



HAL
open science

Prévision des processus ARC(1) via le prédicteur de Parzen. Exemples et simulations

Mokhtari Fatiha, Mourid Tahar

► To cite this version:

Mokhtari Fatiha, Mourid Tahar. Prévision des processus ARC(1) via le prédicteur de Parzen. Exemples et simulations. Annales de l'ISUP, 2008, LII (1-2), pp.81-90. <hal-03633169>

HAL Id: hal-03633169

<https://hal.science/hal-03633169v1>

Submitted on 6 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Pub. Inst. Stat. Univ. Paris
 LIII, fasc. 1-2, 2008, 81 à 90

Prévision des processus ARC(1) via le prédicteur de Parzen. Exemples et simulations

Mokhtari Fatiha et Mourid Tahar

Département de Mathématiques. Université Abou Bekr Belkaid .Tlemcen 13000 Algérie

Résumé. Nous considérons la prévision d'un processus à temps continu admettant une représentation autorégressive **AR(1)** dans l'espace des fonctions continues $C_{[0,\delta]}$ par une méthode de prédiction due à E. Parzen utilisant l'espace reproduisant associé à la covariance du processus. Nous utilisons les résultats obtenus sur les prédicteurs dans [8] pour comparer leur performance sur des séries chronologiques réelles et sur des séries simulées avec d'autres méthodes de prévision.

Abstract. We consider the prediction of continuous time stochastic process admitting a functional autoregressive representation. **AR(1)** in the space of the continuous functions $C_{[0,\delta]}$ by a Parzen's approach based on the reproducing kernel space associated to the covariance function. We use the results obtained in [8] illustrating their performance on a real series or simulated series and comparing with other methods of prediction.

Key words: Functional autoregressive process- Parzen's predictor- Best Linear Unbiased Predictor BLUP- Reproducing kernel space.

1. Introduction. Les variables aléatoires à valeurs dans des espaces fonctionnels sont considérées dans plusieurs domaines des probabilités et statistiques : théorèmes limites - l'inférence et la prévision des processus stochastiques. Dans ce travail nous étudions la prédiction d'un processus aléatoire à temps continu sur tout un intervalle par une modélisation autorégressive fonctionnelle ([7] [9] [13]). Précisément soit $Y = (Y(t), t \in R)$ un processus stochastique réel observé sur $[0, T]$ et considérons la prévision de Y sur l'intervalle $[T, T + \delta]$, $\delta > 0$. En posant $X_n(t) := Y(t + n\delta)$, $t \in [0, \delta]$ nous générons une suite de v.a. $X = (X_n, n \in Z)$ à temps discret à valeurs dans un espace fonctionnel qu'on suppose régie par une équation du type autorégressive. Si le processus Y est à trajectoires continues l'espace fonctionnel associé sera l'espace $C_{[0,\delta]}$ des fonctions continues sur $[0, \delta]$. Ainsi la prédiction du processus Y sur $[T, T + \delta]$ est ramenée à la prévision de la v.a. X_n comme élément de $C_{[0,\delta]}$. Pour des applications voir ([7] ch. 9 et les références citées): la prévision du phénomène météorologique "El Nino", le trafic routier, la consommation de l'énergie électrique d'une région, l'électrocardiogramme, le nombre annuel de voyageurs par SNCF (Les Chemins de Fer Français).

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et (B, B) un espace de Banach séparable muni de sa tribu borélienne. Nous notons par $\mathcal{L}(B)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de B dans lui même muni de sa norme usuelle $\| \cdot \|_L$. Une suite de v.a. indépendantes identiquement distribuées $(\varepsilon_n, n \in Z)$ définies sur (Ω, A, P) et à valeurs dans B vérifiant $E(\varepsilon_0) = 0$ et $E(\|\varepsilon_0\|^2) < \infty$ (un bruit blanc banachique). Nous considérons un processus stochastique $(X_n, n \in Z)$ défini sur (Ω, A, P) et à valeurs dans B vérifiant la relation suivante:

$$X_n = \rho X_{n-1} + \varepsilon_n \quad (1)$$

où ρ est dans $\mathcal{L}(B)$. Le processus $(X_n, n \in Z)$ est appelé processus autorégressif Banachique d'ordre 1 **ARB(1)**. Sous la condition $\|\rho\|_L^0 < 1$, pour un $j_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe un processus strictement stationnaire vérifiant (1) ([7] p.74, [9] ch. 2 Prop. 3.1). Des problèmes d'estimation et de prévision du processus $(X_n, n \in Z)$ vérifiant (1) ont été étudiés par la construction d'estimateurs de ρ du type moindres carrés ([7][9][13]).

