



**HAL**  
open science

# Des règles de quadrature dans les RKHSs à base de DPPs

Ayoub Belhadji

► **To cite this version:**

Ayoub Belhadji. Des règles de quadrature dans les RKHSs à base de DPPs. GRETSI 2022 - XXVII-  
ième Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Sep 2022, Nancy, France. pp.1-4.  
hal-03630086v2

**HAL Id: hal-03630086**

**<https://hal.science/hal-03630086v2>**

Submitted on 17 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Des règles de quadrature dans les RKHSs à base de DPPs

Ayoub BELHADJI<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Univ Lyon, ENS de Lyon  
Inria, CNRS, UCBL  
LIP UMR 5668, Lyon, France  
ayoub.belhadji@ens-lyon.fr

**Résumé** – On étudie des règles de quadrature à base de configurations de nœuds qui suivent la distribution d’un processus ponctuel déterminantal (DPP). Ces règles de quadrature sont adaptées à des fonctions qui appartiennent à des espaces de Hilbert à noyau reproduisant. On montre que le taux de convergence dépend principalement des valeurs propres de l’opérateur d’intégration correspondant. En particulier, ce travail fournit une analyse unifiée de l’intégration numérique et offre un nouveau regard sur l’utilisation des DPPs dans ce domaine.

**Abstract** – We study quadrature rules based on configurations of nodes that follow the distribution of a determinantal point process (DPP). These quadrature rules are suitable for functions that belong to reproducing kernel Hilbert spaces (RKHS). We prove that the rate of convergence depends principally on the eigenvalues of the corresponding integration operator. In particular, this work furnishes a unified analysis of numerical integration and offers a new perspective on the use of DPPs in this field.

## 1 Introduction

Approximer des intégrales est une tâche récurrente dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées [1] : traitement de signal, apprentissage automatique, statistiques Bayésiennes... En pratique, une telle approximation est réalisée à l’aide d’une règle de quadrature : une somme pondérée des évaluations de la fonction à intégrer. Dans ce travail, on s’intéresse aux règles de quadrature de la forme

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)g(x)d\omega(x) \approx \sum_{i \in [N]} w_i f(x_i), \quad (1)$$

où les nœuds  $x_i$  sont indépendants du choix des fonctions  $f$  et  $g$ , alors que les poids  $w_i$  peuvent dépendre de  $g$ . L’usage des processus ponctuels déterminantaux (DPPs) dans le cadre de l’intégration numérique a été proposé récemment par Bardenet et Hardy dans [2]. Les DPPs sont des modèles probabilistes de sous-ensembles aléatoires impliquant une répulsion entre les particules. Cette répulsion entre les nœuds permet de mieux couvrir le domaine d’intégration  $\mathcal{X}$  de telle sorte que l’approximation (1) soit de meilleure qualité comparée à une règle de quadrature impliquant des nœuds aléatoires indépendants. Ainsi, la règle de quadrature proposée dans [2] converge plus rapidement qu’une quadrature de type Monte Carlo pour des fonctions suffisamment régulières. Cependant, le domaine d’intégration dans [2] est limité à l’hypercube  $[0, 1]^d$ . Depuis la publication de ce travail, plusieurs articles [3, 4, 5] ont étudié des règles de quadrature pour des fonctions qui appartiennent à un espace d’Hilbert à noyau reproduisant (RKHS). Ce formalisme permet de travailler avec des fonctions régulières et

définies sur des domaines d’intégration variés.

Le présent article est une synthèse des résultats figurant dans ces articles. Il est structuré de la façon suivante : dans la Section 2 on rappelle la construction des règles de quadrature proposée dans ces articles ; et dans la Section 3, on rappelle les garanties théoriques des règles de quadratures proposées.

**Notations** On note  $\omega$  une mesure borélienne sur  $\mathcal{X}$  et on note par  $\mathcal{L}_2(\omega)$  l’espace d’Hilbert des fonctions réelles définies sur  $\mathcal{X}$  et de carré intégrable par rapport à  $\omega$  équipé d’un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_\omega$ . On note par  $\mathcal{F}$ , le RKHS associé au noyau  $k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  qu’on suppose continue et qui satisfait  $\int_{\mathcal{X}} k(x, x)d\omega(x) < +\infty$ . De plus, on suppose que  $k$  admet la décomposition Mercer

$$k(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \sigma_m e_m(x) e_m(y), \quad (2)$$

