  $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_m)$  sont dites *indépendants* si pour tous  $1 \leq j \leq l$  et  $1 \leq i \leq m$  les événements  $A_j$  et  $B_i$  sont indépendants.

Une application  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une *variable aléatoire*. Chaque variable aléatoire  $\xi \in \{a_1, \dots, a_l\}$  engendre une partition que nous désignons par

$$\mathcal{A}_\xi = (A_1, \dots, A_l) \quad \text{avec} \quad A_j = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = a_j\}.$$

Le vecteur  $\mathbf{P}(A_1), \dots, \mathbf{P}(A_l)$  est dit la *distribution* de  $\xi$ . En plus, on pose  $\sigma\{\xi\} = \sigma\{\mathcal{A}_\xi\}$ .

La *fonction de répartition*  $F$  (notée aussi  $F_\xi$ ) d'une variable aléatoire est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = \mathbf{P}(\omega : \xi(\omega) \leq x).$$

Soit  $\xi \in \{a_1, \dots, a_l\}$  une variable aléatoire et  $\phi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. L'*espérance* de la variable  $\xi$  est définie par

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{j=1}^k \xi(\omega_j) p_j = \sum_{j=1}^l a_j \mathbf{P}(\xi = a_j)$$

et d'une fonction  $\phi(\xi)$  par

$$\mathbf{E}\phi(\xi) = \sum_{j=1}^l \phi(\xi(\omega_j)) p_j = \sum_{i=1}^l \phi(a_i) \mathbf{P}(\xi = a_i).$$

Si  $\phi(x) = (x - \mathbf{E}\xi)^2$  alors l'espérance  $\mathbf{E}\phi(\xi) = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2$  s'appelle la *variance* de  $\xi$ . Soient  $\xi \in \{a_1, \dots, a_l\}$  et  $\eta \in \{b_1, \dots, b_m\}$  deux variables aléatoires et  $\psi$  une  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonction de deux variables. Alors, on a

$$\mathbf{E}\psi(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^k \psi(\xi(\omega_j), \eta(\omega_j)) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \psi(a_i, b_j) \mathbf{P}(\xi = a_i, \eta = b_j).$$

En particulier, si  $\psi(x, y) = (x - \mathbf{E}\xi)(y - \mathbf{E}\eta)$ , alors, l'espérance

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = \mathbf{E}\psi(\xi, \eta) = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\eta - \mathbf{E}\eta).$$

est dite la *covariance* de  $\xi$  et  $\eta$ . Deux variables aléatoires  $\xi$  et  $\eta$  sont dites *indépendantes* si les partitions engendrées par  $\xi$  et  $\eta$  sont indépendantes et, par conséquent, dans ce cas on a

$$\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta.$$

Cela implique que  $\text{Cov}(\xi, \eta) = 0$ .

## 1.2 Probabilité et l'espérance conditionnelles

Soit  $B$  un événement tel que  $\mathbf{P}(B) > 0$ . Sachant que  $B$  est réalisé, la probabilité que  $A$  soit réalisé est :

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

De plus, soit  $\xi$  une variable aléatoire. L'espérance conditionnelle de  $\xi$  sachant que  $B$  est réalisé est :

$$\mathbf{E}(\xi|B) = \frac{\mathbf{E}(\xi \mathbf{1}_B)}{\mathbf{P}(B)},$$

où  $\mathbf{1}_B$  est l'indicatrice de  $B$ , c'est-à-dire,

$$\mathbf{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in B; \\ 0, & \text{si } \omega \in B^c. \end{cases}$$

Soit maintenant  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$  une partition. La probabilité conditionnelle de  $A$  sachant la partition  $\mathcal{B}$  est une variable aléatoire qui est :

$$\mathbf{P}(A|\mathcal{B}) = \mathbf{P}(A|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{j=1}^m \mathbf{P}(A|B_j) \mathbf{1}_{B_j}(\omega).$$

L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire  $\xi$  sachant la partition  $\mathcal{B}$  est

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{j=1}^m \mathbf{E}(\xi|B_j) \mathbf{1}_{B_j}(\omega).$$