Dans cet article, nous considérons la prévision de **processus ARC** $(X_n, n \in Z)$ dans l'espace $C_{[0,\delta]}$ en appliquant une méthode due à E.Parzen utilisant les espaces de Hilbert autoreproduisants de noyau la covariance du processus [10][11]. Soit Z une variable aléatoire réelle du second ordre on cherche un prédicteur \hat{Z} de même moyenne que Z linéaire par rapport aux observations et telle que la distance L^2 à Z soit minimale. Z^* est dit **prédicteur BLUP** (Best Linear Unbiased Predictor). Un estimateur de la forme $\langle g, Y \rangle_K$ de Z est sans biais si :

$$E_m(\langle g, Y \rangle_K) = \langle g, m \rangle = E_m[Z], m \in M. \text{ Pour l'existence du prédicteur BLUP voir [10][11].}$$

Théorème 1 ([10] p. 91). Soit $K(s, t)$ le noyau de covariance du processus $(Y(t), t \in T)$, $E[Y(t)] = m(t)$ où m est un élément d'une classe M fermée de $H(K)$. Soit Z une v.a. du second ordre telle qu'il existe $h \in H(K)$ vérifiant $E_m[Z] = \langle h, m \rangle, \forall m \in M$ et posons $\rho_Z(t) = \text{cov}(Z, Y(t))$. Alors le prédicteur BLUP Z^* de Z est donné par :

$$Z^* = \langle \rho_Z, Y \rangle + \langle P_M(h - Z), Y \rangle_K$$

où P_M est le projecteur sur M . L'erreur quadratique de prévision est:

$$E|Z^* - Z|^2 = \text{var}Z - |\rho_Z|_K^2 + |P_M(h - Z)|_K^2.$$

Dans le cas particulier où $Z = Y(t_0)$, nous avons $\rho_Z(t) = K(t_0, t)$ et

$E_m(Z) = m(t_0) = \langle \rho_Z, m \rangle = \langle h, m \rangle$ i.e. $\rho_Z = h$. Nous en déduisons que le prédicteur BLUP de $Y(t_0)$ est $Y^*(t_0) = \langle K(\cdot, t_0), Y \rangle_K$.

2. Exemples de Prédicteur BLUP

Les exemples suivants montrent que dans le cadre de la prédiction de processus autorégressifs fonctionnels ARC(1) le prédicteur BLUP de Parzen coïncident avec le meilleur prédicteur probabiliste (voir [8]).

1. Soit $(Y(t), t \in R)$ un processus d'Ornstein-Ulhenbeck. Posons $X_n(t) := Y(n+t), t \in [0, 1], n \in Z$, alors la suite $(X_n, n \in Z)$ est un processus autorégressif fonctionnel ARC(1) dans l'espace des fonctions continues $C_{[0,1]}$ d'opérateur ρ tel que $\rho f(t) = \exp^{-ct} f(1), c > 0$ (Bosq). Le prédicteur BLUP de X_{n+1} basé sur des observations X_1, \dots, X_n du processus $(X_n, n \in Z)$ est $X_{n+1}^* = \rho X_n$.
2. Soit $(Y(t), t \in IR)$ un processus et soit $X_n(t) := Y(n+t), t \in [0, 1], n \in Z$, telle que la suite $(X_n, n \in Z)$ est un processus autorégressif fonctionnel ARC(1) dans l'espace des fonctions continues $C_{[0,1]}$ d'opérateur ρ tel que $\rho f = \sum_{i=1}^r f(t_i) e_i, e_i \in C_{[0,1]}, r > 0$. (cf. les processus Quasi-Markoviens). Le prédicteur BLUP de X_{n+1} basé sur des observations X_1, \dots, X_n du processus $(X_n, n \in Z)$ est $X_{n+1}^* = \rho X_n$.
3. Soit $(Y(t), t \in IR)$ un processus et tel que la suite $(X_n(t) := Y(n+t), t \in [0, 1], n \in Z)$ soit un processus autorégressif fonctionnel ARC(1) dans l'espace des fonctions continues $C_{[0,1]}$ d'opérateur ρ de type intégral alors le prédicteur BLUP de X_{n+1} basé sur des observations X_1, \dots, X_n du processus $(X_n, n \in Z)$ est $X_{n+1}^* = \rho X_n$.

