



HAL
open science

Test d'Ajustement à une Loi Normale Vectorielle

N. Hadjadji Seddik-Ameur

► **To cite this version:**

N. Hadjadji Seddik-Ameur. Test d'Ajustement à une Loi Normale Vectorielle. Annales de l'ISUP, 2007, LI (3), pp.81-96. hal-03635463

HAL Id: hal-03635463

<https://hal.science/hal-03635463>

Submitted on 8 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

l'est d'Ajustement à une Loi Normale Vectorielle

N.Hadjadji Seddik-Ameur

Laboratoire d'Analyse Numérique, Optimisation et Statistique
 Université d'Annaba, B.P.12, Annaba, Algérie

e-mail: naciraseddik@yahoo.fr

Résumé: Dans ce travail, nous proposons un test d'ajustement à une loi normale multidimensionnelle avec estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance directe relative aux données non regroupées. Nous utilisons la modification Y^2 de la statistique de Pearson X^2 proposée par Nikulin pour l'ajustement des lois unidimensionnelles que nous avons adaptée au cas des lois normales multidimensionnelles. Cette statistique Y^2 suit sous l'hypothèse H_0 à tester, pour un nombre assez grand d'observations, une loi du Chi-deux à $k - 1$ degrés de liberté où k désigne le nombre de classes choisi.

Abstract: In this paper, we propose a goodness-of-fit test for multivariate normal law with maximum likelihood estimation's method relating to ungathered data. We use The modification Y^2 of the Pearson's statistic X^2 proposed by Nikulin for one dimensionnal normal law, wich we have adapted for multivariate's case. Under hypothesis H_0 to be tested, and for a great number of observations, this statistic Y^2 follows a Chi-squared law with $k - 1$ degrees of freedom. Here, k denotes the chosen number of classes.

Mots clés: Loi normale vectorielle, test du Chi-deux modifié, Matrice d'Information de Fisher, Estimateurs du Maximum de vraisemblance.

1 Introduction

Comme on le sait le test du Chi-deux est bien adapté à l'ajustement à une loi discrète, dès que la loi est continue il faut découper l'ensemble des observations en classes dont le nombre et l'amplitude posent problème.

De plus lorsque la loi dépend de paramètres inconnus qui doivent être estimés à partir des données, il se pose un nouveau problème. En effet, si l'on estime les paramètres directement à partir des données, si l'on voulait tirer de l'observation le plus d'informations possibles, la statistique X^2 de Pearson ne suit plus asymptotiquement une loi du Chi-deux, sa loi dépend même en général des paramètres à estimer.

Ce phénomène observé en 1954 par Chernoff et Lehmann, a conduit dans les années 70, divers auteurs Nikulin [14], [15], Dzapharidze et Nikulin [5], Moore et Spruil [12], voir aussi Drost [3], [4] et Nikulin et Greenwood [17] à s'intéresser à des modifications de la statistique X^2 de Pearson qui suivent asymptotiquement une loi du Chi-deux après estimation des paramètres à partir des données non regroupées.

Nous exposons ici la technique de l'application d'un test d'ajustement à une loi normale vectorielle avec estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance directe. Nous utilisons la modification Y^2 de la statistique de Pearson X^2 proposée par Nikulin pour l'ajustement des lois unidimensionnelles que nous avons adaptée au cas des lois normales multidimensionnelles. Cette statistique suit sous l'hypothèse H_0 à tester, pour un nombre assez grand d'observations n , une loi du chi-deux à $k - 1$ degrés de liberté où k désigne le nombre de classes choisi. Elle fournit un test d'ajustement particulièrement efficace qui se prête bien au calcul. Nous avons ensuite appliqué notre test à des données biométriques bivariées.

Des tests analogues ont été construits pour d'autres familles de lois vectorielles, citons Nikulin et Voinov [19], [21], [25] pour la famille exponentielle discrète et Bordès, Nikulin et Voinov [1] pour la loi exponentielle multidimensionnelle.

Dans leurs récents travaux, Voinov, Alloyarova et Pya [26] se sont intéressés aux tests d'ajustement du type du chi deux modifié pour une loi de Weibull à trois paramètres; ainsi qu'à l'étude de la puissance de différents tests de ce type (voir aussi Voinov et Pya [27]). Quand à B.Yu. Lemeshko, S.B. Lemeshko et Postovalov [10], B.Yu. Lemeshko et Postovalov [7], [8] et B.Yu. Lemeshko et Maklakov [9], ils ont étudié des tests d'ajustement non paramétriques dans le cas des tests d'hypothèses alternatives concernant les lois de probabilité les plus utilisées en application.

