



HAL
open science

Théorèmes limites pour des variables quasi-associées hilbertiennes

Lahcen Douge

► **To cite this version:**

Lahcen Douge. Théorèmes limites pour des variables quasi-associées hilbertiennes. Annales de l'ISUP, 2010, LIV (1-2), pp.51-60. <hal-03635266>

HAL Id: hal-03635266

<https://hal.science/hal-03635266v1>

Submitted on 8 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Théorèmes limites pour des variables quasi-associées hilbertiennes

Lahcen DOUGE

*L.S.T.A., Université Pierre et Marie Curie-Paris 6. 175, rue du Chevaleret, 8^{ème} étage, bâtiment A,
75013 PARIS FRANCE.*

Résumé. Nous donnons une définition de la notion de *quasi-association* pour des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d ou dans espace de Hilbert et nous citons quelques exemples. Nous démontrons ensuite une inégalité exponentielle et nous établissons un théorème central limite.

Abstract. We give a definition of the concept of *quasi-association* for random variables with values in \mathbb{R}^d or in Hilbert space and we cite a few examples. We prove then an exponential inequality and we establish a central limit theorem.

Mots-clés : Variables quasi-associées ; Inégalité exponentielle ; Théorème central limite.

1 Introduction

Dans ce travail, nous étudions un concept de dépendance plus général que l'association positive et négative et que la faible association appelé *quasi-association*. Ce concept qui vérifie la propriété "*d'indépendance par la non corrélation*" a été introduit dans [4] pour les champs aléatoires.

Dans un premier temps, nous donnons les définitions de la notion de *quasi-association* dans \mathbb{R}^d et dans un espace de Hilbert et nous citons quelques exemples de processus quasi-associés hilbertiens. Nous démontrons ensuite une inégalité exponentielle pour des variables quasi-associées hilbertiennes et nous déduisons une vitesse de convergence dans la loi forte des grands nombres. Nous établissons enfin un théorème central limite.

2 Définitions et exemples

2.1 Cas des vecteurs aléatoires réels

Dans [5], on propose une définition de l'association faible pour des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d . Soit T un ensemble non vide de \mathbb{R} . On supposera dans la suite que $T = \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} .

Définition 2.1 Une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d est dite *faiblement associée* si, pour tous sous-ensembles disjoints et finis I et J de T et toutes fonctions réelles f et g croissantes définies sur $\mathbb{R}^{|I|d}$ et $\mathbb{R}^{|J|d}$,

$$\text{Cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \geq 0,$$

lorsque cette covariance existe.

Cette suite est dite *négativement associée* si l'ordre de l'inégalité est inversé. Elle est *associée* si I et J sont deux sous-ensembles finis quelconques de T .

Pour étudier une classe plus large de variables aléatoires contenant essentiellement les variables associées, négativement associées et les variables gaussiennes, les auteurs de [4] ont introduit une nouvelle notion dite de *quasi-association*.

Définition 2.2 Une suite $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d est dite *quasi-associée* si, pour tous sous-ensembles disjoints I et J de T et toutes fonctions lipschitziennes $f : \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$|\text{Cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J))| \leq \text{Lip}(f)\text{Lip}(g) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k,l=1}^d |\text{Cov}(X_i^k, X_j^l)|,$$

où X_i^k est la $k^{\text{ème}}$ composante du vecteur X_i et

$$\text{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|_1}, \quad \text{avec} \quad \|(x_1, \dots, x_u)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_u|.$$

2.2 Cas de variables aléatoires hilbertiennes

Nous donnons maintenant une définition de la *quasi-association* pour des variables aléatoires à valeurs dans un espace de Hilbert séparable. Cette définition est une extension de celle proposée dans [5] pour l'association faible.

Soit \mathbb{H} un espace de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associé à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 2.3 Une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{H} est dite *quasi-associée par rapport à une base orthonormale* $(e_k, k \geq 1)$ de \mathbb{H} si, pour tout $d \geq 1$, $((\langle X_t, e_1 \rangle, \dots, \langle X_t, e_d \rangle))_{t \in T}$ est une famille de vecteurs aléatoires quasi-associés.

Les notions d'association et d'association négative dans un espace de Hilbert seront définies de la même façon. Les variables hilbertiennes associées, faiblement associées ou négativement associées sont quasi-associées par rapport à la même base orthonormale.