Notons que, par définition on a  $\mathbf{P}(A|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{B})$ . Ensuite, soit  $\eta$  une variable aléatoire avec ses valeurs dans l'ensemble  $\{b_1, \dots, b_m\}$  et  $\mathcal{B}_\eta$  sa partition, c'est-à-dire, que  $\mathcal{B}_\eta = \{B_1, \dots, B_m\}$  et  $B_j = \{\omega \in \Omega : \eta(\omega) = b_j\}$ . Alors, par définition la probabilité conditionnelle d'un événement  $A$  sachant  $\eta$  est  $\mathbf{P}(A|\eta) = \mathbf{P}(A|\mathcal{B}_\eta)$ . L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire  $\xi$  sachant  $\eta$  est :

$$\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}(\xi|\mathcal{B}_\eta).$$

Les propriétés suivantes sont les propriétés de base de l'espérance conditionnelle.

1. Si  $\eta$  est une constante, alors  $\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}\xi$ .
2. Si  $\xi$  et  $\eta$  sont indépendantes, alors  $\mathbf{E}(\xi|\eta) = \mathbf{E}\xi$ .
3. Si la tribu engendré par une variable aléatoire  $\xi$  est plus petite que la tribu engendré par une variable aléatoire  $\eta$ , c'est-à-dire que  $\sigma\{\xi\} \subseteq \sigma\{\eta\}$ , alors  $\mathbf{E}(\xi|\eta) = \xi$ .
4. Soient  $\xi$ ,  $\eta$  et  $\gamma$  trois variables aléatoires telles que  $\sigma\{\xi\} \subseteq \sigma\{\eta\}$ . Alors on a

$$\mathbf{E}(\gamma\xi|\eta) = \xi \mathbf{E}(\gamma|\eta)$$

5. Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux partitions telles que  $\sigma\{\mathcal{A}\} \subseteq \sigma\{\mathcal{B}\}$ . Alors on a

$$\mathbf{E}(\xi|\mathcal{A}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{B})|\mathcal{A}).$$

6. Soient  $\xi$  et  $\eta$  deux variables aléatoires. Alors on a  $\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\eta)) = \mathbf{E}\xi$ .

## 2 Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers

Dans cette section nous décrivons le modèle statique d'un marché financier qui s'appelle *Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers (MEDAF)* (*Capital Asset Pricing Model (CAPM)*) présenté par Sharpe (1964), Linther (1965) et Kreps (1982). Dans les modèles statiques on ne considère que deux moments  $n = 0$  (aujourd'hui) et  $n = 1$  (demain). On suppose qu'il y a sur le marché  $d + 1$  actifs financiers, dont le premier est sans risque  $B = (B_n, 0 \leq n \leq 1)$  et  $d$  actifs avec un risque  $S = (S_n^1, \dots, S_n^d, 0 \leq n \leq 1)$ . Ici comme d'habitude  $B_n$  est le prix d'actif  $B$  au moment  $n$  et  $S_n^j$  est le prix de  $j$ -ième actif risqué au moment  $n$ . On va désigner par  $r > -1$  le taux d'intérêt de l'actif sans risque et par  $\rho_j$  le taux d'intérêt de  $j$ -ième actif risqué. On suppose que  $\rho_j$  est une variable aléatoire telle que  $\rho_j > -1$  presque sur, c'est-à-dire,

$$B_n = (1 + r) B_{n-1}, \quad S_n^j = (1 + \rho_j) S_{n-1}^j \quad (2.1)$$

pour  $1 \leq j \leq d$ . Si un investisseur a distribué son capital d'après la stratégie  $(\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_d)$  alors on calcule son capital au moment  $n$  comme

$$X_n = \beta B_n + \sum_{j=1}^d \gamma_j S_n^j. \quad (2.2)$$

On désigne par

$$\pi_j = \frac{\gamma_j S_0^j}{\beta B_0 + \sum_{i=1}^d \gamma_i S_0^i}. \quad (2.3)$$

Cela veut dire que  $\pi_j$  est la proportion du capital initial  $X_0$  qui est investi en actif  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ . Donc  $\pi_0 = 1 - \sum_{j=1}^d \pi_j$  est la proportion qui est investie en actif non risqué. On appelle portefeuille pour ce modèle le vecteur  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)' \in \mathbf{R}^d$ . Nous rappelons que  $(x_1, \dots, x_d)'$  désigne la ligne  $(x_1, \dots, x_d)$  transposée, c'est-à-dire, la colonne dans  $\mathbf{R}^d$ .