où les  $\sigma_m$  et les  $e_m$  sont respectivement les valeurs propres et les fonctions propres de l’opérateur d’intégration  $\Sigma$  défini sur  $\mathcal{L}_2(\omega)$  par

$$\Sigma f(\cdot) = \int_{\mathcal{X}} k(\cdot, y) f(y) d\omega(y). \quad (3)$$

On suppose que la suite  $\sigma = (\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et de valeurs strictement positives et les fonctions propres correspondantes sont continues et normalisées :  $\|e_m\|_\omega = 1$ . En particulier, la famille  $(e_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  est une base orthonormée de  $\mathcal{L}_2(\omega)$  et tout élément  $f \in \mathcal{F}$  satisfait la condition

$$\|f\|_{\mathcal{F}}^2 := \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \frac{\langle f, e_m \rangle_\omega^2}{\sigma_m} < +\infty. \quad (4)$$

## 2 Une famille de règles de quadrature dans un RKHS

Dans cette Section, on propose une construction universelle d'une règle de quadrature pour des fonctions du RKHS  $\mathcal{F}$  à l'aide des nœuds répulsifs. La construction des règles de quadrature est un champ de recherche très vaste qui ne peut être couvert convenablement dans ce travail. Cependant, on ne peut s'empêcher de remarquer que la construction d'une règle de quadrature se ramène à poser trois questions :

- comment choisir les nœuds  $x_1, \dots, x_N$  ?
- comment choisir les poids  $w_1, \dots, w_N$  ?
- quelle est l'erreur de l'approximation ?

La construction proposée répond à ces trois questions, mais dans le sens inverse. D'abord, on rappelle dans la Section 2.1 comment les noyaux reproduisants peuvent être utilisés pour une quantification de l'erreur d'approximation d'une règle de quadrature. Ensuite, on propose dans la Section 2.2 de choisir les poids pour une configuration de nœuds donnée. Enfin, on propose d'adopter des nœuds répulsifs dans la Section 2.3.

### 2.1 L'analyse des quadratures à l'aide des noyaux

L'utilisation des noyaux dans le contexte de l'intégration numérique remonte aux travaux de Hickernell [6]. Dans ce travail, la qualité d'approximation d'une règle de quadrature est estimée à travers l'erreur d'intégration du pire cas dans la boule unité du RKHS  $\mathcal{F}$  associé au noyau  $k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  :

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{F} \\ \|f\|_{\mathcal{F}} \leq 1}} \left| \int_{\mathcal{X}} f(x)g(x)d\omega(x) - \sum_{i \in [N]} w_i f(x_i) \right|. \quad (5)$$

Cette quantité a une formule close

$$\left\| \mu_g - \sum_{i \in [N]} w_i k(x_i, \cdot) \right\|_{\mathcal{F}}, \quad (6)$$

où  $\mu_g = \Sigma g$  est le plongement de  $g$  dans le RKHS  $\mathcal{F}$ . La formule (6) est égale à

$$\sqrt{\|\mu_g\|_{\mathcal{F}}^2 - 2\mathbf{w}^T \mu_g(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) \mathbf{w}}, \quad (7)$$

où  $\mathbf{w} := (w_i)_{i \in [N]} \in \mathbb{R}^N$  et  $\mu_g(\mathbf{x}) := (\mu_g(x_i))_{i \in [N]} \in \mathbb{R}^N$  et

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := (k(x_{i_1}, x_{i_2}))_{(i_1, i_2) \in [N] \times [N]} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (8)$$

En d'autres termes, la formule (7) ramène l'évaluation de (5), une quantité a priori intractable, à l'évaluation de  $\|\mu_g\|_{\mathcal{F}}^2$ , des  $\mu_g(x_i)$  et des  $k(x_{i_1}, x_{i_2})$ , des quantités qu'on peut évaluer explicitement pour un grand nombre de noyaux  $k$  et de fonctions  $g$ . Cette formule a le mérite de ne pas dépendre d'une fonction test particulière  $f \in \mathcal{F}$ , ce qui rend la comparaison des règles de quadrature pertinent et justifie l'utilisation des noyaux reproduisants dans le domaine de l'intégration numérique.