Remarque : La famille $(X_t)_{t \in T}$ n'est pas quasi-associée par rapport à n'importe quelle base orthonormale de \mathbb{H} . Nous donnons ici un exemple :

Soient X_1, \dots, X_n des variables associées à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Par définition, ces variables sont associées par rapport à la base orthonormale $\{(1, 0), (0, 1)\}$ mais elles ne sont pas associées par rapport à la base orthonormale $\{(-1, 0), (0, 1)\}$.

En effet, posons $e_1 := (-1, 0)$, $e_2 := (0, 1)$. On a $\text{Cov}(\langle X_1, e_1 \rangle, \langle X_2, e_2 \rangle) = -\text{Cov}(X_1^1, X_2^2) \leq 0$.

2.3 Exemples de processus hilbertiens associés et quasi-associés

- *Variables indépendantes*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace de Hilbert séparable \mathbb{H} muni d'une base orthonormale $(e_j, j \geq 1)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(\langle X_n, e_j \rangle)_{j \geq 1}$ des composantes de X_n est associée, alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est associée par rapport à la base orthonormale $(e_j, j \geq 1)$.

- *Processus linéaire*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le processus linéaire à valeurs dans un espace de Hilbert séparable \mathbb{H} défini par

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j(\varepsilon_{n-j}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

où (ρ_j) est une famille d'opérateurs symétriques et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{H} . Supposons qu'il existe une base orthonormale $(v_k, k \geq 0)$ de \mathbb{H} telle que

$$\rho_j(v_k) = \alpha_{j,k} v_k \quad \text{et} \quad \alpha_{j,k} \geq 0, \quad \forall j \geq 0, k \geq 1,$$

et telle que $(\varepsilon_l)_{l \in \mathbb{Z}}$ est associée par rapport à la base $(v_k, k \geq 0)$. Alors $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est associée par rapport à la même base $(v_k, k \geq 0)$.

En effet, pour tout $d \geq 1$ et $l \in \mathbb{Z}$,

$$\langle X_l, v_1 \rangle, \dots, \langle X_l, v_d \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \langle \rho_j(\varepsilon_{l-j}), v_1 \rangle, \dots, \langle \rho_j(\varepsilon_{l-j}), v_d \rangle.$$

Or

$$\langle \rho_j(\varepsilon_{l-j}), v_k \rangle = \alpha_{j,k} \langle \varepsilon_{l-j}, v_k \rangle, \quad k = 1, \dots, d.$$

Donc

$$\langle X_l, v_1 \rangle, \dots, \langle X_l, v_d \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} f(\langle \varepsilon_i, v_k \rangle, l - N \leq i \leq l, 1 \leq k \leq d),$$

où f est une fonction croissante. Par conséquent l'association de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ se déduit des propriétés \mathcal{P}_4 et \mathcal{P}_5 de l'association (cf. [6]).

Processus gaussien

Soit $\xi = (\xi_t, t \geq 0)$ un processus gaussien réel centré et stationnaire à temps continu.

D'après le lemme de Mercer et la décomposition de Karhunen-Loève (cf. [2]), on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\xi_{t+k} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^k \varphi_j(t) \quad \text{où} \quad \eta_j^k = \int_0^1 \xi_{t+k} \varphi_j(t) dt$$

et $(\varphi_j, j \geq 0)$ est un système orthonormal de $L^2([0, 1])$.

Posons

$$X_k(t) = \xi_{t+k}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$ muni de la base orthonormale $(\varphi_j, j \geq 0)$.

Pour tout $k \geq 1$ et $j \geq 0$,

$$\langle X_n, \varphi_j \rangle = \int_0^1 X_n(t) \varphi_j(t) dt = \eta_n^j$$

et $(\eta_n^j, j \geq 0, k \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes réelles.

Donc $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires quasi-associées à valeurs dans $L^2([0, 1])$.

Inégalité exponentielle et Loi forte des grands nombres

Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans \mathbb{H} telle que $\mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$. L'opérateur de covariance C_X est défini par

$$C_X(x) = \mathbb{E}[\langle X, x \rangle X], \quad x \in \mathbb{H}.$$

nous proposons de démontrer, sous des conditions sur la décroissance des covariances et les valeurs propres de l'opérateur de covariance C_X , une inégalité exponentielle pour des variables aléatoires quasi-associées hilbertiennes similaire à celle établie dans [2] pour des variables α -mélangeantes.

