



**HAL**  
open science

## Estimation de la période de la représentation autorégressive d'un processus à temps continu.

Tahar Mourid, Wafaa Benyelles

### ► To cite this version:

Tahar Mourid, Wafaa Benyelles. Estimation de la période de la représentation autorégressive d'un processus à temps continu.. Annales de l'ISUP, 2002, XXXXVI (1-2), pp.89-101. <hal-03641540>

**HAL Id: hal-03641540**

**<https://hal.science/hal-03641540v1>**

Submitted on 14 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

*Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*  
 XXXXVI, fasc. 1-2, 2002, 89 à 101

### Estimation de la période de la représentation autorégressive d'un processus à temps continu.

**Tahar MOURID et Wafaa BENYELLES** Département De Mathématiques  
 Faculté des Sciences Université Abou Bekr Belkaid TLEMCEN 13000 AL-  
 GERIE.

**Résumé.** Nous considérons l'estimation de la période d'un processus aléatoire à représentation autorégressive. Nous étudions un estimateur de la période de la fonction moyenne basé sur une méthode de la "distance minimale". Sous des conditions de régularité, nous montrons sa convergence en probabilité et nous établissons une loi limite.

Key words and phrases: Processus autoregressifs Banachiques- estimation de la période- distance minimale.

AMS Classification: 62J05 62M10 46E15

**1. Introduction.** Les variables aléatoires à valeurs dans des espaces fonctionnels sont considérées dans de nombreux domaines de la théorie des probabilités et de la statistique des processus aléatoires. L'interprétation d'un processus aléatoire comme une variable aléatoire à valeurs dans un espace de fonctions est très utile en théorie limite et inférence statistique des processus [3]. Dans ce travail nous considérons la classe des processus à temps continu à représentation autorégressive et nous intéressons en particulier au problème de l'estimation de la période de la représentation. La classe des processus autorégressifs à valeurs dans un espace de dimension infinie a trouvé récemment un grand intérêt aussi bien en théorie que dans les applications ([3] et les références citées, [9]). Par ailleurs nous trouvons (cf. [3] chap. 3 et [9] chap. 3) des exemples de processus à temps continu admettant une représentation autorégressive dans des espaces de fonctions appropriés.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé complet et  $(B, \|\cdot\|)$  un espace de Banach réel séparable muni de sa tribu Borelienne  $\mathcal{B}$ . Nous notons  $\mathcal{L}(B)$  l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés définis sur  $B$  et à valeurs dans  $B$ , munie de la norme usuelle  $\|\cdot\|_L$  des opérateurs bornés. Un bruit blanc banachique est une suite de variables aléatoires  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  indépendantes identiquement distribuées définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  à valeurs dans  $B$  vérifiant

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$

$$E\varepsilon_n = 0 \quad ; \quad 0 < E\|\varepsilon_n\|^2 = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$$

Une suite  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  définie sur  $(\Omega, A, P)$  et à valeurs dans  $B$  est un processus autorégressif banachique d'ordre  $p$  ( $ARB(p)$ )  $p \in \mathbb{N}^*$ , s'il existe des opérateurs  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  dans  $\mathcal{L}(B)$ , un bruit blanc banachique  $(\varepsilon_n)$  et un élément  $a \in B$  tels que :

$$X_n - a = \rho_1(X_{n-1} - a) + \rho_2(X_{n-2} - a) + \dots + \rho_p(X_{n-p} - a) + \varepsilon_n \quad p.s. \quad (1)$$

où l'opérateur  $\rho_p$  est différent de l'opérateur nul. Sous une condition sur les opérateurs  $\rho_i$  l'équation (1) admet une solution strictement stationnaire dans  $B$  ([9] chap.1 Prop. 3.1). Nous dirons qu'un processus à temps continu  $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}(t), t \in \mathbb{R})$  admet une représentation autorégressive banachique d'ordre  $p$  dans un espace de Banach de fonctions noté  $B$ , s'il existe des opérateurs linéaires bornés  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  sur  $B$ ,  $a \in B$ , une suite  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$  de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées définies sur  $(\Omega, A, P)$  à valeurs dans  $B$  et un nombre  $\delta$  strictement positif tels que la suite des variables aléatoires à valeurs dans  $B$  définies par :

