



Calcul de l'algèbre de Lie des champs feuilletés transverses d'une extension d'un feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte connexe

Cyrille Dadi

► To cite this version:

Cyrille Dadi. Calcul de l'algèbre de Lie des champs feuilletés transverses d'une extension d'un feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte connexe. 2022. <hal-03628776>

HAL Id: hal-03628776

<https://hal.science/hal-03628776v1>

Preprint submitted on 2 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Calcul de l'algèbre de Lie des champs feuilletés transverses d'une extension d'un feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte connexe

Cyrille Dadi

Fundamental Mathematics Laboratory ,
University Felix Houphouet-Boigny , ENS
08 PO Box 10 Abidjan (Ivory Coast)
email: cyriledadi@yahoo.fr

April 2, 2022

Abstract¹

In the papers ([1], [2]) is shown as any extension of a \mathcal{G} -foliation \mathcal{F} having dense leaves on a compact connected manifold M corresponds a Lie subalgebra \mathcal{H} of $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$. We note in passing that the previous result is the one-to-one correspondence theorem between the extensions of a Lie \mathcal{G} -foliation having dense leaves on a compact connected manifold and sub-algebras of \mathcal{G} . We denote by $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ the extension corresponding to the subalgebra \mathcal{H} .

We note that the two results used essentially in this paper are:

- (i) the consequences of the previous one-to-one theorem in [1],
- (ii) Any Lie \mathcal{G} -foliation \mathcal{F} having dense leaves on a compact connected manifold M admits a locally constant sheaf $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ of germs of local transverse killing vector fields which has its typical fiber the Lie algebra \mathcal{G}^- opposite to \mathcal{G} (which is identified with the germs defined by the vector fields right invariant obtained from \mathcal{G}) [6].

That said, in this paper we seek to determine the Lie algebra $\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ of transverse foliated vector fields of an extension $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

Noting by \tilde{u} the \mathcal{F} transverse foliated vector field associated to $u \in \mathcal{G}$ and using (i) and (ii) the study shows that we have

$$\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \{\tilde{u} / u \in \mathcal{H}^{\perp} \text{ and } [u, h] = 0 \text{ for every } h \in \mathcal{H}\}$$

¹2010 **Mathematics Subject Classification:** 53C05, 53C12, 58A30

Keywords and phrases : *feuilletage, feuilletage ayant ses feuilles denses, extension de feuilletage, feuilletage de Lie, algèbre de Lie, sous-algèbre, groupe de Lie, sous-groupe de Lie, champ de killing transverse local, faisceau transverse central local*

1 Introduction

On montre dans ([1], [2]) qu'à toute extension d'un G -feuilletage de Lie \mathcal{F} ayant ses feuilles denses sur une variété compacte connexe M correspond une sous-algèbre de Lie \mathcal{H} de $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$.

On note par $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ l'extension correspond à la sous-algèbre de Lie \mathcal{H} .

Le but de cet article est de calculer l'algèbre de Lie $\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ des champs de vecteurs $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ -feuilletés transverses .

On montre dans cet papier que toutes les informations concernant $\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ sont contenues dans l'algèbre de Lie \mathcal{G} . En effet on établit que

$$\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \{\tilde{u} \mid u \in \mathcal{H}^\perp \text{ et } [u, h] = 0 \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}$$

où \tilde{u} est le champ \mathcal{F} -feuilleté transverse associé au vecteur $u \in \mathcal{G}$.

Cet article est divisé en trois parties :

- la première partie est consacrée à l'introduction,
- la deuxième partie est consacrée aux rappels sur les feuilletages et sur les extensions de feuilletages,
- la troisième partie est consacrée au calcul de l'algèbre de Lie structure $\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ de l'extension $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ d'un feuilletage de Lie ayant ses feuilles denses sur une variété compacte connexe.

2 Définitions et Rappels

Dans ce paragraphe, nous reformulons dans le sens qui nous est utile certaines définitions et certains théorèmes qui se trouvent dans ([1], [2], [4]).

Definition 2.1 *Un feuilletage (M, \mathcal{F}) de codimension q sur une M est la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M , de submersion $f_i : U_i \rightarrow T$ où T est une variété de dimension q vérifiant pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ l'existence, d'un difféomorphisme*

$$\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \subset T \rightarrow f_i(U_i \cap U_j) \subset T$$

satisfaisant :

$$f_i(x) = (\gamma_{ij} \circ f_j)(x) \text{ pour tout } x \in U_i \cap U_j.$$

On dit que $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ est un cocycle feuilleté du feuilletage (M, \mathcal{F}) .

