



**HAL**  
open science

# **Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron-Frobenius dans le cas de difféomorphismes à point fixe: un calcul expéditif**

Guy Cirier

## ► To cite this version:

Guy Cirier. Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron-Frobenius dans le cas de difféomorphismes à point fixe: un calcul expéditif. Annales de l'ISUP, 2004, XLIX (1), pp.35-64. <hal-03637664>

**HAL Id: hal-03637664**

**<https://hal.science/hal-03637664v1>**

Submitted on 11 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris  
 XLIX, fasc. 1, 2004, 35 à 64

**Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron-Frobénius  
 dans le cas de difféomorphismes à point fixe :  
 un calcul expéditif  
 par Guy CIRIER**

Je me suis permis de qualifier ce calcul d'expéditif, car, contrairement aux techniques employées par les mathématiciens qui étudient l'opérateur de Perron-Frobénius, celles utilisées ici sont presque classiques et élémentaires : pas de mesures d'Hausdorff, pas de partitions sophistiquées, pas d'arsenal de démonstrations compliquées. Si je me montre expéditif avec les mathématiques, je m'empresse d'ajouter qu'il convient de ne pas procéder de même dans la vie de tous les jours ou en politique : je pense ici aux pratiques de l'administration Bush en Irak et je ne peux pas m'empêcher de penser à un vieux film américain de ma jeunesse : le Voleur de Bagdad.<sup>(1)</sup>

**Résumé :** On détermine la solution stationnaire de l'opérateur de Perron-Frobénius d'un difféomorphisme à point fixe à partir des surfaces semi invariantes attachées à ce difféomorphisme. Cette solution donne rapidement beaucoup d'informations les zones de densité maximum. La technique peut être appliquée au cas de la résonance entière ou irrationnelle et l'on peut montrer que la distribution des monômes résonants détermine celle des coordonnées en résonance.

**Summary :** in this paper we find the stationary solution of the Perron-Frobenius operator for a diffeomorphism in the neighbourhood of a fixed point.

**Mots clés :** solution stationnaire, opérateur de Perron-Frobénius, opérateur constrictif, itération de difféomorphisme à point fixe, résonance irrationnelle, domaine de Poincaré, domaine d'Anosov.

**Classification :** Premier 37C40 ; Second 47A35, 37D45, 62G07

**Première étape : la solution de l'équation d'invariance  
 par la recherche des surfaces semi invariantes**

On se place dans l'espace euclidien réel mesurable  $E^d$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$  et  $f$  est une application de  $E^d$  dans  $E^d$ . L'opérateur de Perron-Frobénius associé à la densité  $g \in \mathcal{D} \subset L^1$ , est défini pour tout borélien  $A$  par :

$$\int_A P \circ g(x) dx = \int_{f^{-1}(A)} g(x) dx$$

$P$  est l'unique opérateur défini par cette équation. Si  $f$  est un difféomorphisme continûment dérivable de classe  $C^1$ , ce que l'on supposera désormais, l'opérateur de Perron-Frobénius s'exprime explicitement (voir Lasota et Mackey, noté dans la suite L.M.) pour toute fonction  $g$  de  $\mathcal{D}$  (espace des densités) :

$$P \circ g(x) = g \circ f^{-1} |f^{-1}| \text{ presque partout, où } |f^{-1}| \text{ est le déterminant de la jacobienne de } f^{-1}.$$

On se propose de trouver les distributions invariantes (stationnaires), c'est-à-dire les densités  $g$  qui vérifient :

$$g = P \circ g(x) = g \circ f^{-1} |f^{-1}| \text{ presque partout. On dira que } g \text{ est solution de l'équation de Perron-Frobénius.}$$

<sup>(1)</sup> La Revue de l'ISUP décline toute responsabilité sur les propos tenus dans cette introduction, propos qui n'engagent que leur auteur.

### Conditions de linéarisation de $f$

Pour trouver la solution stationnaire de l'opérateur, on a besoin de linéariser  $f$  et de définir les semi-invariants  $\varphi_i$  associés au difféomorphisme  $f : \varphi_i \circ f = \lambda_i \varphi_i$ , où  $\varphi_i$  est une application de  $E^d$  dans  $E$ . On a rencontré des difficultés qui n'étaient pas prévues en examinant les conditions d'existence des théorèmes sur ce sujet, ce qui oblige à ouvrir cette parenthèse indispensable bien qu'elle ne concerne pas directement le sujet. En première lecture, le lecteur peut directement passer à la formule de la densité en supposant que la condition (\*) de non résonance est vérifiée.

Depuis Poincaré, Seigel et Steinberg, on sait que l'on a en général  $d$  fonctions propres  $\varphi_i$  dans  $E^d$ , correspondant à  $d$  valeurs propres  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,\dots,d$ . Les valeurs propres  $\lambda$  ne sont autres que les multiplicateurs de  $f$  au point fixe 0, déterminés par :  $|f'_0 - \lambda I| = 0$ . Si l'on désigne par  $\varphi$  l'application formée des  $\varphi_i$ , l'équation de semi invariance s'écrit :  $\varphi \circ f = \lambda \varphi$ , où  $\lambda$  désigne la matrice diagonale des valeurs propres. Si tel est le cas, on dit que l'on a linéarisé  $f$ .

S. Steinberg a construit et étudié l'existence de ces solutions  $\varphi_i$  en détail, même dans le cas de valeurs propres résonantes. Il déclare que sous la seule condition de non résonance :

$$(*) \quad \prod_j \lambda_j^{n_j} \neq \lambda_i, \text{ avec des entiers non négatifs } n_j : \sum_j n_j > 1,$$

il existe un voisinage de 0 qui linéarise  $f$  : Certes, en cas de résonance :

$$(Rs^*) \quad \prod_j \lambda_j^{n_j} = \lambda_i,$$

on ne peut pas linéariser. Mais la seule condition (\*) n'est pas suffisante pour assurer la linéarisation de  $f$ , en particulier lorsque la résonance est irrationnelle.

Il faut d'abord énoncer les hypothèses de linéarisation qui ont été mises en œuvre avant Steinberg :

#### Définitions:

- Un domaine de Poincaré est défini par la condition (voir Arnold) :

$$(P^*) \text{ non résonance : } \prod_j \lambda_j^{n_j} \neq \lambda_i, \text{ avec des entiers } n_j : \sum_j n_j > 1 \text{ et}$$

l'enveloppe convexe des  $\log \lambda_j$  ne contient pas l'origine ;

Les valeurs propres sont alors toutes supérieures (ou respectivement, toutes inférieures) à l'unité en valeur absolue.

- Un domaine de Seigel est défini par la condition de Seigel (voir Arnold) qui doit être vérifiée par tout ensemble d'entiers  $n_j$  non négatifs tels que  $|n| = \sum_j n_j$  :

$$(S^*) \quad \left| \lambda_i - \prod_j \lambda_j^{n_j} \right| \geq C |n|^{-\nu}, \text{ avec des entiers } n_j : |n| > 1, C > 0 \nu > 0$$

- On a été obligé de prendre en compte une condition qui précise le domaine de Seigel :

#### Définition de la résonance irrationnelle

Un point  $\alpha$  du plan de résonance est irrationnel s'il existe des réels (irrationnels)  $\alpha_j \geq 0$  et non tous nuls tels que :

$$\sum_j \alpha_j \log |\lambda_j| = \log |\lambda_i| \text{ avec } \sum_j \alpha_j \geq 1$$

Un tel point  $\alpha$  est dit résonant.

#### Remarque :

Le cas trivial  $\log |\lambda_i| = \log |\lambda_i|$  est exclu. Si  $d \geq 2$ , on a toujours une résonance irrationnelle, mais deux cas se présentent : si les modules des valeurs propres ne sont pas tous supérieurs à l'unité (ou tous inférieurs à

l'unité), on peut toujours trouver une résonance irrationnelle de la forme :  $\sum_j \alpha_j \log |\lambda_j| = 0$  que l'on appellera résonance d'Anosov.

Dans le cas contraire, la condition devient :  $\sum_{j \neq i} \alpha_j \log |\lambda_j| = \log |\lambda_i|$  et  $\sum_{j \neq i} \alpha_j \log |\lambda_j| \neq 0$  que l'on appellera résonance de Poincaré. Notons enfin, que dans tout problème où les logarithmes des valeurs propres sont de signes différents, les deux types de résonance irrationnelle se côtoient dès la dimension 3.

On montre en Annexe I, que l'on peut alors approximer les  $m+1$  coordonnées non nulles de  $\alpha$ , pour un nombre entier quelconque  $n$  donné, par  $m$  entiers  $n_j$  et l'entier  $q$  vérifiant :  $\sup_j |n_j - \alpha_j q| < 1/n^{1/m}$  avec  $q < n$  (inégalité de Dirichlet). Donc, les valeurs propres vérifient en conséquence la condition d'approximation  $|\prod_j \lambda_j^{n_j} - \lambda_i^n| < |\lambda_i^n| e^{c/n^{1/m}} c/n^{1/m}$  où l'on pose  $q=n_i$ . Pour  $\alpha$  fixé, à chaque  $n'$ ,  $n' \geq n$ , il correspond  $m$  entiers  $(n')=(n'_1, \dots, n'_m)$  et  $q'=n'_i$  approximant les  $m+1$  coordonnées de  $\alpha$ . Limitons nous au cas d'un domaine résonant d'Anosov et posons :

$R_\alpha = \left\{ (n') : \prod_j \lambda_j^{n'_j} - 1 < e^{c/n^{1/m}} c/n^{1/m} \text{ et } n' \geq n, m+1 = \text{card}(\alpha_j \neq 0) \right\}$  et  $R = \bigcup_\alpha R_\alpha$  où  $\alpha$  parcourt le plan de résonance et  $S = \bar{R}$ . Soit  $N$  l'ensemble  $d$ -dimensionnel des exposants  $(n')$  de la série de Taylor de  $f^k$ . séparons ces exposants en deux groupes : ceux appartenant à  $S \cap N$  (de somme  $f^k_S$ ) et ceux appartenant à  $R \cap N$  (de somme  $f^k_R$ ) de sorte que  $f^k = f^k_R + f^k_S$ . On montre enfin qu'il faut renforcer la condition de non résonance entière par une condition (C) de non résonance irrationnelle :  $|f^k \circ \psi_R| < |\lambda_i^k| |x| \|\psi(x)\|_R \|e^{kc/n^{1/d-1}} kc/n^{1/d-1}$  pour toute  $k$ ième itération et tout  $n$  où  $\psi$  est l'inverse de  $\varphi$  :  $\psi = \varphi^{-1}$ , dans le cas de résonance d'Anosov irrationnelle.

### Condition de non résonance

La condition de non résonance pour tout cet article sera donc :

(\*)  $\prod_i \lambda_i^{n_i} \neq \lambda_j^k$ , avec des entiers non négatifs  $n_i$  :  $\sum_i n_i > 1$ ,

et la condition (C) :  $|f^k \circ \psi_R| < |\lambda_i^k| |x| \|\psi(x)\|_R \|e^{kc/n^{1/d-1}} kc/n^{1/d-1}$  pour toute  $k$ ième itération et tout  $n$ ,

où  $R$  est réduit au domaine d'Anosov  $R = \bigcup_\alpha \left\{ (n') : \prod_j \lambda_j^{n'_j} - 1 < e^{c/n^{1/m}} c/n^{1/m} \text{ et } n' \geq n \right\}$

Désormais, le couple de ces deux conditions réunies sera encore appelé condition (\*).

### Remarques

- On pourra préciser ces résultats en graduant  $R$  selon le nombre  $m$  de coordonnées de  $\alpha$  strictement positives  $m=2,3,\dots,d$ . Supposons par exemple  $n^{-\delta} c(x) < |a_i \circ \psi_R| < n^{-\delta} d(x)$  et, pour  $m$  fixé, on aura l'inégalité  $n^{-\delta} c(x) < |f_i \circ \psi_R| < |\lambda_i^k| |x| \|\psi(x)\|_R \|e^{kc/n^{1/d-1}} c/n^{1/d-1}$ . Soit  $m_0$  tel que  $1/(m_0-1) - \delta > 0$  c'est à dire  $1/\delta + 1 > m_0 \geq 1/\delta$ , si  $m < m_0$  le reste de la série de  $\psi$  ne tend pas vers 0, alors que celle de  $f$  converge, il y aura résonance irrationnelle, mais, si  $m > m_0$ , il n'y aura pas de résonance : la résonance apparaît plutôt pour les faibles dimensions.

- Si (C) n'est pas vérifiée, cette situation peut générer une infinité de termes résonants très voisins et l'on ne pourra plus linéariser  $f$  : elle sera examinée à la fin de la troisième étape.

- La condition (\*) implique  $\lambda_j \neq (0,1)$  pour tout  $i$ .

- Si  $E$  est construit sur  $R$ , les valeurs propres complexes figurent par paires conjuguées, notées  $(\lambda$  et  $\bar{\lambda})$  et, en associant une paire de fonctions complexes conjuguées  $\varphi$  et  $\bar{\varphi}$ , on reste dans le cas général.

- On rappelle qu'à chaque point fixe de l'application  $f$ , correspond une application  $\varphi$ . Les solutions sont localisées dans chaque voisinage de points fixes et le même travail devra être refait pour chaque point fixe de  $f$ . On ne parlera plus, sauf nécessité, du point fixe explicitement dans la suite.

### Densité stationnaire

#### Formule de la densité

Si  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$  et admet un point fixe 0, sous la condition (\*), et, à l'exception des ensembles de mesure nulle où les  $\varphi_i$  s'annulent, une solution de l'équation de Perron Frobenius s'écrit dans le voisinage du point fixe:

$$g = \frac{|\varphi|}{\prod_i \varphi_i}$$

où  $i = 1, 2, 3, \dots, d$  et  $|\varphi|$  est le déterminant jacobien de  $\varphi$ .

#### Démonstration

Si  $f$  admet un point fixe 0, il existe dans le voisinage de 0, sous la condition (\*), une application  $\varphi$  vérifiant l'équation vectorielle  $\varphi \circ f = \lambda \varphi$ , qui s'écrit :  $\varphi = \lambda \varphi \circ f^{-1}$

soit, en prenant sa jacobienne :  $\varphi' = \lambda \varphi' \circ f^{-1} f^{-1}$  puis, les déterminants en valeur absolue, on a :

$$|\varphi'| = |\lambda| |\varphi' \circ f^{-1}| |f^{-1}|$$

Comme le déterminant  $|\lambda|$  est le produit des valeurs propres :

$\prod_i \varphi_i = \prod_i \lambda_i \prod_i \varphi_i \circ f^{-1} = |\lambda| \prod_i \varphi_i \circ f^{-1}$  et, si les produits  $\prod_i \varphi_i \circ f^{-1}$  et  $\prod_i \varphi_i$  ne sont pas nuls :

$$\frac{|\varphi'|}{\prod_i \varphi_i} = |f^{-1}| \frac{|\varphi' \circ f^{-1}|}{\prod_i \varphi_i \circ f^{-1}}$$

#### Remarques

- Cette formule relie de façon explicite la densité invariante aux surfaces semi invariantes attachées au point fixe.

- Si une racine est complexe, on a  $\varphi \circ f = \lambda \varphi$  et son conjugué.  $|\varphi'|$  et  $|\varphi' \circ f^{-1}|$  sont simultanément réels ou imaginaires car le déterminant de  $\varphi' = (\varphi', \bar{\varphi}', \varphi_i')$ , où  $\varphi$  et  $\bar{\varphi}$  sont conjugués et où  $\varphi_i$  désigne les autres fonctions propres, s'écrit :  $|\varphi'| = |(\varphi', \bar{\varphi}', \varphi_i')| = |(\varphi + \bar{\varphi}, \bar{\varphi} - 1/2(\varphi + \bar{\varphi}), \varphi_i')| = 2|(\operatorname{Re} \varphi', \operatorname{Im} \varphi', \varphi_i')|$  ;

$\varphi \circ f \bar{\varphi} \circ f = \lambda \bar{\lambda} \varphi \bar{\varphi}$  sont réels : on remplace dans la formule  $\varphi \bar{\varphi}$  par le carré du module de  $\varphi$  :  $|\varphi|^2$ .

#### Unicité de la solution

Un lemme très simple montre l'unicité modulo des Dirac.

#### Lemme

Si  $g$  est une solution invariante de l'opérateur de Perron-Frobenius associé à  $f$ , et s'il existe une bijection  $\varphi$  de classe  $C^1$  telle que  $f = \varphi^{-1} \circ h \circ \varphi$ ,  $g \circ \varphi^{-1}$  est une solution invariante de l'opérateur de Perron-Frobenius associé à  $h$ .

#### Démonstration de l'unicité

Dans  $E^d$ , le changement de variable  $t = \varphi(x)$ , transforme  $f$  en  $f_\varphi = \lambda t$  et ramène l'étude à  $d$  équations linéaires indépendantes que l'on sépare en deux groupes : celui dont les valeurs propres sont plus petites que 1 et celui dont les valeurs propres sont plus grandes que 1. Cela permet, par le changement de variables  $\varphi$ , d'affirmer l'unicité de la solution (aux mesures de Dirac près) si la densité est continue : l'équation de Perron-Frobenius s'écrit :  $g(t) = |\lambda|^{-1} g(t/\lambda)$  En multipliant les deux membres de l'équation par  $\prod t = \prod t_i$  et en posant  $h(t) = g(t) \prod t$  on obtient :  $h(t/\lambda) = h(t)$  et (si on ne considère que les valeurs propres plus grandes que

1), si  $h(t)$  est continue  $h(t/\lambda^p) = h(0)$  sous réserve que  $\lambda \neq (1,0)$ , ce qui est implicite sous (\*). Le lemme permet de généraliser la formule de la densité à des espaces plus généraux que  $E^d$ .