3. Prévision de processus ARC(1).

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats obtenus dans [8]. Nous considérons les fonctions de covariances et de covariance croisée du processus strictement stationnaire $(X_n(t), t \in [0, 1], n \in Z)$: $c(s, t) = E(X_0(s)X_0(t)), d(s, t) = E(X_0(s)X_1(t)), d^*(s, t) = E(X_0(t)X_1(s))$ (conjuguée de d)

A partir des observations X_1, \dots, X_n de (1) nous associons leurs estimateurs empiriques respectifs:

$$c_n(s, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(s)X_i(t), d_n(s, t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i(s)X_{i+1}(t), d_n^*(s, t) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1}(s)X_i(t)$$

Notons par $C_{X_0}, C_{X_0X_1}, C_n, \Delta_n, C_{X_1X_0}, \Delta_n^*$ les opérateurs intégraux de noyaux respectifs c, d, c_n, d_n, d_n^* . Par exemple:

$$C_{X_0}(f)(s) = \int_0^1 c(s, t) f(t) dt, \quad t \in [0, 1], \quad f \in C[0, 1]$$

Et Δ désignent les opérateurs de covariance de X_0 et de covariance croisée de X_0 et X_1 . Le **prédicteur BLUP** X_{n+1}^* de X_{n+1} calculé sur les observations $X_n(t_i), t_i \in [0, 1], i = 1, \dots, r$ est donné par (voir [8]):

$$X_{n+1}^*(s) = - \begin{vmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) & d^*(s, t_1) \\ \dots & \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) & d^*(t_r, s) \\ X_n(t_1) \dots X_n(t_r) & 0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} c(t_1, t_1) \dots c(t_1, t_r) \\ \dots & \dots \\ c(t_r, t_1) \dots c(t_r, t_r) \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

Nous définissons un prédicteur statistique \widehat{X}_{n+1}^* de X_{n+1} par plug-in en remplaçant les quantités théoriques par leurs estimations : $\forall s \in [0, 1],$

$$\widehat{X}_{n+1}^*(s) = - \begin{vmatrix} c_n(t_1, t_1) \dots c_n(t_1, t_r) & d_n^*(s, t_1) \\ \dots & \dots \\ c_n(t_r, t_1) \dots c_n(t_r, t_r) & d_n^*(t_r, s) \\ X_n(t_1) \dots X_n(t_r) & 0 \end{vmatrix} \div C_n \quad (1.2)$$

où

$\|X_i\|_\infty \leq M_i$, où $M_i > 0$, $k_n = o(\log n)$ et $M'(k_n) = 0(\log n)$. Alors

$$\left\| \widehat{X_{n+1}^{**}} - X_{n+1}^{**} \right\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} 0$$

4. Simulations et Exemples.

A. Simulations. Pour simuler des trajectoires de processus AR fonctionnels et le calcul des prédicteurs BLUP (cas discret ou cas continu) nous utilisons le travail présenté par Pumo dans sa thèse (1992) et la bibliothèque Far développée par Julien Damons et Serge Guillas (Modelization for Functional Autoregressive processes Package: far Version: 0.6-2 License: LGPL-2.1 version 2.0.0 du logiciel R). Le développement de Karhunen Loève sur $[0, n + 1]$ du mouvement Brownien:

$W_u = \sum_{j=1}^\infty \sqrt{2n+2} Y_j^* \frac{\sin[(j-1/2)\frac{\pi u}{m+1}]}{\pi(j-1/2)}$ où les v.a. Y_j^* sont i.i.d de loi $N(0, 1)$, permet de définir un bruit blanc $(\varepsilon_n(t), n = 0, 1, \dots, t \in [0, 1])$ par n itérations d'un mouvement Brownien sur $[0, 1]$.