### 2.2 Les poids de la quadrature

Etant donnée une configuration de nœuds  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ , on choisit le vecteur des poids  $\hat{\mathbf{w}}^{\text{OKQ}}$  qui minimise (7) vue

comme une fonction de  $\mathbf{w}$ . Ainsi, la quadrature obtenue est appelée la *quadrature à noyau optimale* (OKQ)<sup>1</sup>. En général, l'existence et l'unicité de ce vecteur sont assurées quand la matrice

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) := (k(x_i, x_j))_{(i,j) \in [N]^2} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (9)$$

est inversible. Sous cette hypothèse, le vecteur des poids vérifie

$$\hat{\mathbf{w}}^{\text{OKQ}} = \mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mu_g(\mathbf{x}), \quad (10)$$

où  $\mu_g(\mathbf{x}) := (\mu_g(x_i))_{i \in [N]} \in \mathbb{R}^N$ . De plus, on a

$$\sum_{i \in [N]} \hat{w}_i^{\text{OKQ}} k(x_i, \cdot) = \Pi_{\mathcal{T}(\mathbf{x})} \mu_g, \quad (11)$$

où  $\Pi_{\mathcal{T}(\mathbf{x})} \mu_g$  est la projection orthogonale de  $\mu_g$  sur le sous-espace  $\mathcal{T}(\mathbf{x}) := \text{Span}(k(x_i, \cdot))_{i \in [N]}$  engendré par les translations de noyau. Finalement, on observe que la formule (10) implique que la fonction  $\Pi_{\mathcal{T}(\mathbf{x})} \mu_g$  prend les mêmes valeurs que  $\mu_g$  dans les nœuds  $x_1, \dots, x_N$  : la mixture est l'interpolante de  $\mu_g$  par le noyau  $k$ . La Figure 1 illustre l'importance du choix de la configuration des nœuds dans la qualité de l'interpolation : une configuration de nœuds répulsive offre une meilleure interpolation, et la OKQ correspondante aura de meilleures performances dans l'intégration numérique. Néanmoins, la construction d'une configuration de nœuds répulsifs peut poser des difficultés dans un domaine arbitraire  $\mathcal{X}$  et surtout en grande dimension. Cet obstacle peut être contourné en considérant une configuration aléatoire de nœuds définie dans la Section 2.3.

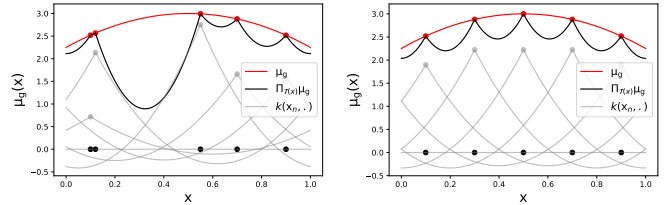


FIGURE 1 – Comparaison entre l'interpolante de  $\mu_g$  à l'aide de deux configurations : une configuration non-répulsive (gauche) une configuration répulsive (droite).

### 2.3 Les nœuds de la quadrature

La configuration des nœuds  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  est une variable aléatoire à valeur dans  $\mathcal{X}^N$  qui suit la distribution de densité

$$p_{\kappa}(x_1, \dots, x_N) \propto \text{Det } \kappa(\mathbf{x}), \quad (12)$$

relativement à la mesure produit  $\omega^{\otimes N}$  définie dans  $\mathcal{X}^N$ , avec  $\kappa : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est un noyau p.s.d. qui vérifie la condition

$$\int_{\mathcal{X}} \kappa(x, x) d\omega(x) < +\infty. \quad (13)$$

Le noyau  $\kappa$  est appelé le noyau de répulsion qui peut être différent du noyau  $k$  du RKHS. La densité  $p_{\kappa}$  favorise les configurations t.q.  $\text{Det } \kappa(\mathbf{x})$  est grand, elle favorise ainsi les configurations les plus répulsives selon le noyau  $\kappa$ . En particulier,

1. OKQ : optimal kernel quadrature.

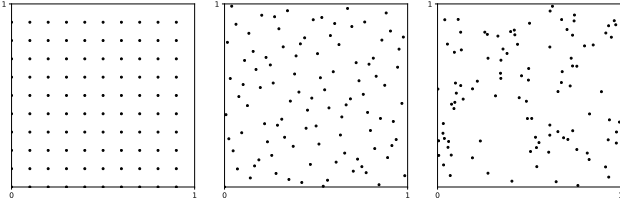


FIGURE 2 – Trois configurations de nœuds, avec  $N = 100$ , dans  $\mathcal{X} = [0, 1]^2$  : (gauche) grille uniforme, (centre) une réalisation du DPP de noyau  $\kappa_N$ , (droite) une réalisation de l'échantillonnage de  $N$  particules indépendantes de la loi uniforme.

quand le noyau  $\kappa$  est de projection, cette distribution est équivalente à un DPP. Dans le cas général, on peut montrer que la distribution est une mixture de DPPs.