### Corollaire

Soit, localement,  $T$  un rectangle de l'espace des  $\varphi$ , tel que l'application  $\varphi$  soit un difféomorphisme continûment dérivable de  $E^d$  dans  $E^d$ ; si  $1/\Pi_i \varphi_i \in L^1$  dans l'espace  $\Phi$  des  $\varphi$ , la mesure invariante  $M(\varphi)$  peut s'écrire :

$$M(\varphi) = \int_{\varphi^{-1}(T)} g(x) dx = \Pi_i \log \varphi_i$$

### Démonstration

Soit un voisinage de 0, tel que  $\varphi = \varphi(x)$  soit bijectif et continûment différentiable :  $d\varphi = |\varphi'| dx$

Choisissons le rectangle  $T$  de l'espace des  $\varphi$  de sorte que son image réciproque soit contenue dans ce voisinage :

$$M(\varphi) = \int_{\varphi^{-1}(T)} g(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(T)} |\varphi'| / \Pi \varphi dx = \int_T 1/\Pi \varphi d\varphi = \Pi_i (\log |\varphi_i| / c_i)$$

or, les  $\varphi_i$  sont définis à une constante multiplicative près, d'où le résultat après normalisation des  $\varphi_i$ .

### Remarque

Si une valeur propre est complexe, en observant que :  $d\varphi \bar{d\varphi} / \varphi \bar{\varphi} = d|\varphi| d|\varphi| / |\varphi|^2$  on peut interpréter  $|\varphi|$  comme le module de  $\varphi$ , et la mesure associée aux 2 valeurs propres conjuguées est  $(\log |\varphi|)^2$ .

Divers exemples sont examinés en Annexe II.

## Deuxième étape : interprétation probabiliste des résultats

On peut montrer que les itérations de  $f$  font tendre les mesures ( $M^k$  relative à la  $k$ ème itération) vers des constantes dont on signale ce résultat :  $k^{-d} M^k \rightarrow \Pi_i \log |\lambda_i| = M^\infty$

### Interprétation probabiliste de $\Phi$

Pour tenter de probabiliser les résultats, la méthode suivante est proposée. On suppose  $E$  construit sur les réels : Sous les conditions (\*), (qui impliquent  $|\lambda_i| \neq (1,0)$ ), on considère l'espace des  $\varphi$ , noté  $\Phi$ .

#### Pavage multiplicatif de $\Phi$

Sous la condition (\*), soit  $T = \prod I_i$  le rectangle de base de  $\Phi$ , produit cartésien des intervalles  $I_i$ , ainsi définis :

Si  $\lambda_i > 0$ ,  $I_i = (1, \lambda_i)$ , et seul le demi espace positif sera parcouru par des itérations positives et négatives,

Si  $\lambda_i < 0$ ,  $I_i = (-1, \lambda_i)$  : mais les itérations paires seront images de  $I_i = (1, -\lambda_i)$

Si  $\lambda_i$  est complexe, on se ramène au cas du module  $> 0$ , avec une mesure  $\log |\varphi|^2$ , mais il faudra en prendre l'image réciproque sur  $\varphi$  et  $\bar{\varphi}$ .

Sur  $T$ , on peut définir une mesure de probabilité en posant :

$$Prob(\varphi) = M(\varphi) / M^\infty = \Pi_i \log |\varphi_i| / \log |\lambda_i|, \text{ avec } \varphi_i \in I_i.$$

sur  $T = \prod I_i$ , chaque  $\log |\varphi_i| / \log |\lambda_i|$  est une fonction monotone croissante de  $\varphi_i$ , chaque coordonnée peut être ainsi considérée comme une variable aléatoire indépendante, puisque la loi de l'ensemble est le produit des lois marginales et que le domaine est rectangulaire.

On couvre alors l'ensemble  $\Phi$  par itération de  $f^k$ ,  $k$  étant entier quelconque positif ou négatif à partir du rectangle de base  $T$ .  $f$  applique  $I_i^k = \lambda_i^k I_i$  sur  $I_i^{k+1}$  et  $T^k = f^k(T)$ .

$\varphi_i^k = \varphi_i \circ f^k = \lambda_i^k \varphi_i$  est la transformée de la v.a.  $\varphi_i$  définie sur  $T$  par la  $k$ -ième itération et  $d\varphi^k = |\lambda_i^k| d\varphi$ . Sa densité sur  $T^k$  est :  $1/|\Pi_i \varphi_i^k \log |\lambda_i^k||$  de sorte que chaque pavé a une mesure unité :  $\int_{T^k} 1/|\Pi_i \varphi_i^k \log |\lambda_i^k|| d\varphi^k = \int_T 1/|\Pi_i \varphi_i \log |\lambda_i|| d\varphi = 1$

Dans ce modèle probabiliste, les variables aléatoires  $\varphi_i^k$  sont indépendantes.

Puisque  $\varphi_i^k$  est la transformée de la v.a.  $\varphi_i$  :  $\varphi_i^k = \lambda_i^k \varphi_i$ , on aura les relations :

L'espérance de  $\varphi_i^k$  sera :

$$E(\varphi_i^k) = \lambda_i^k E(\varphi_i) = \lambda_i^k E$$

Le moment du second ordre de  $\varphi_i^k$  sera :

$$E((\varphi_i^k)^2) = \lambda_i^{2k} E(\varphi_i^2)$$

$$\text{d'où, la variance : } V(\varphi_i^k) = \lambda_i^{2k} V(\varphi_i) \text{ et l'écart-type : } D(\varphi_i^k) = |\lambda_i^k|^k D(\varphi_i) = |\lambda_i^k|^k D$$

### Inégalité de Bernstein pour les itérations :

Sur  $T^k$ ,  $|\varphi_i^k| < |\lambda_i^k| \sup(1, |\lambda_i|) = |\lambda_i^k| K$  et on a :

$$\text{Prob}(|\varphi_i^k - \lambda_i^k E| > \mu |\lambda_i^k|^k D) < \exp(-\mu^2 / 2(1 + \mu K / D)^2)$$

### Démonstration

Il suffit de remplacer, dans l'inégalité classique, les expressions trouvées.

### Conséquence

Si  $|\lambda_i| < 1$ , les v.a.  $\varphi_i^k$  tendent vers 0 en probabilité.

De même, en prenant les espérances des inverses des v.a.  $\varphi_i^k$ , pour  $|\lambda_i| > 1$ , tendent vers l'infini.

### Exemples

#### Dimension de Lyapounov

La conjecture de Kaplan et Yorke prédit que la dimension de Lyapounov est définie par  $d_i$  sous la condition (\*) : Soit  $\ell$  la plus grande valeur pour la quelle  $\log |\lambda_1| + \log |\lambda_2| + \dots + \log |\lambda_\ell| \geq 0$

$$d_i = d - (\log |\lambda_1| + \log |\lambda_2| + \dots + \log |\lambda_\ell|) / \log |\lambda_{\ell+1}|$$

$$d_i = 0 \quad \text{si } \log |\lambda_1| < 0$$

$$d_i = d \quad \text{si } \log |\lambda_1| + \log |\lambda_2| + \dots + \log |\lambda_\ell| \leq 0$$

esquisse de démonstration :

La démonstration est celle esquissée par Kaplan et Yorke ; mais ici on peut travailler avec simplicité sur le pavage multiplicatif dans  $\Phi$  sous la condition (\*).

On recouvre  $T = \Pi_i I_i$  avec  $N_\varepsilon$  carrés de côtés  $\varepsilon$ . Après  $k$  itérations, les carrés se transforment en rectangles de  $T^k$  de côtés  $|\lambda_i^k| \varepsilon$ ; pour recouvrir  $T^k$  par des carrés de côtés  $|\lambda_{\ell+1}|^k \varepsilon$ , il faudra  $\Pi_i |\lambda_i^k| / |\lambda_{\ell+1}|^k N_\varepsilon$  carrés.

Si on définit la dimension par  $d_i = \lim \log N_\varepsilon / \log 1/\varepsilon$ , on a le résultat dans  $\Phi$ , puis il suffit démontrer la conservation de la dimension, par retour, dans l'espace d'origine. (il suffira que la transformation  $\varphi$  soit bi-Lipschitzienne).

#### Autres exemples

On peut raisonnablement espérer résoudre également certaines conjectures dans l'espace des  $\Phi$ , puis remonter dans l'espace des itérations par théorèmes appropriés en montrant la conservation de la propriété par la transformation  $\varphi^{-1}$  (on remarquera que  $\varphi$  est voisine de l'identité près de l'origine).

### Zones de densité maximum

La probabilisation des  $\varphi_i^k$  donne les zones de densité maximale pour  $k$  fixé très grand.

#### Définition

Soit une  $g$  densité sur  $E^d$ . Un point de  $E^d$  aura une densité maximum si  $\partial g / \partial x = 0$ .

Si ce point est astreint à appartenir à une sous variété de  $E^d$ , il faudra utiliser les conditions de Lagrange.

#### Lemme

Sous la condition (\*), il n'y a pas de points de densité maximum dans  $\Phi$ .

#### Démonstration

Sous la condition (\*), on partage l'ensemble des indices  $i = 1, 2, \dots, d$  en deux sous-ensembles  $L$  et  $J$ , avec  $L = [i: |\lambda_i| > 1]$  et  $J = [j: |\lambda_j| < 1]$ . Les  $|\lambda_i|$  sont différents de l'unité. Si  $j \in J$ , les  $\varphi_j^k$  vont tendre vers zéro avec une probabilité 1. Du moins, plus exactement, les  $\varphi_i^k$  tendent presque complètement sûrement vers 0 en vertu de l'inégalité de Tchebichev. ( $\text{Prob}(\cup_n |\varphi_j^k| > |c|^n) \rightarrow 0$  avec  $|c| < 1$ , pour tout  $k > n$ ). Autrement dit, avec une probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ , presque tous les  $\varphi_j^k$  seront tels que  $|\varphi_j^k| < |c|^n = \alpha_n(\varepsilon)$  pour tout  $k > n$ .

La probabilité marginale des  $[\varphi_j^k: |\varphi_j^k| < \alpha(\varepsilon), j \in J]$  tend vers 1.

Avec une probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ , la densité conditionnelle des  $\varphi_i^k, i \in L$ , sachant les  $[\varphi_j^k: |\varphi_j^k| < \alpha(\varepsilon), j \in J]$ , sera la densité marginale de  $L$ , en raison de l'indépendance :

$1 / \prod_i \varphi_i^k \log |\lambda_i|$  avec  $i \in L$ .

Le problème s'écrira :

$\text{Max} 1 / \prod_i \varphi_i^k \log |\lambda_i|$  où  $i \in L$

La dérivée de  $1 / \prod_i \varphi_i^k \log |\lambda_i|$  par rapport à  $\varphi_i^k$  ne s'annule pas sur  $I_i^k$ .

- Plaçons nous maintenant dans  $E^d$ .

Il s'agira de maximiser la densité pour les indices  $i \in L$  sachant que les  $\varphi_j \rightarrow 0$  pour  $j \in J$ . On se ramène, en quelque sorte à un problème d'optimisation.

#### Critère de densité maximum

Sous la condition (\*), soit une partition quelconque des indices des composantes de  $x$  dans  $E^d$  :  $x = (x_L, x_J)$ . Avec une probabilité 1, les zones de densité maximum seront données par les plans tangents correspondant à des points « critiques » :

$$\alpha_j \partial \varphi_j / \partial x_L = 0$$

avec  $\varphi_j = 0$  où  $j \in J$  et  $J = [j: |\lambda_j| < 1]$ , le sous-ensemble  $L$  étant défini par complémentarité de  $J$ .

De plus, soit  $M$  l'indice de l'ensemble  $J = [j: |\lambda_j| < 1]$  tel que  $|\lambda_M| > |\lambda_j|$  quelque soit  $j \in J$ . Avec une probabilité 1, les zones de densité maximum dans ces plans seront données par les conditions :

$$\partial \varphi_M / \partial x_L = 0$$

Autrement dit, les zones de densité maximum se situeront sur les extrema partiels relatifs à tout bloc de  $L$  coordonnées de  $\varphi_M$  dans les plans tangents correspondant à des points « critiques ».

Notons que les itérés de ces points par  $f^k$  seront également des maxima.

### Démonstration

Soit une partition quelconque des indices des composantes de  $x$  dans  $E^d$  :  $x = (x_L, x_J)$  ; la densité de

la loi marginale de  $\varphi_L$  par rapport à la mesure de Lebesgue sera :  $g_{x_L}^k = \frac{|\varphi_L^k|}{\prod_i \varphi_i^k |\log \lambda_i^k|}$ ,  $i \in L$

sous les contraintes :  $|\varphi_j^k| < \alpha(\varepsilon)$ , avec une probabilité supérieure à  $1 - \varepsilon$ ,  $j \in J$ .

Soit une base  $Z$  quelconque de  $E^d$ , et  $z$  un point de  $E^d$  de coordonnées  $z = (z_L, z_J)$  ; la densité s'écrira

$$g_{z_L}^k = g_{x_L}^k \left| \frac{\partial x_L}{\partial z_L} \right|.$$

Choisissons maintenant le changement de coordonnées de  $x$  en  $z$ , dans  $E^d$ , noté en deux blocs :

$$z_L = \log |\varphi_L^k(x)| / \log |\lambda_L^k|, \text{ pour tous les } i \in L,$$

$$z_J = x_J; \text{ pour tous les } j \in J.$$

D'où la solution, notée ici par blocs, en dérivant avec les multiplicateurs  $\mu_j$  de Lagrange :

$\frac{\partial g_{z_L}^k}{\partial z_L} + \mu_j \frac{\partial (\varphi_j^k - \delta \alpha(\varepsilon))}{\partial z_L} = 0$ , où  $\delta = (+1, -1)$  selon la contrainte qui entre en butée. Or, dans la base  $Z$  de  $E^d$ , la densité vaut  $g_{z_L}^k = 1$ , et la solution devient :

$$0 = \mu_j \frac{\partial \varphi_j^k}{\partial z_L} = \sum_i \lambda_i^k \mu_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_L}.$$

Comme  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial z_L} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_L} \left( \frac{\partial x_L}{\partial z_L} \right) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_J} \left( \frac{\partial x_J}{\partial z_L} \right)$ , que  $\frac{\partial x_J}{\partial z_L} = 0$  et que la matrice  $\frac{\partial x_L}{\partial z_L}$  est inversible, la condition devient :  $0 = \sum_i \lambda_i^k \mu_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_L}$ .

Si  $M$  est l'indice de l'ensemble  $J$  vérifiant :  $|\lambda_M| > |\lambda_j|$  quelque soit  $j \in J$  ; lorsque  $k$  tend vers l'infini, la condition devient en divisant par  $\lambda_M^k$  :  $0 = \frac{\partial \varphi_M}{\partial x_L} + \sum_{j \neq M} \lambda_j^k / \lambda_M^k \mu_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_L}$  où la dernière somme tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini et il reste en priorité  $0 = \frac{\partial \varphi_M}{\partial x_L}$  et puis on passe ensuite à l'indice  $M-1$ . Ainsi, les  $L$  équations maximisant le critère  $\varphi_M$ , réunies aux card  $J$  équations  $\varphi_j = 0$ , détermineront les points de plus forte densité.

Notons encore que la présence simultanée de valeurs propres  $> 1$  et  $< 1$ , peut introduire des résonances irrationnelles qui seront étudiées plus loin.

### Exemples

La méthode permet de situer rapidement la répartition des points itérés :

-En dimension deux, avec 1 valeur propre supérieure à 1 et 1 valeur propre inférieure à 1, on peut dire que les itérés se situeront la courbe  $\varphi_2 = 0$  correspondant à la plus petite valeur propre et que, sur cette courbe, les points les plus fréquents seront les extrema de  $\varphi_2$ .

-En dimension 3, avec 1 valeur propre supérieure à 1 et 2 valeurs propres inférieures à 1, les itérés se situeront sur la courbe  $\varphi_2 = 0$  et  $\varphi_3 = 0$  et l'on recherchera les extrema de  $\varphi_2$  correspondant à la plus grande valeur propre inférieure à 1 ; il faudra ensuite rechercher les éventuelles résonances irrationnelles.

### Interprétation dans le cas de la non résonance (\*) d'Anosov

Les informations obtenues seront complétées par une description (qui devrait être publiée prochainement) qualitative asymptotique de l'effet des itérations dans  $E^d$  en cas de non résonance (\*) d'Anosov dans un compact lorsque  $f$  est de classe  $C^2$ . On se contente ici de présenter une interprétation de la mesure invariante. L'équation de semi invariance  $\varphi \circ f = \lambda \varphi$  se sépare en deux groupes :

$$\varphi_i \circ f = \lambda_i \varphi_i \text{ avec } L = [i : |\lambda_i| > 1] \text{ et l'on pose } t = \varphi_L \text{ et } \lambda = \lambda_L,$$

$\varphi_j \circ f = \lambda_j \varphi_j$  avec  $J = [j; |\lambda_j| < 1]$  et l'on pose  $u = \varphi_j$  et  $\lambda' = \lambda_j$ .