La variété T est appelée variété transverse du feuilletage (M, \mathcal{F}) .

Le quotient

$$\mathcal{V}(\mathcal{F}) = \frac{TM}{T\mathcal{F}}$$

est appelé le fibré transverse du feuilletage \mathcal{F} .

L'ensemble des fibres des submersions $f_i : U_i \rightarrow T$ est le feuilletage \mathcal{F} sur U_i il noté (U_i, \mathcal{F}) .

Le feuilletage (U_i, \mathcal{F}) est dit simple et chaque fibre de $f_i : U_i \rightarrow T$ est une plaque de \mathcal{F} dans U_i .

Definition 2.2 Si $T = G$ est un groupe de Lie connexe et si les γ_{ij} sont des restrictions des translations à gauche de G alors, on dit que le feuilletage \mathcal{F} est un feuilletage de Lie. On l'appelle aussi G -feuilletage de Lie ou bien \mathcal{G} -feuilletage de Lie où $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$.

Proposition 2.3 [4] Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie sur une variété M . Alors il existe:

- un homomorphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$,
- une submersion $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow G$, telle que:
 - i) Le feuilletage relevé $\widetilde{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} sur \widetilde{M} est simple et est défini par la submersion \mathcal{D} .
 - ii) \mathcal{D} est équivariante par ρ i.e $\mathcal{D}(\gamma.\tilde{x}) = \rho(\gamma).\mathcal{D}(\tilde{x})$ où $\gamma \in \pi_1(M)$ et $\tilde{x} \in \widetilde{M}$.

Une autre proposition donnée par Fedida avec les formes différentielles est la suivante:

Proposition 2.4 [4] Une structure de G -feuilletage de Lie \mathcal{F} sur une variété M est équivalente à la donnée d'une 1-forme différentielle ω sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G telle que:

- 1) Pour tout $x \in M$, l'application linéaire $\omega_x : T_x M \rightarrow \mathcal{G}$ est surjective;
- 2) ω vérifie l'équation de Maurer-cartan $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$,
- 3) deux 1-forme ω et ω' vérifiant ces propriétés sont liées par la relation $\omega' = \text{ad}_g(\omega)$, pour un certain $g \in G$.

Si \mathcal{G} désigne l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G de dimension q , \mathcal{H} est une sous- algèbre de Lie de \mathcal{G} de codimension q' , (e_1, \dots, e_q) est une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} telle que $(e_{q'+1}, \dots, e_q)$ soit une base de \mathcal{H} , ω est une 1-forme sur une variété M à valeurs dans \mathcal{G} , relativement à cette base, on a $\omega = \sum_{i=1}^q \omega^i \otimes e_i$ cela s'écrit aussi $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^q)$.

Si $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ et que $\omega^1, \dots, \omega^{q'}$ sont linéairement indépendantes en tout point de M alors le système différentiel $\omega^1 = \dots = \omega^{q'} = 0$ définit un feuilletage de codimension q' noté $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$.

Le feuilletage $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ ainsi défini est appelé un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage défini par la 1-forme ω .

En s'inspirant de la démonstration du théorème de relèvement d'un G -feuilletage de Lie dans ([3], [4]) , on établit la proposition qui suit:

Proposition 2.5 Soit \mathcal{F} un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage sur une variété M , définit par une 1-forme ω et soit $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^* \mathcal{F}$ le feuilletage relevé de \mathcal{F} sur le revêtement universel $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$. Alors, il existe une application différentiable $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow G$ transverse pour $\mathcal{F}_{G,H}$ (où $\mathcal{F}_{G,H}$ est le feuilletage des translatés à gauche de H) et un homomorphisme $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$ telles que:

- (i) \mathcal{D} est équivariant par ρ , et
- (ii) $\pi^* \omega = \mathcal{D}^* \theta$, i.e. $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{D}^* \mathcal{F}_{G,H}$.

On dira que \mathcal{D} est une application développante sur \widetilde{M} du $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage \mathcal{F} .

On notera que si \mathcal{F}' est un \mathcal{G} -feuilletage de Lie à feuilles denses et \mathcal{H} est une sous-algèbre de Lie alors \mathcal{F}' et $\mathcal{F}'_{\mathcal{H}}$ ont la même application développante $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow G$ et $\mathcal{D} : \widetilde{M} \rightarrow G$ est une fibration localement trivial [4]

Definition 2.6 Soit $X \in \chi(M)$ où $\chi(M)$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à la variété M et $\chi(\mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents au feuilletage \mathcal{F} .