Donc d'après (??) la richesse qui correspond à la stratégie  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$  au moment  $n$  égale à

$$X_1 = (1 + \tau(\pi)) X_0,$$

où le taux d'intérêt du portefeuille  $\tau(\pi)$  est défini comme

$$\tau(\pi) = r\pi_0 + \sum_{j=1}^d \pi_j \rho_j = r + \sum_{j=1}^d \pi_j (\rho_j - r). \quad (2.4)$$

De plus, l'espérance de  $\tau(\pi)$  est dite *la rentabilité*, c'est-à-dire,

$$M(\pi) = \mathbf{E}\tau(\pi) = r + \sum_{j=1}^d \pi_j \mu_j = r + (\pi, \mu), \quad (2.5)$$

où  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)'$ ,  $\mu_j = \mathbf{E}(\rho_j - r)$ , et la variance de  $\tau(\pi)$  est dite *le risque du portefeuille*, c'est-à-dire,

$$\mathbf{V}(\pi) = \mathbf{E}(\tau(\pi) - M(\pi))^2 = {}^t\pi\Gamma\pi, \quad (2.6)$$

où  $\Gamma$  est  $(d \times d)$  matrice de covariance du vecteur  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)'$ , c'est-à-dire,

$$\Gamma = \mathbf{E}(\rho - \mathbf{E}\rho)({}^t(\rho - \mathbf{E}\rho)). \quad (2.7)$$

À l'aide de cette matrice nous définissons le produit scalaire dans  $\mathbf{R}^d$  pour les vecteurs  $x, y \in \mathbf{R}^d$  comme la forme quadratique  $(x, y)_\Gamma = {}^tx\Gamma y$  et par rapport à ce produit le risque d'un portefeuille est égal à la norme, c'est-à-dire,  $\mathbf{V}(\pi) = \|\pi\|_\Gamma^2$ , où  $\|x\|_\Gamma^2 = (x, x)_\Gamma$ .

**Définition 2.1.** *Un portefeuille est efficace au sens du critère moyenne-variance - on dit MV - efficace - s'il n'existe pas de portefeuille de même rentabilité et de risque strictement inférieur. On va désigner par  $\Theta_{mv}$  l'ensemble toutes les stratégies MV - efficaces.*

Posons  $e = \Gamma^{-1}\mu$  et  $\text{Vect}(e)$  le sous-espace vectoriel dans  $\mathbf{R}^d$  engendré par  $e$ .

**Theorem 2.2.** *Si la matrice  $\Gamma$  est inversible alors  $\Theta_{mv} = \text{Vect}(e)$ .*

**Démonstration.** D'abord, notons que par (??) si  $\mu = 0$  alors  $M(\pi) = r$  pour toute stratégie  $\pi$ . Car  $V(\pi) \geq 0$  et par la condition du théorème la matrice  $\Gamma$  est inversible donc d'après (??)  $V(\pi)$  prend sa valeur minimal, c'est-à-dire  $V(\pi) = 0$ , si et seulement si  $\pi = 0$ . Cela implique que dans ce cas il existe une seule stratégie MV efficace, c'est  $\pi = 0$ . Donc  $\Theta_{mv} = \{0\}$ . Mais  $e = 0$  pour  $\mu = 0$ , par conséquent  $\text{Vect}(e) = \{0\} = \Theta_{mv}$ .