$$X_n(t) := \mathcal{Z}(n\delta + t) \quad t \in [0, \delta]. \quad (2)$$

vérifient la relation (1). Dans de nombreuses applications, le processus  $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_n, n \in \mathbb{Z})$  est *p.s.* à trajectoires continues et l'espace de Banach  $B$  naturel est l'espace des fonctions définies et continues sur  $[0, \delta]$  noté  $C = C_{[0, \delta]}$  ou encore les espaces usuels  $L^p_{[0, \delta]}$ ,  $p \geq 1$ . De plus si le processus  $\mathcal{Z}$  admet une représentation autorégressive  $ARB(p)$ , alors sa fonction moyenne est une fonction périodique de période  $\delta$  et coïncide avec  $a$  sur l'intervalle  $[0, \delta]$  ([9] p.64). Un problème naturel dans la statistique de cette classe de processus est l'estimation de la fonction moyenne et en particulier l'estimation de sa période  $\delta$ . Dans [7] l'estimation de la période a été résolue par une méthode de Tian qui repose sur des propriétés de la fonction covariance pour la classe des processus périodiquement corrélées. Cette classe est caractérisée par le fait que la fonction moyenne et la fonction covariance sont des fonctions périodiques et de même période. Nous indiquerons pour le cas de processus  $\mathcal{Z}$  à représentation autorégressive Banach que cette méthode n'est pas applicable. Nous proposons un estimateur de la période  $\delta$  du type

"distance minimale" ([8] [6] [10]). La méthode est basée sur l'étude d'un estimateur d'une intégrale de la fonction moyenne du processus (convergence presque sûre, dans  $L^2$  et une loi limite) puis nous déduisons un estimateur de la période par la minimisation de l'écart absolue entre l'estimateur étudié et la fonction à estimer. Nous établissons par la suite la convergence en probabilité et une loi limite pour l'estimateur de la distance minimale étudié. Les résultats sont obtenus uniformément sur l'espace paramétrique.

Le plan du papier est comme suit. La section 2 contient une étude d'un estimateur d'une intégrale de la fonction moyenne. La section 3 est consacré à l'estimation de la période. La section 4 contient les preuves des résultats.

**2. Estimateur d'une intégrale de la fonction moyenne.** Soit  $Z = (Z(t), t \in \mathbf{R})$  un processus réel presque sûrement à trajectoires continues. On suppose que le processus  $Z$  admet une représentation autorégressive  $ARC(p)$  de moyenne  $a$  et de bruit blanc  $\varepsilon$  dans  $C_{[0,\delta]}$  où  $\delta$  un réel strictement positif. Pour estimer la période  $\delta$  nous utilisons un estimateur qui a été introduit et étudié dans [3] [9]. Posons pour  $\delta > 0$  :

$$g(\delta) := \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} a(t) d\mu(t)$$

où  $\mu$  est une mesure à signe bornée dans  $C_{[0,\delta]}^*$  (le dual topologique de  $C_{[0,\delta]}$ ). Si nous observons une trajectoire du processus  $Z$  sur  $[0, T]$  :  $(Z(t), t \in [0, T])$ , alors un estimateur naturel de la fonction  $g$  est le suivant :

$$\hat{g}_T = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) d\mu_{[T]}(t) \quad (3)$$

où  $[T]$  est la partie entière de  $T$  et pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , et pour tout borélien  $A$ ,  $A \in B_{[0,n\delta]}$ , la mesure  $\mu_n$  est définie par (translatée de  $\mu$ ):

$$\mu_n(A) := \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap [j\delta, (j+1)\delta[ - j\delta)$$

L'étude de la convergence et loi limite de cet estimateur a été faite pour  $p = 1$  et  $\delta = 1$  dans [3] Chap. 6.7. Dans la première partie de travail nous étudions la convergence presque sûre et dans  $L^2$  de l'estimateur  $\hat{g}_T$  ensuite nous établissons une loi limite dans  $\mathbf{R}^k$  du vecteur aléatoire  $(\hat{g}_{T,i}, i = 1, \dots, k)$

associé à des mesures  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , pour  $p \geq 1$  et  $\delta > 0$ . Le résultat suivant fournit la convergence presque sûre et dans  $L^2$  de  $\hat{g}_T$ :