Nous remplaçons le développement de Karhunen Loève ci-dessus par le suivant:

$W_u = \sum_{j=1}^\infty \sqrt{2} Y_j^* \frac{\sin[(j-1/2)\frac{\pi u}{m+1}]}{\pi(j-1/2)}$ sur l'intervalle $[0,1]$ et par une approximation de la somme infinie par une somme finie. On définit un opérateur ρ par la relation $\rho e_k = \beta_k e_k$ où la suite $(\beta_k) \downarrow 0$ et $e_k = \sqrt{2} \sin[(k-1/2)\pi t]$, $k = 1, 2, \dots, t \in [0, 1]$, qui sont les fonctions propres de l'opérateur de covariance du mouvement brownien. On choisit comme valeur initiale la valeur $X_0 = \varepsilon_0$. Soient (X_j^i) , $j = 1, \dots, 2m$, où m est un entier choisi et les coordonnés de l'observation X_i par rapport aux vecteurs $(e_i, i = 0, 1, \dots, n)$ qui vérifient: $X_{i+1}^j = \beta_j X_i^j + \varepsilon_{i+1}^j$. Le prédicteur BLUP $\widehat{X_{n+1}^{**}}$ discret est calculé sur les observations $X_n(t_i), i = 1, \dots, m, t_i \in [0, 1]$. Pour le calcul du prédicteur

BLUP $\widehat{X_{n+1}^{**}}$ continu on utilise la trajectoire observée $X_n(t)$ supposée connue aux points $t_j = \frac{j}{m}, j = 0, \dots, m-1$ et puis par une interpolation linéaire \tilde{X}_i de $X_i (i = 1, \dots, n-)$:

$$\tilde{X}_i(t) = X_i\left(\frac{j}{m}\right) + \frac{t - \frac{j}{m}}{\frac{1}{m}} \left[X_i\left(\frac{j+1}{m}\right) - X_i\left(\frac{j}{m}\right) \right], \frac{j}{m} \leq t \leq \frac{j+1}{m}, j = 0, \dots, m-1.$$

On pose aussi $X_i(1) = X_i\left(\frac{m-1}{m}\right), (i = 1, \dots, n)$. Le prédicteur BLUP (cas continu) est donné par :

$$\widehat{X_{n+1}^{**}}(s) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda_j} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} X_{k+1}(s) X_k(t) \varphi_j(t) \right) \left(\sum_{i=0}^{m-1} \int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} \tilde{X}_n(t) \varphi_j(t) dt \right)$$

Nous présentons ci dessous des simulations d'un processus ARC(1) sur des intervalles successifs et les prédicteurs BLUP (discret ou continu) de la dernière trajectoire du processus simulé accompagnées de l'erreur quadratique. La Figure (1.1) représente la simulation de $n=70$ trajectoires successives d'un processus ARC(1). Chaque trajectoire est calculées en $m=25$ points de discrétisation de $[0,1]$.

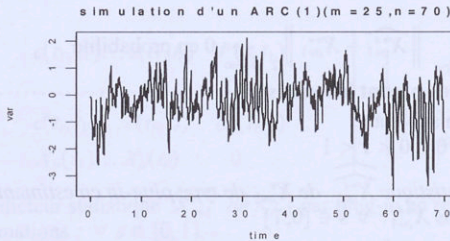


Figure (1.1)

Les Figures (1.2), (1.3), (1.4), représentent le prédicteur BLUP discret ou continu (trait pointillé rouge) de la 70^{ème} trajectoire (trait continu noir) pour le nombre d'observation $n=69$ et $n=39$ et les valeurs de $m=10$ et 20 (points de discrétisation).

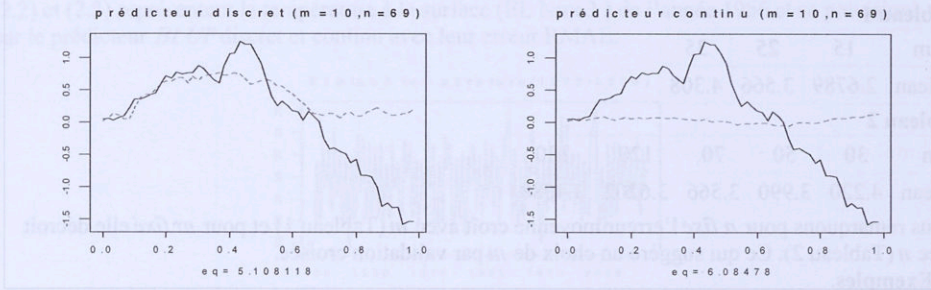


Figure (1.2)