énonçons d'abord dans le lemme suivant, une inégalité exponentielle établie dans [7] pour des variables réelles bornées vérifiant une certaine condition sur les covariances.

le 3.1 Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles centrées vérifiant les conditions suivantes :

$$|X_i| \leq M < \infty \quad \text{p.s., } \forall i = 1, \dots, n;$$

Il existe $K > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_u \leq t_1 \leq \dots \leq t_v \leq n$,

$$|\text{Cov}(X_{s_1} \dots X_{s_u}, X_{t_1} \dots X_{t_v})| \leq K^2 M^{u+v-2} v e^{-\beta(t_1 - s_u)}.$$

Alors, pour tout $t \geq 0$,

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{C_1 n + C_2 t^{\frac{5}{3}}}\right), \quad (1)$$

où $C_1 = \frac{4K^2}{1-e^{-\beta}}$ et $C_2 = \left(\frac{2(KVM)}{1-e^{-\beta}}\right)^{1/3}$.

Théorème 3.2 Soit $X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires stationnaires, centrées à valeurs dans \mathbb{H} et quasi-associées par rapport à la base orthonormale $(v_j, j \geq 1)$ constituée par les vecteurs propres de C_{X_0} . Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et notons $(\lambda_j, j \geq 1)$ les valeurs propres de C_{X_0} . Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|X_i\|_{\infty} \leq M < \infty$;

ii) $\sup_{j \geq 1} |\text{Cov}(\langle X_0, v_j \rangle, \langle X_k, v_j \rangle)| \leq a_0 e^{-ak}$ pour tout $k \geq 0$, $a > 0$ et $a_0 > 0$.

Alors, pour $\kappa \geq 1$ et $0 < \delta < 1$,

$$P\left(\left\|\frac{S_n}{n}\right\| > \varepsilon\right) \leq 2\kappa \exp\left(-\frac{(1-\delta)\varepsilon^2 n}{A + B\varepsilon^{\frac{5}{3}} n^{\frac{2}{3}}}\right) + \frac{1}{\delta\varepsilon^2} \sum_{j>\kappa} \lambda_j, \quad (2)$$

où $A = \kappa \frac{4K^2}{1-e^{-a}}$, $B = (1-\delta)^{\frac{1}{3}} \kappa^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2(KVM)}{1-e^{-a}}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $K = \max\left\{\sqrt{2}M, \left(\frac{a_0}{1-a}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$.

Nous déduisons, à partir de cette inégalité exponentielle, une vitesse de convergence dans la loi forte des grands nombres.

Corollaire 3.3 Supposons qu'il existe $a > 0$ et $0 < r < 1$ telle que $\lambda_j \leq ar^j$ pour tout $j \geq 1$, alors

$$\left\|\frac{S_n}{n}\right\| = \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2} \quad p.s.$$

Il suffit de choisir $\kappa = \left\lceil \frac{3 \log n}{\log \frac{1}{r}} \right\rceil$ (où $[\cdot]$ désigne la partie entière) et appliquer le lemme de Borel-Cantelli.

4 Théorème central limite

Dans cette section, nous énonçons un théorème central limite pour des variables aléatoires quasi-associées hilbertiennes. Dans [5], on établit un principe d'invariance pour les variables hilbertiennes faiblement associées. Nous commençons d'abord par établir une inégalité de covariance pour les vecteurs aléatoires réels quasi-associés.

Lemme 4.1 Soit Z_1, \dots, Z_p , $p \geq 2$, des variables aléatoires quasi-associées à valeurs dans \mathbb{R}^m . Notons ϕ^p la fonction caractéristique du vecteur (Z_1, \dots, Z_p) et ϕ_j la fonction caractéristique de Z_j . Alors, pour tout $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\left| \phi^p(b_1, \dots, b_p) - \prod_{j=1}^p \phi_j(b_j) \right| \leq 2\sqrt{2} \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sum_{1 \leq k, l \leq m} |b_i^k| |b_j^l| |\text{Cov}(Z_i^k, Z_j^l)|.$$

Théorème 4.2 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires strictement stationnaires, centrées à valeurs dans \mathbb{H} et quasi-associées par rapport à une base orthonormale $(e_j)_{j \geq 1}$ telle que $\mathbb{E}\|X_1\|^2 < \infty$. Supposons que, pour tout $k, l \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \langle S_n, e_k \rangle \langle S_n, e_l \rangle = \gamma_{kl},$$

$$\delta_{k,l} := \sum_{j=2}^{\infty} |\mathbb{E} \langle X_1, e_k \rangle \langle X_j, e_l \rangle| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{i,i} < \infty.$$

Alors,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma),$$

où $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ désigne la convergence en loi et $\Gamma = (\gamma_{kl})_{k,l \geq 1}$.