X est dit feuilleté si et seulement si

$$\forall Y \in \chi(\mathcal{F}), [X, Y] \in \chi(\mathcal{F}) .$$

L'ensemble des champs feuilletés est noté $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$, c'est une sous-algèbre de Lie de $\chi(M)$.

$\chi(\mathcal{F})$ est un idéal de $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$. On a la suite exacte suivante:

$$0 \rightarrow \chi(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{L}(M, \mathcal{F}) \rightarrow \frac{\mathcal{L}(M, \mathcal{F})}{\chi(\mathcal{F})} \rightarrow 0.$$

Le quotient

$$\frac{\mathcal{L}(M, \mathcal{F})}{\chi(\mathcal{F})} = \ell(M, \mathcal{F})$$

est appelé l'algèbre de Lie des champs feuilletés transverses au feuilletage \mathcal{F} . On remarquera que c'est un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les sections du fibré transverse $\mathcal{V}(\mathcal{F})$.

On montre dans [6] que les propriétés suivantes sont équivalentes :

Proposition 2.7 [6]

- i) X est \mathcal{F} -feuilleté,
- ii) si $(\varphi_t^X)_{|t| < \varepsilon}$ est le groupe local à un paramètre associé à X au voisinage d'un point arbitraire de M , alors pour tout t , le difféomorphisme local φ_t^X laisse invariant \mathcal{F} ,
- iii) dans tout ouvert simple distingué, de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$, les q dernières composantes de X s'expriment comme fonction des seules variables y_1, \dots, y_q .

Proposition 2.8 [6] Dans tout ouvert simple distingué U , un champ de vecteur X est feuilleté si et seulement s'il est **projetable** en un champ de vecteurs sur la variété quotient locale \overline{U}

Definition 2.9 Soit $f \in \mathcal{A}^0(M, \mathcal{F})$ une fonction différentiable sur M .

On dit que f est basique pour le feuilletage \mathcal{F} si et seulement si

$\forall X \in \chi(\mathcal{F}), Xf$ est identiquement nulle .

L'ensemble des fonctions basiques pour le feuilletage \mathcal{F} est noté $\mathcal{A}_b^0(M, \mathcal{F})$.

On montre dans [6] que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) f est basique,
- ii) f est constante sur chaque feuille de \mathcal{F} ,
- iii) dans tout ouvert simple distingué, de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$, f s'exprime comme fonction des seules variables y_1, \dots, y_q .

Remarque 2.10 Si \mathcal{F} est un feuilletage admettant une feuille partout dense alors toute fonction basique est constante sur M i.e $\mathcal{A}_b^0(M, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}$.

Definition 2.11 Une extension d'un feuilletage (M, \mathcal{F}) de codimension q est un feuilletage (M, \mathcal{F}') de codimension q' tel que $0 < q' < q$ tel que les feuilles de (M, \mathcal{F}') sont des réunions de feuilles de (M, \mathcal{F}) (on notera $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$).

On montre que si (M, \mathcal{F}') est une extension simple d'un feuilletage simple (M, \mathcal{F}) et si (M, \mathcal{F}) et (M, \mathcal{F}') sont définis respectivement par les submersions $\pi : M \rightarrow T$ et $\pi' : M \rightarrow T'$, alors il existe une submersion $\theta : T \rightarrow T'$ telle que $\pi' = \theta \circ \pi$.

On dira que la submersion θ est une liaison entre le feuilletage (M, \mathcal{F}) et son feuilletage extension (M, \mathcal{F}') .

On montre dans [1] que si le feuilletage (M, \mathcal{F}) et son extension (M, \mathcal{F}') sont définis respectivement par les cocycles $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})_{i \in I}$ et $(U_i, f'_i, T', \gamma'_{ij})_{i \in I}$ alors on a

$$f'_i = \theta_i \circ f_i \text{ et } \gamma'_{ij} \circ \theta_j = \theta_i \circ \gamma_{ij}$$

où θ_s est une liaison entre le feuilletage (U_s, \mathcal{F}) et son feuilletage extension (U_s, \mathcal{F}') .

Proposition 2.12 Soit \mathcal{F}'' une extension d'un feuilletage riemannien \mathcal{F}' sur une variété M .

Alors $\ell(M, \mathcal{F}'') \subset \ell(M, \mathcal{F}')$.