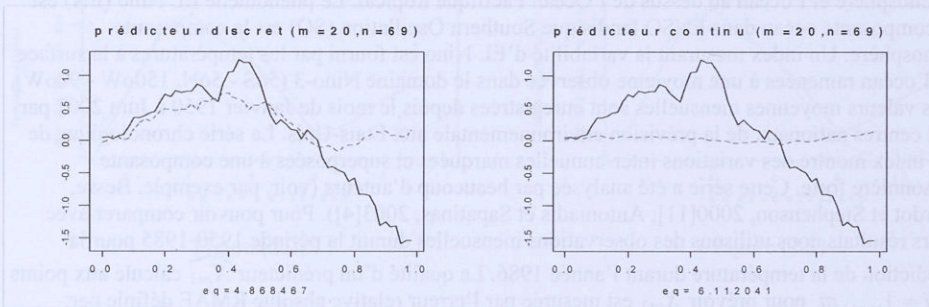


Figure (1.3)

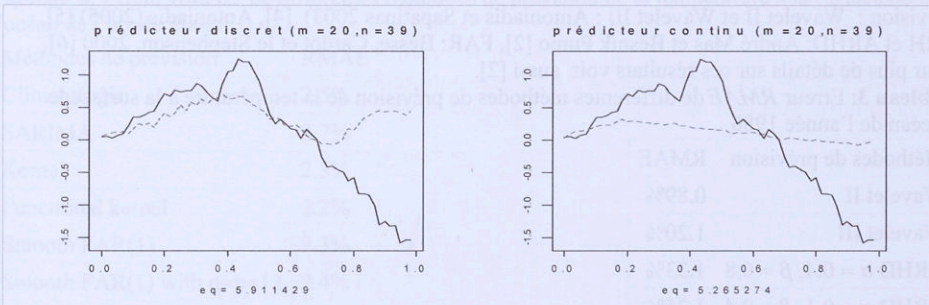


Figure (1.4)

Nous remarquons que le prédicteur BLUP donne une bonne "indication" de la tendance mais moins sensible aux variations. Pour mesurer l'effet de discrétisation sur la prévision, nous présentons ci-dessous pour 200 répliques, la moyenne des erreurs quadratiques pour $n = 70$ (fixé) et différentes valeurs de $m = 15, 25, 35$ (points de discrétisation) (Tableau 1) et ensuite pour $m=25$ (points de discrétisation fixé) et différentes valeurs de $n = 30, 50, 70, 120, 130$.

Tableau 1

m	15	25	35
Mean	2.6789	3.566	4.308

Tableau 2

n	30	50	70	120	130
Mean	4.220	3.990	3.566	3.6202	3.4088

Nous remarquons pour n fixé l'erreur moyenne croît avec m (Tableau 1) et pour m fixé elle décroît avec n (Tableau 2). Ce qui suggère un choix de m par validation croisée.

B. Exemples.

Nous utilisons les prédicteurs *BLUP* pour la prévision de séries réelles et nous comparons leurs performances avec d'autres méthodes de prédiction.

1) Série climatologique ENSO. Nous appliquons la méthode de prédiction *BLUP* à la série chronologique décrivant le phénomène climatologique ENSO qui résulte des interactions entre l'atmosphère et l'océan au dessus de l'Océan Pacifique tropical. Le phénomène EL Nino (EN) est la composante océan dans ENSO tandis que Southern Oscillation (SO) est la composante atmosphère. Un index mesurant la variabilité d'EL Nino est fourni par les températures à la surface de l'océan ramenées à une moyenne observée dans le domaine Nino-3 (5oS - 5oN, 150oW - 90oW). Des valeurs moyennes mensuelles sont enregistrées depuis le mois de Janvier 1950 à Juin 2007 par des centres nationaux de la prévision environnementale aux Etats-Unis. La série chronologique de cet index montre des variations inter-annuelles marquées et superposées à une composante saisonnière forte. Cette série a été analysée par beaucoup d'auteurs (voir, par exemple, Besse, Cardot et Stephenson, 2000[11]; Antoniadis et Sapatinas, 2003[4]). Pour pouvoir comparer avec leurs résultats nous utilisons des observations mensuelles durant la période 1950-1985 pour la prédiction de la température durant l'année 1986. La qualité d'un prédicteur \widehat{X}_{n+1} calculé aux points $t_i, i = 1, \dots, m$, pour prévoir X_{n+1} est mesurée par l'erreur relative absolue *RMAE* définie par:

$$RMAE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|\widehat{X}_{n+1}(t_i) - X_{n+1}(t_i)|}{|X_{n+1}(t_i)|}$$