**Théorème 1.** *Si le processus  $Z$  admet une représentation autorégressive ARC( $p$ ) de moyenne  $a$  et de bruit blanc  $\varepsilon$  dans  $C_{[0,\delta]}$  où  $\delta > 0$ , alors*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{g}_T = g(\delta)$$

*presque sûrement et dans  $L^2$ .*

La suite ARC( $p$ ) :  $X = (X_n)$  associée au processus  $Z$  par (2) admet un opérateur de covariance  $R_{X_0}$  qui est dans ce cas un opérateur à noyau sur  $L^2_{[0,\delta]}$  de noyau la fonction de covariance  $C(s, t)$ . Les éléments propres de  $R_{X_0}$  sont notés  $(\lambda_j, \Phi_j)$  et vérifient :

$$\lambda_j \Phi_j(t) = \int_0^\delta C(s, t) \Phi_j(s) ds, \quad t \in [0, \delta], \quad j = 1, 2, \dots$$

On suppose que les éléments propres de  $R_{X_0}$  sont connus et que pour tout  $j \geq 1$  les  $\lambda_j$  sont strictement positifs et  $\|\Phi_j\|_{L^2} = 1$  (cf. Remarque 1 ci dessous). Le résultat suivant établit une loi limite dans  $\mathbb{R}^k$  pour un vecteur aléatoire associé à un vecteur de  $\hat{g}_T$ , construit avec des mesures  $\mu_i$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité  $\Phi_i$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

**Théorème 2.** *Supposons que le processus  $Z$  admet une représentation autorégressive ARC( $p$ ) de moyenne  $a$  et de bruit blanc  $\varepsilon$  dans  $C_{[0,\delta]}$ , et que les trajectoires de  $Z$  vérifie presque sûrement la condition de Lipschitz suivante:*

$$|Z(t, \omega) - Z(s, \omega)| \leq M(\omega) \cdot |t - s|$$

*où  $M$  est une variable aléatoire réelle positive vérifiant  $EM^2 < \infty$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , le vecteur aléatoire*

$$\left( \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=0}^{T-1} \int_0^\delta ((Z(i\delta + t) - a(t))) \Phi_j(t) dt; 1 \leq j \leq k \right) \implies \mathcal{N}_k$$

quand  $T$  tend vers l'infini où  $N_k$  est une variable aléatoire Gaussienne centrée dans  $\mathbf{R}^k$  de matrice de covariance diagonale :

$$C_{N_k} = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_k \}$$

**3. Estimation de la période.** Rappelons qu'un processus stochastique  $(Z(t), t \in \mathbb{T})$  réel défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et ayant un moment d'ordre deux fini est appelé processus périodiquement corrélé si la fonction de covariance  $R$  et la fonction moyenne  $m$  sont périodiques de période  $\delta$  :  $R(u, v) = E[Z(u) \cdot Z(v)] = R(u + \delta, v + \delta)$  et  $m(u) = E[Z(u)] = m(u + \delta)$ ,  $\forall (u, v) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$  tel que  $(u + \delta, v + \delta) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ . Dans la suite, cette classe est noté PC. Dans [7] une synthèse de la méthode de Tian pour l'estimation de la période  $\delta$  pour un processus PC est proposée. La méthode est basée sur des propriétés de la fonction de covariance qui est un moyen usuel de recherche de périodicité en théorie du signal. Nous examinons l'application de la méthode de Tian aux processus ARB( $p$ ). Comme nous l'avons signalé en introduction un processus à temps continu  $(Z(t), t \in \mathbf{R})$  à représentation autorégressive banachique possède une moyenne périodique de période  $\delta$ . Par contre la fonction de covariance ne l'est pas. En effet si  $(Z(t))$  est à représentation ARC(1) dans  $C_{[0, \delta]}$  de moyenne  $a$  et de bruit blanc  $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ , un calcul montre que pour tout  $t \in [0, \delta]$  :  $C(t + \delta, t + \delta) = E[Z(t + \delta) - a(t)][Z(t + \delta) - a(t)] = E[\rho Z(t) + \varepsilon_1(t) - a(t)][Z(t + \delta) - a(t)] = C(t, t) + c$  où  $c$  est strictement positif. Donc la fonction de covariance  $C(s, t)$  n'est pas périodique. Par suite les processus à représentation ARB( $p$ ) ne sont pas en général élément de la classe PC et par conséquent la méthode de Tian ne s'applique pas ici. En reprenant les notations de la Section 2 nous proposons un estimateur de la période  $\delta$  basé sur la méthode de la "distance minimale" ([8]). L'estimateur de  $\delta$  est défini par:

$$\hat{\delta}_T = \text{Arg} \min_{\delta \in ]0, \Delta[} |\hat{g}_T - g(\delta)| \quad (4)$$

où  $\hat{g}_T$  et  $g(\delta)$  sont définis respectivement par (3) et (4) et où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue et  $\Delta$  est un nombre stictement positif donné.

Nous posons  $\Theta := ]0, \Delta[$  un intervalle ouvert de  $\mathbf{R}$  et pour tout  $\beta > 0$

$$h(\beta) := \inf_{\delta_0 \in \Theta} \inf_{|\delta - \delta_0| > \beta > 0} |g(\delta) - g(\delta_0)| \quad (5)$$

Nous imposons par la suite la condition :  $h(\beta) > 0$  qui est une condition d'identifiabilité du paramètre. Cette condition est vérifiée par exemple dans

le cas où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue est la fonction moyenne  $a$  garde un signe constant. Nous notons  $\delta_0$  la vraie valeur du paramètre. Le résultat suivant établit la convergence en probabilité de l'estimateur uniforme sur  $\Theta$ .

**Théorème 3.** *Sous les conditions du Théorème 1 et si tout  $\beta > 0$  :  $h(\beta) > 0$ , alors nous avons :*

$$P_{\delta_0} \left( \left| \hat{\delta}_T - \delta_0 \right| > \beta \right) \rightarrow 0 \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

La convergence est uniforme sur  $\Theta$ .

Le résultat suivant fournit une loi limite de l'estimateur  $\hat{\delta}_T$ .

**Théorème 4.** *Sous les conditions du Théorème 2 et si tout  $\beta > 0$  :  $h(\beta) > 0$ , alors:*

$$\sqrt{T} (\hat{\delta}_T - \delta_0) \Rightarrow \mathcal{N} \quad \text{quand } T \rightarrow \infty$$

où  $\mathcal{N}$  est une v.a. Gaussienne centrée de variance  $\delta_0^{-2} I^{-2}(\delta_0) \lambda_1$  et  $I(\cdot)$  est la dérivée de la fonction  $g(\cdot)$ . La convergence est uniforme sur  $\Theta$ .

**Remarque 1.** Une étude similaire peut être menée en supposant cette fois que les éléments propres  $(\lambda_j, \Phi_j)$  de l'opérateur de covariance  $R_{X_0}$  sont inconnus. Des estimateurs naturels des éléments propres de  $R_{X_0}$  sont les éléments propres de l'opérateur de covariance empirique associé (cf. [9] Chap. V).

**4. Preuves. Preuve du Théorème 1.** Pour tout  $T \in \mathbb{R}$  et  $\delta > 0$ , il existe un entier  $n = n_{T,\delta}$  tel que :  $n\delta \leq T \leq (n+1)\delta$ . Par suite nous avons  $\frac{n}{T} \rightarrow \frac{1}{\delta}$ . Considérons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) &= \frac{1}{T} \int_0^{n\delta} \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) + \frac{1}{T} \int_{n\delta}^T \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) \\ &=: A_n + B_n \end{aligned}$$

D'une part, de  $X_j(t) := \mathcal{Z}(j\delta + t)$ ,  $t \in [0, \delta]$  et de la définition de  $\mu_{[T]}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} A_n &:= \frac{1}{T} \int_0^{n\delta} \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j\delta}^{(j+1)\delta} \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\delta \mathcal{Z}(\delta j + t) d\mu(t) \\
 &= \frac{n}{T} \int_0^\delta \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_j(t) \right] d\mu(t) \quad (6)
 \end{aligned}$$

D'après le Th. 1.1 Chap. II de [9], appliqué à l'espace  $(B, \|\cdot\|) = (C_{[0,\delta]}, \|\cdot\|_\infty)$  nous avons :

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_j - a \right\|_\infty &:= \sup_{0 \leq t \leq \delta} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_j(t) - a(t) \right| \\
 &= \|\bar{X}_n - a\|_\infty \rightarrow 0 \quad p.s.
 \end{aligned}$$

quand  $n \rightarrow \infty$  et où  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_j$ .