On reprend le pavage multiplicatif  $\Phi - \{0\}$  obtenu par  $k$  itérations de  $f: f^k$ ,  $k$  étant un entier arbitraire positif ou négatif:  $T^k = f^k(T)$  à partir du rectangle de base  $T$  produit cartésien des intervalles  $I_j = (\varphi_j, |\varphi_j| \in [1, |\lambda_j|])$ . Le point  $x$  de  $E^d$  est ici considéré sous forme paramétrique:  $x(t, u)$ .

### Définition du domaine d'attraction $D$ de $0$

Par définition, le domaine d'attraction  $D$  de  $E^d$  du point fixe  $0$  pour l'application  $f$  sera l'image de  $\{0\} \cup \Phi - \{0\}$  dans  $E^d$  par l'application  $x(\lambda t, \lambda' u) = f(x(t, u))$ .

Le difféomorphisme  $f$  de  $E^d$  dans  $E^d$ , laisse globalement invariant le domaine d'attraction  $D$ . On remarque que, sous des conditions très générales, on ne peut avoir  $x(t, u) = x(t', u')$  pour  $(t, u) \neq (t', u')$ , car sinon, on aurait  $t = \varphi_L \circ x(t, u) = \varphi_L \circ x(t', u') = t'$  et le même résultat pour  $u$  et  $u'$ . Ainsi, avec cette définition, les cycles  $f^k(x_k) = x_k \neq 0$  (et leurs domaines d'attractions respectifs) par exemple ne font pas partie de  $D$ .

Supposons le domaine  $D$  contenu dans un compact de  $E^d$  autour du point  $0$ . Puisque  $\lambda^k u \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ , sous des conditions générales, les points de  $D$  vont tendre vers la variété  $W$  définie par  $\varphi_j(x) = 0$ , ou encore par la paramétrisation  $x(\lambda t) = f(x(t))$  où  $t \in \Phi_L - (0)$  et  $\lambda = \lambda_L$ .

### Définition de l'application $f_w$ de $W$ dans $W$

La restriction  $f_w$  de  $W$  dans  $W$ , associée à  $x$  fixé l'unique  $t = \varphi_L(x)$ , puis  $\lambda t$ , et enfin, fait correspondre de façon unique  $x(\lambda t) = f(x(t))$ . Ainsi, l'application  $f_w$  opère comme un changement de paramétrisation qui à  $t$  associe  $\lambda t$ .

Or, on sait que la mesure invariante par changement de paramétrisation est un volume et cela permet de dire que la mesure trouvée précédemment  $\prod_{i \in L} \log |\varphi_i|$  est le volume de  $W$ .

## Troisième étape : étude de la résonance

On classera dans cette partie, les cas où la condition(\*) n'est plus respectée. Mais on écarte ici le cas de valeur propre nulle, où le jacobien s'annule au point fixe et  $f$  n'est plus inversible. Cette situation ne sera donc pas traitée.

On commencera par étudier la résonance entière (sans résonance irrationnelle) et ensuite la résonance irrationnelle. La condition de résonance entière sans résonance irrationnelle s'écrira :

$$(Rs^*) \quad \prod_j \lambda_j^{n_j} = \lambda_i, \text{ avec des entiers } n_j : \sum_j n_j > 1.$$

On distinguera deux cas sans résonance irrationnelle :

- 1- la résonance entière d'Anosov :  $\prod_j \lambda_j^{n_j} = 1$
- 2- la résonance entière de Poincaré :  $\prod_{j \neq i} \lambda_j^{n_j} = \lambda_i, (\sum_j n_j \log |\lambda_j| \neq 0)$ ; en ce cas, toutes les valeurs propres sont toutes supérieures ou toutes inférieures à 1.

### Résonance entière d'Anosov

Après avoir étudié le cas unidimensionnel d'une valeur propre unité, on s'intéressera à la résonance :  $\prod_j \lambda_j^{n_j} = 1$ . On prend pour origine le point fixe  $0$  dans tout ce qui suit.

### Cas unidimensionnel d'une valeur propre unité

On verra par la suite l'importance de cet exemple.

Soit l'application  $H(z) = z(1 + h(z))$  qui applique un ensemble unidimensionnel compact  $Z$  de  $R_s$  dans lui-même. On se propose de chercher la densité  $g$  invariante continûment dérivable de l'opérateur de Perron Frobenius  $P$  associé à  $H$  au voisinage du point fixe 0, si elle existe. La valeur propre est 1. Dans cette étude, on laissera de côté les cas où  $h$  jouit de propriétés classiques pour se placer délibérément dans la situation de non convergence, situation qui a fait l'objet d'études ( voir Myrberg) mais, qui mérite quelques développements.  $h$  est au moins de classe  $C^2$ .  $H$  est certes injective au voisinage de 0, mais on va supposer ici que  $H$  a un nombre fini d'images réciproques  $k_i(z)$ , avec les bijections  $H \circ k_i = k_i \circ H = Id$ ,

Pour mieux comprendre les motifs de l'étude, on peut consulter l'exemple introductif de l'Annexe II, cas résonant.

### Lemme de majoration

Soient une densité  $g$  et  $P$  l'opérateur de Perron Frobenius associé à  $H$ , supposé avoir un nombre fini d'images réciproques  $k_i(z)$  et appliquant un compact  $Z$  de  $R_s$  dans lui-même : Supposons  $|1+(zh(z))| > 1+|dz|$  sur chaque branche  $k_i(z)$  et  $zh(z)$  2 fois continûment dérivable sur  $R_s$  :  $\sup(|g'|/g)/(1+|dz|)^n < b$  et  $|(zh(z))'| < c$ . Pour tout  $n > n(g)$ , on a :

$$P^n g \leq |z|^{c/a} \exp b|z|$$

### Démonstration

$H \circ k_i = k_i \circ H = Id$ , l'opérateur de Perron Frobenius associé à  $H$ , sera :

$$Pg = \sum g(k_i) k_i'$$

Pour obtenir l'inégalité, on reprend la démonstration de Krzyzewski et Slenk (1976) ( voir L.M.), utilisée dans un autre contexte, en dérivant  $Pg$  par rapport à  $z$  :

$$\begin{aligned} |Pg'|/Pg &= \left| \frac{\sum (g(k_i) k_i')'}{\sum (g(k_i) k_i')} \right| = \left| \frac{\sum g(k_i) k_i'^2 + \sum g(k_i) k_i''}{\sum (g(k_i) k_i')} \right| \\ &\leq \sup k_i' \text{Max}_i (|g(k_i)'|/g(k_i) + \sup |k_i''|/k_i') \end{aligned}$$

or,  $|k_i'| = |H'| = |1+(zh(z))'| > 1+|dz|$ ,  $|k_i''|/k_i'^2 = |H''| = |(zh(z))''| < c$  sur  $R_s$ , donc  $\sup |k_i''|/k_i' < c \sup |k_i'| < c/(1+|dz|)$ .

Il en résulte :

$$\sup |Pg'|/Pg \leq (\sup |g(k_i)'|/g(k_i) + c) \sup |k_i'| \leq (\sup |g(k_i)'|/g(k_i) + c)/(1+|dz|) \text{ et par récurrence :}$$

$$|P^n g'|/P^n g \leq (\sup |g(k_i)'|/g(k_i) + c)/(1+|dz|)^n + c/(|dz|)$$

Pour  $n > n(g)$  :  $\sup |g(k_i)'|/g(k_i)/(1+|dz|)^n < b$ , d'où le résultat. (remarquons que l'on aurait pu prendre une inégalité :  $(zh(z))' > a|z|^\alpha$  d'exposant  $\alpha$  positif plus petit que 1, pour obtenir une inégalité du même type).

- On a alors besoin de la définition d'opérateur contractif:

### Définition (voir L.M.) :

Un opérateur de Markov est contractif s'il existe  $\delta > 0$  et  $k < 1$  tels que pour tout  $g \in \mathcal{D}$  ( espace des densités) et pour tout borélien  $B$  vérifiant  $\int_B dx < \delta$  on a :

$$\int_B P^n g(x) dx < k \text{ pour } n > n_\delta(g).$$

On peut alors appliquer le théorème de décomposition spectrale qui déclare :

**Théorème de décomposition spectrale (Komornik et Lasota) (voir L.M. p.98)**

Si  $P$  est constrictif, On dit alors que  $P$  est asymptotiquement cyclique.  $P$  a une densité stationnaire  $\sum g_i(x)$  et  $P$  ne fait que permuter les indices. Il existe des densités  $g_i$  et des  $k_i(x) \in L^\infty$  en nombre fini telles que pour fonction mesurable  $g(x)$  :

$$Pg(x) = \sum g_i(x) \ell_i(g) + Qg(x) \text{ où le nombre d'indices } i \text{ est fini et où } \ell_i(g) = \int_V g(x) k_i(x) dx \text{ avec } k_i(x) \in L^\infty,$$

- les supports  $S_i$  des  $g_i$  sont disjoints  $g_i(x)g_j(x) = 0$  pour tout  $i \neq j$
- l'opérateur  $P$  n'agit que pour permuter les indices  $i$ ,
- $\|P^n Qf\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$  pour tout  $g$ .

Si, de plus,  $g(x)$  est ergodique, la mesure est cyclique et sa densité vérifie :  $g(x) = \sum g_i(x)$  où le nombre de  $i$  est fini, et la permutation des indices est cyclique (condition nécessaire et suffisante)

D'où la proposition suivante :

**Proposition**

Soit l'application notée  $H(z) = z(1 + h(z))$  avec  $|1 + (zh(z))| > 1 + dz$  sur chaque branche et  $zh(z)$  2 fois continûment dérivable, appliquant le domaine de résonance compact  $Z$  de  $R_+$  dans lui même, alors l'opérateur de Perron Frobenius correspondant à  $H(z)$  est constrictif ; de plus, la mesure est cyclique au voisinage du point 0.

**Démonstration**

Après L.M., prenons le sous ensemble des densités positives continues à support compact (donc bornées) et ayant une mesure finie. Le lemme de majoration assure la propriété constrictive de  $P$ . On peut donc appliquer le théorème de décomposition spectrale (voir L.M. p.98). Pour démontrer que la mesure est cyclique, il suffit de vérifier l'ergodisme de  $H(z)$  ; c'est-à-dire que les seules fonctions  $g$  mesurables qui vérifient  $g \circ H = g$  sont les fonctions constantes presque partout. Si  $g$  a une dérivée intégrable :  $g(z(1+h(z))) - g(z) = \int g' dt$ , et, en appliquant la formule de la moyenne :  $0 = g(z(1+h(z))) - g(z) = g'(z + \theta zh(z)) zh(z)$ , or,  $h$  n'est pas partout nulle puisque  $zh(z) \geq az^2 / 2$  pour les  $z$  positifs (on a une minoration du même type pour les  $z$  négatifs) puisque  $|H(z)| \geq 1 + dz$ , donc  $g'(z + \theta zh(z)) = 0$  presque partout et  $g$  est constante.

**Remarque :**

Le raisonnement qui a été fait sur  $Z$  peut être repris sur chaque support  $S_i$  (mais cela n'apparaît pas explicitement chez L.M.) : soit un itéré d'ordre convenable  $n_i$  de  $f$  tel que, partant d'un support  $S_i$ , on se retrouve, au bout de  $n_i$  itérations de  $f$ , sur  $S_i$  (puisque le nombre  $i$  de supports disjoints est fini) ; un support  $S_i$  se décompose asymptotiquement en sous-ensembles cycliques emboîtés disjoints et ainsi de suite. On trouve probablement ici la cause profonde de ce que l'on appelle l'auto-similarité.

**Remarque :**

On trouve probablement ici encore la cause profonde de ce que l'on appelle l'auto-similarité.

En résumé, trois scénarii sont envisagés ici pour  $H$ , où  $z$  est compris entre 2 points fixes 0 et  $r$  :

Le point 0 est attractif et  $z \rightarrow 0$ ;

Le point 0 est répulsif et  $r$  est attractif  $z \rightarrow r$ , si  $\lambda_r \neq 1$ , on pourra appliquer la formule de la densité ;

Le point 0 et  $r$  sont répulsifs, on aura une mesure cyclique si  $|1 + (zh(z))| > 1 + dz$ .

**Cas de valeurs propres non nulles et non multiples**

Ici  $\prod_j \lambda_j^{n_j} = 1$  avec  $n_j$  entiers positifs,  $\lambda_j \neq 1$  pour  $j=1, 2 \dots m \leq d$ . La condition devient :

$\lambda_j \neq (0,1)$  pour  $j=1,2$   $m \leq d$  et distinctes.

Dans l'espace de résonance, on peut calculer des applications  $h_j$  à l'aide de développements en série convergente et les  $\varphi_j$  vérifient alors :

$$\varphi_j \circ f = \lambda_j (1 + h_j \circ z(\varphi)) \varphi_j \text{ pour } j=1,2, m \leq d,$$

où  $z = z(\varphi) = \prod_j \varphi_j^{n_j}$ ,  $z$  s'appelle habituellement monôme résonant et vérifie quand on forme le produit :

$$z(\varphi \circ f) = \prod_j (\varphi_j \circ f)^{n_j} = \prod_j (1 + h_j \circ z(\varphi))^{n_j} \varphi_j^{n_j} = \prod_j (1 + h_j \circ z)^{n_j} z$$

que l'on résume en posant :  $z(\varphi \circ f) = z(1 + h(z))$ . Cette application unidimensionnelle a la valeur propre 1. Les quantités  $\lambda_j(z) = \lambda_j(1 + h_j(z))$  ne dépendent que de  $z$  et on les notera  $\lambda_{zj}$ . Les applications  $\varphi_j \circ f$  s'écrivent alors :  $\varphi_j \circ f = \lambda_{zj} \varphi_j$  pour  $j=1, 2, m \leq d$ .

Notons que, même dans le sous espace non résonnant (indexé par  $i \neq j$ ), la résonance peut induire indirectement une perturbation sur les valeurs propres  $\varphi_i \circ f = \lambda_i(1 + h_i \circ z(\varphi)) \varphi_i$ , soit  $\varphi_i \circ f = \lambda_{zi} \varphi_i$ .

### Quelle sera l'application dans l'espace $R_s$ ?

Dans l'espace de résonance  $R_s$  des  $\varphi$ , la transformation  $H$  définie sur les  $m+1$  composantes  $(\varphi, z)$  où  $z \in Z$  s'écrit :

$$H_j(\varphi_j) = \lambda_{zj} \varphi_j, \text{ pour } j=1, 2, m \leq d.$$

$$H_{m+1} = z(1 + h(z))$$

avec la relation entre  $z$  et les  $\varphi_j$  :  $z = \prod_j \varphi_j^{n_j}$  où  $H_{m+1}$  vérifie les mêmes hypothèses que l'application  $H$  étudiée dans le cas unidimensionnel.

### Remarque sur la fermeture de $Z = \{z \mid z \in (M_\lambda^{-1}, M_\lambda)\}$

Construisons dans l'espace  $R_s$  un pavage multiplicatif comme dans le chapitre précédent, en prenant pour le rectangle de base  $T = \prod_j I_j$ , défini par le produit cartésien des intervalles  $I_j = (\varphi_j \mid \varphi_j \in [1, \lambda_j])$  (sous la condition,  $|\lambda_j| \neq (1,0)$ , pour tout  $j$ ) et) on recouvre  $R_s$  par multiplication par  $\lambda^k$  où  $k$  est positif ou négatif ; comme  $z(\lambda) = 1$ , la relation :  $z(\lambda \varphi) = z(\lambda) z(\varphi) = z(\varphi)$  définie sur  $R_s - (0)$  renvoie tout recouvrement de  $R_s - (0)$  sur le compact  $T$ .

On partage encore l'ensemble des indices  $i=1,2,\dots,m$  en deux sous-ensembles  $L$  et  $J$ , avec  $L = \{i \mid |\lambda_i| > 1\}$  et  $J = \{j \mid |\lambda_j| < 1\}$ . Sur  $T$ ,  $z$  a un maximum  $M_\lambda = [\prod_i |\lambda_i|^{n_i} ; i \in L]$  et un minimum  $m = [\prod_j |\lambda_j|^{n_j} ; j \in J] = M_\lambda^{-1}$  et  $z$  appartient à  $Z = \{z \mid z \in (M_\lambda^{-1}, M_\lambda)\}$ . Il en résulte que les points d'accumulation des itérés  $z(\varphi \circ f^k)$  non nuls se situeront dans  $Z = \{z \mid z \in (M_\lambda^{-1}, M_\lambda)\}$ .

Pour trouver la solution stationnaire de l'opérateur associé à  $H$ , on devra appliquer une version du lemme de Fubini à l'opérateur de Perron Frobenius. Cette version va être présentée dans un contexte un peu plus général pour en simplifier l'exposé :

### Notations

Soient  $\Omega$  et  $\Omega'$  deux ensembles mesurables,  $x \in \Omega$  et  $z \in \Omega'$  ; soit  $F = T \circ H$  une application de  $(\Omega, \Omega')$  sur  $(\Omega, \Omega')$  définie par  $H(x, z) = (Id_\Omega, h(z))$  et  $T(x, z) = (t(x, z), Id_{\Omega'})$  où  $h$  applique  $\Omega'$  dans  $\Omega'$  et  $t$  applique  $(\Omega, \Omega')$  dans  $\Omega$ . Soient  $g(z) = \int_\Omega g(x, z) dx$  la densité marginale de  $g(x, z)$  et la densité conditionnelle  $g_z(x, z)$  définie par  $g(x, z) = g(z) g_z(x, z)$ .

