

Rationalité(s) et situations didactiques

Le cas de la définition de la limite

Thomas LECORRE

Journées DEMIPS - 23 mars 2017 -



Plan

- ▶ Problématisation
- ▶ Les éléments fondateurs de la TSD
 - ▶ Deux questions émergent
- ▶ Question 1: revisiter l'adidacticité
 - ▶ Situation fondamentale et métaphore fondamentale
 - ▶ L'actant rationnel et modèle de rationalité
- ▶ Question 2: modéliser les intervention du professeur
- ▶ Conclusion et Perspectives

Problématisation autour de l'émergence du sens et du besoin des objets mathématiques complexes

Les objets mathématiques complexes sont des objets qui intègrent une forte dimension théorique (exemple des FUG).

Comment faire en sorte que l'élève donne sens et saisissent le besoin de tels objets ?

Comment modéliser les interventions du professeur dans cette optique ?

Quelles sont les conditions didactiques qui favorisent le besoin des théories mathématiques et mettent le sens de celles-ci au cœur du questionnement des élèves ?

Nous choisissons la définition de la limite comme paradigmatique de ce questionnement

Un cadre d'étude: la Théorie des situations didactiques

- ▶ Le rôle de l'adidacticité
 - ▶ La transformation des connaissances vers le savoir visé est le résultat de la confrontation autonome de l'élève à un milieu idoine
- ▶ Deux principes fondateurs de l'existence potentielle des situations adidactiques.
 - ▶ Il existe une situation fondamentale pour tout savoir
 - ▶ L'élève est un « actant rationnel » ou « sujet épistémique »

Conception des situations adidactiques selon trois niveaux

- ▶ Niveau Théorique (Niveau du savoir)
 - ▶ Construction de la situation fondamentale et des variables associées
- ▶ Niveau expérimental (Niveau des connaissances)
 - ▶ Essai d'un jeu de valeurs de ces variables pour construire une situation expérimentale
 - ▶ Analyse a priori de cette situation selon les niveaux de milieux (action-formulation, validation, institutionnalisation)
- ▶ Niveau de la contingence
 - ▶ Confrontation de la situation adidactique à la contingence et retour au théorique

Un questionnement de l'adidacticité

- ▶ Des difficultés pour obtenir cette adidacticité conduisent à des adaptations : la notion de « dimension adidactique » donne un rôle accru au professeur
- ▶ Deux questions:
 - Question 1: Comment revisiter les principes fondateurs de l'adidacticité pour en préserver l'essence ?
 - Question 2: Comment modéliser les interventions du professeur de façon qu'elles ne dessaisissent pas les élève de cette essence ?

Question1:
Comment revisiter les principes fondateurs de
l'adidacticité pour en préserver l'essence ?