Or presque sûrement les trajectoires du processus  $\mathcal{Z}$  sont continues, donc :

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_j \right\|_\infty &\leq \sup_{0 \leq j \leq (n-1)} \|X_j\|_\infty \\
 &\leq \sup_{0 \leq j \leq (n-1)} \sup_{0 \leq t \leq \delta} |X_j(t)| \\
 &= \sup_{0 \leq j \leq (n-1)} \sup_{0 \leq t \leq \delta} |\mathcal{Z}(\delta j + t)| < \infty \quad p.s.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, par le théorème de la convergence dominée et du fait que  $\frac{n}{T} \rightarrow \frac{1}{\delta}$ , nous déduisons de (6) que quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$A_n := \frac{1}{T} \int_0^{n\delta} \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) \rightarrow \frac{1}{\delta} \int_0^\delta a(t) d\mu(t) \quad p.s.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 B_n &:= \frac{1}{T} \int_{n\delta}^T \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) \\
 &\leq \frac{1}{T} \sup_{n\delta \leq t \leq T} |\mathcal{Z}(t)| \cdot \|\mu\| = \frac{1}{T} \sup_{0 \leq s \leq \delta} |X_n(s)| \cdot \|\mu\| \\
 &\leq \frac{1}{T} \|\mu\| \|X_n\| \quad (7)
 \end{aligned}$$

où  $\|\mu\|$  désigne la variation totale de  $\mu$ . Par l'inégalité de Markov et la stationarité de  $(X_n)$  nous avons :

$$(8) \quad P\left(\left\|\frac{X_n}{T}\right\| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{T^2\varepsilon^2} E\|X_n\|^2 \\ = \frac{1}{T^2\varepsilon^2} E\|X_0\|^2$$

Par suite

$$\int_1^\infty P\left(\left\|\frac{X_n}{T}\right\| > \varepsilon\right) dT \leq \frac{E\|X_0\|^2}{\varepsilon^2} \int_1^\infty \frac{1}{T^2} dT < \infty$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on obtient donc quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$\frac{X_n}{T} \rightarrow 0 \quad p.s.$$

Par conséquent de (7), nous obtenons :

$$B_n := \frac{1}{T} \int_{n\delta}^T \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) \rightarrow 0 \quad p.s.$$

quand  $T$  tend vers l'infini.

D'où en regroupant les convergences de  $A_n$  et  $B_n$  vers 0, nous obtenons le résultat demandé :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{Z}(t) d\mu_{[T]}(t) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta a(t) d\mu(t) \quad p.s.$$

De manière similaire nous obtenons la convergence dans  $L^2$  en utilisant cette fois  $\|\bar{X}_n - a\| \rightarrow 0$  dans  $L^2$  ( cf. [9] Remarque 7.2 Chap. V )

**Preuve du Théorème 2.** Comme  $X_j(t) := \mathcal{Z}(j\delta + t)$  et la suite  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$  est un processus  $ARC(p)$  d'innovation  $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ , alors:

$$\varepsilon_n(t) - \varepsilon_n(s) = \mathcal{Z}(n\delta + t) - \mathcal{Z}(n\delta + s) - E(\mathcal{Z}(n\delta + t) - \mathcal{Z}(n\delta + s) / \mathcal{Z}(u), u \leq n\delta).$$

Par conséquent, de l'hypothèse sur le processus  $\mathcal{Z}$ , on a :

$$(9) \quad |\varepsilon_n(t) - \varepsilon_n(s)| \leq |\mathcal{Z}(n\delta + t) - \mathcal{Z}(n\delta + s)| \\ + E(|\mathcal{Z}(n\delta + t) - \mathcal{Z}(n\delta + s)| / \mathcal{Z}(u), u \leq n\delta) \\ \leq (M + E(M / \mathcal{Z}(u), u \leq n\delta)) \cdot |t - s|$$