### Lemme de Fubini appliqué à l'opérateur de Perron Frobenius

la densité invariante  $g(x, z)$  de l'opérateur de Perron Frobenius associé à l'application  $F$  aura :

- sa densité marginale (de  $z$ ) qui laisse invariant opérateur relatif à  $h(z)$ :  $P_h g(z) = g(z)$

- sa densité conditionnelle de  $x/z$  qui laisse invariant opérateur relatif à  $t(x,z)/h^{-1}(z)$ :

$$\int_{A/z} g(x,z) dx = \int_{A/h^{-1}(z)} P_{t/h^{-1}(z)} g(x,z) dx$$

Si  $h$  a un nombre fini d'images réciproques  $k_i(z)$ , avec les bijections  $h \circ k_i = k_i \circ h = Id$  continûment dérivables,

$$\int_{A/z} g(x,z) dx = \int_{A/k_i} P_{t/k_i} g_k(x,k_i) dx \text{ sur chaque branche quelque soit } A.$$

### Démonstration

Soient les boréliens  $A$  de  $\Omega$  et  $B$  de  $\Omega'$ , on a :

$$H^{-1} \circ T^{-1}(A,B) = (T^{-1}(A,B), h^{-1} \circ T^{-1}(A,B)) = (r^{-1}(A,B), h^{-1}(B))$$

$$\int_{(A,B)} P g(x,z) dx dz = \int_{(r^{-1}(A,B), h^{-1}(B))} g(x,z) dx dz$$

Le théorème de Fubini s'applique à l'opérateur de Perron Frobenius sur l'espace  $A \times B$

$$\int_{(A,B)} P g(x,z) dx dz = \int_{h^{-1}(B)} \left( \int_{(r^{-1}(A,B), z) \in h^{-1}(B)} g(x,z) dx \right) dz = \int_{h^{-1}(B)} g(z) \left( \int_{A/z} P_{t/z} g(x,z) dx \right) dz$$

Où  $P_{t/z}$  est défini par  $\int_{A/z} P_{t/z} g(x,z) dx = \int_{r^{-1}(A), z \in h^{-1}(B)} g(x,z) dx$

Soient  $g(z) = \int_{\Omega} g(x,z) dx$  la densité marginale de  $g(x,z)$  et  $g_z(x,z)$  la densité conditionnelle définie par  $g(x,z) = g(z) g_z(x,z)$ .

- S'agissant de la loi marginale, si on intègre sur  $\Omega$  :

$$\int_{(\Omega,B)} P g(x,z) dx dz = \int_{(r^{-1}(\Omega,B), h^{-1}(B))} g(x,z) dx dz$$

$$= \int_{h^{-1}(B)} g(z) \left( \int_{\Omega} P_{t/z} g(x,z) dx \right) dz = \int_{h^{-1}(B)} g(z) dz = \int_B P_h g(z) dz, \text{ car } \int_{A/z} P_{t/z} g(x,z) dx = 1$$

Si la densité est invariante  $P g(x,z) = g(x,z)$  et  $\int_{(\Omega,B)} P g(x,z) dx dz = \int_{(\Omega,B)} g(x,z) dx dz = \int_B g(z) dz$

Donc  $\int_B P_h g(z) dz = \int_{h^{-1}(B)} g(z) dz = \int_B g(z) dz$ ; la densité marginale est la solution relative à  $h(z)$ :

$$P_h g(z) = g(z)$$

- S'agissant de la loi conditionnelle, si la densité est invariante, le théorème de Fubini s'applique à l'opérateur :

$$\int_{(A,B)} P g(x,z) dx dz = \int_{(A,B)} g(x,z) dx dz = \int_B g(z) \left( \int_{A/z} g_z(x,z) dx \right) dz$$

mais :

$$\int_{(A,B)} P g(x,z) dx dz = \int_{h^{-1}(B)} \left( \int_{(r^{-1}(A,B), z) \in h^{-1}(B)} g(x,z) dx \right) dz = \int_{h^{-1}(B)} g(z) \left( \int_{A/z} P_{t/z} g(x,z) dx \right) dz$$

Donc :

$$\int_B g(z) \left( \int_{A/z} g_z(x,z) dx \right) dz = \int_B P_h g(z) \left( \int_{A/z} P_{t/z} g(x,z) dx \right) dz$$

En faisant tendre  $B$  vers  $z$ , on obtient :  $g(z) \left( \int_{A/z} g_z(x,z) dx \right) = P_h \left[ g(z) \left( \int_{A/h^{-1}(z)} P_{t/h^{-1}(z)} g(x,z) dx \right) \right]$ , ce qui

s'écrit quelque soit  $A$  :  $(P_h g(z)) \left( \int_{A/z} g_z(x,z) dx \right) = P_h \left[ g(z) \left( \int_{A/h^{-1}(z)} P_{t/h^{-1}(z)} g(x,z) dx \right) \right]$  puisque  $P_h g(z) = g(z)$

$$0 = P_h \left[ g(z) \left( \int_{A/z} g(x,z) dx - \int_{A/h^{-1}(z)} P_{t/h^{-1}(z)} g(x,z) dx \right) \right].$$

Si  $h$  a un nombre fini d'images réciproques  $k_i(z)$ , avec les bijections  $h \circ k_i = k_i \circ h = Id$ , la densité invariante conditionnelle s'écrira :

$$\left( \sum g(k_i) k_i' \right) \left( \int_{A/z} g(x,z) dx \right) = \left( \sum g(k_i) k_i' \right) \left( \int_{A/k_i} P_{t/k_i} g_k(x,k_i) dx \right)$$

$$\left( \sum g(k_i) k_i' \right) \left[ \int_{A/z} g(x,z) dx - \int_{A/k_i} P_{t/k_i} g_k(x,k_i) dx \right] = 0$$

Si l'on choisit la  $i$ -ième branche on aura  $\int_{A/z} g(x,z) dx = \int_{A/k_i} P_{t/k_i} g_k(x,k_i) dx$

Soit  $\varphi = (\varphi_j)$  pour  $j=2, \dots, m$ , que l'on note désormais  $\varphi$

**Lemme de décomposition**

\* Si  $H_{m+1} = z + (zh(z))$  a un nombre fini d'images réciproques et ne s'annule pas sur  $Z$ , alors l'opérateur de Perron Frobenius a pour densité stationnaire :

$$g(\varphi, z) = g(z)g_{\varphi/z}(\varphi, z) = \sum g_i g_{i(\varphi, k)}(\varphi, k), \text{ où :}$$

- la densité marginale  $g_i$  est la densité stationnaire, correspondant à l'application  $H_{m+1}$  seule,
- les densités conditionnelles  $g_{i(\varphi, z)}$  sont les densités stationnaires vérifiant quelque soit  $A$  :

$$\int_{A \times z \in Z} g_i(\varphi, z) d\varphi = \int_{A, k} P_{H_j} g_{i(k)}(\varphi, k) d\varphi, \text{ correspondant aux applications } H_j(\varphi_j) = \lambda_{z_j} \varphi_j, \text{ pour } j=1, 2, 3, \dots, m \text{ sous les conditions : } z = \prod_j \varphi_j^{n_j} \text{ et le support } S_j \text{ fixés.}$$

- Si  $H_{m+1} = z + (zh(z))$  vérifie les hypothèses du cas unidimensionnel, c'est-à-dire : nombre fini d'images réciproques,  $|1 + (zh(z))| > 1 + |z|$  sur chaque branche et  $zh(z)$  2 fois continûment dérivable : alors  $g(z)$  est cyclique : les supports  $S_i$  des  $g_i$  sont disjoints :  $g_i(z)g_j(z) = 0$  pour  $i \neq j$  et en nombre fini, et auto-similaires.

**Démonstration**

Selon la parité des  $n_j$ , la surface  $z = \prod_j \varphi_j^{n_j}$  présente pour chaque  $\varphi_j$  une ou deux branches symétriques, il faudra donc introduire des multiplicités. Supposons que l'un des indices  $n$  soit impair : ce sera l'indice  $n_1$ . ( $n_j$  pair entraîne deux images réciproques), mais, si tous les exposants sont pairs, on peut toujours en prendre la racine carrée, le produit vaut  $-1$ , (car, sinon, il suffit de diviser par 2 tous les indices  $n$ , et la suite reste la même). On effectue le changement de variables  $L$  qui transforme  $\varphi_1$  en  $z$  et laisse inchangées les autres coordonnées : à  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ , il fait correspondre  $(z, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ , en tenant compte de la relation  $z = \prod_j \varphi_j^{n_j}$  avec  $\varphi_j \neq 0$  et  $z \neq 0$ :

$$\varphi_1 = z^{1/n_1} \prod_{j=2}^m \varphi_j^{-n_j/n_1} \text{ pour } j=1$$

$$\varphi_j = \varphi_j \text{ pour } j=2, 3, \dots, m, \text{ que l'on note désormais } \varphi$$

Le jacobien de  $L$  peut s'écrire :  $J = (1/n_1) z^{-n_1/n_1 - 1} \prod_j \varphi_j^{-n_j/n_1}$  donc ;  $J = j(z)j_2(\varphi)$

La mesure de Lebesgue est :  $d\varphi d\varphi = J dz d\varphi$ . Une densité  $g(\varphi, \varphi)$  sur l'espace  $(\varphi, \varphi)$  se transformera en une densité  $g(\varphi, z)$  sur  $(\varphi, z)$  définie par  $g(\varphi, z) = g(\varphi, \varphi) J$ . Si  $C$  est un borélien de  $R_s$  tel que  $L^{-1}(C) = A \times B$  ne contient pas 0, avec  $z \in B$  et  $\varphi \in A$  pour  $j=2, 3, \dots, m$ :

$$\int_C P g(\varphi, \varphi) d\varphi d\varphi = \int_{A \times B = L^{-1}(C)} J P g(\varphi, z) d\varphi dz, \text{ et si la densité est invariante}$$

$\int_C g(\varphi, \varphi) d\varphi d\varphi = \int_{A \times B = L^{-1}(C)} g(\varphi, z) J d\varphi dz$ , donc : l'égalité  $g(\varphi, \varphi) = P g(\varphi, \varphi)$  induit  $g(\varphi, z) = P g(\varphi, z)$  et réciproquement.  $g(\varphi, \varphi) = g(\varphi, z) J$ . De plus  $J = j(z)j_2(\varphi)$  n'induit aucune perturbation sur les lois conditionnelles. La connaissance de la densité  $g(\varphi, z)$  suffit pour calculer la densité sur  $R_s$  et  $Z$ .

Le lemme précédent se note ici :  $\Omega = Z, \Omega' = R_s, t = H, H = (H_j, j=2, \dots, m)$  et  $h = H_{m+1}$  : puis, la proposition concernant le cas unidimensionnel s'applique pour  $H_{m+1} = z + (zh(z))$  dans le domaine de résonance  $Z$ .

L'opérateur de Perron Frobenius est cyclique d'après les résultats du cas unidimensionnel et  $g(z) = \sum_i g_i(z)$  où  $i$  est fini, les supports  $S_i$  des  $g_i$  sont disjoints :  $g_i(z)g_j(z) = 0$  pour  $j \neq i$ .

S'agissant de la densité conditionnelle, il suffit d'appliquer le lemme de Fubini en réduisant le domaine d'intégration à un seul support  $S_i : B \cap S_i$ .

Remarque : Le cas où  $r$  est attractif ne présente pas en principe de difficultés ni celui où 0 est attractif : dès que  $z \rightarrow 0$ , les quantités  $\lambda_j(z) = \lambda_j(1 + h_j(z)) \rightarrow \lambda_j$ .

### Étude de l'opérateur conditionnel : Formule de la densité pour la résonance d'Anosov

Si  $f$  est un difféomorphisme de classe 2 et admet un point fixe, sous la condition (RS\*) du domaine d'Anosov, la densité  $g$  de la mesure invariante par  $f$  dans une région de résonance compacte peut s'écrire à l'exception des ensembles de mesure nulle (en particulier  $z=0$ ) :

$$g(z, \varphi) = \sum (g_i(z) g_{i|\varphi, z})$$

- $g_i(z)$  est la densité relative du monôme résonant  $z$ , où  $z$  vérifie :  $z(\lambda\varphi) = z(\varphi)$ ,
  - $g_{i|\varphi, z}$  est la densité conditionnelle  $m-1$  dimensionnelle des  $\varphi_j$  sachant  $z$  ( $z \neq 0$ ) relative aux  $\varphi_j$  de  $R_s - (0)$  est  $g_{\varphi, z} = c / (\sum_j (n_j / \varphi_j)^2)^{1/2} (\prod_j \varphi_j)$
  - dans le sous espace supplémentaire de  $R_s - (0)$ , la densité conditionnelle à  $z$  suivra la loi standard (produit des  $\log|\varphi_j|$ ).
  - si de plus  $H_{m+1} = z(1+h(z))$  vérifie : pas de zéro sur  $Z$ , nombre fini d'images réciproques,  $|1+(zh(z))| > 1+dz|$  sur chaque branche et  $zh(z)$  2 fois continûment dérivable :
- cette densité est cyclique ; les supports  $S_i$  des  $g_i$  sont disjoints :  $g_i(z)g_j(z) = 0$ ;

### Démonstration

Si  $z$  et  $S_i$  sont fixés (non nul et non vides), la densité conditionnelle sera, d'après le lemme précédent, la densité stationnaire de  $H_j(\varphi_j) = \lambda_{z_j} \varphi_j$  pour  $j=1, 2, \dots, m \leq d$ , sous les deux conditions :  $z = \prod_j \varphi_j^{n_j}$ , avec  $z \neq 0$ , et le support  $S_i$  fixé. Il s'agit maintenant de trouver la forme que doit prendre la densité conditionnelle des  $\varphi_j \neq 0$ . Reprenons le changement  $L$  de variables qui transforme  $\varphi_1$  en  $z$  et donne la formule :

$$\int_{A/z} g_z(\varphi, z) d\varphi = \int_{A/k_i} P_{H/k_i} g_{k_i}(\varphi, k_i) d\varphi$$

$A/z$  est la sous variété de  $R_s$  de co-dimension 1, ne contenant pas 0, définie par  $A \cap (z = \prod_j \varphi_j^{n_j})$ . Elle n'est autre que l'image de  $A$  par l'application  $\varphi_1 = z^{1/n_1} \prod_{j=2}^m \varphi_j^{-n_j/n_1}$  pour  $z \neq 0$  fixé; elle présente pour chaque  $\varphi_j$  une ou deux branches symétriques selon la parité des  $n_j$ , il faudra donc introduire la multiplicité  $m_j$  et  $M = \prod_j m_j$  dans le calcul effectif de la densité. La mesure  $m-1$  dimensionnelle est :  $\mu_z(\varphi) = (1 + \sum_{j=1}^m (\partial\varphi_j / \partial\varphi)^2)^{1/2}$  par rapport à  $d\varphi$  et, en suivant le raisonnement de L.M. p. 182, on définit la mesure d'un borélien  $A/z$  par la formule

$$\mu(A/z) = \int_{A/z} \mu_z(\varphi) d\varphi$$

De même pour  $k_i$  :  $A/k_i$  est l'image de  $A$  par l'application  $\varphi_1 = k_i^{1/n_1} \prod_{j=2}^m \varphi_j^{-n_j/n_1}$  pour  $z \neq 0$  fixé, donc :

$$M \int_{A/z} g_z(\varphi, z) \mu_z(\varphi) d\varphi = M \int_{A/k_i} P_{H/k_i} g_{k_i}(\varphi, k_i) \mu_{k_i}(\varphi) d\varphi = M \int_{H^{-1}(A/k_i)} g_{k_i}(\varphi, k_i) \mu_{k_i}(\varphi) d\varphi$$

puisque sur  $H^{-1}(A/k_i) = H^{-1}(A) \cap (\varphi_1 = k_i^{1/n_1} \prod_{j=2}^m \varphi_j^{-n_j/n_1})$ , la mesure  $m-1$  dimensionnelle est encore  $\mu$ .  $H^{-1}$  transforme  $\varphi$  en :  $\varphi / \lambda_k$  de coordonnées  $\varphi_j / \lambda_{k_j}$ , pour  $j=2, 3, \dots, m$ .

La loi conditionnelle sur la  $i$ -ième branche sera  $g_{\varphi, z} \mu(\varphi) d\varphi = g_{\varphi, k_i}(\varphi / \lambda_k) \mu(\varphi / \lambda_k) d\varphi / \lambda_k$ . On retrouve l'équation fonctionnelle sur le vecteur de coordonnées  $\varphi_j$ ,  $j=2, \dots, m$  : si  $f(\varphi) = g_{\varphi, z} \mu(\varphi)$ ,  $f(\varphi) = f(\varphi / \lambda) / \prod_{j=1}^m \lambda_j$  où  $\lambda_j = \lambda_{k_j}$ .

Comme précédemment, cette équation a une solution unique (si elle est continue)  $f(\varphi) = c / \prod_{j=1}^m \varphi_j$ . Donc :

$$g_{\varphi, z} = c / \mu(\varphi) \prod_{j=1}^m \varphi_j$$

Comme  $\partial\varphi_j / \partial\varphi = -n_j \varphi_j / n_1 \varphi_1$  :  $\mu(\varphi) = \varphi_1 / n_1 (\sum_j (n_j / \varphi_j)^2)^{1/2}$  et  $g_{\varphi, z} = c / (\sum_j (n_j / \varphi_j)^2)^{1/2} (\prod_j \varphi_j)$ .