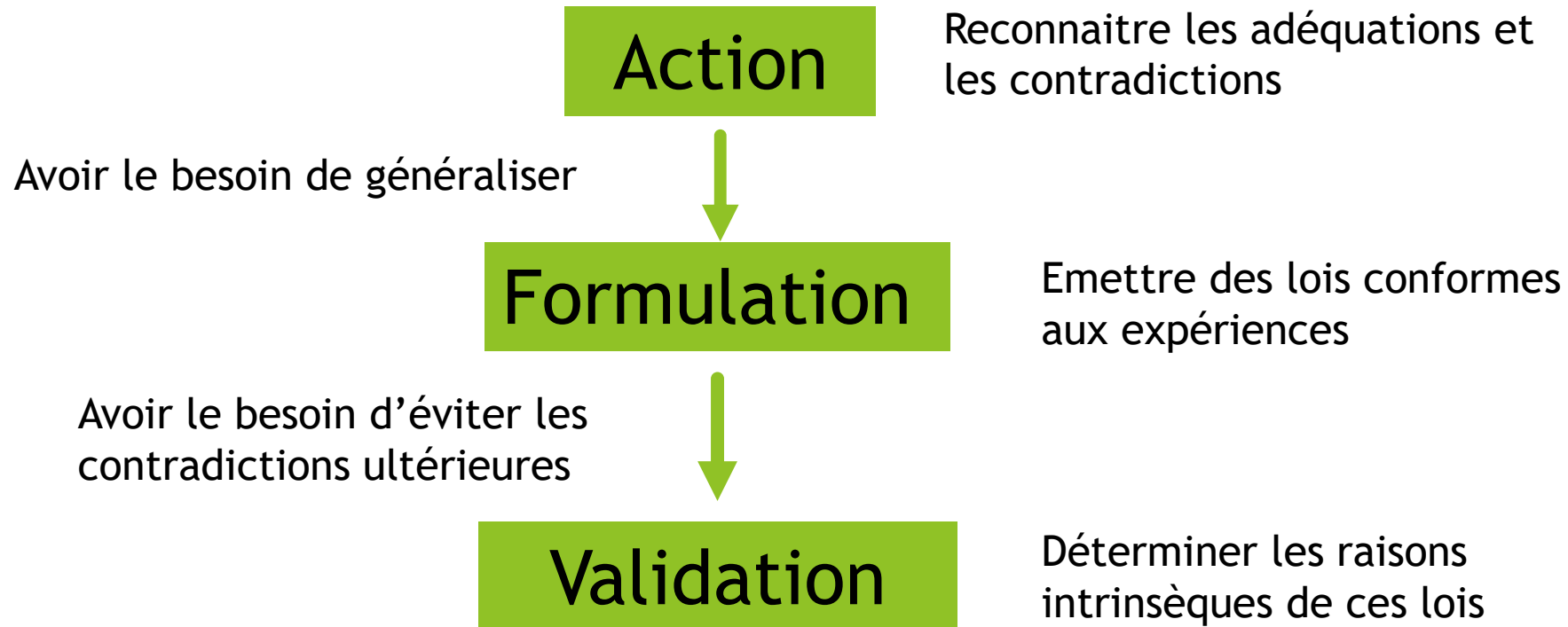
La notion de situation fondamentale

- ▶ Difficultés pour fonder une situation fondamentale
 - ▶ La savoir y intervient comme solution optimale et exclusive d'un pb
 - ▶ Les variables y sont identifiées
 - ▶ Elle doit engendrer toutes les significations de ce savoir
 - ▶ Le U des savoirs FUG
- ▶ La métaphore fondamentale : restrictions aux significations fondamentales

Significations fondamentales retenues pour la définition formelle de la limite

- **Egalité des réels/densité dans \mathbb{R}** (inégalités, distance, raisonnement à ε près, premiers éléments de la logique, travail initial sur la notion de définition)
- **Voisinage de l'infini/Voisinage d'un nombre** (inégalités, distance, formalisme, définition...)
- **Logique et validation** (double quantification, négation/raisonnement par l'absurde, contraposition, contre-exemple, conjectures, induction...)

L'actant rationnel de Brousseau



Principe 1: un « actant rationnel » est un acteur de l'activité mathématique en quête de non-contradiction

Modèles de rationalités dans différentes disciplines

- ▶ Des modèles de rationalités comme fondement explicatif de nombreuses disciplines (sociologie, psychologie, économie...)
- ▶ Postulats de la théorie du choix rationnel (TCR)
 - ▶ P1 : postulat de l'individualisme
 - ▶ P2 : postulat de la compréhension
 - ▶ P3 : postulat de la rationalité
 - ▶ P4 : postulat du conséquentialisme
 - ▶ P5 : postulat de l'égoïsme
 - ▶ P6 : postulat du Calcul Coût-Avantage (CCA)
- ▶ Le comportement modélisé par ces postulats ne concernent pas directement le sujet épistémique et sa recherche de non contradiction

Des modèles de rationalités en didactique des mathématiques

- ▶ **Locaux:** études de certains aspects de la rationalité
 - ▶ Processus de validation, processus de définition, logique.
- ▶ **Globaux:** une cohérence générale s'appliquant à l'ensemble de l'activité mathématique
 - ▶ Rationalités du quotidien/scientifique
 - ▶ Rationalités personnelle /culturelle
 - ▶ Rationalité téléologique/épistémique/communicative.
- ▶ **La rationalité à travers l'idée de raisonnement**
 - ▶ Etude de production de raisonnement à partir de la forme et/ou la fonction du raisonnement.
- ▶ **Principe 2 : Le sens et le besoin d'un concept émergent quand la cohérence globale permet d'articuler les différents aspects mathématiques locaux**

Rationalité et hypothèses de modélisation

Une rationalité est un système de production et de contrôle de connaissances qui a pour vocation d'assurer la non contradiction de ces connaissances entre elles ou avec un domaine de réalité