Proposition 2.13 [1] Si \mathcal{F}' est une extension d'un feuilletage de Lie (M, \mathcal{F}) ayant ses feuilles denses d'une variété compacte connexe M , alors tout champ global \mathcal{F} -feuilleté transverse, tangent à \mathcal{F}' en un point, est tangent à \mathcal{F}' en tout point.

Dans ce qui suit nous donnons l'énoncé du théorème de correspondance biunivoque entre les sous-algèbres de Lie de $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$ et les extensions d'un \mathcal{G} -feuilletage de Lie ayant ses feuilles denses sur une variété compacte connexe se trouvant dans ([1][2]).

Theorem 2.14 ([1][2]) Soit (M, \mathcal{F}) un G -feuilletage de Lie ayant ses feuilles denses sur une variété compacte et connexe, d'algèbre de Lie structurale \mathcal{G} .

Alors:

1-Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-algèbres de Lie de $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$ (ou si l'on préfère entre les sous-groupes de Lie connexes de G) et les extensions de \mathcal{F} .

2- Une extension de \mathcal{F} est un $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$ -feuilletage transversalement riemannien à fibré normal trivial, définit par une 1-forme vectorielle à valeurs dans $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}}$.

3- Une extension de \mathcal{F} est transversalement homogène (resp. de Lie) si et seulement si le sous-groupe de Lie de G correspondant est un sous-groupe fermé (resp. un sous-groupe normal) dans G .

Nous signalons avant de continuer que les différents points de la remarque suivante sont des résultats déjà établis et qui sont importants et seront très utiles dans l'établissement du résultat principal de cet article.

Remarque 2.15 [1] (Les conséquences du théorème de correspondance biunivoque entre les sous-algèbre de Lie \mathcal{G} et les extensions d'un \mathcal{G} -feuilletage de Lie \mathcal{F} ayant ses feuilles denses sur une variété compacte)

Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ une extension d'un \mathcal{G} -feuilletage de Lie \mathcal{F} ayant ses feuilles denses sur une variété compacte connexe correspondant à la sous-algèbre de Lie \mathcal{H} de \mathcal{G} , \tilde{M} le revêtement universel de M , $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ la projection de \tilde{M} sur M , $\mathcal{D} : \tilde{M} \rightarrow G$ la développante de \mathcal{F} associé à une 1-forme de Fedida ω et α la forme de Maureur cartan de G , $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ le relevé de $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ sur \tilde{M} , U un ouvert de trivialisation local de \tilde{M} distingué à la fois pour \mathcal{F} et $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$, $f_{\mathcal{H}}$ une submersion définissant $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ sur U et \bar{U} une variété quotient locale de $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ sur U .

i) Pour $x_o \in M$ et $\pi(\tilde{x}_o) = x_o$, il existe un ouvert $\tilde{U}_{\tilde{x}_o}$ de \tilde{M} contenant \tilde{x}_o , un ouvert \bar{U}_e de G contenant l'élément neutre e de G , un voisinage U_{x_o} de x_o distingué pour \mathcal{F} et $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ et il existe une submersion riemannienne $f : U_{x_o} \rightarrow \bar{U}_e$ définissant \mathcal{F} sur U_{x_o} et une submersion riemannienne $\theta_H : \bar{U}_e \rightarrow \bar{U}$ représentant une liaison entre (U_{x_o}, \mathcal{F}) et $(U_{x_o}, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_{\tilde{x}_o} & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \bar{U}_e \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \downarrow \theta_H \\ U_{x_o} & \xrightarrow{f_{\mathcal{H}}} & \bar{U} \end{array} .$$

ii) Pour tout $X_x \in T_x U_{x_o}$,

$$\omega_x(X_x) = (L_{f(x)*})^{-1} \circ f_{*x}(X_x)$$

c'est à dire la différentielle de Darboux de f est ω .

iii) On a

$$f_{*x}(T_x \mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = L_{f(x)*}(\mathcal{H}) = T_x \mathcal{F}_{\theta}$$

pour tout $x \in U_{x_o}$ c'est à dire

$$f(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \mathcal{F}_{\bar{U}_e, H} = \mathcal{F}_{\theta_H}$$

où $\mathcal{F}_{\bar{U}_e, H}$ est la restriction à \bar{U}_e de $\mathcal{F}_{G, H}$ où $\mathcal{F}_{G, H}$ est le feuilletage des translatés à gauche de H .

iv) Soit $\tilde{\mathcal{H}}$ la sous-algèbre de Lie des champs \mathcal{F} -feuilletés transverses associée à \mathcal{H} .