Le tableau suivant donne les valeurs de l'erreur *RMAE* associées aux différentes méthodes de prévision : Wavelet II et Wavelet III : Antoniadis et Sapatinas 2003 [4], Antoniadis (2005) [5], ARH et ARHD: André Mas et Besnik Pumo [2], FAR: Besse, Cardot et le Stephenson, 2000 [6]. Pour plus de détails sur ces résultats voir aussi [2].

Tableau 3: Erreur *RMAE* de différentes méthodes de prévision de la température à la surface de l'océan de l'année 1986

Méthodes de prévision	RMAE
Wavelet II	0.89%
Wavelet III	1.20%
ARHD $\alpha = 0.4, \beta = 0.8$	1.33%
ARHD $\alpha = 0.1, \beta = 0.4$	1.25%
FAR	0.89%
SARIMA	3.72%
ARH (1)	1.60%
BLUP discret	1.25%
BLUP continu	1.70%

Nous remarquons que les méthodes BLUP discret ou continu fournissent des erreurs *RMAE* assez faibles.

La Figure (2.1) représente la variation de la température (EL Nino3) de 1950 à 2006. Les figures

(2.2) et (2.3) représentent la température à la surface (EL Nino 3) de l'année 1986 et sa prévision par le prédicteur *BLUP* discret et continu avec leur erreur RMAE.

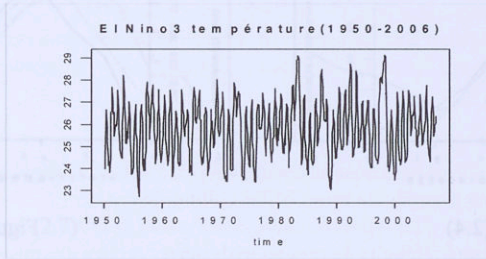


Figure (2.1)

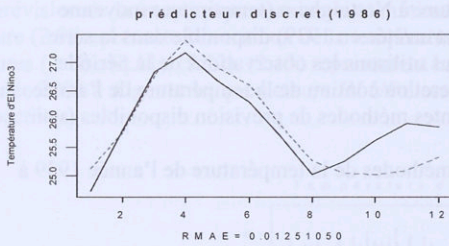


Figure (2.2)

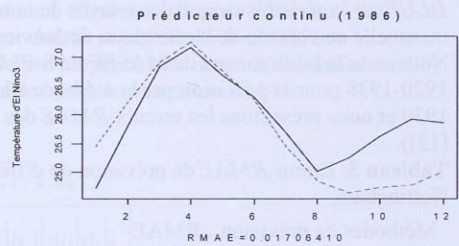


Figure (2.3)

Dans la suite nous utilisons les observations (un intervalle =1 année) de la période 1950-2005 pour la prévision de la température à la surface de l'océan de l'année 2006. Dans [6] plusieurs méthodes de prévision ont été utilisées en particulier la méthode de prévision "Climatologie" est basée sur l'estimation du cycle moyen d'une année pour la prévision de l'année suivante.

Tableau 4: Erreur *RMAE* de différentes méthodes de prévision de la température à la surface de l'océan de l'année 2006.

Méthodes de prévision	RMAE
Climatologie	2.5%
SARIMA	3.7%
Kernel	2.3%
Functional kernel	2.2%
Smooth FAR(1)	2.3%
Smooth FAR(1) with $q=p=12$	2.4%
Local FAR(1)	2.2%
BLUP discret	1.40%
BLUP continu	2.25%

Nous remarquons que les méthodes BLUP discret et continu fournissent de bons résultats avec des erreurs RMAE les plus faibles.

