



**HAL**  
open science

# Une heuristique pour résoudre le problème de flot de coût minimal dans un réseau de transport à fonctions de coût quadratiques, convexes et non-séparables

Ayoub Tahiri, Pascale Chiron, David Ladevèze, Bernard Archimède

## ► To cite this version:

Ayoub Tahiri, Pascale Chiron, David Ladevèze, Bernard Archimède. Une heuristique pour résoudre le problème de flot de coût minimal dans un réseau de transport à fonctions de coût quadratiques, convexes et non-séparables. ROADEF 2018, 19ème conférence de la Société Française de Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision, Feb 2018, Lorient, France. pp.0. hal-03635481

**HAL Id: hal-03635481**

**<https://hal.science/hal-03635481>**

Submitted on 8 Apr 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of some Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/23343>

**Official URL:** [http://roaDEF2018.labsticc.fr/RoaDEF2018-Pdf/ROADEF2018\\_paper\\_119.pdf](http://roaDEF2018.labsticc.fr/RoaDEF2018-Pdf/ROADEF2018_paper_119.pdf)

### To cite this version:

Tahiri, Ayoub and Chiron, Pascale and Ladevèze, David and Archimède, Bernard Une heuristique pour résoudre le problème de flot de coût minimal dans un réseau de transport à fonctions de coût quadratiques, convexes et non-séparables. (2018) In: ROADEF 2018, 19ème conférence de la Société Française de Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision, 21 February 2018 - 23 February 2018 (Lorient, France).

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator:

[tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Une heuristique pour résoudre le problème de flot de coût minimal dans un réseau de transport à fonctions de coût quadratiques, convexes et non-séparables

Ayoub TAHIRI<sup>1,2</sup>, Pascale CHIRON<sup>1</sup>, David LADEVEZE<sup>2</sup>, Bernard ARCHIMEDE<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ecole nationale d'ingénieurs de Tarbes, LGP, Tarbes, France

{pascale.chiron, bernard.archimede}@enit.fr

<sup>2</sup> Compagnie d'Aménagement des Coteaux de Gascogne, Tarbes, France

{a.tahiri, d.ladeveze}@cacg.fr

**Mots-clés :** Réseaux de transport ; fonctions de coût quadratiques, convexes et non séparables ; optimisation globale.

## 1. Introduction

Contrairement aux fonctions de coût linéaires, les fonctions de coût convexes, évoluant avec le flux, permettent de mieux le distribuer sur un réseau (ex : distribution d'électricité, distribution de la ressource en eau, gestion du portefeuille d'une entreprise...). D'autre part, les contraintes de proportionnalité entre les flux, fréquemment rencontrées (ex : les charges d'activités, modélisation des pertes dans un réseau...), sont modélisables par des fonctions de coût non séparables. Dans ce papier, nous proposons une heuristique pour résoudre le problème de flot de coût minimal dans un réseau de transport à fonctions de coût quadratiques, convexes et non-séparables.

## 2. Formulation mathématique du problème

Soit  $G = (V, E)$  un réseau de transport, avec  $V$  l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arcs. Soit  $R \subset V$ , l'ensemble des sommets de « répartition ». Un sommet de répartition est un sommet qui répartit le flux entrant en  $m$  flux sortants en fonction des coefficients de répartition  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ . Cette modélisation peut être simplifiée par une succession de répartition en 2 flux.

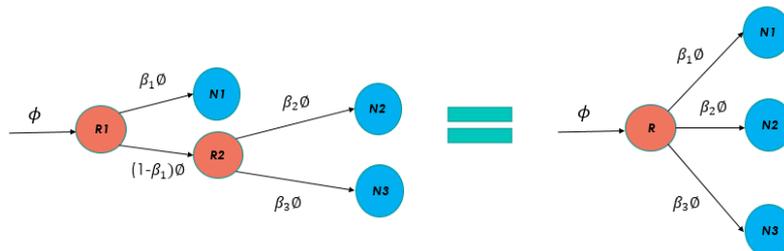


Figure 1: Exemple d'un sommet de répartition

Pour chaque nœud  $n$  de  $V$ , la loi de Kirchhoff est vérifiée hormis pour le sommet source ( $S$ ) et le sommet utilisation ( $P$ ). A tout arc  $e$  est associé une capacité  $U_e$  et une fonction de coût quadratique et convexe :  $C_e(\phi_e) = a_e \phi_e^2 + b_e \phi_e$  ;  $a_e \geq 0$  avec  $\phi_e$  le flux présent sur l'arc  $e$ .