$$T\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = T\mathcal{F} \oplus \tilde{\mathcal{H}}$$

et pour tout $X_x \in T_x M$,

$$X_x \in T_x \mathcal{F}_H \iff \omega_x(X_x) \in \mathcal{H}$$

de plus

$$\omega_x(T_x \mathcal{F}_H) = \mathcal{H} \text{ et } \omega_x\left((T_x \mathcal{F}_H)^\perp\right) = \mathcal{H}^\perp$$

v) \mathcal{F} étant à feuilles denses, on a pour tout champ de vecteurs X \mathcal{F} -feuilletés transverses $\omega(X)$ est une fonction constante sur M .

vi) \mathcal{F} étant à feuilles denses, on a ω est une isométrie d'algèbres de Lie de $\ell(M, \mathcal{F})$ des champs de vecteurs \mathcal{F} -feuilletés transverses sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} ce qui signifie si X et Y sont deux champs de vecteurs \mathcal{F} -feuilletés transverses alors

$$\omega([X, Y]) = [\omega(X), \omega(Y)].$$

vii) Soit $\mathcal{X}(\mathcal{F}_H)$ (resp. $\mathcal{X}(\mathcal{F})$) l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à \mathcal{F}_H (resp. \mathcal{F}), $\mathcal{A}^1(M)$ l'espace des fonctions différentiables sur M et $\tilde{\mathcal{H}}$ l'algèbre des champs de vecteurs \mathcal{F} -feuilletés transverses obtenus à partir de \mathcal{H} .

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathcal{F}_H) &= \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus \left((\mathcal{A}_b^0(M, \mathcal{F})) \otimes \tilde{\mathcal{H}} \right) \\ &= \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \tilde{\mathcal{H}}) \\ &= \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus \tilde{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_b^0(M, \mathcal{F})$ l'anneau des fonctions différentiables et \mathcal{F} -basiques.

Definition 2.16 Soient M une variété différentielle et \underline{X}_a l'ensemble des (U, X) tel que U est un ouvert de M contenant a et X un champ de vecteur sur U .

On définit sur l'ensemble \underline{X}_a une relation d'équivalence R telle que:

$(U_1, X_1) \mathcal{R} (U_2, X_2) \iff$ il existe un ouvert $\Omega \subset U_1 \cap U_2$ contenant a tel que

$$\text{pour tout } x \in \Omega, \quad X_1(x) = X_2(x)$$

La classe d'équivalence de (U_1, X_1) est noté $\overline{(U_1, X_1)}$ et on l'appelle le germe de X_1 en a .

Dans ce qui va suivre nous donnons quelques résultats sur le faisceau transverse central d'un feuilletage (M, \mathcal{F}) .

Definition 2.17 Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage, U un ouvert \mathcal{F} -distingué de M et $\overline{Z} \in \ell(U, \mathcal{F})$

On dit que \overline{Z} est un champ transverse central local dans U si pour tout $\overline{X} \in \ell(M, \mathcal{F})$ sa restriction à U commute avec \overline{Z} .

L'ensemble des germes en un point $x \in M$ des champs transverses centraux locaux est noté $\mathcal{C}_{=x}(M, \mathcal{F})$

L'ensemble

$$\mathcal{C}(M, \mathcal{F}) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}_{=x}(M, \mathcal{F})$$

est appelé faisceau transverse central du feuilletage (M, \mathcal{F}) .

On note que $\mathcal{C}_{=x}(M, \mathcal{F})$ est une algèbre de Lie dont la dimension r_x est indépendante du point x et est inférieure ou égale à $\text{codim}(\mathcal{F})$ [6]. On peut donc poser $r_x = r$.

Ceci dit si x_0 est un point quelconque de M , il existe un ouvert U contenant x_0 et r champs transverse centraux locaux $(Z_i)_{1 \leq i \leq r}$ linéairement indépendant en tout point de U tels que pour tout champ transverse central local X définit sur U il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ vérifiant $X = \alpha_1.Z_1 + \alpha_2.Z_2 + \dots + \alpha_r.Z_r$ [6].

On note aussi que si (M, \mathcal{F}) est un G -feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte connexe alors $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ est localement trivial de fibre type \mathcal{G}^- (où \mathcal{G} est l'algèbre structural de \mathcal{F} qui est l'algèbre de Lie de champs invariant à gauche) et \mathcal{G}^- est l'algèbre de Lie de champs invariant à droite associé à \mathcal{G} .