5 Preuves

Preuve du théorème 3.2. Pour $0 < \delta < 1$, on a

$$P\left(\left\|\frac{S_n}{n}\right\| > \varepsilon\right) \leq P\left(\sum_{j=1}^{\kappa} \langle \frac{S_n}{n}, v_j \rangle^2 \geq (1-\delta)\varepsilon^2\right) + P\left(\sum_{j>\kappa} \langle \frac{S_n}{n}, v_j \rangle^2 \geq \delta\varepsilon^2\right).$$

$$P\left(\sum_{j=1}^{\kappa} \langle \frac{S_n}{n}, v_j \rangle^2 \geq (1-\delta)\varepsilon^2\right) \leq \sum_{j=1}^{\kappa} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, v_j \rangle\right| > \varepsilon \sqrt{\frac{1-\delta}{\kappa}}\right).$$

Pour tout $j \geq 1$, $(\langle X_i, v_j \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables réelles quasi-associées.

Soit $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_u \leq t_1 \leq \dots \leq t_v \leq n$.

Si $t_1 > s_u$,

$$\begin{aligned} & |\text{Cov}(\langle X_{s_1}, v_j \rangle > \dots > \langle X_{s_u}, v_j \rangle, \langle X_{t_1}, v_j \rangle > \dots > \langle X_{t_v}, v_j \rangle)| \\ & \leq M^{u+v-2} \sum_{k=1}^u \sum_{l=1}^v |\text{Cov}(\langle X_{s_k}, v_j \rangle, \langle X_{t_l}, v_j \rangle)| \\ & \leq M^{u+v-2} (u \wedge v) \sum_{r \geq t_1 - s_u}^{\infty} |\text{Cov}(\langle X_0, v_j \rangle, \langle X_r, v_j \rangle)| \\ & \leq \frac{a_0 M^{u+v-2}}{1 - e^{-a}} (u \wedge v) e^{-a(t_1 - s_u)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Si $t_1 = s_u$,

$$|\text{Cov}(\langle X_{s_1}, v_j \rangle > \dots > \langle X_{s_u}, v_j \rangle, \langle X_{t_1}, v_j \rangle > \dots > \langle X_{t_v}, v_j \rangle)| \leq 2M^{u+v}. \quad (4)$$

Nous déduisons de (3) et (4) que, pour tout $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_u \leq t_1 \leq \dots \leq t_v \leq n$,

$$|\text{Cov}(\langle X_{s_1}, v_j \rangle > \dots > \langle X_{s_u}, v_j \rangle, \langle X_{t_1}, v_j \rangle > \dots > \langle X_{t_v}, v_j \rangle)| \leq K^2 M^{u+v} (u \wedge v) e^{-a(t_1 - s_u)},$$

où $K = \max\left(\sqrt{2}M, \sqrt{\frac{a_0}{1 - e^{-a}}}\right)$.

En appliquant le lemme 3.1, nous obtenons

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, v_j \rangle\right| > \varepsilon \sqrt{\frac{1-\delta}{\kappa}}\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{(1-\delta)\varepsilon^2 n^2}{C_1 \kappa n + C_2 (1-\delta)^{5/6} \varepsilon^{5/3} \kappa^{1/6} n^{5/3}}\right).$$

Par l'inégalité de Markov

$$P\left(\sum_{j>\kappa} \left\langle \frac{S_n}{n}, v_j \right\rangle^2 \geq \delta \varepsilon^2\right) \leq \frac{1}{\delta \varepsilon^2} \sum_{j>\kappa} \mathbb{E} \left\langle \frac{S_n}{n}, v_j \right\rangle^2.$$

Pour terminer la démonstration, notons que

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, v_j \rangle\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, v_j \rangle^2,$$

il vient alors

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j>\kappa} \left\langle \frac{S_n}{n}, v_j \right\rangle^2 \geq \delta \varepsilon^2\right) &\leq \frac{1}{\delta \varepsilon^2} \sum_{j>\kappa} \mathbb{E} \langle X_0, v_j \rangle^2 \\ &\leq \frac{1}{\delta \varepsilon^2} \sum_{j>\kappa} \lambda_j. \end{aligned}$$