Les flux ne se déplacent pas instantanément sur un réseau, mais nécessitent un temps de transfert pour parcourir chaque arc ; de plus, ils évoluent dans le temps. On parle alors de flux dynamiques. Pour prendre en compte le temps de transfert, nous utilisons un réseau étendu temporisé. Ainsi, le problème de flot de coût minimal est formulé par les équations 1-5 :

$$\text{Min} \sum_{e \in E} C_e(\phi_e) \quad (1)$$

$$\sum_{\text{arcs sortants de la source}} \phi_e = \text{la ressource disponible} \quad (2)$$

$$\forall e \in E \quad 0 \leq \phi_e \leq U_e \quad (3)$$

$$\forall n \in V \setminus \{S, P\} \quad \sum_{\text{arcs entrants}} \phi_e = \sum_{\text{arcs sortants}} \phi_e \quad (4)$$

$$\forall n \in R \quad \phi_{\text{flux principal sortant}} = \beta \phi_{\text{flux entrant sur } n} \quad (5)$$

$$\text{Et} \quad \phi_{\text{flux secondaire sortant}} = (1 - \beta) \phi_{\text{flux entrant sur } n}$$

### 3. Algorithme d'optimisation

L'algorithme proposé pour trouver la distribution optimale s'appuie sur le théorème de Busacker et Saaty [3] qui stipule qu'une distribution du flux, est optimale si et seulement si le graphe résiduel [2] ne contient aucun circuit à coût négatif. Un sous graphe est indépendant si toute modification d'un flux sur un de ses arcs n'impacte pas le reste du graphe. Si un circuit passe par un ou plusieurs sommets de répartition alors, il est possible qu'il ne constitue plus un sous-graphe indépendant. En effet, en faisant circuler un flux  $\phi$  sur un circuit contenant un sommet de répartition, une quantité proportionnelle à ce flux peut quitter le circuit. Pour concevoir un sous-système indépendant, les arcs et les sommets qui acheminent cette perte jusqu'au sommet (U) sont intégrés au circuit. Le sous graphe ainsi obtenu est nommé dans la suite multi-circuit.

L'algorithme commence par une distribution initiale réalisable, ensuite les deux étapes suivantes sont répétées jusqu'à ce qu'aucun multi-circuit de coût négatif ne soit détecté.

- Détecter un multi-circuit à coût négatif en utilisant l'algorithme de Bellman-Ford [1].
- Éliminer le multi-circuit en déplaçant une quantité de flux dans le circuit de sorte que le coût du circuit s'annule ou qu'un des arcs soit saturé.

L'élimination d'un multi-circuit à coût négatif améliore la fonction objectif tout en gardant la faisabilité de la distribution.

### 4. Conclusions et perspectives

Dans cet article nous avons proposé une méthode de recherche du flot à coût minimal sur un réseau étendu temporisé en prenant en compte des fonctions de coût, quadratiques, convexes et non-séparables. Cette méthode a été appliquée, pour protéger contre les inondations, avec succès au système hydraulique composé de 3 barrages de la Haute vilaine. La prise en compte de coefficients de répartition variables est une des perspectives à développer à court terme.

### Références

- [1] D. R. Fulkerson. Flow networks and combinatorial operations research. The American Mathematical Monthly, 73(2):115\_138, 1966.
- [2] James Evans. Optimization algorithms for networks and graphs. CRC Press, 1992.
- [3] Saaty, T. L., & Busacker, R. G. (1965). Finite Graphs and Networks: an introduction with applications. McGraw-Hill Book Company.