En effet soit $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé de \mathcal{F} sur le revêtement universel \tilde{M} de M , en utilisant le développement de Darboux [6] $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ de (M, \mathcal{F}) , du \mathcal{G} -feuilletage de Lie \mathcal{F} à feuilles denses sur une variété compacte connexe M on a le diagramme suivant où $\mathcal{D} : \tilde{M} \rightarrow G$ est une submersion et $p : \tilde{M} \rightarrow M$ est le revêtement universel de M :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} : & \tilde{M} & \rightarrow G \\ & p \downarrow & \\ & M & \end{array}$$

On note selon [3] que l'application développante $\mathcal{D} : \tilde{M} \rightarrow G$ est une fibration localement trivial de \tilde{M} sur G .

Ceci dit on considère pour un point $x_o \in M$ un ouvert \tilde{U} trivialisant localement à la fois pour p et \mathcal{D} vérifiant $x_o \in U = p(\tilde{U})$. Ensuite, on considère les restrictions à $\mathcal{D}(\tilde{U}) = \bar{U}$ des champs invariants à droite sur G . L'ensemble de ces champs locaux invariant à droite est une algèbre de Lie qui est isomorphe à $\mathcal{G}_{/\bar{U}}^-$ et tout champ de \mathcal{G} commute avec tout champ de $\mathcal{G}_{/\bar{U}}^-$. Comme le feuilletage $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ est simple [3] et est définit par la submersion \mathcal{D} alors $\mathcal{G}_{/\bar{U}}^-$ induit sur \tilde{U} une algèbre Lie $(\tilde{\mathcal{G}}^-)_{/\tilde{U}}$ de champs $\tilde{\mathcal{F}}$ -feuilletés transverse locaux dans \tilde{U} commutant avec les champs de vecteur $\tilde{\mathcal{F}}$ -feuilletés transverses globaux. Ainsi comme $p_{/\bar{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ est un difféomorphisme alors $p_* \left((\tilde{\mathcal{G}}^-)_{/\tilde{U}} \right) = \mathcal{G}_U^-$ est une algèbre Lie de champs \mathcal{F} -feuilletés transverse locaux de $U = p(\tilde{U})$ (isomorphe à \mathcal{G}^-) qui commute avec les champs \mathcal{F} -feuilletés globaux de M . Comme $\dim(\mathcal{G}_U^-) = \text{codim}(\mathcal{F})$ alors la fibre type de $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ est \mathcal{G}^- car la dimension de la fibre type de $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ est inférieure ou à $\text{codim}(\mathcal{F})$ [6].

On note que cette construction peut se faire au voisinage de chaque point de M .

On dira que l'ouvert U trivialisé localement $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$.

Theorem 2.18 [6] *Soit (M, \mathcal{F}) un \mathcal{G} -feuilletage de Lie à feuilles denses sur une variété compacte connexe M .*

Alors il existe un faisceau localement trivial $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ de germes de champs transverses locaux de type \mathcal{G}^- opposée à \mathcal{G} (qui s'identifie aux germes définis par l'algèbre de Lie structurale $\ell(M, \mathcal{F})$ de \mathcal{F} qui est constituée par les champs de vecteurs invariants à droite) et est tel que:

- (i) *Les orbites de $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ sont les adhérences des feuilles de (M, \mathcal{F}) .*
- (ii) *Les germes de $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ commutent avec tous les champs transverses globaux.*
- (iii) *Pour toute métrique \mathcal{F} -quasifibré transverse sur M , $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ est formé de germes de champs de killing transverses locaux.*

\mathcal{F} étant de Lie à feuilles denses, on sait que le faisceau transverse central localement trivial $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ s'identifie aux germes définis par l'algèbre de Lie structurale opposée $(\ell(M, \mathcal{F}))^- = (\tilde{\mathcal{G}})^-$ constituée par les champs de vecteurs invariants à droite $(\tilde{h})^-$ où $h \in \mathcal{G}$. Et sur un ouvert U de trivialisatation local, la restriction de $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ à U est

$$\mathcal{C}(M, \mathcal{F})|_U = U \times (\ell(M, \mathcal{F}))^-|_U = U \times (\tilde{\mathcal{G}})^-|_U$$

Et comme H est sous-groupe de Lie de G alors on peut considérer le "sous-faisceau" $\mathcal{C}_H(U, \mathcal{F}) = U \times (\tilde{\mathcal{H}})^-$ de $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$.