**Un exemple** On considère  $\mathcal{X} = [0, 1]^d$ ,  $\omega$  est la mesure uniforme sur  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{F}$  est le RKHS associé au noyau  $k_{d,s}$

$$\forall x, y \in \mathcal{X}, \quad k_{d,s}(x, y) := \prod_{i=1}^d k_{1,s}(x_i, y_i), \quad (14)$$

où  $k_{1,s}(u, v)$  est défini pour  $u, v \in [0, 1]$  par la formule

$$k_{1,s}(u, v) := 1 + \frac{(-1)^{s-1} (2\pi)^{2s}}{(2s)!} B_{2s}(\{u - v\}), \quad (15)$$

où  $B_{2s}$  est le polynôme de Bernoulli d'ordre  $2s$ . Ce noyau admet une décomposition Mercer (2) où les  $e_m$  sont des fonctions trigonométriques et  $\sigma_N = \mathcal{O}(\log^{2s(d-1)}(N) N^{-2s})$  [7]. La Figure 2 compare une réalisation du DPP de noyau de répulsion  $\kappa_N(x, y) := \sum_{m=1}^N e_m(x)e_m(y)$  où  $N = 100$ , avec la grille uniforme de  $N$  nœuds, et une configuration aléatoire obtenue comme l'échantillonnage de  $N$  particules indépendantes selon la distribution uniforme sur  $[0, 1]^2$  : la configuration obtenue comme une réalisation d'un DPP est moins régulière que la grille uniforme mais elle couvre  $[0, 1]^2$  mieux que la configuration obtenue par échantillonnage indépendant. Cette dernière contient des rassemblements de points qui sont très rares à observer dans une configuration répulsive qui suit la loi d'un DPP.

### 3 Les garanties théoriques

Dans cette Section, on présente les taux de convergence des règles de quadrature définies dans la Section 2. On se focalise sur deux choix de noyaux de répulsion  $\kappa$  :

- le noyau de projection (la distribution PDPP<sup>2</sup>) :

$$\kappa(x, y) = \kappa_N(x, y) := \sum_{m=1}^N e_m(x)e_m(y), \quad (16)$$

- le noyau du RKHS (la distribution CVS<sup>3</sup>) :  $\kappa = k$ .

On commence par le résultat suivant.

**Proposition 1** (Théorème 4 dans [4]). *Soit  $g \in \mathcal{L}_2(\omega)$ , on a*

$$\mathbb{E}_{\text{CVS}} \|\mu_g - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(x)} \mu_g\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \langle g, e_m \rangle_{\omega}^2 \epsilon_m(N), \quad (17)$$

où

$$\epsilon_m(N) = \sum_{\substack{|T|=N \\ m \notin T}} \prod_{t \in T} \sigma_t / \sum_{|T|=N} \prod_{t \in T} \sigma_t. \quad (18)$$

La Proposition 1 donne, pour  $g \in \mathcal{L}_2(\omega)$ , une formule close de  $\mathbb{E}_{\text{CVS}} \|\mu_g - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(x)} \mu_g\|_{\mathcal{F}}^2$  qui dépend principalement des coefficients de  $g$  dans la base orthonormée  $(e_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ . Cette formule met en relief l'importance des  $\epsilon_m(N)$ . On peut déjà observer qu'en appliquant (17) à  $g = e_m$  on obtient

$$\epsilon_m(N) = \mathbb{E}_{\text{CVS}} \|\mu_{e_m} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(x)} \mu_{e_m}\|_{\mathcal{F}}^2. \quad (19)$$

De plus, d'après la Proposition 5 dans [4] on a  $\epsilon_m(N) = \mathcal{O}(\sigma_{N+1})$  dans plusieurs RKHSs. En particulier, en appliquant (17), on montre que  $\mathbb{E}_{\text{CVS}} \|\mu_g - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(x)} \mu_g\|_{\mathcal{F}}^2 = \mathcal{O}(\sigma_{N+1})$  pour tout  $g \in \mathcal{L}_2(\omega)$ . Remarquablement, ce taux de convergence est optimal comme indiqué par le résultat suivant.

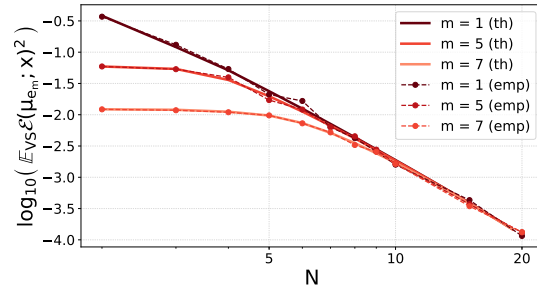


FIGURE 3 – La valeur théorique de  $\epsilon_m(N)$  comparée à son estimation empirique réalisée à l'aide d'un algorithme MCMC.

