



HAL
open science

**Solution stationnaire de l'équation associée à un
opérateur de Perron- Frobénius dans le cas de
difféomorphismes à point fixe : Application à l'étude de
la non résonance d'Anosov**

Guy Cirier

► **To cite this version:**

Guy Cirier. Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron- Frobénius dans le cas de difféomorphismes à point fixe : Application à l'étude de la non résonance d'Anosov. Annales de l'ISUP, 2005, XLIX (1), pp.65-69. hal-03637669

HAL Id: hal-03637669

<https://hal.science/hal-03637669>

Submitted on 11 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron-Frobenius
 dans le cas de difféomorphismes à point fixe :**
 Application à l'étude de la non résonance d'Anosov

par Guy CIRIER

Résumé : La solution stationnaire étudiée dans l'article précédent donne ici des d'informations sur le comportement asymptotiquement cyclique des itérés du difféomorphisme (cas d'Anosov).

Summary : in this paper we study the asymptotic behaviour of stationarry solution of the Perron-Frobenius operator (Anosov's case).

Mots clés : solution stationnaire, opérateur de Perron-Frobenius, opérateur constrictif, itération de difféomorphisme à point fixe, domaine d'Anosov

Classification : Premier 37C40 ; Second 47A35, 37D45, 62G07

Cet article vient compléter celui cité à la fin. On se propose ici de compléter les résultats obtenus dans l'article précédent par une description qualitative de l'effet des itérations dans E^d en cas de non résonance (*) d'Anosov lorsque f est de classe C^2 et que les valeurs propres ne sont ni en résonance ni multiples.

Rappels

On se place dans l'espace euclidien réel mesurable E^d muni de la mesure de Lebesgue dx et f est un difféomorphisme continûment dérivable de classe C^1 , de E^d dans E^d . On a vu dans l'article précédent que la solution (la densité stationnaire de la mesure invariante) de l'équation de Perron-Frobenius :

$g = P \circ g(x) = g \circ f^{-1} |f^{-1}|$ associée à f était fournie les semi-invariants φ_i associés au difféomorphisme f : $\varphi_i \circ f = \lambda_i \varphi_i$. φ_i est une application de E^d dans E ayant un point fixe 0. On rappelle que l'on a en général d fonctions propres φ_i dans E^d , correspondant à d valeurs propres λ_i , $i=1, 2, \dots, d$. Les valeurs propres λ ne sont autres que les multiplicateurs de f' au point fixe 0, déterminés par : $|f'_0 - \lambda I| = 0$. Si l'on désigne par φ l'application formée des φ_i , l'équation de semi invariance s'écrit : $\varphi \circ f = \lambda \varphi$, où λ désigne la matrice diagonale des valeurs propres. Si tel est le cas, on dit que l'on a linéarisé f .

Plus précisément, si f admet un point fixe 0, sous la condition de non résonance (*) (voir l'article précédent) que l'on n'examinera pas ici, et, à l'exception des ensembles de mesure nulle où les φ_i s'annulent, la solution de l'équation de Perron Frobenius s'écrit dans le voisinage du point fixe :

$$g = \frac{|\varphi|}{\prod_i \varphi_i}$$

où $i=1, 2, \dots, d$ et $|\varphi|$ est le déterminant jacobien de φ .

On reprend le pavage multiplicatif Φ^k engendré par $\varphi=(u,v)$ et obtenu par k itérations de f : f^k , k étant un entier arbitraire positif ou négatif : $\Phi^k = f^k(T)$ à partir du rectangle de base T produit cartésien des intervalles $I_i = (\varphi_i, \varphi_i] \in]0, \lambda_i]$ (définition légèrement différente de celle de l'article précédent). Soit

l'ensemble Φ obtenu quand $k \rightarrow \infty$. Le point x de E^d est ici considéré sous forme paramétrique : $x(u, v)$, selon la définition du domaine d'attraction :

Définition du domaine d'attraction D de 0

Par définition, le domaine d'attraction D de E^d du point fixe 0 pour l'application f sera l'image de Φ dans E^d par l'application $x(\lambda u, \lambda' v) = f(x(u, v))$ dont la solution $x(u, v)$ a les mêmes propriétés de continuité et de dérivabilité que la solution de $\varphi \circ f = \lambda \varphi$. (Cela n'est pas toujours vrai sauf si f est de classe C^∞).