$\mathcal{C}_H(U, \mathcal{F})$ définit par ses orbites dans U le feuilletage $(U, \mathcal{F}_H) = \mathcal{F}_{H,U}$ qui est la restriction de \mathcal{F} à l'ouvert U . En supposant en plus que l'ouvert U est \mathcal{F}_H -distingué on peut regarder les feuilles de $\mathcal{F}_{H,U}$ comme les orbites du "sous-faisceau" $\mathcal{C}_H(U, \mathcal{F}) = U \times (\tilde{\mathcal{H}})^-|_U$. Ce qui signifie que translement à \mathcal{F} les feuilles de (U, \mathcal{F}_H) sont définies les orbites de la sous-algèbre de $(\tilde{\mathcal{H}})^-|_U$ qui est la restriction à U de la sous-algèbre Lie $(\tilde{\mathcal{H}})^-$ des champs invariants à droite tangents au sous groupe de Lie H de G où $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$. Ainsi

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}_H)|_U = \mathcal{X}(\mathcal{F})|_U \oplus (\tilde{\mathcal{H}})^-|_U \quad (*)$$

3 Résultat principal

On commence ce paragraphe par établir la proposition suivante qui sera utile dans le calcul de $\ell(M, \mathcal{F}_H)$.

Proposition 3.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne de métrique g , $\tilde{\mathcal{H}}$ une algèbre de Lie de champs de killing vectors sur M et $\tilde{\mathcal{H}}^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous vecteurs de $\tilde{\mathcal{H}}$.*

Alors pour tout champ de vecteurs $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}$ et tout champ de vecteurs $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$

$$[\tilde{h}, \tilde{u}] \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$$

Preuve. Soient $(\tilde{h}, \tilde{h}') \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}$ et $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp$.

Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{h}' \cdot g(\tilde{u}, \tilde{h}) \\ &= g([\tilde{h}', \tilde{u}], \tilde{h}) + g(\tilde{u}, [\tilde{h}', \tilde{h}]) \quad \text{car } \tilde{h}' \text{ est un champ de killing} \\ &= g([\tilde{h}', \tilde{u}], \tilde{h}) + 0 \quad \text{car } [\tilde{h}', \tilde{h}] \in \tilde{\mathcal{H}} \text{ et } \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp \\ &= g([\tilde{h}', \tilde{u}], \tilde{h}) \end{aligned}$$

L'égalité

$$g([\tilde{h}', \tilde{u}], \tilde{h}) = 0 \quad \text{pour tout } (\tilde{h}, \tilde{h}', \tilde{u}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^\perp$$

implique que

$$[\tilde{h}', \tilde{u}] \in \tilde{\mathcal{H}}^\perp \quad \text{pour tout } (\tilde{h}', \tilde{u}) \in \tilde{\mathcal{H}} \times \tilde{\mathcal{H}}^\perp$$

■

Le théorème suivant et le résultat principal de cet article

Theorem 3.2 *Soit (M, \mathcal{F}) un \mathcal{G} -feuilletage Lie à feuilles denses sur une variété compacte connexe M , \mathcal{H} une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} , $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ l'extension de \mathcal{F} correspondant à \mathcal{H} , ω une 1-forme de Fedida de (M, \mathcal{F}) et \tilde{u} le champ \mathcal{F} -feuilleté transverse associé au vecteur $u \in \mathcal{G}$.*

Alors:

$$\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \{\tilde{u} / u \in \mathcal{H}^\perp \text{ et } [u, h] = 0 \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}$$

.

Preuve. i) Montrons d'abord que

$$\omega(\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})) \subset \{u \in \mathcal{H}^\perp / [u, h] = 0 \text{ for every } h \in \mathcal{H}\}.$$

Notant tout $\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}}) \subset \ell(M, \mathcal{F})$ car $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ (cf. proposition 2.12). D'où la recherche de éléments de $\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ se fait dans $\ell(M, \mathcal{F})$.

Notons aussi que le feuilletage \mathcal{F} étant de Lie à feuilles denses alors pour tout $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \widetilde{\ell(M, \mathcal{F})} \times \ell(M, \mathcal{F})$ la fonction $\omega([\tilde{u}, \tilde{v}])$ est une fonction constante car $[\tilde{u}, \tilde{v}] = [\tilde{u}, v] \in \ell(M, \mathcal{F})$ (cf. remarque 2.14 v). D'où le calcul de $\omega([\tilde{u}, \tilde{v}])$ revient à calculer $\omega([\tilde{u}, \tilde{v}]_U)$ où U est un ouvert $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ -distingué et trivialisant localement le faisceau localement trivial $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ constitué de germes de champs transverses locaux de type \mathcal{G}^- .