- ▶ Une rationalité est externe à l'individu
 - ▶ Une rationalité est un paradigme partageable de questionnement de connaissances
- ▶ Une rationalité peut être cohérente avec des modèles épistémologiques classiques de constitution du savoir (inductivisme, facificationisme...)
- ▶ Une rationalité est caractérisée par :
 - ▶ Une caractéristique d'existence des objets
 - ▶ Une caractéristique de validation
 - ▶ Une caractéristique de logique
- ▶ Une rationalité est intrinsèquement stable

Stabilité et instabilité

- ▶ La stabilité d'une rationalité est une condition de la non contradiction des connaissances produites
- ▶ Or l'évaluation de la non contradiction, (A et non A) est faux, dépend de l'évaluation de A et de non A
- ▶ Trois types de d'évaluations: pragmatique/empirique/théorique
- ▶ Conséquence :
 - ▶ Trois rationalités associées à ces types d'évaluation [Lien](#)
- ▶ On appelle conflit de rationalité, le conflit cognitif du point de vue de la rationalité
 - ▶ les conflits de rationalité apparaissent dans le questionnement des connaissances
 - ▶ Instabilité de l'actant rationnel

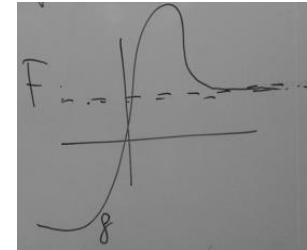
Exemples de conflits de rationalité

► Conflit intra-rationalité

- Caroline : « /.../pour moi on ne peut pas entraver la limite.

On ne peut pas passer dessus, quoi. »

- Louis : « Ben pour moi, si! »



► Conflit inter-rationalité

- Quentin démontre une propriété par contraposée
- [>Elsa] : Quentin, tu es dans Vrai ?!!
- [>Quentin] : Oui je suis dans Vrai.
- [>Elsa] : Il y a un souci là !
- [>Nathan] : Tu dis que c'est faux en fait ? Tu es dans Vrai mais tu dis que c'est faux.
- [>Elsa] : Oui j'ai l'impression que c'est un argument du Faux.
- [>Margot] : **Oui en fait ce qu'il dit c'est que le Faux est faux.**

Conflits et transitions de rationalité

- ▶ Conflit de rationalité -> instabilité -> besoin de restabilisation
- ▶ La transition de rationalité est le fait de passer d'une rationalité à une autre
- ▶ La transition de rationalité manifeste la transformation des connaissances
 - ▶ Passage d'un système de contrôle à un autre
- ▶ **Le conflit de rationalité est le moteur adidactique de la transition de rationalité et donc de la transformation de connaissances**

Deux sources épistémologiques croisées

	Pragmatique	Empirique		Théorique
Principe	Action	Inductivisme Hume	Réfutationisme Popper	Déductivisme Euclide
Définition Existence objets	Matérielle - Préfabriqué- En acte	Intermédiaire	En construction Zéro-définition	Zéro-définition Proof-définition
Validation	Perceptive - Vérification	Induction -Abduction Argumentation	Contre-exemple - Réfutation	Démonstration déductive
Logique	Efficacité dans cas particuliers	Causalité - Naturelle ou classique	Classique	Classique

Quelques exemples issus de l'ingénierie de la limite finie d'une fonction en $+\infty$ en TS

- ▶ Ingénierie composée de trois situations enchaînées :
 - ▶ Une situation sur les nombres
 - ▶ Une situation sur la double quantification Q^2
 - ▶ Une situation sur la limite
 - ▶ Phase I : dessin et conceptions naïves
 - ▶ Phase II : formalisation de la notion de voisinage de l'infini
 - ▶ Phase III : déstabilisation des conceptions naïves
 - ▶ Phase IV : de l'égalité des réels à la formalisation de la limite
 - ▶ Phase V : exploitation du formalisme pour démontrer

La phase II: formalisation du voisinage de l'infini

- ▶ Conjecture : « Si la limite de f en $+\infty$ est inférieure strictement à limite de g en $+\infty$ alors $f(x)$ est inférieure à $g(x)$ pour tout x réel »
- ▶ Cette conjecture est étudiée et facilement déclarée fausse
- ▶ Il est demandé de la « réparer » en modifiant la conclusion
- ▶ Analyse a priori selon les niveaux de rationalité:

	Pragmatique	Empirique		Théorique
Principe	Action	Inductivisme	Réfutationisme	Locale
Définition Existence objets	Sur \mathbb{R} En l'infini A partir de 100			Il existe A à partir duquel...
Validation	Cas particuliers	Plusieurs cas	Contre-exemple	Non démontrable sans définition de la limite
Logique	Evidence			Classique