**Remarques**

Il se peut, naturellement, que les conditions de résonance cyclique ne soient pas réunies, par exemple le point  $z$  peut converger vers un point fixe, cela ne change guère les raisonnements.

La mesure prend la forme d'un arc tangente hyperbolique si  $m=2$ , mais, dès la troisième dimension, les intégrales prennent des expressions plus compliquées.

**Remarques**

En première analyse, les zones de densité maximum sont solutions de  $\partial g(z)/\partial \varphi = 0$ , et, en ce cas  $\varphi_j = \varphi_j$ .

Mais, l'aspect cyclique de  $z$  peut aussi introduire de larges zones de densité nulle : en effet, rien ne dit que les supports des  $g_j(z)$  opèrent une partition complète de l'espace résonant. En pratique, il semble que le nombre de plages cycliques soit en relation étroite avec les nombres  $n_j$  déterminant la résonance. On a une majoration de ce nombre dans L.M., mais reste à en trouver la formule exacte. L'examen de la formule de la densité mérite des développements, d'autant plus, que le cas de valeurs propres complexes n'est pas abordé ici. Mais cela n'apporte pas de grandes modifications.

Les questions de résonance ont fait l'objet d'une recherche importante et beaucoup de techniques ont été utilisées. Parmi les principales, les méthodes probabilistes et la technique des perturbations. Dans le cadre de notre approche, la grosse difficulté reste la détermination des propriétés de  $h(z)$  à partir de l'application initiale  $f$ .

La situation présentée ici n'est certes pas la seule possible : dans bien des cas, tout se passe beaucoup plus raisonnablement avec de bonnes convergences ou divergences, le cas choisi semble devoir répondre à un certain nombre d'interrogations actuelles.

**Multi résonance d'Anosov**

Reste également à analyser le cas de multi résonance ( par exemple du type  $\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} = 1$  et  $\lambda_1^{n_1} \lambda_3^{n_3} = 1$ ) :

Soit le plan de résonance :  $\sum_j \alpha_j \log \lambda_j = 0$  avec des réels  $\alpha_j$ , non négatifs et non tous nuls. On suppose ici que la condition (C) est respectée, mais que le plan de résonance admet plusieurs points de coordonnées entières non nulles  $(n_j)_{j=1, \dots, p}$ . Ils vérifient donc  $\sum_j n_j \log \lambda_j = 0$ , sur un ensemble « redondant » de  $m$  valeurs propres  $j=1, 2, \dots, m$ . On doit alors rechercher les éléments distincts de longueur minimale, en appelant « longueur » le nombre de valeurs propres figurant dans la relation. (On peut construire une algèbre par concaténation de mots et suppression de la lettre commune selon le principe des matrices booléennes de Markov, par exemple,  $\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_2} = 1$  et  $\lambda_1^{n_1} \lambda_3^{n_3} = 1$  impliquent  $\lambda_2^{n_2} \lambda_3^{n_3} = 1$ ). On n'étudiera pas ici le treillis engendré par toutes les relations précédentes et leurs combinaisons linéaires entières. Le nombre  $p$  de multi-indices  $(n)$  résonants est fini. Examinons les modifications à apporter aux calculs précédents. Tous les  $p$  monômes distincts  $z=(z_1, z_2, \dots, z_p)$  peuvent intervenir dans le développement de la variable  $\varphi_j$ . On aura :  $\varphi_j \circ f(x) = \lambda_j \varphi_j(x) (1 + h_j \circ z \circ \varphi(x))$  pour  $j=1, 2, \dots, m$ .

Autrement dit, si l'on dispose de la densité invariante de ces monômes  $z$ , on applique les raisonnements précédents en considérant cette densité invariante relative aux  $z$ , comme densité marginale, puis on cherchera la densité conditionnelle des  $\varphi$  sachant  $z$  fixé.

Il faut alors former les monômes de résonance  $z_i \circ \varphi \circ f(x) = z_i \circ \varphi(x) (1 + h_i \circ z \circ \varphi(x))$   $i=1, 2, \dots, p$  où  $1 + h_i \circ z \circ \varphi(x) = \prod_k (1 + h_{ki} \circ z \circ \varphi(x))^{n_{kj}}$  où  $n_{kj}$  parcourt les indices de  $(n_j)$  (en remarquant que le produit des valeurs propres sera égal à 1) ; on observe que l'on peut « oublier »  $\varphi(x)$  dans ces expressions et si on note  $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$  et  $z \bullet h = (z_j h_j)$ , on aura  $z \circ \varphi \circ f = z + z \bullet h(z)$ . Si  $z = \theta_i$  est une solution de

cette équation ( en supposant  $i$  fini), on peut chercher l'opérateur de Perron Frobenius associé à cette application (ou passer par l'intermédiaire de l'expression :  $h(z \circ f) = h(z) + h(z \bullet h(z))$ ). La densité invariante relative à l'application résonante s'écrit :  $g(z) = \sum_i g(\theta_i) |\theta_i|$

qui ne paraît pas simple sauf dans les cas où l'on peut reprendre la démarche précédente. Il faut alors calculer les lois conditionnelles sur les sous variétés conditionnelles de dimension  $m-p$ , après  $p$  changements de variables.

**Résonance entière de Poincaré**

On peut choisir le cas où toutes les valeurs propres sont toutes inférieures à 1. On remarque que la double condition  $\prod_j \lambda_j^{n_j} = \lambda_i$ , et  $\sum_j n_j \log |\lambda_j| \neq 0$ , implique  $\lambda_i = \prod_{j \neq i} \lambda_j^{n_j}$ , auquel cas, l'indice  $i$  ne figure pas dans le monôme résonant. Après transformation,  $f$  s'écrit ;

$$\lambda_j x_j \text{ avec } j = 1, 2, \dots, d \text{ si } j \neq i$$

$$\lambda_i x_i + u \text{ si } j = i, \text{ avec } u = h(\prod_{j \neq i} x_j^{n_j}) \text{ où } \prod_{j \neq i} x_j^{n_j} \text{ est le monôme qui ne contient pas } x_i.$$

Pour calculer la densité stationnaire de l'opérateur de Perron Frobenius associé, on fait un raisonnement similaire à celui qui a été fait dans le domaine d'Anosov, mais avec cette différence importante que , maintenant, il faut d'abord déterminer la densité de loi marginale des  $x_j$  pour  $j \neq i$ , qui n'est autre que la densité en cas de non résonance, et chercher ensuite la densité conditionnelle de  $x_i$  sachant les autres  $x_j$  fixés. Cette densité conditionnelle doit vérifier la relation en omettant l'indice  $i$  :

$$g(x) = g((x - u) / \lambda) / \lambda. \text{ Pour résoudre cette équation, il faut poser : } g(x) = h(1/x) \text{ et } x = 1/y \text{ (donc : } g(x) = h(y)), \text{ pour obtenir : } h(y) = h(\lambda y(1 - uy)^{-1}) / \lambda$$

Cette équation fonctionnelle se résout par la récurrence  $h_n(y) = h_{n-1}(\lambda y(1 - uy)^{-1}) / \lambda$  et, en partant de  $h_0(y) = y$ , on obtient  $h_n(y) = y(1 - nuy)^{-1}$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Donc  $g(x) = 0$  presque partout.

On peut compléter la situation à loisir en prenant des multi résonances.

**Résonance irrationnelle**

On a remarqué sur l'exemple  $n^{-\delta} c(x) \langle a_i \circ \psi_R \rangle < n^{-\delta} d(x)$ , en début d'article, que la divergence de la série de l'inverse du vecteur propre  $\psi$  est en  $n^{1-m}$ , ce qui, en principe, ne devrait se produire que sur le polidisque de convergence de la série de  $f^k$ .

On se place dans le cas de la résonance d'Anosov, qui est le plus important à examiner. Ici  $\sum_j \alpha_j \log |\lambda_j| = 0$  avec  $\alpha_j \geq 0$  non tous nuls. On ne considère ici que les  $\alpha_j > 0$  et  $\sum_j \alpha_j = 1$ . En reprenant les notations du début, étant donnés  $n$  et  $\alpha$ , on définit les nombres entiers  $n_j$  et  $q$  du lemme de Dirichlet (voir Annexe I):  $\sup |n_j/q - \alpha_j| < 1/qn^{1/m}$ , mais, ici,  $q = n = \sum_j n_j$  avec  $n < n$  pour  $n$  assez grand. ( $m$  est déterminé par :  $m+1 = \text{card}(\alpha_j > 0)$ ). On obtient l'approximation entière pour  $m+1$  coordonnées en résonance. On a :  $|\prod_j \lambda_j^{n_j} - 1| < e^{c/n^{1/m}} c/n^{1/m}$ , mais, ici,  $n = \sum_j n_j$  avec  $n < n$ .

On affectera sans ambiguïté dans cette partie :

- l'indice  $i$  au rang du  $i$  ième entier  $n_i$  dans  $R_\alpha$  ( en quelque sorte  $n_i = n+i$  ) alors que
- l'indice  $j$  indique la coordonnée  $\alpha_j$  de  $\alpha$ ,

et les entiers  $m+1$ -dimensionnels, notés  $(n)$ , de coordonnées entières  $(n) = (n_1, n_2, \dots, n_j, \dots, n_m)$  obtenus à partir de  $n_j$  par l'approximation de Dirichlet et l'on a :  $R_\alpha = \left[ (n) : \left| \prod_j \lambda_j^{n_j} - 1 \right| < e^{c/n^{1/m}} c/n^{1/m} \text{ et } n \geq n \right], R_\alpha$

contient une infinité d'éléments. Lorsque  $\alpha$  parcourt le plan de résonance, on obtient l'ensemble  $R = \bigcup_{\alpha} R_{\alpha}$  et  $S = \overline{R}$ . On note  $f(x) = \lambda x + a(x)$ ,  $\psi = \varphi^{-1}$ , et enfin,  $a = a_R + a_S$ . Beaucoup de problèmes surgissent :

### 1- Considérations préliminaires sur la difficulté du problème

- L'équation  $f \circ \psi(x) = \lambda \psi(x) + a \circ \psi(x) = \psi(\lambda x) - \psi(\lambda x) - a(\psi(x)) = 0$ , mais elle n'a plus de série convergente de sorte qu'il faut perdre l'espoir de linéariser  $f$  et faire apparaître des monômes résonants dans le résultat final. Les équations doivent être modifiées pour faire apparaître les résonances : l'équation linéaire finale doit être remplacée alors par l'équation non linéaire après transformation :  $f \circ \psi(x) = \lambda \psi(x) + a_R \circ \psi(x)$  et l'équation à linéariser, ne concerne que  $S = \overline{R}$  :  $Hom(\psi, a_S(\psi)) = 0$ . On peut ensuite continuer point par point la démonstration d'Arnold sur  $S$ . Donc :  $f \circ \psi(x) = \lambda \psi(x) + a_R \circ \psi(x) + a_S \circ \psi(x) = \psi(\lambda x) + a_R \circ \psi(x)$  ;

- On n'a plus de règle simple pour le choix des exposants résonants : La qualité d'être un nombre entier ne suffit plus. On peut par exemple choisir tous les exposants de  $R$  fixé a priori, mais  $R$  dépend de  $n$  et on peut supprimer de cet ensemble un nombre fini d'exposants ;

- les monômes résonants sont alors en nombre infini et appartiendront ainsi à un espace de Banach (dans le meilleur des cas), et ceci arrive même avec 2 valeurs propres seulement ; avec 3 valeurs propres, on aura des multi résonances, mais comment définir ces monômes résonants ? On peut vérifier qu'il y a une correspondance entre  $a_R$  dans  $f$  et  $h$  dans  $\varphi$  ;

- certaines variables peuvent fort bien respecter des conditions de non résonance, mais d'autres non ;

- pour  $\alpha$  fixé, il se peut que  $a_R$ , dans  $f = \lambda x + a_R + a_S$ , soit nulle, mais que des termes résonants n'apparaissent qu'à partir d'un itéré  $f^k$  d'ordre  $k$ .

Une première simplification apparaît sur les différents points du plan de résonance que l'on a à étudier car la partie du plan de résonance vérifiant  $\sum_j \alpha_j = 1$  est compacte en général ; par recouvrement fini de cette partie du plan, on limite l'analyse à un nombre fini de points du plan. Mais à chaque point, on devra associer une infinité de monômes résonants.

- Comment caractériser un ordre entre ces différents monômes ? La présentation faite ici est assez succincte.

### 2- Hypothèses et notations

Supposons, comme cela a été fait pour la résonance entière, le domaine de résonance contenu dans un compact. Les valeurs propres seront positives pour simplifier la notation. Le plan de résonance est défini par :  $\sum_j \alpha_j \log \lambda_j = 0$ .

On se fixe maintenant un seul point  $\alpha$  quelconque du plan de résonance. Remarquons que, en dimension 2, l'unicité de  $\alpha$  est alors assurée. À chaque point  $\alpha$ , on associe  $R_{\alpha}$ . Soit  $z_n = z^{(n)}$  le monôme d'exposants  $(n)$  relatifs à  $\alpha$ ,

Soit  $h_{R_{\alpha}}(z) = h_{R_{\alpha}}(z^{(n)}, z^{(n_1)}, \dots, z^{(n_1)}, \dots)$  la fonction résonante de  $\varphi$  relative à  $\alpha$ . On remplace chaque monôme  $z^{(n)}$  par une variable réelle  $u_i$  ; soit  $(u) = (u_1, u_2, \dots, u_p, \dots)$  le vecteur (dimension infinie) de composantes de  $u_i$  et on note  $h_{R_{\alpha}}(u, u_p, \dots, u_p, \dots)$  la fonction relative à  $(u)$ . Soit  $(v) = (u_1, u_2, \dots, u_p, v, u_{p+1}, \dots)$  le même vecteur où l'on a remplacé la composante  $u_i$  par  $v_i$  en laissant fixes les autres composantes. Supposons que  $h_{R_{\alpha}}(u)$  vérifie uniformément dans un voisinage de l'origine la condition de Lipschitz :  $|h_{R_{\alpha}}(u) - h_{R_{\alpha}}(v)| < k |u_i - v_i|$ , pour tout  $i$ ,

**Lemme**

Si  $\sum \alpha_j = 1$ , soient  $n = \sum n_j$ , et  $n_i = \sum_j n_{ij}$  appartenant à  $R_\alpha$ , relatif à  $\alpha$  pour  $n$  suffisamment grand.  $R_\alpha$  ne contient que des exposants  $n_j$  tels que  $n_j \geq n$  vérifiant :  $n < n$ ,  $n_i > n/2$  et  $|n.n_{ij}/n_i - n_j| < 3/n^{1/m}$ .

**Démonstration**

Comme  $\alpha$  est fixé, on a exactement  $m$  coefficients non nuls, et, pour  $n$  fixé, on peut trouver des entiers  $n_j$  et  $q$  vérifiant l'inégalité de Dirichlet  $\sup |n_j - \alpha_j q| < 1/n^{1/m}$  avec  $q < n$  (voir annexe 1). À chaque  $n$ , on associe l'entier  $q$  minimum des  $q < n$  vérifiant l'inégalité. Si  $n_i > n$ , on ne peut avoir  $q_i < q$ , car, sinon  $\sup |n_{ij} - \alpha_j q_i| < 1/n_i^{1/m} < 1/n^{1/m}$  et  $q$  ne serait plus le minimum des  $q < n$  vérifiant l'inégalité. Donc  $q_i \geq q$ .

Si  $\sum_j \alpha_j = 1$  ( et l'on peut toujours se ramener à ce cas), on obtient aisément l'approximation pour tout  $n$  :  $|n - q| = |\sum_j n_j - q \sum_j \alpha_j| < \sum_j |n_j - q \alpha_j| < m/n^{1/m}$  où  $n = \sum n_j$  ; par suite,  $n < q + m/n^{1/m} \leq n - 1 + m/n^{1/m} < n$  dès que  $n^{1/m} > m$ . Donc  $n < n$ . De plus,  $n_i + m/n_i^{1/m} > q_i \geq q > n - m/n^{1/m}$  c'est à dire  $n_i > n - 2m/n^{1/m} > n/2$  dès que  $n.n^{1/m} > 4m$ . Tout point  $(n_i)$  de  $R_\alpha$  autre que  $(n)$ , vérifie :

$$|n_j/n_i - n_j/n| < |n_{ij}/n_i - \alpha_j| + |\alpha_j - n_j/n| < 1/n.n_i^{1/m} + 1/n.n^{1/m} < 3/n.n^{1/m}$$

**Corollaire**

Supposons le domaine résonant compact et contenu dans  $\alpha^{-1} \leq |z_j| \leq a$  quelque soit  $j$ . Soit  $z_n = z^{(n)}$ , le monôme de  $f$  d'ordre  $(n)$  relatif à  $\alpha$  et  $R_\alpha$  relatif à  $\alpha$  et à  $n$ , Soit  $h_{R_\alpha}(z) = h_{R_\alpha}(z^{(n)}, z^{(n_1)}, \dots, z^{(n_i)}, \dots)$  la fonction résonante de  $\varphi$ . Supposons que  $h_{R_\alpha}(u)$  vérifie uniformément dans un voisinage de l'origine la condition de Lipschitz :  $|h_{R_\alpha}(u) - h_{R_\alpha}(v)| < k|u - v|$ , pour tout  $i$  sur le compact et que la série  $\sum_i k_i n_i |a|^{2n_i}$  converge,

Appelons maintenant  $h(z_n) = h_{R_\alpha}(z_n) = h_{R_\alpha}(z_n^{n_1}, \dots, z_n^{n_i}, \dots)$  relative à la  $n$ -ième itérée de  $f$ ,  $f^n$ .