Soient maintenant  $\mu \neq 0$  et  $\pi^* \in \Theta_{mv}$ . Donc pour toute stratégie  $\pi$  telle que  $M(\pi) = M(\pi^*)$  on a  $\mathbf{V}(\pi^*) \leq \mathbf{V}(\pi)$ . Désignons par  $\alpha = (\pi^*, \mu)$ . Si  $\alpha = 0$  le vecteur  $\pi^* = 0$ . Sinon pour toute stratégie  $\tilde{\pi} = \delta\pi$  avec  $0 < \delta < 1$  on a  $V(\tilde{\pi}) < V(\pi^*)$ . Donc  $\pi^* = 0$ , c'est-à-dire,  $\pi^* \in \text{Vect}(e)$ . Soit  $\alpha \neq 0$ . Ensuite, par (??) l'égalité  $M(\pi) = M(\pi^*)$  implique que

$$(\pi, \mu) = \alpha$$

et, par conséquent, en tenant compte que pour tout  $y \in \mathbf{R}^d$

$$(y, \mu) = (y, \Gamma e) = (y, e)_\Gamma$$

on obtient que

$$\mathbf{V}(\pi^*) = \min_{\{y \in \mathbf{R}^d : (y, e)_\Gamma = \alpha\}} \mathbf{V}(y).$$

Cela veut dire que  $\pi^* \in A(\alpha, V)$ , où

$$\begin{aligned} A(\alpha, \mathbf{V}) &= \operatorname{argmin}_{\{z \in \mathbf{R}^d : (z, e)_\Gamma = \alpha\}} \mathbf{V}(z) \\ &= \{z \in \mathbf{R}^d : (z, e)_\Gamma = \alpha, \mathbf{V}(z) = \min_{\{y \in \mathbf{R}^d : (y, e)_\Gamma = \alpha\}} \mathbf{V}(y)\}. \end{aligned}$$

C'est facile à voir que  $A(\alpha, \mathbf{V}) = A(\alpha, L)$ , où

$$L(y) = \|e\|_\Gamma \|y\|_\Gamma - |(y, e)_\Gamma|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tout  $y \in \mathbf{R}^d$  on a  $L(y) \geq 0$ . De plus,  $L(y) = 0$  si et seulement s'il existe une constante  $\lambda \in \mathbf{R}$  telle que  $y = \lambda e$ . Il s'en suit que

$$A(\alpha, L) = \left\{ \frac{\alpha}{\|e\|_\Gamma^2} e \right\},$$

donc on obtient que  $\pi^* = \frac{\alpha}{\|e\|_\Gamma^2} e$ , c'est-à-dire,  $\pi^* \in \operatorname{Vect}(e)$  et  $\Theta_{mv} \subseteq \operatorname{Vect}(e)$ . Soit maintenant  $\pi \in \operatorname{Vect}(e)$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\pi = \lambda e$ . Si  $\lambda = 0$  alors  $\pi \in \Theta_{mv}$ . Si  $\lambda \neq 0$  et  $\pi \notin \Theta_{mv}$  alors il existe  $\tilde{\pi}$  avec  $M(\pi) = M(\tilde{\pi})$ , c'est-à-dire  $(\pi, e)_\Gamma = (\tilde{\pi}, e)_\Gamma$ , telle que  $\mathbf{V}(\tilde{\pi}) < \mathbf{V}(\pi)$ . D'autre coté on a

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\tilde{\pi}) &= \frac{|\tilde{\pi}|_\Gamma^2 \|e\|_\Gamma^2}{\|e\|_\Gamma^2} \geq \frac{(\tilde{\pi}, e)_\Gamma^2}{\|e\|_\Gamma^2} \\ &= \frac{(\pi, e)_\Gamma^2}{\|e\|_\Gamma^2} = \frac{(\pi, \lambda e)_\Gamma^2}{\|\lambda e\|_\Gamma^2} = \mathbf{V}(\pi). \end{aligned}$$

Cette contradiction entraîne que  $\pi \in \Theta_{mv}$  donc  $\operatorname{Vect}(e) \subseteq \Theta_{mv}$  ce qui démontre ce théorème.  $\square$

On suppose maintenant qu'il y a  $m$  investisseurs sur ce marché financier. Soit  $\pi^i$  est un portefeuille de  $i$ -ème investisseur. Appelons *portefeuille agrégé* le portefeuille  $\bar{\pi}^\nu$  qui est défini comme l'espérance par rapport une distribution de probabilité  $\nu$  sur les portefeuilles  $(\pi^i, 1 \leq i \leq m)$ , c'est-à-dire,

$$\bar{\pi}^\nu = \sum_{i=1}^m \pi^i \nu_i, \quad (2.8)$$

où  $\sum_{i=1}^m \nu_i = 1$ . Un portefeuille agrégé  $\bar{\pi}^\nu$  s'appelle le *portefeuille du marché* si pour tout  $1 \leq l \leq m$

$$\nu_i = \frac{\sum_{j=1}^d v_{ji}}{\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^d v_{jl}},$$

où  $v_{il}$  est le capital de l'investisseur  $l$  qui est placé dans l'actif  $i$ .