**Proposition 2** (Section 2.5. dans [4]). *Soit  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{X}^N$  t.q.  $\text{Det } \mathbf{K}(x) > 0$ . On a*

$$\sup_{\substack{g \in \mathcal{L}_2(\omega) \\ \|g\|_{\omega} \leq 1}} \|\mu_g - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(x)} \mu_g\|_{\mathcal{F}}^2 \geq \sigma_{N+1}. \quad (20)$$

En d'autres termes, la CVS offre une reconstruction presque optimale des  $\mu_g$ . En pratique, il est possible d'échantillonner selon la distribution de la CVS grâce à un algorithme MCMC proposé dans [8]. La Figure 3 compare les valeurs théoriques de  $\epsilon_1(N)$ ,  $\epsilon_5(N)$  and  $\epsilon_7(N)$  à leurs estimations obtenues grâce à cet algorithme MCMC. le RKHS adopté correspond au noyau défini dans l'exemple avec  $d = 1$  et  $s = 2$ . On observe que la valeur de  $\epsilon_m(N)$  passe par deux phases. Dans la première phase ( $N \leq m$ ), la valeur de  $\epsilon_m(N)$  est presque une constante égale à l'erreur initial  $\sigma_m$ . Dans la deuxième phase ( $N > m$ ), la valeur de  $\epsilon_m(N)$  tend vers 0 avec un taux de convergence  $\mathcal{O}(\sigma_{N+1})$ . Pour expliquer ce comportement, on observe que  $\mu_{e_m} = \sqrt{\sigma_m} e_m^{\mathcal{F}}$  avec  $e_m^{\mathcal{F}} := \sqrt{\sigma_m} e_m$  et que

$$\|e_m^{\mathcal{F}} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(x)} e_m^{\mathcal{F}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \|e_m^{\mathcal{F}}\|_{\mathcal{F}}^2 = 1, \quad (21)$$

2. Projection DPP

3. Continuous volume sampling

et on obtient

$$\epsilon_m(N) = \sigma_m \mathbb{E}_{\text{CVS}} \|e_m^{\mathcal{F}} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(\mathbf{x})} e_m^{\mathcal{F}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \sigma_m. \quad (22)$$

Autrement dit,  $\epsilon_m(N)$  est le produit de deux termes :  $\sigma_m$  qui ne dépend pas de  $N$  et  $\mathbb{E}_{\text{CVS}} \|e_m^{\mathcal{F}} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(\mathbf{x})} e_m^{\mathcal{F}}\|_{\mathcal{F}}^2$  qui reflète l'erreur moyenne de reconstruction de la fonction propre  $e_m^{\mathcal{F}}$  par sa projection dans le sous-espace  $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ . C'est ce dernier terme qui converge vers 0 avec un taux  $\mathcal{O}(\sigma_{N+1})$  à partir de  $N > m$ . Autrement dit, le CVS permet de reconstruire les premières  $N$  fonctions propres  $e_m^{\mathcal{F}}$  dans l'ordre :  $e_m^{\mathcal{F}}$  est mieux reconstruite que  $e_{m+1}^{\mathcal{F}}$  en moyenne. L'algorithme MCMC utilisé pour réaliser cette simulation reste, néanmoins, une approximation de la distribution CVS et pour cette raison, on observe des déviations légères de l'estimation (emp) autour de la valeur théorique (th). Contrairement à la CVS, l'échantillonnage exact selon la distribution PDPP est possible à condition d'avoir une décomposition Mercer (2) qui soit explicite. De plus, on a le résultat suivant.

**Proposition 3** (Théorème 5 dans [5]). *Sous la distribution PDPP, on a*

$$\forall g \in \mathcal{L}_2(\omega), \mathbb{E}_{\text{PDPP}} \left\| \mu_g - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(\mathbf{x})} \mu_g \right\|_{\mathcal{F}}^2 \leq 4 \|g\|_{\omega}^2 r_N, \quad (23)$$

où  $r_N = \sum_{m \geq N+1} \sigma_m$ .