La fonction résonante  $h_{R_\alpha}(z)$  sera approximée uniformément sur le compact par  $h(z_n)$  fonction de la seule variable  $z_n = z^{(n)}$  en dehors du point  $z_n = 0$  et on a :  $z_n \circ \varphi \circ f^n(x) = e^{\lambda} z_n \circ \varphi(x) (1 + h \circ z_n \circ \varphi(x))$

**Démonstration**

Soit  $h_{R_\alpha}(z) = h_{R_\alpha}(z^{(n)}, z^{(n_1)}, \dots, z^{(n_i)}, \dots)$  la fonction résonante de  $\varphi$  relative à  $R_\alpha$  au voisinage de  $\alpha$ , et formons  $h_{R_\alpha}(z) - h_{R_\alpha}(z_n) = \sum_i h_i(z_n) - h_{i-1}(z_n)$  où  $h_i(z) = h_{R_\alpha}(z^{(n)}, z^{(n_1)}, \dots, z^{(n_{i-1})}, z_n^{n_i}, \dots)$ , où tous les  $z^{(n_i)}$  sont remplacés par les  $z_n^{n_i/n}$  à partir du rang  $i$ . Formons :  $\delta = |h_{R_\alpha}(z) - h_{R_\alpha}(z_n)| < \sum_i |h_i(z_n) - h_{i-1}(z_n)| < \sum_i k_i |z^{(n)} - z_n^{n_i/n}|$  ; notons  $z^{(n)} = \prod_j z_j^{n_j} = \prod_j (z_j^{n_{ij}/n_i})^{n_i/n} = \prod_j (y_j)^{n_j/n}$  où  $y_j = z_j^{n_{ij}/n_i}$  et  $z_n^{n_i/n} = \prod_j z_j^{n_j/n_i}$ . Soit  $z^{(n)} - z_n^{n_i/n} = z_n^{n_i/n} \prod_j ((y_j/z_j)^{n_j/n_i} - 1)$ , et on obtient donc en prenant un domaine compact contenu dans  $\alpha^{-1} \leq |z_j| \leq a$  (ne contenant pas l'origine) :

$$\begin{aligned} & |\prod_j (y_j/z_j)^{n_j/n_i} - 1| = |\prod_j z_j^{(n.n_{ij}/n_i - n_j)/n_i} - 1| < (\sum_j |n.n_{ij}/n_i - n_j|) n_i/n \log a |a|^{\sum_j |n.n_{ij}/n_i - n_j|/n_i} \text{ comme} \\ & |n.n_{ij}/n_i - n_j| < 3/n^{1/m} \text{ on a : } |\prod_j (y_j/z_j)^{n_j/n_i} - 1| < 3mn_i/n.n^{1/m} \log a |a|^{3mn_i/n.n^{1/m}} \text{ et l'écart } \delta \text{ sera majoré par} \\ & \sum_i k_i |z^{(n)} - z_n^{n_i/n}| < \sum_i k_i \prod_j a^{n_j/n_i} 3mn_i \log a |a|^{3m.n_i/n.n^{1/m}}/n.n^{1/m} \text{ or } \prod_j a^{n_j/n_i} = a^{\sum_j n_j/n_i} = a^{n_i} \text{ donc} \\ & \sum_i k_i |z^{(n)} - z_n^{n_i/n}| < \sum_i k_i 3mn_i \log a |a|^{m.(1+3m/n.n^{1/m})}/n.n^{1/m} \text{, puis, en prenant } m/n.n^{1/m} < 1/3 \text{, il suffira que} \end{aligned}$$

la série  $\sum_k k_n |a|^{2n}$  converge pour que l'écart tende vers 0 comme  $1/n.n^{1/m}$ .

Toutefois, la série  $h_{R_\alpha}(z_n)$  contient des exposants fractionnaires. On surmonte cette difficulté en considérant les itérés de  $f$ . Si l'on remplace  $f$  par  $f^n$ , (ce qui multiplie par  $n$  l'écart en  $1/n.n^{1/m}$  qui tendra encore vers 0) en appliquant le raisonnement précédent avec  $z_n = z^{(n)n}$  :

$h(z_n) = h_{R_\alpha}(z_n) = h_{R_\alpha}(z_n z_n^{n_1}, \dots, z_n^{n_1}, \dots)$  ne dépend plus que du monôme  $z_n$ . Il en résulte que la suite d'équations se réduit à une seule équation en  $z_n$  :  $z_n \circ \varphi \circ f^n(x) = e^{\varepsilon(\lambda)} z_n \circ \varphi(x) (1 + h \circ z_n \circ \varphi(x))$ .

Naturellement, lorsque  $(n)$  augmente, les équations de résonance vont se modifier légèrement. Donc  $f^n$  accroche, pour chaque  $n$ , un monôme résonant de plus en plus proche de  $\alpha$ .

### Lemme complémentaire

Pour  $n$  fixé, on a donc un nombre fini  $p$  de vecteurs à coordonnées entières approximant tous les  $\alpha$  du plan de résonance tels que  $\sum_j \alpha_j = 1$ .

### Démonstration

Faisons varier  $\alpha$  dans le plan de résonance de sorte que  $\sum_j \alpha_j = 1$ , en ce cas, tous les  $n_j$  qui réalisent l'approximation de  $\alpha$  vérifient tous  $n_j < n$  et ceci quelque soit  $m$ . (voir remarque annexe I)

### Conclusion

Si les conditions du corollaire précédent sont vérifiées, pour  $n$  fixé, à cet ensemble fini de  $p$  monômes résonants, va correspondre une fonction résonante approximée uniformément par une fonction des  $p$  monômes résonants au plus. On se retrouve dans le cas de multirésonance entière, dont le nombre de monômes augmente à chaque étape  $n$  du processus.

Pour préciser les monômes résonants figurant dans  $\varphi_k$ , on remarque que, pour  $n$  fixé, on numérote les  $p$  monômes résonants par l'indice  $l=1, 2, \dots, p$ . Parmi ces monômes, on ne conserve que ceux dont l'exposant  $n_{lk} > 0$  est strictement positif. Soit  $I_k$  cet ensemble et l'on conservera l'indice  $l$  pour le décrire. On aura donc  $(z)_k = (z_l, l \in I_k)$  et :

$\varphi_k \circ f(x) = \lambda_k \varphi_k(x) (1 + h_k((z)_k))$ . Et l'on aura la relation de la forme  $z_l \circ \varphi \circ f(x) = e^{\varepsilon(\lambda)} z_l \circ \varphi(x) \prod_l (1 + h_l((z)_k))$ . Naturellement le nombre d'éléments de  $I_k$  augmente avec  $n$ . Si l'on choisit des points « au dessus » du plan de résonance, les  $e^{\varepsilon(\lambda)}$  seront plus grands que 1 et les monômes correspondants seront cycliques (ou asymptotiquement cycliques).

### Cas de 2 valeurs propres,

On se limite au cas de 2 valeurs propres, ce qui évite les multirésonances et  $f$  a une droite de résonance irrationnelle

Dans le cas de 2 valeurs propres,  $f$  a une droite de résonance irrationnelle  $\alpha$ . De plus, on peut trouver alternativement autant de  $n$  que l'on veut tels que  $1 \leq \prod_j \lambda_j^{n_j} < 1 + \varepsilon$ ; cela provient de l'examen de la démonstration de l'inégalité d'approximation donnée par Arnold (chap.3, § 11) pour construire alternativement les points entiers au dessus et au dessous de la droite de pente réelle  $\alpha$ . Notons que l'on aura donc plus de possibilités de résonance cyclique.

### Proposition

Dans le cas de droite de résonance irrationnelle alors il existe une infinité de monômes résonants tous distincts. À chaque monôme résonant correspond l'application du monôme résonant notée  $z_n \circ \varphi \circ f(x) = e^{\varepsilon(\lambda)} z_n \circ \varphi(x) (1 + h \circ z_n \circ \varphi(x))$  où  $e^{\varepsilon(\lambda)} \rightarrow 1$ . Si  $(zh \circ a_R(z)) > a|z|$  sur chaque

branche et si  $zh \circ a_R(z)$  est 2 fois continûment dérivable, appliquant le domaine compact dans lui-même, alors l'opérateur de Perron Frobenius correspondant à cette application est contractif ; de plus, l'opérateur attaché à chaque itération est cyclique au voisinage du point 0. Autrement dit, on a une infinité de valeurs de résonance qui donnent une impression de désordre complet.

#### Démonstration

Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition du cas unidimensionnel où l'on remplace  $H$  par  $e^{\varepsilon_n(\lambda)}H$  :

$$|P^n g| / P^n g \leq (\sup_i |g(k_i)| / g(k_i) / (e^{\varepsilon_n(\lambda)})(1 + a|z|))^n + ce^{\varepsilon_n(\lambda)} / (e^{\varepsilon_n(\lambda)}(1 + a|z|) - 1)$$

pour que avoir une majoration finie il faut que  $e^{\varepsilon_n(\lambda)} > 1$ . Or, d'après le lemme des d'approximation entière, on peut toujours trouver des exposants pour satisfaire cette inégalité. La suite est la même que dans la démonstration de la proposition.

Comme la suite des indices résonnants est infinie, il y aura une infinité de monômes résonnants très voisins et de périodes voisines, ce qui expliquerait l'aspect chaotique de nombreuses itérations. Ainsi, dans le complémentaire du domaine de Poincaré, apparaît un domaine de fortes perturbations.

#### Remarque

Une conclusion ironique est que même les zones de résonance entière peuvent contenir des résonances irrationnelles.

#### Remerciements

Je remercie vivement le référé qui a eu la tâche ingrate de me lire, et dont les brèves remarques pertinentes ont réorienté ma démarche. Il a fortement contribué à rendre ce texte un peu plus lisible.

Guy CIRIER, 74, rue Dunois 75646, Paris Cedex 13.

#### Bibliographie

- Arnold, V. : *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Ed. Mir, 1980  
 Hardy, G.H. and Wright, E.M., *An introduction to the theory of Numbers*, Clarendon Press, NewYork, 1960.  
 Lasota, A., M.C. Mackey: *Chaos, fractals, and noise*, Springer-Verlag, New York, 1994  
 Li, T.Y. : *Finite approximation of the Frobenius-Perron operator. A solution to Ulam's conjecture*, J. Approx. Theory, Vol. 17, 1976, p 177-186.  
 Myrberg.P.J. : *Iteration der relent Polynome Zweiten Grades*, Ann. Akad. Sc. Fennicae, A, 256, 1958, p 1-10  
 Ruelle, D : *Dynamical zeta functions and transfert operators*, IHES, août 2002.  
 Smale, S. : *Differentiable dynamical systems*, Bull. A.M.S. Soc., t.73, 1967. p747-817.  
 Steinberg, S. : *On the structure of local homéomorphismes of euclidian n-space*, A. J. Math. 80,3, 1958. p623-631. et 81,3, 1959. p578-604.

#### Annexe I

Soit  $\alpha$  un point quelconque du plan résonnant ayant exactement  $m$  coordonnées  $\alpha_j > 0$ , c'est à dire, vérifiant:

$$\sum_j \alpha_j \log |\lambda_j| = \log |\lambda| \text{ avec } \sum_j \alpha_j \geq 1$$

On a besoin d'une version de l'inégalité de Dirichlet.

#### Lemme de Dirichlet

Soit  $\alpha$  un point quelconque ayant exactement  $m$  coordonnées  $\alpha_j > 0$ , pour tout  $n$  entier de  $\mathbb{N}$ , on peut trouver des entiers non négatifs  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  de  $\mathbb{N}^m$  et  $q$  de  $\mathbb{N}$  vérifiant l'inégalité de Dirichlet :

$\sup |n_j - \alpha_j| < 1/n^{1/m}$  avec  $q < n$ .

#### Démonstration :

Voir théorème 200 dans G.H. Hardy et E.M. Wright.

#### Lemme d'approximation entière

Soit  $m+1$  le nombre exact de valeurs propres en résonance irrationnelle. Soit la constante  $c = m \sup (\log \lambda_j)$ . Pour tout  $n$ , on peut trouver des entiers non négatifs  $n_j$  et  $q$  avec  $n_j < n$  vérifiant :

$$\left| \prod \lambda_j^{n_j} - \lambda_i^n \right| < c/n^{1/m},$$

Soit  $f^k$  la  $k$  ième itérée de  $f$ , l'inégalité devient

$$\left| \prod \lambda_j^{kn_j} - \lambda_i^{kn} \right| < c/n^{1/m}$$

#### Démonstration :

-Si le nombre de valeurs propres en résonance irrationnelle est  $m+1$ , la résonance s'écrit  $\sum \alpha_j \log \lambda_j = \log \lambda_i$  avec exactement  $m$  coefficients  $\alpha_j > 0$ . Notons d'abord que  $\log \lambda_j$  ne peut figurer que dans l'un ou l'autre des deux membres de la relation selon son coefficient  $\alpha_j$  (plus grand ou plus petit que 1). Admettons qu'il figure dans le membre de droite. Si l'on a  $m+1$  valeurs propres en résonance, on aura exactement  $m$  coefficients  $\alpha_j$  à approximer.

Pour un tel point  $\alpha$  réel donné, on peut trouver d'après le lemme de Dirichlet, pour un nombre entier quelconque  $n$  donné, des nombres entiers  $n_j$  et  $q$  :  $\sup |n_j - \alpha_j| < 1/n^{1/m}$  avec  $q < n$ . (inégalité de Dirichlet), et l'on a :

$$\left| \sum n_j / q \log \lambda_j - \log \lambda_i \right| = \left| \sum (n_j / q - \alpha_j) \log \lambda_j \right| < m \sup (\log \lambda_j) \sup |n_j / q - \alpha_j| < c/qn^{1/m}$$

en multipliant les deux membres de l'inégalité par  $q=n_j$ , on obtient  $\left| \sum n_j \log \lambda_j - n_j \log \lambda_i \right| < c/n^{1/m}$ .

L'inégalité  $|e^x - 1| \leq |e^{|x|} - 1| \leq |x|e^{|x|}$  implique le résultat avec  $x = \sum n_j \log \lambda_j - n_j \log \lambda_i$ .

L'itérée d'ordre  $k$  aura toutes les valeurs propres de  $f$  élevées à la puissance  $k$ .

#### Remarque

Pour se situer dans le cadre de la condition de Seigel, il faut relier  $n$  à  $|n| = n_j + \sum n_j$  dans la formule d'approximation. On procède ainsi : on remplace dans l'équation de résonance  $\alpha_j$  par  $\alpha_j / (1 + \sum \alpha_j)$  et on pose  $\alpha_j = 1 / (1 + \sum \alpha_j)$  de sorte que :  $\alpha_j + \sum \alpha_j = 1$  et tous les  $\alpha_j$  sont alors plus petits que 1. Pour  $n$  fixé, on peut trouver des entiers  $n_j$  et  $q$  :  $\sup |n_j - q\alpha_j / (1 + \sum \alpha_j)| < 1/n^{1/m}$  avec  $q < n$ . Ce qui implique pour  $\alpha_j$  :  $|(q - \sum n_j) / q - 1 / (1 + \sum \alpha_j)| < r/qn^{1/m}$ . On obtient finalement l'approximation entière  $\left| \sum n_j \log \lambda_j - \log \lambda_i (q - \sum n_j) \right| < 2c/n^{1/m}$  où il faut poser  $n_i = q - \sum n_j$ . Pour  $n$  suffisamment grand, les  $n_j$  et  $n_i$  seront inférieurs à  $q$  et à  $n$ , donc  $|n| = n_j + \sum n_j < (m+1)n$  et l'inégalité prend la forme de Seigel voulue  $\left| \sum n_j \log \lambda_j - n_i \log \lambda_i \right| < 2c(m+1)^{1/m} |n|^{1/m}$ , à ceci près, que ici  $n_i$  n'est pas égal à 1, ce qui sera examiné dans le corollaire suivant.

On va voir que la condition de Seigel n'est pas vérifiée en général, en particulier dans un domaine irrationnel d'Anosov.

#### Notations :

Si  $\alpha$  est fixé, avec exactement  $m$  coefficients non nuls, à chaque  $n'$ , correspond un ensemble d'entiers  $m+1$  dimensionnels ;  $(n') = (n'_1, \dots, n'_j, \dots, n'_m)$  et  $q = n_j$  vérifiant la condition d'approximation. Considérons

l'ensemble des entiers  $m+1$ -dimensionnels comme des points de  $N^{m+1}$ , et notons

$$R_\alpha = \left[ (n') : \left| \prod_j \lambda_j^{n'_j} - \lambda_i^{n'_i} \right| < \lambda_i^{n'_i} e^{c/n'^m} c/n'^m \text{ et } n' \geq n; \alpha \text{ fixé} \right].$$

Si l'on fait varier  $\alpha$ , on pose  $R = \bigcup_\alpha R_\alpha$  et  $S = \bar{R}$ ;  $R$  contient une infinité d'éléments d'après le lemme d'approximation entière.