**Theorem 2.3. (Relation d'équilibre.)**

Soit  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$  une distribution de probabilité telle que  $\bar{\pi}^\nu \neq 0$ . Si la matrice  $\Gamma$  est inversible et si tous les investisseurs choisissent un portefeuille MV-efficace, tous les taux d'intérêt vérifient les égalités suivantes :

$$\tau(\pi^i) - r = \kappa_i (\tau(\bar{\pi}^\nu) - r), \quad 1 \leq i \leq m, \quad (2.9)$$

où

$$\kappa_i = \frac{\mathbf{E}(\tau(\pi^i) - M(\pi^i))(\tau(\bar{\pi}^\nu) - M(\bar{\pi}^\nu))}{\mathbf{V}(\bar{\pi}^\nu)}. \quad (2.10)$$

**Démonstration.** Par Théorème ?? les vecteurs  $(\pi^i, 1 \leq i \leq m)$  appartiennent à  $\text{Vect}(e)$  donc il existe des scalaires  $\lambda_i \in \mathbf{R}^d$  tels que  $\pi^i = \lambda_i e$ . Cela veut dire que  $\bar{\pi}^\nu = \bar{\lambda} e$  avec  $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nu_i$ . Notons que  $\bar{\lambda} \neq 0$  et  $e \neq 0$  car par les conditions de ce théorème le vecteur  $\bar{\pi}^\nu \neq 0$ . Cela implique que

$$\begin{aligned} \tau(\pi^i) - r &= \sum_{j=1}^d \langle \pi^i \rangle_j (\rho_j - r) \\ &= \lambda_i \sum_{j=1}^d \langle e \rangle_j (\rho_j - r) \\ &= \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}} \sum_{j=1}^d \langle \bar{\pi}^\nu \rangle_j (\rho_j - r) \\ &= \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}} (\tau(\bar{\pi}^\nu) - r). \end{aligned}$$

Cette égalité entraîne (??) avec les coefficients (??).  $\square$

### 3 Efficience des marchés financiers

On considère un marché financier sur l'intervalle  $0 \leq n \leq N$  avec un actif sans risque  $B = (B_j)_{0 \leq j \leq N}$  et  $d$  actifs risqués  $S^1 = (S_j^1)_{0 \leq j \leq N}, \dots, S^d = (S_j^d)_{0 \leq j \leq N}$ . Désignons par  $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d)$  le vecteur aléatoire du prix. Soit  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  une suite des tribus croissantes (filtration), c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N.$$

D'après l'approche du calcul stochastique la tribu  $\mathcal{F}_n$  décrit tout l'information possible qui est accessible à la date  $n$ . Donc les vecteurs aléatoires  $S_1, \dots, S_n$  sont supposés mesurables par rapport à  $\mathcal{F}_n$  pour tout  $0 \leq n \leq N$ .

**Définition 3.1.** *Un marché financier est dit efficient si*

$$\mathbf{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(S_{n+1}|S_n) \quad (3.1)$$

pour tout  $0 \leq n \leq N - 1$ .

Le concept d'efficience des marchés financiers veut dire que l'information "efficiente" dans ce marché à la date  $n$  est décrite par le vecteur  $S_n$ . Notons que le marché de Cox-Ross-Rubenstein est efficient. En effet, dans ce modèle  $B_n = (1 + r)B_{n-1}$ ,  $d = 1$ ,  $S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}$ . Dans ce cas la filtration est définie comme

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \mathcal{F}_1 = \sigma\{S_1\}, \dots, \mathcal{F}_N = \sigma\{S_1, \dots, S_N\}.$$

De plus,  $(\rho_j)_{1 \leq j \leq N}$  est une suite des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid). Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}(S_{n+1}|S_1, \dots, S_n) = \mathbf{E}((1 + \rho_{n+1})S_n|S_1, \dots, S_n) \\ &= S_n \mathbf{E}((1 + \rho_{n+1})|S_1, \dots, S_n) = S_n \mathbf{E}((1 + \rho_{n+1})) \\ &= \mathbf{E}(S_{n+1}|S_n). \end{aligned}$$

On obtient la condition (??).