Conflit prévu: validation pragmatique/réfutationiste pour le voisinage de l'infini

La phase IV : un nouveau formalisme

Etape 1 : Egalité des réels transférée aux fonctions

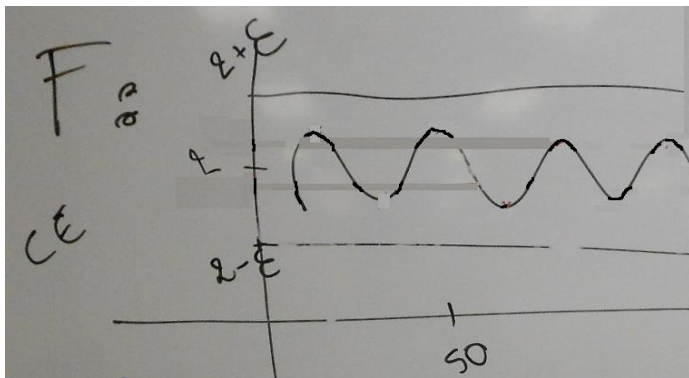
- ▶ Egalité des réels
- ▶ P1: « *Pour tout $x > 50$, pour tout $\varepsilon > 0$, la distance entre 2 et $f(x)$ est inférieure à ε* »
soit : « *Pour tout $x > 50$, pour tout $\varepsilon > 0$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$* »

Question : que peut-on conclure de f qui vérifie P1 ?

P1: Pour tout $x > 50$, pour tout $\varepsilon > 0$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$

Conjecture : « si f vérifie P1, alors pour tout $x > 50$ on a $f(x) = 2$ »

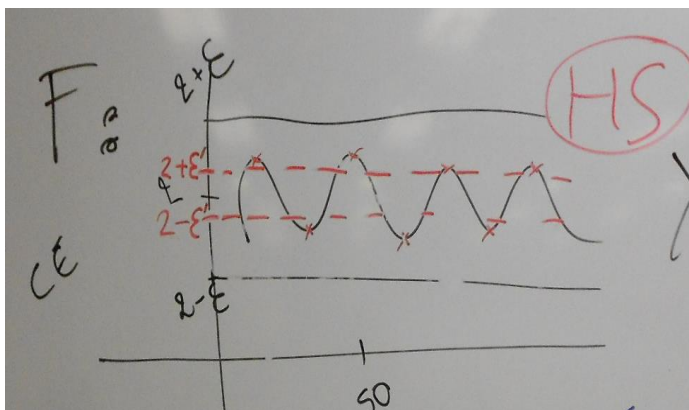
Exemple 2



Erika propose un contre-exemple où f dépend de epsilon, c'est-à-dire inverse la quantification EA en AE

Rationalité pragmatique pour la logique sur l'objet double quantification

Rationalité réfutationniste pour la validation sur l'égalité des réels



Mathieu lui répond que sa fonction ne vérifie pas P1

Rationalité théorique pour la logique sur l'objet double quantification

Ce conflit de rationalité pour la logique sur la double quantification produit une transition de rationalité quand Louis, qui défend le contre-exemple de Erika, réalise que sa fonction dépend de epsilon.

P1: Pour tout $x > 50$, pour tout $\varepsilon > 0$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$

Conjecture : « si f vérifie P1, alors pour tout $x > 50$ on a $f(x) = 2$ »

Exemple 3

Quentin démontre par contraposition

Rationalité théorique pour la validation sur
l'objet égalité des réels

[>Elsa] : Quentin, tu es dans Vrai ?!!

[>Quentin] : Oui je suis dans Vrai.

[>Elsa] : Il y a un souci là !

Rationalité pragmatique (idem)

[>Nathan] : Tu dis que c'est faux en fait ? Tu es dans Vrai mais tu dis que c'est faux.

Rationalité pragmatique (idem)

[>Elsa] : Oui j'ai l'impression que c'est un argument du Faux.

[>Margot] : **Oui en fait ce qu'il dit c'est que le Faux est faux.**

Rationalité théorique (idem)

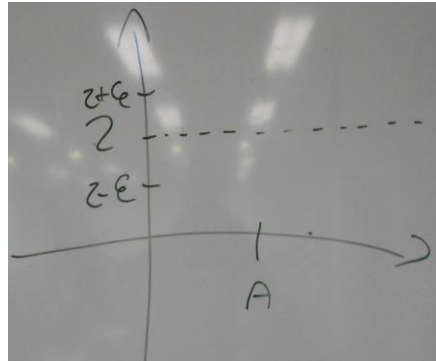
La phase IV : un nouveau formalisme

Etape 2 : Vers la définition de la limite

- ▶ Renversement de l'égalité des réels
- ▶ P3 : « *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A réel, pour tout $x > A$,
 $2^- \varepsilon < f(x) < 2^+ \varepsilon$ »*

Question : que peut-on conclure de f qui vérifie P3 ?