2 Construction de la statistique Y_n^2

Pour tester la validité de l'hypothèse H_0 , selon laquelle la distribution des éléments X_i de l'échantillon X_1, X_2, \dots, X_n suit une loi normale multidimensionnelle $N_m(\mu, \Omega)$ de densité

$$\varphi(x, \theta) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)' \Omega^{-1} (x - \mu) \right\}$$

où $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)'$ est le vecteur des moyennes ($\mu_1 = EX_1, \mu_2 = EX_2, \dots, \mu_m = EX_m$) et Ω la matrice de covariance de X supposée non dégénérée $\Omega = E(X - \mu)(X - \mu)'$

on utilise la statistique Y_n^2 définie comme suit:

Soit $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)'$ le vecteur des fréquences obtenu en regroupant X_1, X_2, \dots, X_n dans k classes bien choisies $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$; de sorte que

$$p_i = \int_{\Delta_i(\theta)} \varphi(x, \theta) dx = \frac{1}{k} \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, k$$

Si $n \rightarrow \infty$, le vecteur ν est asymptotiquement normalement distribué de paramètres:

$$\begin{aligned} E\nu &= np + o(1) \\ E(\nu - np)(\nu - np)' &= nB + o(1) \end{aligned}$$

avec:

$$B = D - pp' - W'J^{-1}W$$

où J représente la matrice d'information de Fisher et D la matrice diagonale d'éléments (p_1, p_2, \dots, p_k) et

$$W = \|W_{ij}\|_{s \times k}$$

où s est le nombre de paramètres estimés : $s = m + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+3)}{2}$
et

$$W_{ij} = \int_{\Delta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \varphi(x, \theta) dx$$

avec $i = 1, 2, \dots, s$ et $j = 1, 2, \dots, k$

La loi de la statistique $Y_n^2 = \frac{1}{n}(\nu - np)'B^-(\nu - np)$ dans laquelle B^- désigne une matrice inverse généralisée de B , converge lorsque n tend vers l'infini, vers une distribution du Chi-deux à $(k-1)$ degrés de liberté.

La construction de tests basés sur la statistique Y_n^2 et leur utilisation sont développées dans [5], [14], [15] et [17].

Remarques:

1. La matrice B dépend de la matrice d'information de Fisher dont le calcul est très difficile vu le grand nombre de termes à calculer.

Pour des données bidimensionnelles, on a 5 paramètres et 13 termes à calculer.

Si $X_i \in R^m$, on aura $\frac{1}{2} \left[\frac{m(m+3)}{2} \left(\frac{m(m+3)}{2} + 1 \right) \right]$ termes à calculer.

C'est pourquoi, on a essayé de donner une formule générale du calcul de la matrice d'information. Ces calculs sont assez difficiles, nous les avons menés en utilisant le formalisme de calcul matriciel proposé par Magnus et Neudecker dans leur livre et nous les avons systématiquement vérifiés par des calculs directs.

2. Y_n^2 dépend de θ , dans la pratique du test on remplacera θ par son estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ basé directement sur les données non regroupées en classes. La statistique $Y_n^2(\hat{\theta})$ suit asymptotiquement une loi χ_{k-1}^2 .

3 Produit de Kronecker et matrice de duplication

Généralement, l'inverse d'une matrice est défini si la matrice est carrée et non singulière. On généralise la conception de l'inverse pour des matrices singulières ou des matrices non carrées. L'une de ces généralisations est l'inverse de Moore-Penrose, particulièrement utilisé pour son unicité.

Définition1: Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $p \times q$, la $mp \times nq$ matrice définie par:

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

est appelée produit de kronecker de A et B et noté $A \otimes B$.

Définition2: une matrice X ($m \times n$) est l'inverse de Moore-Penrose ou le MP-inverse d'une matrice réelle ($n \times m$) A si :

$$AXA = A$$

$$XAX = X$$

$$(AX)' = AX$$

$$(XA)' = XA$$

On note le MP-inverse par A^+ .

Théorème 2: Pour toute matrice A , A^+ existe et est unique.

Définition 3: L'opérateur *vec* transforme une matrice en un vecteur en mettant les colonnes de la matrice l'une sous l'autre.

Définition 4: Si A est une matrice carrée d'ordre n , on note $v(A)$ le vecteur de dimension $\frac{1}{2} [n(n+1)] \times 1$ obtenu à partir de *vec* A en éliminant les éléments du triangle supérieur de la matrice A .

Définition 5: Si A est une matrice carrée d'ordre n , symétrique, alors il existe une matrice unique $n^2 \times \frac{1}{2} [n(n+1)]$ qui transforme $v(A)$ en *vec* A . On l'appelle matrice de duplication, notée D_n et D_n^+ le MP-inverse de D_n est égal à:

$$D_n^+ = (D_n' D_n)^{-1} D_n'$$

théorème3:

Si A est une matrice ($n \times n$) alors :

$$(D_n'(A \otimes A)D_n)^{-1} = D_n^+(A^{-1} \otimes A^{-1})D_n^+$$

4 Matrice d'information d'une distribution normale multidimensionnelle

Le calcul de $J(\theta)$, la matrice d'information de Fisher d'une loi normale multidimensionnelle par la méthode directe est assez long; c'est pourquoi on es-

saie d'établir la relation qui lie la matrice d'information de Fisher calculée par la méthode directe pour le vecteur de paramètres $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \rho_1, \rho_2, \dots)'$ et la matrice d'information pour $(\mu, \nu(\Omega))' = \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)'$ en utilisant la matrice de duplication.