Le difféomorphisme f de E^d dans E^d , laisse globalement invariant le domaine d'attraction D ainsi défini. Supposons le domaine D contenu dans un compact de E^d autour du point 0 . Puisque $\lambda^k v \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$, sous des conditions générales, les points de D vont tendre vers la variété W définie par $\varphi_j(x) = 0$, ou encore par la paramétrisation $x(\lambda u) = f(x(u))$ où $u \in \Phi_L$ et $\lambda = \lambda_L$. Ainsi, l'étude se ramène à celle de la variété W . Notons que si $k \rightarrow \infty$, $\lambda^k u \rightarrow 0$ et l'on a la variété transversale définie par $x(\lambda' v) = f(x(v))$.

Définition de l'application f_w de W dans W

La restriction f_w de f dans W , associée à x fixé de W l'unique $u = \varphi_L(x)$, puis λu , et enfin, fait correspondre de façon unique $x(\lambda u) = f(x(u))$. Ainsi, l'application f_w agit comme un changement de paramétrisation qui à u associe λu . Pour alléger la notation f_w sera notée f dans tout ce qui suit. La variété W est donc plongée dans E^d et est munie naturellement d'une métrique riemannienne euclidienne.

Application à l'étude de la non résonance (*) d'Anosov

Après changement de repère au voisinage de l'origine, f s'écrit $f(x) = \lambda(x + a(x))$ où les dérivées seront au moins lipchitziennes $\|\partial a(x)/\partial x\| < c \|x\|$ au voisinage de 0 puisque l'on suppose f de classe de C^2 . On suppose également que la solution de $x(\lambda u) = f(x(u))$ est de classe C^2 et bornée quelque soit u . Cette solution se sépare en deux groupes dans le cas d'Anosov :

$$x_L(\lambda u) = f_L(x(u)) = \lambda(x_L(u) + a_L(x(u))) \text{ avec } L = [i: |\lambda_i| > 1] \text{ et } \lambda = \lambda_L$$

$$x_J(\lambda u) = f_J(x(u)) = \lambda(x_J(u) + a_J(x(u))) \text{ avec } J = [j: 0 < |\lambda_j| < 1] \text{ et } \lambda = \lambda_J$$

L'application f de W dans W s'interprète naturellement dans E^d comme une application de $E^L \times E^J$ dans $E^L \times E^J$ où $x_L(u) \in E^L$ et $x_J(u) \in E^J$. Soit $V(0)$ un voisinage de 0 dans W , contenu dans un compact. On indiquera les ensembles Φ^L et Φ par L si on se limite aux $u = \varphi_L$.

On s'intéresse à l'opérateur de Perron Frobénius associé à f sur W en vue d'appliquer le théorème de décomposition spectrale qui utilise la notion d'opérateur contractif :

Définition (voir L.M.) :

Un opérateur de Markov est contractif s'il existe $\delta > 0$ et $k < 1$ tels que pour tout $g \in \mathcal{D}$ (espace des densités) et pour tout borélien B vérifiant $\int_B dx < \delta$ on a :

$$\int_B P^n g(x) dx < k \text{ pour } n > n_\delta(g).$$

On peut alors appliquer le théorème de décomposition spectrale qui déclare :

Théorème de décomposition spectrale (Komornik et Lasota) (voir L.M. p.98)

Si P est constrictif, il existe des densités g_i et des $k_i(x) \in L^\infty$ en nombre fini telles que pour toute fonction mesurable $g(x)$:

$$Pg(x) = \sum g_i(x) \ell_i(g) + Qg(x) \text{ où le nombre d'indices } i \text{ est fini et où } \ell_i(g) = \int_V g(x) k_i(x) dx \text{ avec } k_i(x) \in L^\infty,$$

- les supports S_i des g_i sont disjoints $g_i(x)g_j(x) = 0$ pour tout $i \neq j$

- l'opérateur P n'agit que pour permuter les indices i ,

- $\|P^n Qf\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ pour tout g .