Les Figure (2.4), (2.5) représentent la température à la surface de l'océan (EL Nino) de l'année 2006 et son prédicteur *BLUP* discret ou continu avec erreur RMAE.

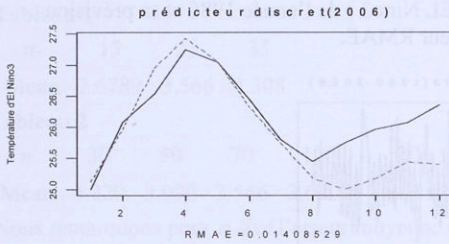


Figure (2.4)

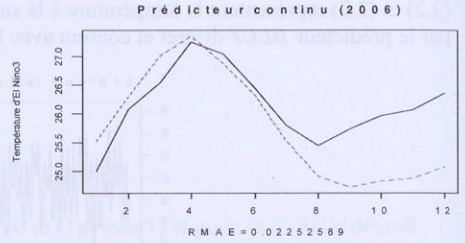


Figure (2.5)

2. Prédiction de la température à Nottingham. Nous appliquons aussi la méthode de prédiction *BLUP* sur la série historique des relevés de la température à Nottingham (température moyenne mensuelle au château de Nottingham de Janvier 1920 et arrêtée en 1939) disponible dans la série *Nottem* de la bibliothèque de *MASSE* de *S-PLUS*. Nous utilisons les observations de la période 1920-1938 pour la prévision par la méthode *BLUP* discret ou continu de la température de l'année 1939 et nous présentons les erreurs *RMAE* des différentes méthodes de prévision disponibles (voir [12]).

Tableau 5: Erreur *RMAE* de prévision de différentes méthodes de la température de l'année 1939 à Nottingham.

Méthodes de prévision	RMAE
Wavelet–Kernel	30 %
SS (Spline Smoothing)	28 %
SARIMA	31 %
BLUP cas discret	4.5%
BLUP cas continu	2.96%

Nous remarquons que les méthodes *BLUP* discret ou continu fournissent les erreurs *RMAE* les plus faibles.

La Figure(2.6) représente la température à Nottingham de 1920-1939. Figure(2.7), (2.8) représentent la température de l'année 1939 à Nottingham et sa prévision *BLUP*.

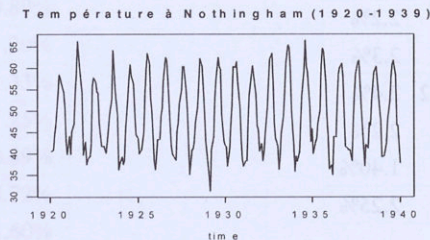


Figure (2.6)

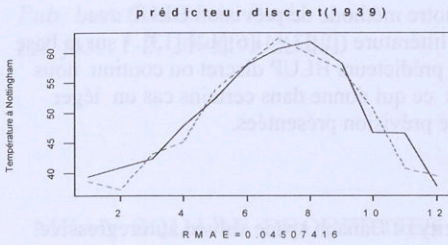


Figure (2.7)

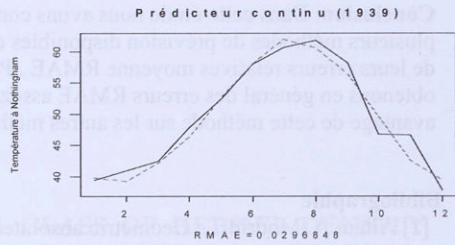


Figure (2.8)

3-Prévision de la température à Alger. Dans cette troisième partie nous présentons des résultats de prévision de la température maximale et minimale moyenne à Alger pour l'année 2004. La Figure (2.9) représente la variation de la température à Alger durant la période 1956-2004. Les Figures (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) représentent la température moyenne maximale et minimale de l'année 2004 à Alger et les prédicteurs *BLUP* discret et continu avec leurs erreurs RMAE respectives.