Théorème: Soient n vecteurs aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n de R^m indépendants et identiquement distribués tels que chaque X_i suive une loi $N_m(\mu, \Omega)$ où Ω est définie positive.

Supposons que $n \geq m + 1$, la matrice d'information pour μ et $\nu(A)$ est la matrice:

$$F_n = n \begin{bmatrix} \Omega^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} D'_m(\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1}) D_m \end{bmatrix}$$

La matrice de variance asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\mu}$ et $\nu(\hat{\Omega})$ est:

$$F^{-1} = n \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} D_m^+(\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1}) D_m^+ \end{bmatrix}$$

La démonstration se fait en utilisant le calcul différentiel matriciel et la matrice de duplication. Pour le calcul de la matrice F^{-1} , il suffit d'appliquer le théorème 3.

Changement de variables:

Si $C = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$ est la matrice jacobienne du changement de variables de θ à γ , en utilisant le formalisme du calcul matriciel différentiel, on trouve:

$$J(\theta) = C' F_n C \text{ où } C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$J(\theta) = n \begin{bmatrix} C'_{11} \Omega^{-1} C_{11} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C'_{22} D'_m(\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1}) D_m C_{22} \end{bmatrix}$$

5 Test d'ajustement à une loi normale bidimensionnelle

Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur aléatoire de loi normale de densité $\varphi(x, \theta)$ et son vecteur de paramètres $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)'$

$$\theta_1 = EX_1 = \mu_1, \theta_2 = EX_2 = \mu_2, \theta_3 = \text{var} X_1 = \sigma_1^2, \theta_4 = \text{var} X_2 = \sigma_2^2, \\ \theta_5 = \rho = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)'$$

$$\varphi(x, \theta) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \Omega}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)' \Omega^{-1} ((x - \mu)) \right\}$$

où Ω est la matrice de covariance de X et $\mu = (\mu_1, \mu_2)'$ son espérance mathématique.

$$\Omega = E(X - \mu)(X - \mu)' = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2} \end{bmatrix}$$

Changement de variables: On procède à un changement de variables qui nous permettra d'obtenir une nouvelle variable $U = (U_1, U_2)'$ dont les composantes sont indépendantes et de même loi normale centrée et réduite $N(0, 1)$.

On considère la matrice A triangulaire

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix}$$

on a:

$$AA' = \Omega, \det A = \det \Omega^{\frac{1}{2}}$$

Si on pose $X = AU + \mu$, où $U = (U_1, U_2)'$, U_1 et U_2 sont indépendantes et suivent la même loi normale $N(0, 1)$, on obtient:

$$P[X \in B] = \int_B \varphi(x, \theta) dx = \int_{B'} \varphi(u) du$$

Où

$$B' = \{u / Au + \mu \in B\}$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2) \right\}$$

En particulier, si

$$B = \{x / (x - \mu)' \Omega^{-1} (x - \mu) \leq c\} \quad c > 0$$

on trouve alors que:

$$\int_B \varphi(x, \theta) dx = \int_{u' u \leq c} \varphi(u) du$$

5.1 Choix des classes et découpage du plan R_x^2 :

On se fixe θ et on choisit deux entiers naturels r et m tels que $k = rm$ et on note par $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$ où $p_i = 1/k$, $i = 1, 2, \dots, k$.

ensuite, on définit les couronnes ellipitiques équiprobables

$$A_i = \{x/c_{i-1} \leq (x - \mu)' \Omega^{-1} (x - \mu) \leq c_i\}$$

$$i = 1, \dots, r \quad c_i > 0$$

avec c_i choisies telles que:

$$\int_{A_i} \varphi(x, \theta) dx = \frac{1}{r} \quad i = 1, \dots, r$$

i.e.

$$\int_{c_{i-1} \leq u' u \leq c_i} \varphi(u) du = \frac{1}{r} \quad i = 1, \dots, r$$

On aura défini dans R_x^2 des ellipses dont les frontières ∂A_i dépendent du paramètre θ . Par changement de variables dans R_u^2 , on obtient des circonférences concentriques:

$$A'_i = \{u/c_{i-1} \leq u_1^2 + u_2^2 \leq c_i\} = \{u/c_{i-1} \leq u' u \leq c_i\}$$

Dans ce cas, on a:

$$\int_{A_i} \varphi(x, \theta) dx = \int_{c_{i-1} \leq u' u \leq c_i} \varphi(u) du = \frac{1}{r}$$

pour le calcul des c_i , il suffit de remarquer que la variable aléatoire $U = U_1^2 + U_2^2$ suit une loi de Chi-deux à deux degrés de liberté de densité $\frac{1}{2} e^{-\frac{u}{2}}$ on obtient alors:

$$c_i = -2 \log \left[1 - \frac{i}{r} \right] \quad i = 1, \dots, r-1 \text{ et } c_r = +\infty$$