Donc la suite  $(\varepsilon_n, n \in \mathbf{Z})$  vérifie la condition d) du Corollaire 5.11. Chap. II dans [9]. Par conséquent par le même Corollaire la suite  $ARB(p)$   $(X_n, n \in \mathbf{Z})$  vérifie le théorème central limite dans  $B = C_{[0,\delta]}$  :

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - a) \Rightarrow \mathcal{N}$$

où  $\mathcal{N}$  est une Gaussienne centrée dans  $C_{[0,\delta]}$  d'opérateur de covariance  $(I - \rho_1 - \dots - \rho_p)^{-1} R_{e_0} (I - \rho_1 - \dots - \rho_p)^{-1}$ .

Considérons la forme linéaire  $x^* := \mu \in C_{[0,\delta]}^*$  le dual topologique de  $C_{[0,\delta]}$ . Par suite par le théorème de continuité, nous avons le TCL dans  $\mathbf{R}$  suivant :

$$\mu (\sqrt{n} (\bar{X}_n - a)) \Rightarrow \mu(\mathcal{N})$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mu (\sqrt{n} (\bar{X}_n - a)) &= \int_0^\delta \sqrt{n} (\bar{X}_n(t) - a(t)) d\mu(t) \\ &= \sqrt{n} \int_0^\delta \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_j(t) - a(t) \right) d\mu(t) \\ &= \int_0^\delta \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} X_j(t) - \sqrt{n} a(t) \right) d\mu(t) \\ &= \int_0^\delta \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} X_j(t) - \frac{n}{\sqrt{n}} a(t) \right) d\mu(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\delta (X_j(t) - a(t)) d\mu(t) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\delta (X_j(t) - a(t)) d\mu(t) \Rightarrow \mu(\mathcal{N}) = \int_0^\delta \mathcal{N}(t) d\mu(t)$$

où  $\mu(\mathcal{N})$  est une variable aléatoire réelle Gaussienne centrée de variance  $\mu \left( (I - \rho_1 - \dots - \rho_p)^{-1} R_{e_0} (I - \rho_1 - \dots - \rho_p)^{-1} (\mu) \right)$ . Considérons maintenant  $\mu_1, \dots, \mu_k$ ,  $k$  formes linéaires dans  $C_{[0,\delta]}^*$ ,  $k \geq 1$ , de densités respectives  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $[0, \delta]$ . D'après ce qui précède, nous aurons pour tout  $i = 1, \dots, k$ :

$$\mu_i(\sqrt{n}(\bar{X}_n - a)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\delta (X_j(t) - a(t)) \cdot \Phi_i(t) dt \implies \mu_i(\mathcal{N}) = \int_0^\delta \mathcal{N}(t) \cdot \Phi_i(t) dt$$

Notons  $\nu_n$  et  $\nu$  les lois respectives de  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - a)$  et de  $\mathcal{N}$ . Par la convergence faible de  $\nu_n$  vers  $\nu$  et le théorème de continuité, nous déduisons la convergence des lois de dimensions finies dans  $\mathbf{R}^k$ :  $\forall \mu_1, \dots, \mu_k \in C_{[0, \delta]}^*$ ,

$$(\mu_1(\sqrt{n}(\bar{X}_n - a)), \dots, \mu_k(\sqrt{n}(\bar{X}_n - a))) \implies (\mu_1(\mathcal{N}), \dots, \mu_k(\mathcal{N}))$$

où le vecteur  $(\mu_1(\mathcal{N}), \dots, \mu_k(\mathcal{N}))$  est Gaussien centré dans  $\mathbf{R}^k$ .