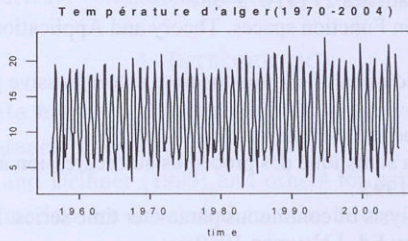


Figure (2.9)

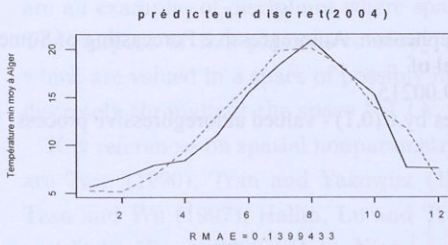


Figure (2.10)

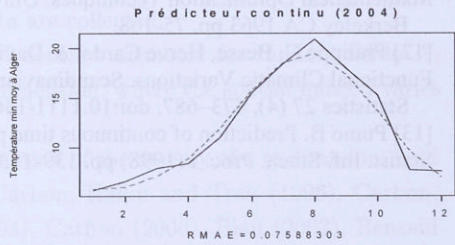
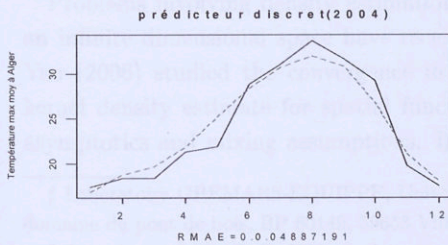
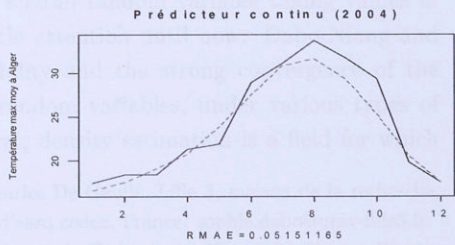


Figure (2.11)



Figure(2.12)



Figure(2.13)

Conclusion. Dans cette étude nous avons comparé notre méthode de prévision BLUP avec plusieurs méthodes de prévision disponibles dans la littérature ([2][3][4][6][12] [13]) sur la base de leurs erreurs relatives moyenne RMAE . Pour les prédicteurs BLUP discret ou continu nous obtenons en général des erreurs RMAE assez faibles ce qui donne dans certains cas un léger avantage de cette méthode sur les autres méthodes de prévision présentées.

Bibliographie

- [1] Allam A. Mourid T., Geometric absolute regularity of Banach space valued autoregressive processes . *Statistics and Probability Letters* 60 (2002) 241-252 .
- [2] André Mas, Besnik Pumo. The ARHD model . arXiv:math.ST/0.502285 v1 14 Feb 2005
- [3] Antoniadis, A. A functional Wavelet-kernel approach for continuous-time Prediction.ccsd-00004891, version 1-10 May 2005
- [4] Antoniadis, A et Sapatinas, T. Wavelet methods for continuous- time prediction using Hilbert-valued autoregressive processes. *J. Multivariate Anal.*, 87, 133-158 (2003)
- [5] Aronszajn N. General Theory of Reproducing Kernel spaces and Applications. *Proc. Cambridge Philo. Soc.*, Vol 39, pp. 133-153. 1944.
- [6] P. Besse, H. Cardot & D. B. Stephenson. Autoregressive Forecasting of Some Functional Climatic Variations. *Scandinavian Journal of Statistics* 27 (4) 673-687
- [7] Bosq D. Linear Processes in Function spaces. Theory and Applications. *Lecture Notes in Statistics* 149 Springer 2000
- [8] Mokhtari F. Mourid T. Prediction of continuous time autoregressive processes via the Reproducing Kernel spaces . *Statistical Inference for Stochastic Processes* 6: 247-266. 2003
- [9] Mourid T. Contribution à la statistique des processus autorégression à temps continu. Thèse de Doctorat Es Sciences. Paris 6 1995 .
- [10] Parzen E. Regression analysis of continuous parameter time series. *Proce. Fourth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. Theory Ed. J.Neyman* 1960.
- [11] Parzen E. A new approach to synthesis of optimal smoothing and prediction systems. *Mathematical Optimization Techniques*. University of California Press. Berkeley CA 1963 pp. 75-108.
- [12] Philippe C. Besse, Herve Cardot & David B. Stephenson. Autoregressive Forecasting of Some Functional Climatic Variations. *Scandinavian Journal of Statistics* 27 (4), 673-687. doi:10.1111/1467-9469.00215
- [13] Pumo B. Prediction of continuous time processes by $C(0,1)$ - valued autoregressive process. *Statist. Inf. Stoch. Proc. I* (1998) pp. 139-153..