On dit alors que P est asymptotiquement cyclique. P a une densité stationnaire $\sum g_i(x)$ et P ne fait que permuter les indices. Si, de plus, $g(x)$ est ergodique, la mesure est cyclique et sa densité vérifie : $g(x) = \sum g_i(x)$ où le nombre de i est fini, et la permutation des indices est cyclique (condition nécessaire et suffisante)

Pour pouvoir appliquer la démonstration de Krzyzewski et Slenk (1976) (voir L.M. p. 185-186) et utiliser ce théorème, on aura besoin des résultats suivants concernant l'expansion de la métrique riemannienne d'abord dans E^1 et ensuite sur W :

Lemme d'expansion dans E^1

Soit W la sous variété, de classe C^2 , de E^d autour du point 0 et vérifiant les conditions de non résonance, définie par $x(\lambda u) = f(x(u))$ avec $|\lambda| = |\lambda_{x_i}| > 1$. On suppose cette solution bornée quelque soit u . On peut trouver $\mu > 0$ tel que, pour tout $u \in \varphi_1(V(0))$ contenu dans un compact, $\|dx_L(\lambda u)\| > (1+\mu)\|dx_L(u)\|$.

Démonstration

Différentions $dx_L(\lambda u) = \lambda(1 + \partial a_L(x)/\partial x_L + \partial a_L(x)/\partial x_j \partial x_j / \partial x_L) dx_L(u)$, noté $dx_L(\lambda u) = B dx_L(u)$. Si $u \in \varphi_1(V(0))$ est contenu dans un compact, alors $\|\partial a_L(x)/\partial x_L\|$ est borné uniformément par $c\|x\|$, $\|\partial a_L(x)/\partial x_j\|$ est aussi borné par $c\|x\|$ et $\partial x_j / \partial x_L$ est borné (car le point 0 n'est pas critique et il suffit de choisir un voisinage sans point critique et de prendre $\partial x_j / \partial x_L$ continu dans ce voisinage de sorte que $\|\partial a_L(x)/\partial x_j \partial x_j / \partial x_L\|$ reste borné par $c\|x\|$;

$\|dx_L(\lambda u)\| > \lambda_m \|dx_L(u) + \partial a_L(x)/\partial x_L + \partial a_L(x)/\partial x_j \partial x_j / \partial x_L\| dx_L(u)$ où λ_m est la plus petite valeur propre de L ; donc $\|dx_L(\lambda u)\| > \lambda_m (1 - 2c\|x(u)\|) \|dx_L(u)\| > (1+\mu)\|dx_L(u)\|$ dès que l'on prend $2c\|x(u)\| < 1 - (1+\mu)/\lambda_m$.

Il suffit alors de restreindre $V(0)$ pour que l'inégalité soit vérifiée.

Soit $\varphi_1(V(0))$ l'image réciproque de $V(0)$ dans Φ_L où l'on a symétrisé $\varphi_L(V(0))$ ($\varphi_L(V(0))$ contient u et $-u$, ce qui est indispensable si la valeur propre est négative), f^{-1} opère une contraction et reste donc contenu dans $\varphi_1(V(0))$ quelque soit le nombre d'itérations de f^{-1} .

Lemme de transport sur W

Sous les mêmes conditions que précédemment, on aura $\|dx(\lambda u)\| > (1+\mu)\|dx(u)\|$ sur W presque partout.