On notera :  $f = \lambda x + a(x)$  et  $f^k = \lambda^k x + a_k(x)$  sa  $k$  ième itérée. Le développement en série de Taylor de  $a_k$  et celui de l'inverse de  $\varphi$  :  $\psi = \varphi^{-1}$  seront supposés absolument convergents. Soit  $N$  l'ensemble  $d$ -dimensionnel des exposants  $(n')$  des monômes de  $a_k$ , séparons ces exposants en deux groupes : ceux appartenant à  $S \cap N$  (de somme  $a_{kS}$ ) et ceux appartenant à  $R \cap N$  (de somme  $a_{kR}$ ) de sorte que  $a_k = a_{kR} + a_{kS}$ . Ces séries sont absolument convergentes. Comme il s'agit de restes de séries d'ordre  $n$ , on identifiera  $f_R^k$  et  $a_{kR}$ ; de même, on notera  $f^k \circ \psi_R$  la somme des termes de  $f^k \circ \psi$  appartenant à  $R \cap N$  dans la formulation du corollaire suivant :

### Corollaire

La condition de Seigel n'est satisfaite que pour des fonctions  $f$  dont le reste de la série de Taylor sur  $R \cap N$  (noté  $f_R$  et  $f_R^k$  pour son itérée) vérifie la condition (C) au voisinage de chaque point du plan de résonance, pour tout  $n$  et pour toute  $k$  ième itération :

$$\|f^k \circ \psi_R\| < \lambda_i^k \|x\| \|\psi(x)\| e^{k\bar{c}/n^{1/d-1}} k\bar{c}/n^{1/d-1}$$

avec  $\bar{c} = (d-1) \sup \left| \log \lambda_j \right|$ .

Où  $R$  est réduit au domaine d'Anosov  $R = \bigcup_\alpha \left[ (n') : \left| \prod_j \lambda_j^{n'_j} - 1 \right| < e^{c/n'^m} c/n'^m \text{ et } n' \geq n \right]$

Et où

$\|\psi\|$  désigne la série des valeurs absolues.

### Démonstration

Si  $R \cap N$  n'est pas vide, cet ensemble peut avoir une infinité d'éléments, car le lemme d'approximation entière peut être appliqué, ce qui est contraire à la condition de Seigel.

On va supposer le problème de linéarisation résolu et examiner les conséquences de la résonance irrationnelle sur  $f$ .

On peut toujours écrire  $f$  sous la forme :  $f = \lambda x + a(x)$  (si la partie linéaire est diagonalisable par changement de repère); en prenant l'inverse de  $\varphi$  :  $\psi = \varphi^{-1}$  et la notation  $Hom(\psi, a(\psi)) = \lambda \psi(x) - \psi(\lambda x) - a(\psi(x))$ , l'équation de linéarisation  $f \circ \psi(x) = \lambda \psi(x) + a \circ \psi(x) = \psi(\lambda x)$  s'écrit :  $Hom(\psi, a(\psi)) = 0$ . Steinberg et Arnold obtiennent tous deux une équation homologique de ce type, (l'un la résout par développement en série pour calculer  $\varphi$ , l'autre par itérations et séries pour calculer  $\psi$  en partant de  $Hom(\psi_2, a(\psi_1)) = 0$  avec  $\psi_1(x) = x$ ). Admettons l'existence de la solution trouvée de  $Hom(\psi, a(\psi)) = 0$  quelque soit l'hypothèse formulée par l'une ou l'autre des deux méthodes : la série de Taylor de cette solution se sépare en deux groupes : l'un relatif à  $R \cap N$ , l'autre à  $S \cap N$ . Examinons celui relatif à  $R \cap N$  noté sans ambiguïté  $R$  :  $Hom(\psi, a \circ \psi_R) = 0$  : on a, en ce cas,

$$\|a \circ \psi_R - \psi_R(\lambda x) - \lambda \psi_R(x)\|, \text{ et, si on note la série : } \psi_R(x) = \sum_{n \in R} \gamma_n x^n \text{ où } x^n = \prod_j x_j^{n_j}$$

$$\|a \circ \psi_R - \psi_R(\lambda x) - \lambda \psi_R(x)\| < \left| \lambda \sum_R \gamma_n x^n - \sum_R \gamma_n (\lambda x)^n \right| < \sum_R |\gamma_n| |\lambda - \lambda^n| |x^n|$$

-plaçons nous dans le cas de Poincaré

Si  $n_j \neq 1$ ,  $R$  sera vide, car même en itérant  $n_j$  fois on élèverait simultanément tous les  $\lambda^n$  à la puissance  $n_j$ , ce qui ne change pas le problème. Il faut donc prendre  $n_j = 1$  et  $n'_j = 1$  pour  $n' \geq n$ ; la comparaison des inégalités d'approximation donne pour un point  $\alpha$  fixé :

$$\sum_j n_j \log \lambda_j - \log \lambda_j - (\sum_j n'_j \log \lambda_j - \log \lambda_j) = \sum_j (n_j - n'_j) \log \lambda_j = o(1/n^{1/m}) + o(1/n^{1/m}) = o(1/n^{1/m})$$

or  $n_j - n\alpha_j = o(1/n^{1/m})$  et  $n'_j - n'\alpha'_j = o(1/n'^{1/m})$  que l'on remplace dans la relation précédente

$(\sum \alpha_j \log |\lambda_j|)(n - n') = o(1/n^{1/m})$ , ce qui donne : soit  $\sum \alpha_j \log |\lambda_j| = 0$  ce qui est impossible dans le domaine de Poincaré, sinon  $n = n'$ , donc  $R$  sera réduit à un point, ce qui n'est pas une condition très contraignante.

- plaçons nous dans le cas d'Anosov : quelque soit  $n \geq n_0$ , on aura l'inégalité :  $|\prod \lambda_j^n - 1| < e^{c/n^{1/m}} c/n^{1/m} < e^{\bar{c}/n^{1/d-1}} \bar{c}/n^{1/d-1}$

repreons la  $i$ -ième coordonnée et choisissons  $(n'')$  pour que l'on ait  $|a_i \circ \psi_R| < \sum_{i \in R} |\gamma_{iR}| |\lambda_i - \prod \lambda_j^{n''}| x^{(n'')}|$  ; il suffira donc de prendre  $(n'') = (n'+1)$  où  $1_i$  désigne le multi indice valant 0 partout, sauf pour la  $i$ -ième composante où il vaut 1 pour avoir une infinité de  $n'$  dans  $R$  vérifiant :

$|a_i \circ \psi_R| < |\lambda_i| x_i \sum_{i \in R} |\gamma_{iR}| x^{(n'')} e^{\bar{c}/n^{1/d-1}} \bar{c}/n^{1/d-1} < |\lambda_i| x_i \|\psi(x)\|_R e^{\bar{c}/n^{1/d-1}} \bar{c}/n^{1/d-1}$  pour  $\forall n \geq n_0$ . On peut alors reprendre le raisonnement avec  $f^k$  pour obtenir le résultat quelque soit  $k$ , puisque  $f^k \circ \psi(x) = \psi(\lambda^k x)$  pour le même vecteur propre  $\psi$  et pour la valeur propre  $\lambda^k$ .

**Remarque**

- Autrement dit, pour linéariser  $f$ , le reste de la série de Taylor de tous les  $f^k$  doit converger plus rapidement que  $1/n^{1/d-1}$  fois le reste de la série de  $\psi$  au voisinage du plan de résonance quelque soit  $n$ , et ce, d'autant plus vite, que le plan de résonance sera proche de coordonnées entières.
- On peut reprendre la démonstration avec les  $\varphi$  au lieu des  $\psi$  pour vérifier la même condition de convergence du reste de la série des  $\varphi$  pour le même ensemble  $R$  au voisinage du plan résonant.

**Annexe II : quelques exemples  
Exemples de non résonance**

**Exemple 1 : Équation différentielle ordinaire**

-En dimension  $d$  ; prenons une équation différentielle d'un vecteur de  $d$  coordonnées en fonction du temps  $t$ , notée  $dx/dt = F(x)$ . On remarque que  $f$  est ici  $f = x + \delta F(x)$  et réalise une application de  $E^d$  dans  $E^d$ , pour  $\delta$  fixé symbolisant l'accroissement de  $t$  et tendant vers 0. La traduction des considérations précédentes en termes d'équations différentielles ordinaires, se résument ainsi, si l'on suppose toutes les dérivées à support compact :

\* Les points fixes sont donnés par  $F(r) = 0$ , les multiplicateurs  $\lambda$  sont solutions de  $|F'_r - \lambda I| = 0$  autour de chaque point fixe  $r$ . La condition de linéarisation s'écrit ici :  $\sum_i n_i \lambda_i \neq \lambda_j$  avec des entiers  $n_i$  non négatifs de somme supérieure à 1. La condition (C) s'exprimera de la même façon que précédemment.

\* Les semi invariants  $\varphi$  ayant leurs dérivées partielles à support compact vérifient :  $\partial \varphi_i / \partial x F(x) = \lambda_i \varphi_i(x)$  ou encore  $\partial \log \varphi_i / \partial x F(x) = \lambda_i$  où  $\partial \varphi_i / \partial x F(x)$  est le produit scalaire dans  $E^d$ .

Opérons maintenant  $k$  itérations de  $f$ , de sorte que :  $t = k\delta$ . Le point fixe ne change pas, les semi invariants  $\varphi$  non plus. Si  $x$  est un point initial de  $E^d$ , on pourra noter  $x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x)$  et l'équation des semi invariants  $\varphi$  s'écrit :

$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi \circ f^k(x) = \varphi \circ x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \lambda t/k)^k \varphi(x) = e^{\lambda t} \varphi(x)$ , donc  $x(t) = \varphi^{-1}(e^{\lambda t} \varphi(x))$ . Ainsi se trouve justifiée l'équation ;

$\partial\varphi_i/\partial x F(x) = \partial\varphi_i/\partial x dx/dt = d\varphi_i/dt = \lambda_i \varphi_i(x)$ . Il faut rapprocher ces équations de celle  $\partial\theta/\partial x F(x) = 0$ , qui détermine l'intégrale première  $\theta(x)$  de l'équation différentielle : Il vient  $\partial\log(\varphi_i^{1/\lambda_i}/\varphi_j^{1/\lambda_j})/\partial x F(x) = 0$  et on retrouve localement le système circulaire de  $d-1$  intégrales premières

\*Enfin, on ne peut appliquer directement la formule de la densité, sans en vérifier la version adaptée aux équations différentielles ordinaires : si la densité invariante  $g$  a des dérivées à support compact pour l'application  $f = x + \delta F(x)$ , cette densité devra satisfaire :  $\partial g/\partial x F(x) + g \text{Tr}(\partial F/\partial x) = 0$ , donc,  $d\log g/dt = -\text{Tr}(\partial F/\partial x)$  (on y reconnaît l'identité de Jacobi appliquée à l'équation différentielle  $dX/dt = -\partial F/\partial x_{(x=x(t))} X$  et la densité invariante  $g$  s'interprète comme le déterminant  $|X|$  à une constante multiplicative près) mais on observe que les  $\varphi$  vérifiant  $\partial\log\varphi_i/\partial x F(x) = \lambda_i$  vont encore satisfaire

l'équation  $\frac{|\varphi'|}{\prod_i \varphi_i} = |f^{-1}| \frac{|\varphi' \circ f^{-1}|}{\prod_i \varphi_i \circ f^{-1}}$  quand  $\delta \rightarrow 0$  et la mesure est encore de la forme  $\prod_i \log\varphi_i = \prod_i \log \exp \lambda_i t = \prod_i (\lambda_i t) = |F_t|^{d'}$ . On obtient une sorte de loi des aires de Kepler.

- Les équations d'Hamilton dans  $\mathbb{R}^n$  se traitent de la même façon, lorsque  $H$ , qui applique  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}$ , ne dépend pas du temps :

$$\begin{aligned} dp/dt &= -\partial H(p, q)/\partial q, \\ dq/dt &= \partial H(p, q)/\partial p. \end{aligned}$$

Elles réalisent une application de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , et pour appliquer la formule avec  $F = (-\partial H(p, q)/\partial q, \partial H(p, q)/\partial p)$ , Il faut rechercher les points fixes  $\partial H(p, q)/\partial q = 0$  et  $\partial H(p, q)/\partial p = 0$ , puis, calculer les valeurs propres pour ces points fixes, en posant  $I$  la matrice identité de  $\mathbb{R}^n$  et en annulant le déterminant formé des 4 blocs  $n \times n$  :

$$J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\partial^2 H / \partial q^2 - \lambda I & -\partial^2 H / \partial p \partial q \\ \partial^2 H / \partial p \partial q & \partial^2 H / \partial p^2 - \lambda I \end{vmatrix} = 0$$

L'équation en  $\log\varphi_i$  s'écrit alors vectoriellement :  $\partial\log\varphi/\partial q \partial H/\partial p - \partial\log\varphi/\partial p \partial H/\partial q = \lambda$  où  $\lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres. Le caractère symplectique apparaît clairement dans le premier membre de la relation qui n'est autre que le crochet de Poisson vectoriel de  $\log\varphi$  et de  $H$  :  $[\log\varphi, H] = \partial\log\varphi/\partial q \partial H/\partial p - \partial\log\varphi/\partial p \partial H/\partial q$ , et la relation s'écrit :  $[\log\varphi, H] = \lambda$ . En général, les solutions seront fonctions des  $\exp \lambda_i t$ .

La densité invariante est :  $J(0)t^{2n}$  à une constante près.

- Cas de  $n$  corps de masse  $m_i$  dans un champ de forces dérivant d'un potentiel  $U(q)$  ; les équations d'Hamilton seront :

$$\begin{aligned} dp/dt &= -\partial H/\partial q = -\partial U/\partial q, \\ dq/dt &= \partial H/\partial p = p/m \text{ de composantes } p_i/m_i \end{aligned}$$

les points fixes seront  $p_i = 0$  (vitesse nulle) et  $\partial U/\partial q = 0$ . Les valeurs propres seront solutions du

$$\text{déterminant noté ici en 4 blocs } n \times n : J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\partial^2 H / \partial q^2 - \lambda I & -\partial^2 H / \partial p \partial q \\ \partial^2 H / \partial p \partial q & \partial^2 H / \partial p^2 - \lambda I \end{vmatrix} = 0$$

L'équation en  $\log\varphi_i$  s'écrit alors vectoriellement :  $\partial\log\varphi/\partial q \partial H/\partial p - \partial\log\varphi/\partial p \partial H/\partial q = \lambda$  où  $\lambda$  est la matrice diagonale des valeurs propres. Le caractère symplectique apparaît clairement dans le premier membre de la relation qui n'est autre que le crochet de Poisson vectoriel de  $\log\varphi$  et de  $H$  :  $[\log\varphi, H] = \partial\log\varphi/\partial q \partial H/\partial p - \partial\log\varphi/\partial p \partial H/\partial q$ , et la relation s'écrit :  $[\log\varphi, H] = \lambda$ . En général, les solutions seront fonctions des  $\exp \lambda_i t$ .

La densité invariante est :  $J(0)t^{2n}$  à une constante près.

- Cas de  $n$  corps de masse  $m_i$  dans un champ de forces dérivant d'un potentiel  $U(q)$  ; les équations d'Hamilton seront :

$$dp/dt = -\partial H/\partial q = -\partial U/\partial q,$$

$$dq/dt = \partial H/\partial p = p/m \text{ de composantes } p_i/m_i,$$

les points fixes seront  $p_i = 0$  (vitesse nulle) et  $\partial U/\partial q = 0$  (points fixes alignés et ne dépendant que des masses si le potentiel est newtonien). Les valeurs propres seront solutions du déterminant noté ici en 4 blocs  $n \times n$  :

$$\begin{vmatrix} -\partial^2 U/\partial q^2 - \lambda I & 0 \\ 0 & (1/m - \lambda)I \end{vmatrix} = 0$$

Les valeurs propres se séparent en deux blocs  $|\partial^2 U/\partial q^2 - \lambda I| = 0$  et de  $|(1/m - \lambda)I| = 0$  (elles ne dépendent que des masses si le potentiel est newtonien) et donneront  $2n$  fonctions de base  $\exp \lambda_i t$ .

La mesure invariante obtenue est  $\prod (1/m_i) |\partial^2 U/\partial q^2|^{2n}$ .

Exemple 2: **Équation aux dérivées partielles** :  $\partial x/\partial u = f(x)$

Ici,  $x$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ ,  $u$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^q$ ,  $f(x)$  est une matrice  $q \times d$  et ne dépend que de  $x$ .

- cas où  $\partial x/\partial u = f(x)$  :

$u$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^q$ ,  $a$  étant un vecteur fixé arbitraire, on forme le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^d$  :  $z = ax$  qui applique  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ . En remarquant que :  $a = \partial z/\partial x$ , on obtient les  $q$  équations :

$\partial z/\partial u = a \partial x/\partial u = a f(x) = \partial z/\partial x f(x)$ . La variable supplémentaire  $z = ax$  a été ajoutée au problème initial.