Preuve du Lemme 4.1

$$\begin{aligned} &\left| \phi^p(b_1, \dots, b_p) - \prod_{j=1}^p \phi_j(b_j) \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k\right) - \prod_{j=1}^p \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{l=1}^m b_j^l Z_j^l\right) \right| \\ &\leq \left| \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k\right) - \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{l=1}^m b_l^l Z_l^l\right) \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k\right) \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k\right) - \prod_{j=1}^{p-1} \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{l=1}^m b_j^l Z_j^l\right) \right| \\ &= \left| \text{Cov}\left(\exp\left(i \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k\right), \exp\left(i \sum_{l=1}^m b_l^l Z_l^l\right)\right) \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k\right) - \prod_{j=1}^{p-1} \mathbb{E} \exp\left(i \sum_{l=1}^m b_j^l Z_j^l\right) \right|. \end{aligned}$$

Par répétition de cet argument, nous obtenons

$$\left| \phi^p(b_1, \dots, b_p) - \prod_{j=1}^p \phi_j(b_j) \right| \leq \sum_{v=2}^p \left| \text{Cov}\left(\exp\left(i \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k\right), \exp\left(i \sum_{l=1}^m b_v^l Z_v^l\right)\right) \right|. \quad (5)$$

Or

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov} \left(\exp \left(i \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k \right), \exp \left(i \sum_{l=1}^m b_v^l Z_v^l \right) \right) \\
 &= \text{Cov} \left(\cos \left(\sum_{i=1}^{v-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k \right), \cos \left(\sum_{l=1}^m b_v^l Z_v^l \right) \right) \\
 &\quad - \text{Cov} \left(\sin \left(\sum_{i=1}^{v-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k \right), \sin \left(\sum_{l=1}^m b_v^l Z_v^l \right) \right) \\
 &\quad + i \text{Cov} \left(\cos \left(\sum_{i=1}^{v-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k \right), \sin \left(\sum_{l=1}^m b_v^l Z_v^l \right) \right) \\
 &\quad + i \text{Cov} \left(\sin \left(\sum_{i=1}^{v-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k \right), \cos \left(\sum_{l=1}^m b_v^l Z_v^l \right) \right).
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $|a + ib| \leq \sqrt{2} \max\{|a|, |b|\}$ et la quasi-association de Z_1, \dots, Z_p , nous retrouvons

$$\left| \text{Cov} \left(\exp \left(i \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{k=1}^m b_i^k Z_i^k \right), \exp \left(i \sum_{l=1}^m b_v^l Z_v^l \right) \right) \right| \leq 2\sqrt{2} \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{k,l=1}^m |b_i^k| |b_v^l| |\text{Cov}(Z_i^k, Z_v^l)|.$$

La démonstration de ce lemme se termine d'après (5). ■

Preuve du théorème 4.2. Nous allons dans un premier temps montrer que la suite $\{S_n, n \geq 1\}$ est équitendue. Pour cela, il faut montrer que, pour tout $\eta > 0$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \langle S_n, e_i \rangle \cdot e_i \right\| \geq \eta \right) = 0. \quad (6)$$

D'après l'inégalité de Tchebycheff, on a

$$\begin{aligned}
 \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \langle S_n, e_i \rangle \cdot e_i \right\| \geq \eta \right) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta^2 n} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \langle S_n, e_i \rangle \cdot e_i \right\|^2 \\
 &= \frac{1}{\eta^2 n} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \langle S_n, e_i \rangle^2 \right).
 \end{aligned}$$

Or, par stationnarité,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \mathbb{E} \langle S_n, e_i \rangle^2 &= \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \langle X_k, e_i \rangle \langle X_l, e_i \rangle \right) \\
 &= \mathbb{E} \langle X_1, e_i \rangle^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=2}^n (n-j) \mathbb{E} \langle X_1, e_i \rangle \langle X_j, e_i \rangle \\
 &\leq \mathbb{E} \langle X_1, e_i \rangle^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} |\mathbb{E} \langle X_1, e_i \rangle \langle X_j, e_i \rangle| \\
 &\leq \mathbb{E} \langle X_1, e_i \rangle^2 + 2\delta_{i,i}.
 \end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{i,i} < \infty$ et $\mathbb{E} \|X_1\|^2 < \infty$ nous permet de déduire que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \sum_{i=m+1}^{\infty} \langle S_n, e_i \rangle^2 = 0,$$

d'où (6).

