



HAL
open science

Sommation itérée d'une puissance impaire des premiers entiers

Vivien Despax

► **To cite this version:**

| Vivien Despax. Sommation itérée d'une puissance impaire des premiers entiers. 2022. hal-03640195

HAL Id: hal-03640195

<https://hal.science/hal-03640195>

Preprint submitted on 13 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sommation itérée d'une puissance impaire des premiers entiers

Vivien Despax

13 avril 2022

Résumé

Afin d'en déduire un résultat sur la sommation d'une puissance impaire des premiers entiers, nous exprimons les monômes impairs comme combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs de polynômes définis à partir des coefficients binomiaux.

1 Expression d'un monôme impair en fonction de certains polynômes

Soit $i \in \mathbf{N}^*$. Pour décomposer X, X^3, \dots, X^{2i-1} sur la base $\left(\binom{X+j-1}{2j-1}\right)_{j \in \llbracket 1, i \rrbracket}$ de $\text{Vect}_{\mathbf{Q}}(X, X^3, \dots, X^{2i-1})$, on commence par écrire

$$\begin{aligned} X &= \binom{X}{1} \\ X^3 &= X^2 \binom{X}{1} = \binom{X}{1} + (X^2 - 1) \binom{X}{1} = \binom{X}{1} + 6 \binom{X+1}{3} \\ X^5 &= X^2 \binom{X}{1} + 6X^2 \binom{X+1}{3} = \binom{X}{1} + 6 \binom{X+1}{3} + 24 \binom{X+1}{3} + 6(X^2 - 4) \binom{X+1}{3} \\ &= \binom{X}{1} + 30 \binom{X+1}{3} + 120 \binom{X+2}{5} \\ &\dots \end{aligned}$$

On observe que les coordonnées $(a_{i,j})_{j \in \llbracket 1, i \rrbracket}$ de X^{2i-1} sur $\left(\binom{X+j-1}{2j-1}\right)_{j \in \llbracket 1, i \rrbracket}$ vérifient

$$a_{i,j} = \begin{cases} (2j-1)(2j-2)a_{i-1,j-1} + j^2 a_{i-1,j} & \text{si } 1 < j < i \\ 1 & \text{si } j = 1 \\ (2i-1)(2i-2)a_{i-1,i-1} & \text{si } j = i \end{cases}$$

et sont donc des entiers positifs qu'il est facile de calculer de proche en proche.

2 Application à l'itération de la sommation d'une puissance impaire des premiers entiers

On va maintenant exploiter la décomposition précédente pour en déduire un résultat sur l'itération de la sommation, c'est-à-dire de l'endomorphisme Σ de $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ défini par

$$\Sigma(f)(n) = \sum_{k=1}^n f(k) = \begin{cases} f(1) + f(2) + \cdots + f(n) & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On identifie $P \in \mathbf{Q}[X]$ à l'élément de $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$, encore noté P , défini par $k \mapsto P(k)$.

Plus précisément : Faulhaber s'est intéressé à des généralisations d'identités comme la célèbre

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

et a publié dans ce sens en 1631, sans preuve (au sens contemporain), un théorème qui affirme que lorsque qu'on itère r fois la sommation d'une puissance impaire des n premiers entiers, on obtient le produit d'un polynôme en $n(n+r)$ par la r -ième itération de la sommation des n premiers entiers. Dans l'article [1], Knuth en fournit une démonstration, accompagnée d'autres résultats, reposant sur des méthodes qu'il estime proches de celles connues à l'époque de Faulhaber.

Bien que les éléments qu'elle utilise se trouvent déjà dans l'article cité, la démonstration que nous proposons de ce résultat, aussi élémentaire que celle de Knuth, s'en distingue par le fait qu'elle est plus courte et qu'elle revêt un aspect plus explicite.

Théorème 1 (Faulhaber-Knuth). *Si $(P_{r,j})_{j \in \llbracket 1, i \rrbracket}$ est défini par*

$$P_{r,j} = \frac{1}{\prod_{k=2}^{2j-1} (k+r)} \prod_{k=1}^{j-1} (X - k(k+r))$$

et si $\Pi_{i,r} = \sum_{j=1}^i a_{i,j} P_{r,j}$, alors

$$\Sigma^r (X^{2i-1}) = \Pi_{i,r} (X(X+r)) \Sigma^r (X)$$

Démonstration. Par télescopage, la formule du triangle de Pascal donne

$$\Sigma \binom{X}{j} = \binom{X+1}{j+1}$$

et un raisonnement par récurrence sur $r \in \mathbf{N}^*$ fournit alors

$$\Sigma^r \binom{X}{j} = \binom{X+r}{j+r} \tag{1}$$

Par linéarité et par (1), on a ensuite

$$\Sigma^r (X^{2i-1}) = a_{i,1} \binom{X+r}{r+1} + a_{i,2} \binom{X+r+1}{r+3} + a_{i,3} \binom{X+r+2}{r+5} + \cdots + a_{i,i} \binom{X+r+i-1}{r+2i-1}$$

Or

$$\binom{X+r+j-1}{r+2j-1} = \frac{\binom{X+r}{r+1}}{\prod_{k=2}^{2j-1} (r+k)} \prod_{k=1}^{j-1} (X+r+k)(X-k)$$

et

$$(X+r+k)(X-k) = X(X+r) - k(k+r)$$

Cela permet de conclure.

CQFD

Références

- [1] KNUTH, Donald, Ervin, *Johann Faulhaber and sums of powers*, Math. Comp., vol. 61, 1993, p. 277-294