Démonstration

Les équations $\varphi_j(x_j(u), x_L(u)) = 0$ et $\varphi_j(x_j(\lambda u), x_L(\lambda u)) = \varphi_j \circ f(x(u)) = \lambda \varphi_j(x_j(u), x_L(u)) = 0$ conduisent au même opérateur $\partial x_j / \partial x_L(\lambda u) = \partial x_j / \partial x_L(u)$, noté $\partial x_j / \partial x_L$. Cela implique $dx(u) = dx_j(u) + dx_L(u) = (\partial x_j / \partial x_L + I) dx_L(u) = A dx_L(u)$, de même $dx(\lambda u) = A dx_L(\lambda u)$. Or, $dx_L(\lambda u) = B dx_L(u)$, il vient $dx(\lambda u) = A B dx_L(u)$. En posant $z = dx_L(u)$, la comparaison des métriques riemanniennes $\|dx(\lambda u)\|$ et $\|dx(u)\|$ se ramène à l'étude du faisceau de formes quadratiques $(z, B^* A^* A B z)$ et $(z, A^* A z)$ où l'exposant * indique l'opérateur adjoint. Comme A est de rang égal à $\dim E^1$, $A^* A$ est

symétrique (hermitique) définie positive. Les valeurs caractéristiques du faisceau seront données par l'équation caractéristique : $|B^*A^*AB - \lambda A^*A| = 0$ (voir Gantmacher, F.R. p311-319) ; or, puisque A^*A est symétrique définie positive, un calcul simple (puisque $c = (A^*A)^{1/2}$ existe (voir Gantmacher, F.R. p276-278)) montre que les valeurs caractéristiques seront les carrés des valeurs propres de B , donc supérieures à $(1+\mu)^2$.

D'où le corollaire qui résume les résultats précédents :

Corollaire

Soit le difféomorphisme f de E^d dans E^d , de classe C^2 dans un voisinage du point 0 et vérifiant les conditions de non résonance (*) dans le cas d'Anosov. Soit W la sous variété de D définie par $x(\lambda u) = f(x(u))$ où $\lambda = \lambda_i$ et $L = [i; |\lambda_i| > 1]$ dont la solution de classe C^2 est bornée quelque soit u . Lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, la densité invariante associée à f tend vers une densité cyclique sur W dans E^d .

Démonstration

D tend vers W quand le nombre d'itérations tend vers l'infini. Il suffit d'étudier f sur W .

D'après L.M., la propriété constrictive peut être démontrée dans n'importe quel sous-ensemble dense de D espace des densités : il suffit de prendre celui des densités positives continues à support compact ne contenant pas de point critique (l'ensemble des points critiques est de mesure nulle d'après le théorème de Sard et on peut donc exclure cet ensemble) et ayant une mesure finie. Le lemme d'expansion sur W assure la propriété constrictive de Pg défini par $\int_A P \circ g(x) dx = \int_{f^{-1}(A)} g(x) dx$

- Si le support de g est contenu dans $\varphi(V(0))$, comme le support de g est compact, à tout x du support de g , on aura un $x(u/\lambda)$ de W , u/λ appartient à $\varphi_L \circ f^{-1}(V(0))$ contenu dans $\varphi(V(0))$ et on peut alors reprendre mot à mot la démonstration de Krzyzewski et Slenk (1976) (voir L.M. p. 185-186) , en différentiant Pg et on obtiendra :

$$|Pg|/Pg \leq c + |g|/((1+\mu)g) \text{ donc } |P^n g|/P^n g \leq c(1+\mu)/\mu + |g|/((1+\mu)^n g) < K$$

où est c une constante ; donc pour tout n on aura la majoration de Krzyzewski et Slenk .

- Si maintenant le support de g est contenu dans Φ_L^m , sans être contenu dans $\varphi_L(V(0))$, on commencera par itérer k fois f , de sorte que $f^{-k}(\Phi_L^m) \subset \varphi_L(V(0))$ pour ramener le support de $P^{m-k}g$ dans $\varphi_L(V(0))$. Il suffira alors de diviser g par le jacobien de ces itérations (qui sera borné non nul sur le compact de W) pour tenir compte de ces itérations préliminaires et obtenir le résultat.