Pour terminer la démonstration, il reste à démontrer que pour tout i_1, \dots, i_m le vecteur $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \langle S_n, e_{i_j} \rangle, 1 \leq j \leq m\right)$ converge en loi vers une loi gaussienne. Pour cela, il suffit de démontrer que pour toute famille de nombres réels $\{a_j, 1 \leq j \leq m\}$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^m a_j \langle S_n, e_{i_j} \rangle$ converge vers une loi gaussienne.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^m a_j \langle S_n, e_{i_j} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_j X_{ij} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

où $Y_i := \sum_{j=1}^m a_j X_{ij}$ et $X_{ij} := \langle X_i, e_{i_j} \rangle$.

Notons

$$S'_n := \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{et} \quad \varphi_n(t) = \mathbb{E} \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} S'_n\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cela revient à démontrer que

$$\varphi_n(t) \rightarrow \exp\left(\frac{-t^2 \gamma_m^2}{2}\right) \quad \text{où} \quad \gamma_m^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_k a_l \gamma_{i_k i_l}.$$

Soit $l \in \mathbb{N}$ fixé et $p = \lfloor \frac{n}{l} \rfloor \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ et notons $\sigma_l^2 = \text{Var}\left(\frac{S'_l}{\sqrt{l}}\right)$. L'idée de la démonstration est de découper l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en p blocs de même longueur l et utiliser la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} S'_n\right) - \exp\left(\frac{-t^2 \gamma_m^2}{2}\right) \right| &\leq |\varphi_n(t) - \varphi_{pl}(t)| + |\varphi_{pl}(t) - \varphi_l^p(t)| \\ &\quad + \left| \varphi_l^p(t) - \exp\left(\frac{-t^2 \sigma_l^2}{2}\right) \right| \\ &\quad + \left| \exp\left(\frac{-t^2 \sigma_l^2}{2}\right) - \exp\left(\frac{-t^2 \gamma_m^2}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

Commençons par traiter le premier terme du membre de droite

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t) - \varphi_{pl}(t)| &\leq \mathbb{E} \left| \exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} S'_n\right) - \exp\left(\frac{it}{\sqrt{pl}} S'_{pl}\right) \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left(|t| \cdot \left| \frac{S'_n}{\sqrt{n}} - \frac{S'_{pl}}{\sqrt{pl}} \right| \right) \leq |t| \left(\mathbb{E} \left(\frac{S'_n}{\sqrt{n}} - \frac{S'_{pl}}{\sqrt{pl}} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= |t| \left(\mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{pl}} \right) \sum_{i=1}^{pl} Y_i + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=pl+1}^n Y_i \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq |t| \left(\frac{1}{\sqrt{pl}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{pl} Y_i \right)^2 \right)^{1/2} + \frac{|t|}{\sqrt{n}} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i=pl+1}^n Y_i \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Or, par stationnarité,

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{pl} Y_i \right)^2 \right)^{1/2} &= \left(\mathbb{E} \sum_{k,l=1}^m a_k a_l \sum_{i_1, i_2=1}^{pl} X_{i_1 k} X_{i_2 l} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(2pl \sum_{k,l=1}^m |a_k a_l| \sum_{i=1}^{pl} |\mathbb{E} X_{1k} X_{il}| \right)^{1/2} \\ &\leq a \sqrt{2pl} \left(m^2 \mathbb{E} \|X_1\|^2 + \sum_{k,l=1}^m \delta_{k,l} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où $a = \max\{|a_j|, 1 \leq j \leq m\}$.

De même,

$$\left(\mathbb{E} \left(\sum_{i=p+1}^n Y_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq a\sqrt{2l} \left(m^2 \mathbb{E} \|X_1\|^2 + \sum_{k,l=1}^m \delta_{k,l} \right)^{1/2}.$$

D'où la majoration :

$$|\varphi_n(t) - \varphi_{pl}(t)| \leq a|t|\sqrt{2} \left(1 - \sqrt{\frac{pl}{n}} + \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \left(m^2 \mathbb{E} \|X_1\|^2 + \sum_{k,l=1}^m \delta_{k,l} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Soit

$$Y_k^l = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{(k-1)l < j \leq kl} Y_j, \quad 1 \leq k \leq p,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{S_{pl}'}{\sqrt{pl}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^p Y_k^l.$$