## 4 Modèle de Grossman - Stiglitz

Dans ce modèle on considère deux dates et deux actifs :  $B = (B_0, B_1)$  et  $S = (S_0, S_1)$ , où  $B_1 = (1 + r)B_0$  et

$$S_1 = \theta + \varepsilon.$$

Ici  $\theta$  est une variable aléatoire observable à la date  $n = 0$  au coût  $c \geq 0$  et  $\varepsilon$  est une variable aléatoire indépendante de  $\theta$  et  $S_0$  telle que

$$\mathbf{E}\varepsilon = 0, \quad \mathbf{E}\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2.$$

Soit maintenant  $\beta$  le nombre des actifs ( $B$ ) et  $\gamma$  le nombre des actifs ( $S$ ). Cela veut dire que le capital à la date  $n = 0$  est égal à

$$X_0 = \beta B_0 + \gamma S_0 \quad (4.1)$$

et à la date  $n = 1$  est égal à

$$X_1 = \beta B_1 + \gamma S_1. \quad (4.2)$$

Chaque investisseur est supposé choisir un portefeuille qui maximise la fonction d'utilité :

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}, \gamma) = \mathbf{E}(X_1|\mathcal{F}) - \frac{a}{2} \text{Var}(X_1|\mathcal{F}),$$

où  $a \geq 0$  est un paramètre,  $\mathcal{F}$  est une tribu qui représente l'information d'un investisseur.

**Proposition 4.1.** *Le nombre de titres ( $S$ ) acheté par chaque investisseur est donné par*

$$\gamma(\mathcal{F}) = \frac{\mathbf{E}(S_1|\mathcal{F}) - (1+r)S_0}{a \text{Var}(S_1|\mathcal{F})}. \quad (4.3)$$

**Démonstration.** Notons que (??) et (??) implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{F}, \gamma) &= (1+r)X_0 + \gamma (\mathbf{E}(S_1|\mathcal{F}) - (1+r)S_0) \\ &\quad - \frac{a}{2} \gamma^2 \text{Var}(S_1|\mathcal{F}). \end{aligned}$$

En minimisant cette expression par rapport à  $\gamma$  on obtient (??).  $\square$

En fait deux comportements sont possibles vis-à-vis de l'acquisition d'information. Une première catégorie d'investisseurs, que nous appelons *informés*, décide de payer un coût  $c \geq 0$  et observe la réalisation  $\theta$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \sigma\{S_0, \theta\}$ . La deuxième catégorie d'investisseurs que nous appelons *non informés* n'observe pas  $\theta$ , on observe  $S_0$  et pour eux  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 = \sigma\{S_0\}$ . Donc pour la première catégorie d'investisseurs le nombre des titres ( $S$ ) est égal à

$$\gamma_1 = \gamma(\mathcal{F}_1) = \frac{\mathbf{E}(S_1|\mathcal{F}_1) - (1+r)S_0}{a \text{Var}(S_1|\mathcal{F}_1)},$$

et pour la deuxième

$$\gamma_2 = \gamma(\mathcal{F}_2) = \frac{\mathbf{E}(S_1|\mathcal{F}_2) - (1+r)S_0}{a \text{Var}(S_1|\mathcal{F}_2)}.$$

En tenant compte que

$$\mathbf{E}(S_1|\mathcal{F}_1) = \theta, \quad \text{Var}(S_1|\mathcal{F}_1) = \sigma_\varepsilon^2$$

et

$$\mathbf{E}(S_1|\mathcal{F}_2) = \mathbf{E}(\theta|S_0), \quad \text{Var}(S_1|\mathcal{F}_2) = \text{Var}(\theta|S_0) + \sigma_\varepsilon^2$$

on obtient que

$$\gamma_1 = \frac{\theta - (1+r)S_0}{a\sigma_\varepsilon^2}, \quad (4.4)$$

$$\gamma_2 = \frac{\mathbf{E}(\theta|S_0) - (1+r)S_0}{a(\text{Var}(\theta|S_0) + \sigma_\varepsilon^2)}. \quad (4.5)$$