5.2 Découpage du plan R_u^2

On construit ensuite m rayons délimitant des angles B'_1, B'_2, \dots, B'_m égaux à $\frac{2\pi}{m}$, le premier d'entre eux coïncidant avec l'axe Ou_1 . Soient B_1, B_2, \dots, B_m les secteurs angulaires correspondant dans R_x^2 . Alors si on considère:

$$\Delta'_{il} = A'_i \cap B'_l$$

on a:

$$P[U \in \Delta'_{il}] = P[U \in A'_i \cap B'_l] = \frac{1}{r} \frac{1}{m} = \frac{1}{k}$$

et:

$$P[X \in \Delta_{il}] = P[U \in \Delta'_{il}] = \frac{1}{k}$$

où Δ_{il} représente le secteur correspondant dans R_x^2

$$\Delta_{il} = A_i \cap B_l \quad (i = 1, \dots, r; l = 1, \dots, m)$$

Si $u_2 = \alpha u_1$ est l'équation d'une droite dans R_u^2 , alors son image dans R_x^2 est:

$$x_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left[\rho + \alpha \sqrt{1 - \rho^2} \right] x_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left[\rho + \alpha \sqrt{1 - \rho^2} \right] + \mu_1$$

Ainsi

$$\beta_i = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left[\rho + \alpha_i \sqrt{1 - \rho^2} \right], \quad i = 1, \dots, m$$

sont les coefficients des droites issues du point $(\mu_1, \mu_2)'$ dans le plan R_x^2 et qui forment les angles A_i .

5.3 Calcul de la matrice d'information de Fisher

$J(\theta)$ la matrice d'information de X est une matrice symétrique de dimension (5×5) . Par des calculs directs, on montre que:

$$J(\theta) = \frac{1}{1 - \theta_5^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta_3} & -\frac{\theta_5}{\sqrt{\theta_3\theta_4}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_5}{\sqrt{\theta_3\theta_4}} & \frac{1}{\theta_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2 - \theta_5^2}{4\theta_3^2} & -\frac{\theta_5^2}{4\theta_3\theta_4} & -\frac{\theta_5}{2\theta_3} \\ 0 & 0 & -\frac{\theta_5^2}{4\theta_3\theta_4} & \frac{2 - \theta_5^2}{4\theta_4^2} & -\frac{\theta_5}{2\theta_4} \\ 0 & 0 & -\frac{\theta_5}{2\theta_3} & -\frac{\theta_5}{2\theta_4} & \frac{1 + \theta_5^2}{1 - \theta_5^2} \end{bmatrix}$$

5.4 Calcul de la matrice d'information de Fisher d'après le cas général:

$$F_n = n \begin{bmatrix} \Omega^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} D'_m (\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1}) D_m \end{bmatrix}$$

Où Ω est la matrice de dispersion de X et D_m la matrice de duplication de dimension $m^2 \times 1/2[m(m+1)] = (4 \times 3)$ telle que:

$$D_m v(\Omega) = \text{vec } \Omega$$

$$\text{vec } \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix}; v(\Omega) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$D_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et comme:

$$\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^4} & -\frac{\rho}{\sigma_1^3\sigma_2} & -\frac{\rho}{\sigma_1^3\sigma_2} & -\frac{\rho^2}{(\sigma_1\sigma_2)^2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1^3\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & -\frac{\rho^2}{(\sigma_1\sigma_2)^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2^3} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1^3\sigma_2} & \frac{\rho^2}{(\sigma_1\sigma_2)^2} & \frac{1}{(\sigma_1\sigma_2)^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2^3} \\ -\frac{\rho^2}{(\sigma_1\sigma_2)^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2^3} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2^3} & \frac{1}{\sigma_2^4} \end{bmatrix}$$

Alors:

$$D'_m(\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1})D_m = \frac{1}{(1-\rho^2)^4} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^4} & -\frac{2\rho}{\sigma_1^3\sigma_2} & \frac{\rho^2}{(\sigma_1\sigma_2)^2} \\ -\frac{2\rho}{\sigma_1^3\sigma_2} & \frac{2(1+\rho^2)}{(\sigma_1\sigma_2)^2} & -\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2^3} \\ \frac{\rho^2}{(\sigma_1\sigma_2)^2} & -\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2^3} & \frac{1}{\sigma_2^4} \end{bmatrix}$$

Changement de variables:

Si

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)'$$

$$\gamma = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \rho\sigma_1\sigma_2\sigma_2^2)' = (\mu, V(\Omega))'$$

et C est la matrice jacobienne $\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & : & \frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_1} & \frac{\rho\sigma_2}{2\sigma_2} & \sigma_1\sigma_2 \\ 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}$$

comme $J(\theta) = C' F_n C$

$$J(\theta) = n \begin{bmatrix} C'_{11} \Omega^{-1} C_{11} & 0 \\ 0 & C'_{22} \frac{1}{2} D'_m (\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1}) D_m C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C'_{11} \Omega^{-1} C_{11} = \Omega^{-1}$$

$$C'_{22} \frac{1}{2} D'_m (\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1}) D_m C_{22} = \frac{1}{(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} \frac{2-\rho^2}{4\sigma_1^4} & \frac{-\rho^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{-\rho}{2\sigma_1^2} \\ \frac{-\rho^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{2-\rho^2}{4\sigma_2^4} & \frac{-\rho}{2\sigma_2^2} \\ \frac{-\rho}{2\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{2\sigma_2^2} & \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2-\theta_5^2}{4\theta_3^2} & \frac{-\theta_5^2}{4\theta_3\theta_4} & \frac{-\theta_5}{2\theta_3} \\ \frac{-\theta_5^2}{4\theta_3\theta_4} & \frac{2-\theta_5}{4\theta_4} & \frac{-\theta_5}{4\theta_4} \\ \frac{-\theta_5}{2\theta_3} & \frac{-\theta_5}{2\theta_4} & \frac{(1+\theta_5^2)}{(1-\theta_5^2)} \end{bmatrix}$$

Ainsi, on retrouve $J(\theta)$ calculée directement.

5.5 Calcul de la matrice W:

Soit un échantillon de la loi de X , où $X_i = (X_{i1}, X_{i2})'$. On considère les estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5)'$ du paramètre $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)'$, basé sur l'échantillon X_1, X_2, \dots, X_n .

On sait que: $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i1}$, $\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{i2}$, $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i1} - \hat{\theta}_1)^2$,

$$\hat{\theta}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{i2} - \hat{\theta}_2)^2, \quad \hat{\theta}_5 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_{i1} - \hat{\theta}_1)(X_{i2} - \hat{\theta}_2)'}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{i1} - \hat{\theta}_1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_{i2} - \hat{\theta}_2)^2}}$$

Soit $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)'$ le vecteur des fréquences obtenu en regroupant X_1, X_2, \dots, X_n dans des classes $\Delta_{il}(\hat{\theta}_n)$. Grâce au découpage du plan R_n^2 et le choix des classes $\Delta_{il}(\hat{\theta}_n)$ du groupement des données X_1, X_2, \dots, X_n ; le calcul de la matrice $W = (W_{ij})_{5 \times k}$ peut se faire entièrement. En effet; en réarrangeant les classes $\Delta_{il}(\hat{\theta}_n)$ en Δ_j , $j = 1, \dots, k$; on a:

$$W_{ij} = W_{ij}(\theta) = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \varphi(x, \theta) dx \quad i = 1, \dots, 5$$

Si

$$\Delta_j(\theta) = \Delta_{il} = A_i \cap B_l$$

$$W_{1j} = W_{1j}(\theta) = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \varphi(x, \theta) dx = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \mu_1} \varphi(x, \theta) dx$$

D'après le changement de variables qui transforme X en U , on obtient:

$$W_{1j} = W_{1j}(\theta) = \int_{\Delta'_{ji}} \frac{\partial}{\partial \mu_1} \varphi(x, \theta) dx = \int_{\Delta'_{ji}} \varphi(u) \left[\frac{u_1}{\sigma_1} - \frac{\rho}{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} u_2 \right] du$$

En faisant de nouveau un changement de variables en coordonnées polaires: $u_1 = r \cos \varphi$, $u_2 = r \sin \varphi$; on obtient:

$$W_{1j} = \int_{c_{i-1} \leq u_1^2 + u_2^2 \leq c_i} \varphi(u) \left[\frac{u_1}{\sigma_1} - \frac{\rho}{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} u_2 \right] du$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{c_{i-1}}}^{\sqrt{c_i}} r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr \int_{\frac{2\pi}{m}(i-1)}^{\frac{2\pi}{m}i} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \left[\cos \varphi - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \sin \varphi \right] d\varphi$$

Ce qui donne:

$$W_{1j} = \left\{ \sqrt{c_{i-1}} e^{-\frac{c_{i-1}}{2}} - \sqrt{c_i} e^{-\frac{c_i}{2}} + \phi(\sqrt{c_i}) - \phi(\sqrt{c_{i-1}}) \right\} * \\ \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\sigma_1} \left[\cos\left(\frac{2\pi i}{m} - \frac{\pi}{m}\right) - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \sin\left(\frac{2\pi i}{m} - \frac{\pi}{m}\right) \right] \right\}$$