Calculons la matrice de covariance de la loi limite. On a pour  $s, t \in [0, \delta]$ :

$$\begin{aligned} C(s, t) &:= E(Z(s) - a(s)) \cdot (Z(t) - a(t)) \\ &= E(X_0(s) - a(s)) \cdot (X_0(t) - a(t)) \\ &= E(\mathcal{N}(s)\mathcal{N}(t)) \end{aligned}$$

Donc, pour  $i, j = 1, \dots, k$ , on a:

$$\begin{aligned} E\mu_i(\mathcal{N})\mu_j(\mathcal{N}) &= E\left(\int_0^\delta \mathcal{N}(t) d\mu_i(t) \int_0^\delta \mathcal{N}(t) d\mu_j(t)\right) \\ &= \int_0^\delta \int_0^\delta E\mathcal{N}(s)\mathcal{N}(t) d\mu_i(s) d\mu_j(t) \\ &= \int_0^\delta \left(\int_0^\delta C(s, t) \Phi_i(s) ds\right) \Phi_j(t) dt \\ &= \int_0^\delta \lambda_i \Phi_i(t) \Phi_j(t) dt \\ &= \lambda_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. D'où le théorème.

**Preuve du Théorème 3.** Soit  $\beta > 0$ . De la définition de  $\hat{\delta}_T$  (cf. (4)) et pour  $\delta_0 \in \Theta$  nous avons :

$$|\hat{\delta}_T - \delta_0| > \beta \implies \inf_{|\delta - \delta_0| \leq \beta} |\hat{g}_T - g(\delta)| > \inf_{|\delta - \delta_0| > \beta} |\hat{g}_T - g(\delta)| \quad (8)$$

D'une part

$$|\hat{g}_T - g(\delta)| \leq |\hat{g}_T - g(\delta_0)| + |g(\delta_0) - g(\delta)|$$

Donc

$$\inf_{|\delta - \delta_0| \leq \beta} |\hat{g}_T - g(\delta)| \leq |\hat{g}_T - g(\delta_0)| \quad (9)$$

D'autre part

$$|g(\delta) - g(\delta_0)| \leq |\hat{g}_T - g(\delta)| + |\hat{g}_T - g(\delta_0)|$$

Par suite

$$|\hat{g}_T - g(\delta)| \geq |g(\delta) - g(\delta_0)| - |\hat{g}_T - g(\delta_0)|$$

Et alors de la définition de  $h(\beta)$  (cf. (5)) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \inf_{|\delta - \delta_0| > \beta} |\hat{g}_T - g(\delta)| &\geq \inf_{|\delta - \delta_0| > \beta} |g(\delta) - g(\delta_0)| - |\hat{g}_T - g(\delta_0)| \\ &\geq h(\beta) - |\hat{g}_T - g(\delta_0)| \end{aligned} \quad (10)$$

Par conséquent de (8) (9) (10) nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} P_{\delta_0} \left( |\hat{\delta}_T - \delta_0| > \beta \right) &\leq P_{\delta_0} \left( \inf_{|\delta - \delta_0| \leq \beta} |\hat{g}_T - g(\delta)| > \inf_{|\delta - \delta_0| > \beta} |\hat{g}_T - g(\delta)| \right) \\ &\leq P_{\delta_0} \left( \inf_{|\delta - \delta_0| > \beta} |\hat{g}_T - g(\delta)| > h(\beta) - |\hat{g}_T - g(\delta_0)| \right) \\ &\leq P_{\delta_0} \left( |\hat{g}_T - g(\delta_0)| > \frac{1}{2} h(\beta) \right) \end{aligned}$$

Par hypothèse  $h(\beta) > 0$  et par le Théorème 1 :  $\hat{g}_T \rightarrow g(\delta)$  presque sûrement. Donc le dernier majorant tend vers 0 quand  $N \rightarrow \infty$ . D'où le résultat.

**Preuve du Théorème 4.** Pour obtenir la loi limite de l'estimateur nous utilisons les arguments généraux de Millar dans [8] ( Sect. XV ). Nous avons

$$\sqrt{T} (\hat{\delta}_T - \delta_0) = I^{-1}(\delta_0) \cdot \sqrt{T} (\hat{g}_T - g(\delta_0)) + o_p(1) \quad (11)$$