On désigne par  $\lambda$  la proportion de la population totale  $m$  qui est informée. Donc la demande des titres risqués ( $S$ ) égale à

$$\lambda\gamma_1 m + (1 - \lambda)\gamma_2 m.$$

Ensuite, soit  $N$  l'offre des actifs ( $S$ ) que nous supposons aléatoire. Donc l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 = \nu, \quad (4.6)$$

où  $\nu = N/m$ . Cet équilibre s'appelle *l'équilibre du marché boursier*.

Une fonction de prix d'équilibre s'appelle une variable aléatoire qui réalise presque sûrement l'égalité (??).

Pour calculer ce prix d'équilibre nous avons besoin de l'hypothèse suivante.

**H)** Il existe des constantes  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  et  $\sigma_1^2$  telles que

$$\mathbf{E}(\theta | S_0) = \beta_0 + \beta_1 S_0, \quad \text{Var}(\theta | S_0) = \sigma_1^2. \quad (4.7)$$

**Proposition 4.2.** Sous l'hypothèse **H)** il existe un prix d'équilibre  $S_0^*$  qui est défini

$$S_0^* = \alpha_0 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \nu, \quad (4.8)$$

où

$$\alpha_0 = \frac{(1 - \lambda)\beta_0}{(\sigma_1^2 + \sigma_\varepsilon^2)D}, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda}{\sigma_\varepsilon^2 D}, \quad \alpha_2 = -\frac{a}{D},$$

$$D = \lambda \frac{1 + r}{\sigma_\varepsilon^2} + (1 - \lambda) \frac{1 + r - \beta_1}{\sigma_1^2 + \sigma_\varepsilon^2}.$$

**Démonstration.** L'équation d'équilibre (??) et les expressions pour  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (??) et (??) impliquent l'égalité suivante

$$\lambda \frac{\theta - (1 + r)S_0}{a\sigma_\varepsilon^2} + (1 - \lambda) \frac{\mathbf{E}(\theta | S_0) - (1 + r)S_0}{a(\text{Var}(\theta | S_0) + \sigma_\varepsilon^2)} = \nu.$$

Pour obtenir (??) il suffit d'après l'hypothèse **H)** remplacer dans cette égalité  $\mathbf{E}(\theta | S_0)$  et  $\text{Var}(\theta | S_0)$  par les fonctions correspondantes de  $S_0$ .  $\square$

Maintenant nous étudions *l'équilibre informationnel*. L'équilibre informationnel correspond à une situation où la proportion  $\lambda$  d'investisseurs informés est telle que le gain moyen à s'informer est juste égal à  $c$ . Pour étudier cet

équilibre il faut comparer la richesse moyenne obtenue par un investisseur qui s'informe au coût  $c$  avec la richesse moyenne obtenue par un investisseur non informé. On suppose que l'offre  $N$  est non aléatoire, c'est-à-dire  $\mathbf{E} \nu = \nu$ . Dans ce cas on a

$$S_0^* = \tilde{\alpha}_0 + \alpha_1 \theta,$$

où  $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 + \alpha_2 \mathbf{E} \nu$ . Si  $\lambda = 0$  alors  $\alpha_1 = 0$  et  $S_0^* = \tilde{\alpha}_0$ . Si  $\lambda > 0$  alors

$$\mathbf{E}(S_1|S_0^*, \theta) = \mathbf{E}(S_1|\theta) = \theta, \quad \text{Var}(S_1|S_0^*, \theta) = \text{Var}(S_1|\theta) = \sigma_\varepsilon^2.$$