P3 : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A réel, pour tout $x > A$, $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$
 Conjecture : « Si f vérifie P3, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ »



[>Maxime] : Si tu as une fonction... en fait chaque fois qu'on va choisir un A l'épsilon il va... enfin tout ce qui sera au-dessus de A en fait, ce sera entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. En fait ta fonction elle sera toujours entre deux moins epsilon et deux plus epsilon. Et on aura beau raccourcir l'épsilon, la fonction elle se rapprochera toujours de deux en fait. Du coup ça fera que la limite ça sera deux.

Rationalité théorique pour la logique sur P3

Rationalité pragmatique pour la définition sur la limite

[>Aya] : Oui mais si la fonction se rapproche de deux, est-ce que la limite est forcément deux ou pas ?

Rationalité théorique pour la logique sur P3

Rationalité théorique pour la définition sur la limite

Question 2:

Comment modéliser les interventions du professeur de façon à ce qu'elles ne dessaisissent pas les élèves de l'essence de l'adidacticité ?

Effets de contrat de rationalités

- ▶ Nous appelons effet de contrat de rationalité une intervention du professeur qui vise à faire réaliser à l'élève une transition de rationalité
- ▶ *le forçage théorique (ou réfutationniste)*
 - ▶ Exemple : « il faut maintenant le démontrer » ou bien « n'y a-t-il pas de contre-exemple ? », « vous utilisez quelle définition ? »
- ▶ *la déflation pragmatique (ou empirique)*
 - ▶ Exemples : « regardez sur des cas particuliers si votre proposition est correcte » ou « Y-a-t-il des contre-exemples ? »
- ▶ Dans quelle mesure y a-t-il un effet de contrat de rationalité lors de l'introduction du savoir ?

Ré-interpréter l'addidacticité à l'aune des effets de contrats de rationalité

- ▶ Pour les savoir complexes, les situations nécessitent des interventions du professeur
- ▶ La transformation des connaissances est conjointe à la transition adidactique de rationalité, l'effet de contrat de rationalité interfère dans cette transformation
- ▶ Trois niveaux d'intervention du professeur en termes d'effet de contrat de rationalité :
 - ▶ Absence d'effet de contrat de rationalité
 - ▶ Présence d'effets de contrat de rationalité seulement sur les objets annexes
 - ▶ Présence d'effets de contrat de rationalité sur l'objets visé
- ▶ Trois niveaux d'adidacticité ?

Conclusion

- ▶ Consistance du modèle pour prévoir les transitions
- ▶ Le travail explicite sur l'activité mathématique
 - ▶ Caractéristiques
 - ▶ Evitement du glissement méta-didactique
- ▶ Nécessité de connaissances liées aux différentes caractéristiques de la rationalité théorique
- ▶ Sens et du besoin des savoir complexes

Perspectives

- ▶ Les interventions du professeur et leur impact sur l'adidacticité en terme de rationalité
- ▶ Rationalité collective-individuelle
- ▶ Registres sémiotiques
- ▶ Un poste de MCF pour la rentrée 2017 !

Merci !

Action

Reconnaitre les adéquations et les contradictions

Avoir le besoin de généraliser

Formulation

Emettre des lois conformes aux expériences

Avoir le besoin d'éviter les contradictions ultérieures

Validation

Déterminer les raisons intrinsèques de ces lois

Retour

Ancrage épistémologique

- ▶ Celles qui conduisent, grâce à la scénarisation de la rencontre avec une contradiction, à concevoir que les anciennes connaissances sont insuffisantes et qu'un autre savoir est nécessaire. Dans ce type de situation, le savoir visé commence à émerger des tentatives infructueuses mais porteuses de sens sur ce nouveau savoir.
- ▶ Celles qui conduisent seulement à prendre conscience des limites des anciennes connaissances sans que la situation ne désigne vraiment ne serait-ce que les contours d'un nouveau savoir, à part dans la perception de l'inadéquation des anciennes connaissances pour le nouveau type de problème rencontré.