Où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite $c_i = -2 \log \left[1 - \frac{1}{r} \right]$ calculés précédemment. Et de même, on calcule les autres éléments de W_{ij} , on trouve:

$$W_{2j} = W_{2j}(\theta) = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \varphi(x, \theta) dx = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \mu_2} \varphi(x, \theta) dx$$

$$= \int_{c_{i-1} \leq u_1^2 + u_2^2 \leq c_i} \varphi(u) \frac{u_2}{\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} du$$

$$W_{2j} = \left\{ \sqrt{c_{i-1}} e^{-\frac{c_{i-1}}{2}} - \sqrt{c_i} e^{-\frac{c_i}{2}} + \phi(\sqrt{c_i}) - \phi(\sqrt{c_{i-1}}) \right\} * \\ \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{\pi}{m}}{\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \sin\left(\frac{2\pi i}{m} - \frac{\pi}{m}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 W_{3j} &= W_{3j}(\theta) = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \varphi(x, \theta) dx = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \sigma_1^2} \varphi(x, \theta) dx \\
 &= \int_{c_{i-1} \leq u_1^2 + u_2^2 \leq c_i} \varphi(u) \frac{1}{2\sigma_1^2} \left[u_1^2 - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} u_1 u_2 - 1 \right] du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{3j} &= \frac{1}{4\pi\sigma_1^2} \left[(c_{i-1} + 2)e^{-\frac{c_{i-1}}{2}} - (c_i + 2)e^{-\frac{c_i}{2}} \right] * \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{m} + \frac{1}{2} \cos 2\left(\frac{2\pi}{m}i + \frac{\pi}{m}\right) \sin \frac{2\pi}{m} - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \sin \frac{2\pi}{m} \sin 2\left(\frac{2\pi}{m}i - \frac{\pi}{m}\right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\sigma_1^2 m} \left[e^{-\frac{c_i}{2}} - e^{-\frac{c_{i-1}}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{4j} &= \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_4} \varphi(x, \theta) dx = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \sigma_2^2} \varphi(x, \theta) dx \\
 &= \int_{c_{i-1} \leq u_1^2 + u_2^2 \leq c_i} \varphi(u) \frac{1}{2\sigma_2^2} \left[u_2^2 - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} u_1 u_2 - 1 \right] du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{4j} &= \frac{1}{4\pi\sigma_2^2} \left[(c_{i-1} + 2)e^{-\frac{c_{i-1}}{2}} - (c_i + 2)e^{-\frac{c_i}{2}} \right] * \\
 &\quad \left[\frac{\pi}{m} + \frac{1}{2} \cos 2\left(\frac{2\pi}{m}i + \frac{\pi}{m}\right) \sin \frac{2\pi}{m} - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \sin \frac{2\pi}{m} \sin 2\left(\frac{2\pi}{m}i - \frac{\pi}{m}\right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\sigma_2^2 m} \left[e^{-\frac{c_i}{2}} - e^{-\frac{c_{i-1}}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{5j} &= \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_5} \varphi(x, \theta) dx = \int_{\Delta_j(\theta)} \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(x, \theta) dx \\
 &= \int_{c_{i-1} \leq u_1^2 + u_2^2 \leq c_i} \varphi(u) \frac{\rho}{1-\rho^2} \left[-u_2^2 + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} u_1 u_2 + 1 \right] du
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{5j} &= \frac{\rho}{2\pi(1-\rho^2)} \left[(c_{i-1} + 2)e^{-\frac{c_{i-1}}{2}} - (c_i + 2)e^{-\frac{c_i}{2}} \right] * \\
 &\quad \left[-\frac{\pi}{m} + \frac{1}{2} \cos 2\left(\frac{2\pi}{m}i + \frac{\pi}{m}\right) \sin \frac{2\pi}{m} - \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \sin 2\left(\frac{2\pi}{m}i - \frac{\pi}{m}\right) \sin \frac{2\pi}{m} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{(1-\rho^2)m} \left[e^{-\frac{c_i}{2}} - e^{-\frac{c_{i-1}}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

On obtient la matrice W_{5^*k} :

$$W_{5^*k} = \begin{bmatrix} \int \varphi(u) \left[\frac{u_1}{\sigma_1} - \frac{\rho}{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} u_2 \right] du \\ \int \varphi(u) \frac{u_2}{\sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} du \\ \int \varphi(u) \frac{1}{2\sigma_1^2} \left[u_1^2 - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} u_1 u_2 - 1 \right] du \\ \int \varphi(u) \frac{1}{2\sigma_2^2} \left[u_2^2 - \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} u_1 u_2 - 1 \right] du \\ \int \varphi(u) \frac{\rho}{1-\rho^2} \left[-u_2^2 + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} u_1 u_2 + 1 \right] du \end{bmatrix}$$

La matrice W est entièrement calculée ainsi que la matrice $J(\theta)$, il suffit alors de construire la statistique Y_n^2 et d'appliquer le test (pour plus de détails voir Nikulin M.S. Seddik-Ameur N[18]).

Pour les techniques sur l'application de ces méthodes, on se reporte à la publication de C.Huber et M.Nikulin [28].