Cela veut dire que

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Donc si  $\lambda > 0$  alors il n'y a aucun gain à s'informer. Dès que  $c > 0$ , le seul équilibre informationnel possible, c'est  $\lambda = 0$ . Pour trouver le prix d'information  $c$  qui réalise l'équilibre il nous faut calculer le gain à s'informer quand  $\lambda = 0$ . Pour cela calculons tout d'abord les richesses terminales d'un investisseur informé ( $X_{1,1}$ ) et celle d'un investisseur non informé ( $X_{1,2}$ ). On a

$$\begin{aligned} X_{1,1} &= (1+r)X_0 + \gamma_1(S_1 - (1+r)S_0^*) \\ &= (1+r)X_0 + \frac{(\theta - (1+r)S_0^*)^2}{a\sigma_\varepsilon^2} + \frac{\theta - (1+r)S_0^*}{a\sigma_\varepsilon^2} \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X_{1,2} &= (1+r)X_0 + \gamma_2(S_1 - (1+r)S_0^*) \\ &= (1+r)X_0 + \frac{(m - (1+r)S_0^*)^2}{a(\sigma_\theta^2 + \sigma_\varepsilon^2)} + \frac{\theta - (1+r)S_0^*}{a(\sigma_\theta^2 + \sigma_\varepsilon^2)} (\theta - m + \varepsilon), \end{aligned}$$

où  $m = \mathbf{E} \theta$  et  $\sigma_\theta^2 = \text{Var}(\theta)$ .

Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{1,1}|\mathcal{F}_1) &= (1+r)X_0 + \frac{(\theta - (1+r)S_0^*)^2}{a\sigma_\varepsilon^2}, \\ \text{Var}(X_{1,1}|\mathcal{F}_1) &= \frac{(\theta - (1+r)S_0^*)^2}{a^2\sigma_\varepsilon^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{1,2}|\mathcal{F}_2) &= (1+r)X_0 + \frac{(m - (1+r)S_0^*)^2}{a(\sigma_\theta^2 + \sigma_\varepsilon^2)}, \\ \text{Var}(X_{1,2}|\mathcal{F}_2) &= \frac{(m - (1+r)S_0^*)^2}{a^2(\sigma_\theta^2 + \sigma_\varepsilon^2)}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma_1, \mathcal{F}_1) &= \mathbf{E}(X_{1,1}|\mathcal{F}_1) - \frac{a}{2}\text{Var}(X_{1,1}|\mathcal{F}_1), \\ &= (1+r)X_0 + \frac{(\theta - (1+r)S_0^*)^2}{2a\sigma_\varepsilon^2}, \\ \mathcal{L}(\gamma_2, \mathcal{F}_2) &= \mathbf{E}(X_{1,2}|\mathcal{F}_2) - \frac{a}{2}\text{Var}(X_{1,2}|\mathcal{F}_2), \\ &= (1+r)X_0 + \frac{(m - (1+r)S_0^*)^2}{2a(\sigma_\theta^2 + \sigma_\varepsilon^2)}.\end{aligned}$$

Dans ce cas le gain à s'informer  $\Delta$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathbf{E}(\mathcal{L}(\gamma_1, \mathcal{F}_1) - \mathcal{L}(\gamma_2, \mathcal{F}_2)) \\ &= \frac{\sigma_\theta^2}{2a\sigma_\varepsilon^2} \left( 1 + \frac{(m - (1+r)S_0^*)^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_\varepsilon^2} \right).\end{aligned}$$

Donc pour que  $\lambda = 0$  soit bien un équilibre il faut et il suffit que

$$c = \frac{\Delta}{1+r}.$$

## Références

- [1] Demange G. et Rochet J-C. *Méthodes Mathématiques de la finance*, Economica, 2005
- [2] Grossman S.J. et Stiglitz J. (1980) On the Impossibility of Informationally Efficient Markets. *American Economic Review*, 393–417
- [3] Kreps D. (1982) Asset Pricing Models. *IMSSS Workshop*, Stanford University.
- [4] Lintner J. (1965) Security Prices and Maximal Gains from Diversification. *Journal of Finance*, 586–616
- [5] Sharpe N.F. (1964) Capital Asset Prices : Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk. *Journal of Finance*, 425–442
- [6] Vigneron, Ch., Logak, E. (1997) 30 thèmes de probabilités. Diderot Multimedia.