D'après le lemme 4.1 et par stationnarité,

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{pl}(t) - \varphi_l^p \left(\frac{t}{\sqrt{p}} \right) \right| &= \left| \mathbb{E} \exp \left(\frac{it}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^p Y_k^l \right) - \prod_{k=1}^p \mathbb{E} \exp \left(\frac{it}{\sqrt{p}} Y_k^l \right) \right| \\ &\leq \sqrt{2} \frac{t^2 a^2}{pl} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ k_1 \neq k_2}}^p \sum_{\substack{(k_1-1)l < r \leq k_1 l \\ (k_2-1)l < q \leq k_2 l}} \sum_{j_1, j_2=1}^m |\text{Cov}(X_{rj_1}, X_{qj_2})| \right) \\ &= \sqrt{2} t^2 a^2 \sum_{j_1, j_2=1}^m \left(\frac{1}{pl} \sum_{r, q=1}^{pl} |\text{Cov}(X_{rj_1}, X_{qj_2})| - \frac{1}{l} \sum_{r, q=1}^l |\text{Cov}(X_{rj_1}, X_{qj_2})| \right). \end{aligned}$$

Notons $A_{j_1, j_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r, q=1}^n |\text{Cov}(X_{rj_1}, X_{qj_2})| < \infty$. Par conséquent

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \varphi_{pl}(t) - \varphi_l^p \left(\frac{t}{\sqrt{p}} \right) \right| \leq \sqrt{2} t^2 a^2 \sum_{j_1, j_2=1}^m \left(A_{j_1, j_2} - \frac{1}{l} \sum_{r, q=1}^l |\text{Cov}(X_{rj_1}, X_{qj_2})| \right). \quad (8)$$

Le théorème central limite pour des variables indépendantes et de même loi nous donne

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \varphi_l^p \left(\frac{t}{\sqrt{p}} \right) - \exp \left(\frac{-t^2 \sigma_l^2}{2} \right) \right| = 0. \quad (9)$$

Compte tenu de (7), (8) et (9) et toujours pour l fixé, on a

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \exp \left(\frac{it}{\sqrt{n}} S_n' \right) - \exp \left(\frac{-t^2 \gamma_m^2}{2} \right) \right| \\ \leq \frac{t^2}{2} |\gamma_m^2 - \sigma_l^2| + \sqrt{2} t^2 a^2 \sum_{j_1, j_2=1}^m \left(A_{j_1, j_2} - \frac{1}{l} \sum_{r, q=1}^l |\text{Cov}(X_{rj_1}, X_{qj_2})| \right). \end{aligned}$$

Du fait que $\lim_{l \rightarrow \infty} \sigma_l^2 = \gamma_m^2$ et $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{r, q=1}^l |\text{Cov}(X_{rj_1}, X_{qj_2})| = A_{j_1, j_2}$, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^m a_j \langle S_n, e_{ij} \rangle \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m a_k a_l \gamma_{ikil} \right). \quad (10)$$

D'après le théorème 7.7 de [1], le vecteur $\frac{1}{\sqrt{n}} (\langle S_n, e_{i_1} \rangle, \dots, \langle S_n, e_{i_m} \rangle)$ converge en loi vers un vecteur gaussien de moyenne zéro et de matrice de covariance $T_m = (\gamma_{ikil})_{m \times m}$.

Finalement, $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma)$, où $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i, j \geq 1}$. ■

Références

- [1] Billingsley, P. (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- [2] Bosq, D. (2000). *Linear processes in function spaces*, volume 149 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York. Theory and applications.
- [3] Bosq, D. et Blanke, D. (2007). *Inference and prediction in large dimensions*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester.
- [4] Bulinski, A. et Suquet, C. (2001). Normal approximation for quasi-associated random fields. *Statist. Probab. Lett.*, **54**(2), 215–226.
- [5] Burton, R. M., Dabrowski, A. R., et Dehling, H. (1986). An invariance principle for weakly associated random vectors. *Stochastic Process. Appl.*, **23**(2), 301–306.
- [6] Esary, J. D., Proschan, F., et Walkup, D. W. (1967). Association of random variables, with applications. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1466–1474.
- [7] Kallabis, R. S. et Neumann, M. H. (2006). An exponential inequality under weak dependence. *Bernoulli*, **12**(2), 333–350.