6 Applications du test à des données biométriques

Nous avons recueilli les mesures de poids, tailles et périmètres craniens de 145 enfants de trois mois dans un centre de santé de la protection maternelle et infantile auxquelles nous avons appliquées notre test.

6.1 Etude de la variable $X = (X_1, X_2)'$

Considérons par exemple le groupement des données (X_1, \dots, X_n) , où chaque $X_i = (X_{i1}, X_{i2})'$ représente le poids (en grammes) et la taille (en centimètres) de l'observation i , suivant:

Taille $X_2 \rightarrow$ ↓ Poids X_1	42 - 58	58 - 70
3600 - 5400	10	7
5400 - 6300	18	43
6300 - 7000	11	45
7200 - plus	2	9

Le nombre de classes étant égal à 8, Y^2 suit alors asymptotiquement une distribution de χ^2 à $k - 1 = 7$ degrés de liberté. La statistique Y^2 calculée est:

$$Y^2 = 5,702$$

Pour un seuil de signification de 0,05, $\chi^2 = 14,07$. On a donc $Y^2 < \chi^2$; on accepte alors l'hypothèse H_0 selon laquelle la distribution des éléments $X_i = (X_{i1}, X_{i2})'$ de l'échantillon suit une loi normale bidimensionnelle.

6.2 Etude de la variable $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)'$

Regroupons les observations X_1, X_2, \dots, X_n , où chaque $X_i = (X_{i2}, X_{i3})'$ représente la taille et le périmètre cranien de l'observation i , dans le tableau suivant:

P.C $X_3 \rightarrow$ ↓ Taille X_2	$X_3 < 40$	40 - 42	42 et plus
$X_2 < 58$	10	12	5
58 - 62	19	27	20
62 - 68	5	22	25

La statistique Y^2 est égale à :

$$Y^2 = 7,494$$

Comme le nombre de classes $k = 9$, alors Y^2 suit asymptotiquement un χ^2 à $k-1 = 8$ degrés de liberté. Au niveau $\alpha = 0.05$, $\chi^2 = 15,51$. On a donc $Y^2 < \chi^2$ ce qui nous permet de retenir l'hypothèse H_0 , donc les éléments $X_i = (X_{i2}, X_{i3})'$ de l'échantillon suivent une loi normale à deux dimensions.

6.3 Etude de la variable $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)'$

Si maintenant on veut étudier la variable bidimensionnelle $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)'$ représentant le poids et le périmètre crânien de chaque élément de l'échantillon, et si on choisit le groupement des observations suivant:

P.C $X_3 \rightarrow$ ↓ Taille X_2	$X_3 < 41$	41 - 46
$X_1 < 5800$	20	14
5800 - 6400	22	28
6400 - 7000	9	24
7000 et plus	7	21

On obtient:

$$Y^2 = 0.565$$

Comme $k = 8$, Y^2 suit asymptotiquement une distribution de χ^2 à $(k-1) = 7$ degrés de liberté. Au seuil $\alpha = 0,05$, la table nous donne $\chi^2 = 14.07$; donc $Y^2 < \chi^2$. Ainsi, l'hypothèse H_0 qui suppose que l'échantillon est de loi normale bidimensionnelle est acceptée.

Remarques:

1-Si on regroupe ces observations différemment, c'est-à-dire en variant r et m en laissant k fixe ou bien en variant k , on trouve que l'hypothèse H_0 reste valable au seuil $\alpha = 5\%$.

2-Il existe également d'intéressants tests graphiques de normalité vectorielle. Une liste assez complète en est donnée dans le mémoire MECKLIN C. J.,

MUNDFROM D.J.[12]. Comme nous avons aussi introduit un test graphique basé sur l'uniformité des lois de LHOSTE en toute dimension (voir [24]).

L'auteur remercie très chaleureusement Bernard Bru et Mikhail Nikulin pour leurs conseils dans l'élaboration de ce travail et l'enrichissement de la bibliographie.