Remarque :

Le raisonnement qui a été fait sur W peut être repris sur chaque support S_i (mais ici encore cela n'apparaît pas explicitement chez L.M.) : soit un itéré d'ordre convenable n_i de f tel que, partant d'un support S_i , on se retrouve, au bout de n_i itérations de f , sur S_i (puisque le nombre i de supports disjoints est fini) ; un support S_i se décompose asymptotiquement en sous-ensembles cycliques emboîtés disjoints et ainsi de suite. On trouve probablement ici la cause profonde de ce que l'on appelle l'auto-similarité asymptotique dans le cas d'Anosov.

Exemple : Asymptotique d'une équation différentielle ordinaire

-En dimension d , prenons une équation différentielle d'un vecteur de d coordonnées en fonction du temps t , notée $dx/dt = F(x)$. On remarque que f peut s'écrire ici $f_\delta = x + \delta F(x)$ et réalise une application de E^d

dans E^d , pour δ fixé symbolisant l'accroissement de t et tendant vers 0. On a vu que si l'on suppose toutes les dérivées à support compact :

* Les points fixes sont donnés par $F(r) = 0$, les multiplicateurs λ sont solutions de $|F'_r - \lambda| = 0$ autour de chaque point fixe r . La condition de linéarisation s'écrit ici : $\sum_i n_i \lambda_i \neq \lambda_j$, avec des entiers n_i non négatifs de somme supérieure à 1.

On a vu que les semi invariants φ ayant leurs dérivées partielles à support compact vérifient : $\partial \varphi_i / \partial x F(x) = \lambda_i \varphi_i(x)$ ou encore $\partial \log \varphi_i / \partial x F(x) = \lambda_i$, où $\partial \varphi_i / \partial x F(x)$ est le produit scalaire dans E^d . L'équation paramétrique asymptotique $x(\lambda_\delta u) = f_\delta(x(u))$ s'écrit $x((1+\delta\lambda)u) = x(u) + \delta F(x(u))$ donc $x((1+\delta\lambda)u) - x(u) = \delta \lambda u \partial x(u) / \partial u = \delta F(x(u))$ soit :

$$\lambda u \partial x(u) / \partial u = F(x(u))$$

où $\lambda u \partial x(u) / \partial u$ désigne le produit scalaire entre λu et $\partial x(u) / \partial u$. Si l'on pose $k\delta = t$ il vient $x((1+t\lambda/k)u) - x(u) = (t/k) \sum_{s=0}^{k-1} F(x((1+\delta\lambda)^s u))$ et, lorsque $k \rightarrow \infty$, la solution vérifie $x(e^{\lambda t} u) - x(u) = \int_0^t F(x(e^{\lambda s} u)) ds$. Mais il n'est pas évident que cette solution asymptotique soit plus simple à étudier que l'équation de départ.

Guy CIRIER, 74, rue Dunois, 75646, Paris Cedex 13.

Bibliographie

- Cirier, G. : *Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron-Frobenius dans le cas de difféomorphismes à point fixe : un calcul expéditif*, Revue de l'ISUP, n°1&2, 2004
- Gantmacher, F.R. : *Théorie des matrices, T1*, Dunod, Paris, 1966
- Lasota, A., M.C. Mackey : *Chaos, fractals, and noise*, Springer-Verlag, New York, 1994

2. Introduction

The asymptotic behavior of the order statistics from a sample with random dimension N_n , $n \geq 1$, has several applications in Queueing and Reliability theory [1], pp. 308-326, and references therein. The random sample size case arises in applied models where one has no control over the dependence between the sample size and the underlying sequence of random variables, such as binary models and branching

*Partially supported by FCT/POCTI/FEDEC.

Ildefonso Ferreira, Department of Mathematics, University of Beira Interior, 6201-001, Covilhã, Portugal. E-mail:iferr@mat.ubi.pt

M. G. Teófilo, Department of Mathematics, University of Coimbra, 3001-201, Coimbra, Portugal. E-mail:teofilo@mat.ucp.pt