-Examinons une équation particulière relative à  $u_j$ . On omettra l'indice  $j$  de la  $j$  ième équation dans le raisonnement qui suit sauf pour le vecteur  $f_j(x)$  à  $d$  coordonnées, avec  $j=1, 2, \dots, q$ , de façon à ne pas le confondre avec la matrice  $f(x)$  :

on a ici une équation avec la variable  $u$  :  $\partial z/\partial u = \partial z/\partial x f_j(x)$

le changement de variable  $v = \exp(\alpha u)$ , où  $\alpha$  est un réel ou un nombre complexe quelconque, va créer un point fixe dans la future équation différentielle ordinaire  $dy/dt = (\alpha v, -f_j(x))$  ( voir 11 lignes plus bas) et l'équation devient :  $\alpha v \partial z/\partial v = \partial z/\partial x f_j(x)$ .

Écrivons ces solutions  $z_i$  sous la forme  $z_i = \log \theta_i/\lambda_i - \log \theta_{i-1}/\lambda_{i-1}$  ; on obtient quelque soit  $i$  :

$$\alpha v \partial(\log \theta_i/\lambda_i)/\partial v - \partial(\log \theta_i/\lambda_i)/\partial x f(x) = \alpha v \partial(\log \theta_{i-1}/\lambda_{i-1})/\partial v - \partial(\log \theta_{i-1}/\lambda_{i-1})/\partial x f(x) = C$$

où l'on peut imposer le choix des  $\theta_i$  et  $\lambda_i$  pour rendre  $C$  constante égale à 1. À chaque solution  $z$ , on a associé 2 nouvelles fonctions  $\theta_i$  et  $\theta_{i-1}$ , mais on a ajouté autant de relations. On est donc conduit à

examiner les équations :  $\alpha v \partial \theta_i/\partial v - \partial \theta_i/\partial x f_j(x) = \lambda_i \theta_i$  qui réalisent une application de  $\mathbb{R}^{d+1}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Or, on sait, depuis la thèse de Poincaré, (dont il faudrait sans doute réactualiser les conditions), que :

si tous les  $\lambda_i$  tombent dans le même demi-plan ouvert autour de l'origine et si  $\sum_i n_i \lambda_i \neq \lambda_j$  pour tout ensemble d'entiers  $n_i$  non négatifs de somme supérieure à 1, l'équation en  $\theta$  a une solution analytique dans un voisinage de l'origine, solution donnée par le système de  $d+1$  équations différentielles ordinaires. On pose  $y = (v, x)$  et :  $dy/dt = (\alpha v, -f_j(x))$ , avec la solution particulière  $dv/dt = \alpha v$ ,  $\log v + \alpha c = \alpha t$ , que l'on rapproche de  $v = \exp(\alpha u)$ , donc :  $t = u + c$ .

On recherche le point fixe :  $v=0$ ,  $f_j(r)=0$ , puis, les multiplicateurs  $\lambda : \begin{vmatrix} -f'_j \\ -\lambda I \end{vmatrix} = 0$ , on écarte la valeur propre correspondant à  $v$ , soit la solution  $\alpha$  déjà étudiée, donc :

$dx/du = -f(x)$  dont on a vu que les  $d$  fonctions de base étaient :  $\exp \lambda_i u$ .

la mesure invariante attachée se déduit de l'analyse des équations différentielles ordinaires en changeant la notation :

$$|f'_j| u^d$$

- Pour chacune des  $q$  équations relatives à chaque  $u_j$ , on peut refaire le raisonnement précédent : on obtient des fonctions de base  $\exp \lambda_{ij} u_j$  indexées par  $j$ .

- Les solutions (en  $x$ ) obtenues pour chaque variable  $u_j$  doivent être compatibles entre elles (et donner la même solution  $x$ ). Reprenons les conditions de compatibilité entre les  $q$  équations :  $z = ax$ , et l'examen des équations linéaires conduit à dire que les  $z_{ij}$  ne peuvent différer d'une équation à l'autre que par un facteur multiplicatif  $k_j$  :  $z_{ij} = k_j z_i$ , encore faut-il que ce soit autour du même point fixe ; donc, les  $t$  et les  $u$  sont définis à un facteur multiplicatif près : les valeurs propres devront être proportionnelles  $\lambda_{ij} = k_j \lambda_i$ , sinon  $x$  ne sera pas solution commune de ces équations et les points fixes devront être les mêmes  $r = r_j$ . La solution du système dépendra des fonctions de base  $\exp \lambda_{ij} u_j = \exp k_j \lambda_i u_j$ .

Donc, la mesure de l'ensemble sera  $\prod |f'_j| u_j^d$  à une distribution initiale près.

**cas où**  $\partial x / \partial u = f(\exp \beta u, x)$  : On peut, dans chacune des  $j$  équations, introduire dans  $f_j$  la variable  $u_j$  sous forme d'un vecteur  $\exp \beta u$  qui viendra s'ajouter aux fonctions de base. La principale difficulté d'application de la formule vient du fait que la plupart des équations aux dérivées partielles que l'on rencontre (laplacien, divergence nulle, etc.) présentent des multiplicateurs nuls et l'application n'est pas injective.

### Quelques exemples de résonance

#### Exemple 3 : exemple introductif pour l'étude du monôme résonant

Soit la logistique  $H(z) = az(1-z)$  dont on sait que, pour  $1 < a \leq 4$  les itérés de cette application présentent une distribution de désordre complet. Le cas  $a = 1$  est précisément celui dans lequel on se situe. On va examiner les hypothèses nécessaires pour se rapprocher de cette situation de désordre.

Soit  $H(z) = z(1+h(z))$  où  $z \geq 0$  avec  $h(0) = 0$ .

Soit  $s$  le premier point positif où  $H(s) = 0$ . On suppose que  $H(z) \geq 0$  sur  $(0, s)$ .

Soit  $r$  un point fixe positif qui vérifiera :  $r = r + rh(r)$ , donc  $r > 0$  implique :  $h(r) = 0$  et  $H(r) = 1 + rh'(r)$ ,  $r < s$ .

Soit  $m$  un point de  $(0, r)$  où  $H$  est maximum ; on a :  $H(m) \geq H(r) = r$ ,

Si  $H(m) \leq s$ , l'image de  $(0, s)$  est contenue dans  $(0, s)$  et deux cas se présentent ; si l'un des points fixes de  $(0, s)$  est attractif, et ce sera l'aboutissement probable du processus, mais, si tous les points fixes de  $(0, s)$  sont répulsifs, ces points se renverront « la balle » et on aura créé un désordre. Pour être répulsifs, les points fixes devront avoir leur dérivée supérieure en module à l'unité. Cette situation sera traduite par la condition :  $|H'(z)| \geq 1 + dz$  au voisinage des points fixes.

Cette idée sera utilisée dans le lemme de majoration ; au voisinage de l'origine, elle s'écrit plus simplement :  $H'(z) = 1 + (zh'(z)) \geq 1 + az$  et par suite,  $(zh(z) - az^2/2)' \geq 0$ , et  $H(z) \geq z + az^2/2$ . On devra supposer également que l'image de  $z$  est contenue dans le compact de départ.

Examinons ce qu'implique la condition  $|H'(z)| \geq 1 + dz$  au point fixe  $r$  positif : comme ici  $H'(z) \leq 0$ , on va avoir  $-H'(z) \geq 1 + az = (z + az^2/2)'$ , et la décroissance de

l'application :  $H(z) = z + az^2/2 \leq H(r) = r + ar^2/2 = 2r + ar^2/2$  donc,  $0 \leq H(z) \leq r - (z-r)(1+a(z+r)/2)$  et pour  $z \geq r$ ,  $0 \leq H(z) \leq r$  et  $H(z)$  ne pourra donc avoir de point fixe sur  $(r, s)$  il n'y aura donc qu'un point fixe positif sur  $(0, s)$  la condition  $|H'(z)| \geq 1 + |dz|$  est donc assez restrictive.

**Cas où**  $H(z) = z(1 + h(z))$  et  $h(z) = az(r-z)$

Ce cas permettra de préciser les conditions :

- on veut que le point  $r$  soit répulsif, donc  $-H'(r) = ar^2 - 1 \geq 1$  et, si  $u = ar^2$ ,  $u \geq 2$ .

- on veut que l'image de  $(0, s)$  soit contenue dans  $(0, s)$  :  $H(m) = m(1 + h(m)) \leq s$ , or, un calcul simple montre que  $m = (r/3)(1 + (1+3/u)^{1/2})$  et que  $s = (r/2)(1 + (1+4/u)^{1/2})$  la condition s'écrit :

$(1/3)(1 + (1+3/u)^{1/2})(1 + h(m)) \leq (1/2)(1 + (1+4/u)^{1/2})$  soit :  $(2/3)(1 + h(m)) \leq \frac{(1 + (1+4/u)^{1/2})}{(1 + (1+3/u)^{1/2})}$  or  $h(m) = (u/9)(1 + (1+3/u)^{1/2})(2 - (1+3/u)^{1/2})$  d'où l'encadrement :  $2 \leq ar^2 \leq 3,41$  qui est assez réduit.

### Petite digression

Supposons que, dans  $(0, s)$ , il y ait un nombre fini d'extrema (ils seront alors par exemple tous positifs) : sous les mêmes hypothèses, ils devront en général être en nombre impair (on élimine les points d'inflexion, etc.). L'approximation polynomiale de  $H$  sur  $(0, s)$  devra être de degré pair et s'annuler à l'origine :  $P_{2n}(z) = z Q_{2n-1}(z)$ . Un tel polynôme peut être considéré comme le résultat de  $n$  itérations de trinômes du second degré de la forme :  $T_i(z) = z(az + b)$  que l'on compose pour former  $O_n = T_n \circ T_{n-1} \circ \dots \circ T_1$  de sorte que l'on a la relation de récurrence  $O_n = T_n \circ O_{n-1} = O_{n-1}(a_n O_{n-1} + b_n)$  et  $P_{2n} = O_n$ . Les  $2n$  coefficients des  $n$  trinômes itératifs sont déterminés par les  $2n$  coefficients du polynôme  $P_{2n}$ . On demandera d'abord au polynôme de passer par les points fixes, la dernière condition venant de l'annulation en  $s$ . La densité de l'opérateur de Perron Frobenius associé à  $P_{2n}$  sera donc le produit des densités conditionnelles associées à chaque trinôme successif dans l'ordre inverse de composition. Sous des conditions assez générales à préciser, on aura une bonne approximation de l'opérateur de Perron Frobenius associé à  $H$ . Ce qui devrait contribuer à rendre la condition  $|H'(z)| \geq 1 + |dz|$  moins restrictive.

### Exemple 2: équation différentielle ordinaire avec résonance d'Anosov

- En dimension  $d$ , reprenons l'équation différentielle d'un vecteur de  $d$  coordonnées en fonction du temps  $t$ , notée  $dx/dt = F(x)$ . La traduction de la résonance de  $f$  en termes d'équations différentielles ordinaires se résume ainsi :

La condition de résonance devient :  $\sum_j n_j \lambda_j = 0$  avec  $m$  entiers  $n_j$  non négatifs de somme supérieure à 1.

L'analyse du sous espace non résonnant vérifiant la condition (\*), reste inchangée par rapport au cas standard  $\partial \log \varphi_i / \partial x F(x) = \lambda_i$ , et l'on peut construire des fonctions de base et une mesure invariante sur ce sous espace supplémentaire de l'espace de résonance. Dans le sous espace résonnant, en reprenant les calculs, on obtient  $m$  équations non linéaires vérifiant  $\partial \varphi_j / \partial x F(x) = \lambda_j (1 + h_j \circ z(\varphi)) \varphi_j$  où  $z = z(\varphi) = \prod_j \varphi_j^{n_j}$  encore appelé monôme résonnant ; les applications  $h_j$  et  $\varphi_j$  se calculent simultanément à l'aide de développements en série convergente, en vue d'éliminer les monômes résonnants au fur et à mesure de leur apparition (ce qui est ici beaucoup plus facile puisque l'on a affaire à des convolutions). Par sommation sur  $j$ , les  $\varphi_j$  vérifient alors :

$$\partial \log z / \partial x F(x) = \sum_j n_j \partial \log \varphi_j / \partial x F(x) = \sum_j n_j \lambda_j (1 + h_j \circ z(\varphi)) = \sum_j n_j \lambda_j h_j \circ z(\varphi) = h(z)$$

Or,  $dx/dt = F(x)$ , donc :  $d \log z / dt = h(z)(\varphi)$  soit  $dz/dt = zh(z)$  ; les points fixes de  $h(z)$  sont les pôles de l'intégrale :  $t = \int (zh(z))^{-1} dz$  s'interprète comme la fonction résonante. Comme dans le cas non

résonant, les fonctions de base du mouvement s'expriment avec les équations aux vecteurs propres suivantes :

$$\begin{aligned} \partial \varphi_j / \partial x F(x) &= \partial \varphi_j / \partial x dx / dt = d \varphi_j / dt = \lambda_j (1 + h_j \circ z(\varphi)) \varphi_j \\ d \log \varphi_j / dz &= d \log \varphi_j / dt (dt / dz) = \lambda_j (1 + h_j(z)) / (zh(z)), \text{ donc} \\ \varphi_j &= C \exp \left( \int \lambda_j (1 + h_j(z)) / (zh(z)) dz \right) \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit remplacer dans les fonctions de base,  $t$  par les fonctions de résonance  $\int \lambda_j (1 + h_j(z)) / (zh(z)) dz$ .

Considérons  $\varphi_j(x)$  solution de l'équation de départ et  $\partial \varphi_j(z) / \partial z zh(z) = -\lambda_j \varphi_j(z) h_j(z)$ , donc  $\varphi_j(z) = c \exp(-\lambda_j \int h_j(z) / zh(z) dz)$ . Pour faire apparaître les intégrales premières, il suffit de remarquer que  $(\varphi_j(x) \varphi_j(z))^{1/\lambda_j} / (\varphi_j(x) \varphi_j(z))^{1/\lambda_j}$  constitue alors un système circulaire d'intégrales premières pour le couple d'équations  $dx/dt = F(x)$  et  $dz/dt = zh(z)$ , cette dernière équation étant elle-même générée par la première.

- S'agissant de la mesure de Perron Frobenius associée, la loi marginale de  $z$  relative à l'application  $H = z(1 + \delta h(z))$ . Sa densité  $g$  invariante associée devra vérifier :  $(zh(z)) dg/dz + (zh(z))' g = 0$ , c'est à dire :  $(zh(z)) g' = 0$  et  $g = c / zh(z)$ , et, en conséquence, la mesure invariante peut être identifiée au temps. Mais, les  $\varphi_j$  doivent vérifier :

$d \log \varphi_j / \partial x F(x) = d \log \varphi_j / dt = \lambda_j (1 + h_j \circ z(\varphi))$  avec la contrainte :  $\sum_j n_j \log \varphi_j = \log z$  fixé non nul. On s'effectue la transformation  $T$  qui, à  $\varphi_j$ , fait correspondre, pour  $z$  et  $j$  fixés,  $y : y_j = \log \varphi_j$  pour  $j = 1, 2, 3, \dots, m$

La suite est comme celle qui a été étudiée mais, dans le cas plus simple d'une sous variété plane.

#### Remarque

Ces résonances entières se rencontrent peu fréquemment ; en fait, elles apparaissent essentiellement lorsque l'on fait varier continûment un paramètre de l'application initiale  $f$  : les premières recherches faites n'apportent pas de grosses surprises.

### Limites et discussion du cadre du travail

#### $f(x)$ non injective

Dans  $E^d$ , supposons maintenant que  $f(x)$  ne soit plus injective, on ne peut appliquer la formule. On suppose en général ici que  $f$  a un nombre fini d'inverses. Les  $f_i^{-1}$  sont les différentes feuilles de l'image réciproque de  $f$ . ( $y : f(y) = x$ ). D'ailleurs, en suivant L.M. dans les cas les plus favorables où il y a des multiplicités  $m_j$ , l'opérateur de Perron-Frobenius prend la forme :

$$Pg = \sum_j m_j g \circ f_i^{-1} \Big|_{f_i^{-1}} = g.$$

Certains auteurs essaient de résoudre cette équation de manière probabiliste en s'inspirant d'une conjecture d'Ulam : on construit a priori une matrice d'incidence entre les différentes feuilles dont les coefficients sont proportionnels aux surfaces ; cette matrice est interprétée comme une matrice de Markov et on cherche ensuite sur chaque feuille la mesure invariante : la formule calculée sur chaque feuille devrait peut-être apporter quelques facilités de calcul.

Certains cas particuliers importants ont trouvé une solution exacte dans  $\mathbb{R}$  (l'exemple d'Ulam est le plus célèbre).

Il semble qu'il faille appliquer d'autres techniques. Les méthodes les plus prometteuses sont probablement celles développées autour des fonctions zeta de Ruelle.

**Pas de point fixe**

Il faut enfin apporter quelques nuances sur les possibilités d'application de la formule en particulier quand  $f$  n'a pas de point fixe alors qu'il peut exister une mesure invariante : par exemple, la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  invariante par translation, donc, sans point fixe. Autre exemple : considérons le cas, en dimension 1, où  $dx/du = m = \text{constante}$  non nulle. Il n'y a donc pas de point fixe à distance finie. On ne peut appliquer la formule, alors que la solution est élémentaire :  $x = mt + c$  dont on a vu que la mesure invariante était  $|\log|t - r|$ . Remarquons que, en ce cas, un changement de variable approprié ( $x = \log v$ ), rend la formule applicable en créant un point fixe à l'origine :  $dv/dt = mv$ . Cela pose d'ailleurs un problème théorique qui ne semble pas très clair : l'opérateur de Perron Frobenius peut créer un point fixe dans l'espace des mesures de probabilité sans qu'il y ait de point fixe dans l'application de départ.