7 Références

- [1] Bordès L., Nikulin M.S., Voinov V.G. (1997) Unbiased Estimation for a Multivariate Exponential whose Components have a Common Shift, *Journal of Multivariate Analysis*, 63, #2, p. 199-221.
- [2] Chernoff H., Lehmann E. L. (1954) The Use of Maximum Likelihood Estimates in χ^2 Tests for Goodness-of-fit, *Ann. of Math. Statist.* , 25, p.579-586.
- [3] Drost F.C. (1988) Asymptotics for Generalised Chi-square Goodness-of-Fit Tests, *CWI Tract*, Center for Mathematics and Computer Science, Vol.48.
- [4] Drost F.C. (1989) Generalised Chi-square Goodness-of-Fit Tests for Location-scale Models when the Number of Classes tends to Infinity, *The Annals of Statistics*, Vol. 17, N°3, 1285 – 1300.
- [5] Dzapharidze K.O., Nikulin M.S. (1974) On a Modification of the Standard Statistic of Pearson, *Theory of Probability and its Applications*, vol.19 N°4, p.851-852.
- [6] Le Cam L., Mahau C., Singh A. (1983) An Extension of a Theorem of H.Chernoff and EL Lehmann, In *Recent advances in statistics*, An Academic Press, p.303-332.
- [7] Lemeshko B.Yu., Postovalov S.N.(1998) Statistical Distributions of Nonparametric Goodness-of-Fit Tests as Estimated by the Sample Parameters of Experimentally Observed Laws, *Industrial Laboratory*, N°3, p.197-208.
- [8] Lemeshko B.Yu., Postovalov S.N.(2001) Application of the Nonparametric Goodness-of-Fit Tests in testing Composite Hypotheses // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, V.37 - N°2, p. 76-88.
- [9] Lemeshko B.Yu., Maklakov A.A. (2004) Nonparametric Test in Testing Composite Hypotheses on Goodness-of-Fit Exponential Family Distributions // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, V.40 - N°3, p. 3-18.
- [10] Lemeshko B.Yu., Lemeshko S.B., Postovalov S.N., Improvement of Statistic Distribution Models of the Nonparametric Goodness-of-Fit tests in testing Composite Hypotheses (prépublication 2007).
- [11] Magnus Jan.R., Neudecker Heinz (1988) *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Wiley series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley.
- [12] Mecklin C.J., Mundfrom D.J., An Appraisal and Bibliography of Tests of Multivariate Normality, Murray State University, Dpt Math., preprint, 2003, campus.murraystate.edu/academic/faculty/chris.mecklin/Review.pdf.
- [13] Moore D.S.and Spruil M.C. (1975) Unified Large-sample Theory of General Chi-squared Statistics for Tests of fit, *J. Amer. Statist. Assoc.* 72, p.131-137.
- [14] Nikulin M.S. (1973) Chi-square Test for Continuous Distributions with Shift

and Scale Parameters, Theory of Probability and its Applications, 18, #3, p.559-568.

[15] Nikulin M.S. (1973) On a Chi-square Test for Continuous Distributions, Theory of Probability and its Applications, 18, #3, p.638-639.

[16] Nikulin M.S. (1991) Some Recent Results on Chi-squared Tests, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, # 86, Queen's university, Kingston, Ontario, Canada, 74p.

[17] Nikulin M.S., Greenwood P.E. (1990) A Guide to Chi-squared Testing, Technical Report #94, The Department of Statistics, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, 199p.

[18] Nikulin M.S., Seddik-Ameur N., Analyse Statistique des Données Binomiales, Séminaire 91 BRU HUBER PRUM Statistique des Processus en Milieu Médical, ParisV.

[19] Nikulin M.S., Voinov V.G. (1989) A Chi-squared Goodness-of-fit Test for Exponential Distributions of the First Order, Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics, #1412, p.239-258.

[20] Nikulin M.S. (1990) L'Exhaustivité, l'Estimation sans biais et le Test d'Adjustement du Chi-deux, Statistique des Processus en Milieu Médical, Séminaire 89-90, l'université ParisV, p.176-199.

[21] Nikulin M.S., Voinov V.G. (1990) A Chi-squared Goodness-of-fit Test for Exponential Distributions, Abstracts of the 11th Prague Conference 1990 on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes, Prague, August 27-31.

[22] Patnaik P.B. (1949) The Non-central χ^2 and F Distributions and their Applications, Biometrika, 36, p.202-232.

[23] Rao C.R. (1973) Linear Statistical Inference and its Applications, Wiley.

[24] Seddik-Ameur H.N.(2003) Les Tests de Normalité de LHOSTE, Mathématiques et Sciences Humaines, Mathematics and Social Sciences, N°162.

[25] Voinov V.G., Nikulin M.S. (1991) χ^2 -goodness Test for One and Multi-dimensional Distributions, Journal of Soviet Mathematics, (translated from Zapiski Nauchnykh seminarov LOMI im. V.A.Steklova AN SSSR, 184 (1990) Studies in Mathematical Statistics, 9, p.62-79.

[26] Voinov V., Alloyarova R., Pya N. (2006) A Modified Chi-squared for the three-parameters Weibull Distribution and its Applications in Reliability (Submitted to the Int. Con. on degradation, Damage, Fatigue and Accelerated Life Models in Reliability Testing, May 22-24, Angers, France).

[27] Voinov V., Pya N. (2004) On the Power of Modified Chi-squared Goodness-of-Fit Tests for the Family of Logistic and Normal Distributions, Proc. of the 7th Iranian Statist.Conf., Allameh-Tabatabaie Univ., p.385-403.

[28] Huber C., Nikulin M.S. (1991) Transformations des Variables Aléatoires, Application au Choix et la Réduction d'un Modèle Statistique, Le rapport technique du laboratoire de la statistique médicale, l'Université de ParisV, 220p.