où  $I(\cdot)$  est la dérivée de  $g(\cdot)$  par rapport à  $\delta$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=0}^{T-1} \int_0^\delta \mathcal{Z}(i\delta + t) dt &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \int_0^\delta \mathcal{Z}(t) dt + \int_0^\delta \mathcal{Z}(\delta + t) dt + \dots + \int_0^\delta \mathcal{Z}((T-1)\delta + t) dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^{T\delta} \mathcal{Z}(t) dt \\ &= \sqrt{T} \left( \frac{1}{T} \int_0^{T\delta} \mathcal{Z}(t) dt \right) = \sqrt{T} \left( \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{Z}(t) dt + \frac{1}{T} \int_T^{T\delta} \mathcal{Z}(t) dt \right) \\ &= \sqrt{T} \cdot \hat{g}_T + \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T^{T\delta} \mathcal{Z}(t) dt \end{aligned}$$

par définition de  $\hat{g}_T$ .

On montre comme dans le calcul fait pour  $B_n$  dans la preuve de Théorème 1 que :

$$\left| \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T^{T\delta} \mathcal{Z}(t) dt \right| \leq \frac{\|X_{[T\delta]}\|}{[T\delta]} \rightarrow 0$$

en probabilité quand  $T \rightarrow \infty$ . Par conséquent

$$\sqrt{T} \hat{g}_T = \frac{1}{\delta \sqrt{T}} \sum_{i=0}^{T-1} \int_0^\delta \mathcal{Z}(i\delta + t) dt + o_p(1)$$

Par suite

$$\begin{aligned} \sqrt{T} (\hat{g}_T - g(\delta)) &= \frac{1}{\delta \sqrt{T}} \sum_{i=0}^{T-1} \int_0^\delta \mathcal{Z}(i\delta + t) dt - \sqrt{T} \cdot \frac{1}{\delta} \int_0^\delta a(t) dt + o_p(1) \\ &= \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \left[ \sum_{i=0}^{T-1} \int_0^\delta \mathcal{Z}(i\delta + t) dt - T \int_0^\delta a(t) dt \right] + o_p(1) \\ &= \frac{1}{\delta} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=0}^{T-1} \int_0^\delta (\mathcal{Z}(i\delta + t) dt - a(t)) dt \right] + o_p(1) \end{aligned}$$

Donc en appliquant le Théorème 3 pour  $k = 1$  et en prenant  $\mu_1$  la mesure de Lebesgue nous obtenons :

$$\delta_0 \cdot \sqrt{T} (\hat{g}_T - g(\delta_0)) \implies \mathcal{N}_1$$

où  $\mathcal{N}_1$  est v.a. Gaussienne centrée de variance  $\lambda_1$ . Par suite de la relation (11) nous obtenons :

$$\delta_0 \cdot I(\delta_0) \cdot \sqrt{T} (\hat{\delta}_T - \delta_0) \implies \mathcal{N}_1$$

D'où le Théorème.

*Nous remercions le referee anonyme pour sa lecture attentive du manuscrit et L'Editeur pour ses remarques.*

## References

- [1] A. Antoniadis (1988). Parametric estimation for the mean of a Gaussian process. Jour. Multi. Anal. 26 pp. 1-15.
- [2] P. Bilingsley (1968). " Convergence of probability measures. Willey. New-York.
- [3] D. Bosq (2000). Linear Processes in Function spaces. Theory and Applications. Lecture Notes in Statistics 149. Springer.
- [4] N. Denford et J.T.Schwartz (1958). Linear operators, Willey. New-York.
- [5] J. Hoffman-Jorgensen et G.Pisier (1976). The law of large numbers and the central theorem in Banach spaces, Ann.Proba., n<sup>o</sup>4, p. 587-599.
- [6] Yu. Kutoyants (1991). Minimum distance parameter estimation for diffusion type observation. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. p. 637-642.
- [7] D.E.K.Martin (1982). Estimation of the minimal period of periodically correlated sequences. Phd. Thesis. University of Maryland 1982.
- [8] P.W. Millar (1984). A general approach to the optimality of minimum distance estimation. Trans.Amer. Soc. 286,1, p. 377-418.
- [9] T. Mourid (1995). Contribution à la statistique des processus autorégressifs à temps continu. Thèse d'Etat, Univ. Paris 6.
- [10] C.Parr (1981). Minimum distance estimation. Bibliography Commun. Statist. Theory Meth. A10(12)1205-1224.