La Proposition 3 fournit une borne supérieure de l'espérance de l'erreur du pire cas de la OKQ, quand les nœuds suivent la distribution du DPP de noyau  $k_N$ . Le taux de convergence établi est de l'ordre de  $\mathcal{O}(r_N)$ . Néanmoins, les simulations numériques dans [3] suggèrent que ce taux de convergence est plutôt  $\mathcal{O}(\sigma_{N+1})$ . La Figure 4 illustre ce taux de convergence dans le cas du RKHS considéré dans l'exemple avec  $d = 2$  et  $s = 1$ . On compare le PDPP contre les nœuds d'une grille uniforme de même cardinalité en observant les

$$\epsilon_m(N) := \|\mu_{e_m} - \mathbf{\Pi}_{\mathcal{T}(\mathbf{x})} \mu_{e_m}\|_{\mathcal{F}}^2,$$

moyennés sur 50 réalisations dans le cas de PDPP. On observe que sous la distribution PDPP, le taux de convergence est  $\mathcal{O}(\sigma_N)$  alors que le taux de convergence pour la grille uniforme est  $\mathcal{O}(N^{-s/2d})$  qui se dégrade fortement en grande dimension.

## 4 Conclusion

Dans ce travail, on a étudié la quadrature à noyau optimale avec des nœuds répulsifs. On a montré qu'avec un choix judicieux du noyau de répulsion, le taux de convergence de l'erreur du pire cas dans la boule unité d'un RKHS de cette quadrature est quasi optimal. En particulier, on a considéré deux distributions : la CVS et la PDPP. La première consiste à utiliser le noyau du RKHS comme noyau de répulsion, alors que la seconde correspond au noyau de projection associé aux premières fonctions propres. Finalement, les résultats théoriques ont été validés par des simulations numériques.

## Références

[1] Robert, C. P. and G. Casella (2004). Monte Carlo statistical methods. Springer

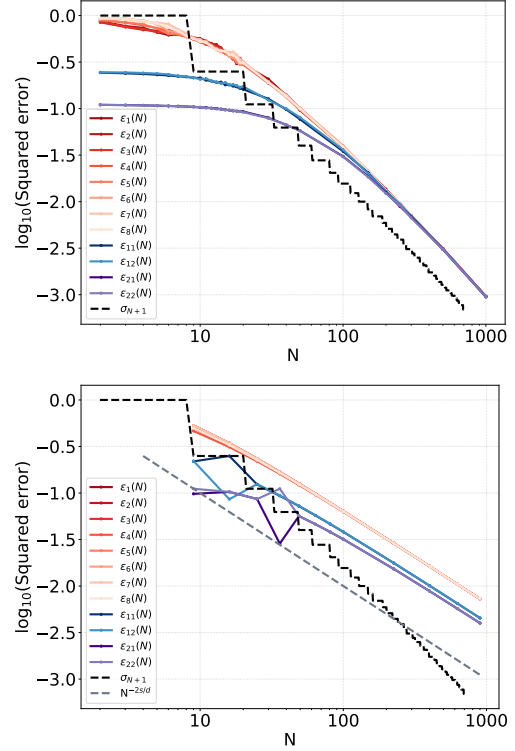


FIGURE 4 – La valeur empirique de  $\epsilon_m(N)$  pour la distribution PDPP (haut) et pour une grille uniforme (bas). Le RKHS correspond au produit tensoriel des espaces de Sobolev en dimension  $d = 2$  et de régularité  $s = 1$ .

[2] Bardenet, R. and Hardy, A. “Monte Carlo with determinantal point processes”. In : The Annals of Applied Probability 30.1, pp. 368–417, 2020

[3] Belhadji, A., Bardenet, R. and Chainais, P. *Kernel quadrature with DPPs*. In : Advances in Neural Information Processing Systems 32, pp. 12907–12917, 2019

[4] Belhadji, A., Bardenet, R. and Chainais, P. *Kernel interpolation with continuous volume sampling*. In : Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning, pp. 725–735, 2020

[5] Belhadji, A. (2021). *An analysis of Ermakov-Zolotukhin quadrature using kernels*. In : Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning, 2021

[6] Hickernell, F. J. *A generalized discrepancy and quadrature error bound*. Mathematics of computation 67.221, pp. 299–322, 1998.

[7] Bach, F. “On the equivalence between kernel quadrature rules and random feature expansions”. In : The Journal of Machine Learning Research 18.1, pp. 714–751, 2017

[8] Rezaei, A. and Gharan, S. O. A polynomial time MCMC method for sampling from continuous determinantal point processes. In International Conference on Machine Learning, pp. 5438–5447, 2019.