Ceci dit le calcul de $\omega([\tilde{u}, \tilde{v}])$ (ou bien la recherche de $\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$) est un problème local et toute la recherche se fera sur un ouvert U $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ -distingué et trivialisant localement le faisceau localement trivial $\mathcal{C}(M, \mathcal{F})$ ments de $(\tilde{\mathcal{G}})_{/U}^-$

Montrons maintenant que

$$\omega(\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})) \subset \{u \in \mathcal{H}^\perp / [u, h] = 0 \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}.$$

D'après l'égalité (*) :

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})_{/U} = \mathcal{X}(U) \oplus (\tilde{\mathcal{H}})_{/U}^-$$

on a

$$(T(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})_{/U})^\perp = \left((\tilde{\mathcal{H}})_{/U}^- \right)^\perp = \left((\tilde{\mathcal{H}})^\perp \right)_{/U}^-.$$

Soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ et $Y \in \ell(M, \mathcal{F})$.

Si $Y \in \ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ alors $[X, Y] \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$. De plus $[X, Y]$ étant un champ de vecteur global sur M on a si $[X, Y] \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ alors $[X, Y]_{/U} \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})_{/U}$.

Ceci dit comme $[X, Y]_{/U} = [X_{/U}, Y_{/U}]$,

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})_{/U} = \mathcal{X}(\mathcal{F})_{/U} \oplus (\tilde{\mathcal{H}})_{/U}^-$$

et

$$(T(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})_{/U})^\perp = \left((\tilde{\mathcal{H}})_{/U}^- \right)^\perp = \left((\tilde{\mathcal{H}})^\perp \right)_{/U}^-.$$

alors il existe $(X_{\mathcal{F}})_{/U} \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})_{/U}$, $(\tilde{h})_{/U}^- \in (\tilde{\mathcal{H}})_{/U}^-$ et $(\tilde{k})_{/U}^- \in \left((\tilde{\mathcal{H}})^\perp \right)_{/U}^-$

tel que $X_{/U} = (X_{\mathcal{F}})_{/U} + (\tilde{h})_{/U}^-$, $Y_{/U} = (\tilde{k})_{/U}^-$ et

$$\begin{aligned} [X_{/U}, Y_{/U}] &= \left[(X_{\mathcal{F}})_{/U}, (\tilde{k})_{/U}^- \right] + \left[(\tilde{h})_{/U}^-, (\tilde{k})_{/U}^- \right] \\ &= \left[(X_{\mathcal{F}})_{/U}, (\tilde{k})_{/U}^- \right] + \left[(\tilde{h})_{/U}^-, (\tilde{k})_{/U}^- \right]_{/U} \\ &= \left[(X_{\mathcal{F}})_{/U}, (\tilde{k})_{/U}^- \right] - \widetilde{[h, k]}_{/U}^- \end{aligned}$$

On remarque que $\left[(X_{\mathcal{F}})_{/U}, (\tilde{k})_{/U}^- \right] \in \mathcal{X}(\mathcal{F})_{/U} \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ car $(\tilde{k})_{/U}^-$ est $\mathcal{F}_{/U}$ -feuilleté. On remarque aussi que les champs de vecteurs $(\tilde{h})_{/U}^-$, $(\tilde{k})_{/U}^-$ sont des champs de Killing locaux d'où d'après la proposition.3.1 on a:

$$\left[(\tilde{h})_{/U}^-, (\tilde{k})_{/U}^- \right] \in \left((\tilde{\mathcal{H}})^\perp \right)_{/U}^-.$$

Ainsi on a les égalités

$$\left[\left(\widetilde{h} \right)_{/U}^-, \left(\widetilde{k} \right)_{/U}^- \right] = \left[\left(\widetilde{h} \right)^-, \left(\widetilde{k} \right)^- \right]_{/U} = -\widetilde{[h, k]}_{/U}^-$$

montrent que

$$\widetilde{[h, k]}_{/U}^- \in \left(\left(\widetilde{\mathcal{H}} \right)^\perp \right)_{/U}^- . \quad (**)$$

En plus le fait que $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ et $Y \in \ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ entraîne $[X_{/U}, Y_{/U}] \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ ce entraîne encore

$$\left[(X_{\mathcal{F}})_{/U}, \left(\widetilde{k} \right)_{/U}^- \right] - \widetilde{[h, k]}_{/U}^- \in \mathcal{X}(\mathcal{F})_{/U} \oplus \left(\widetilde{\mathcal{H}} \right)_{/U}^-$$

ce qui montre que

$$\widetilde{[h, k]}_{/U}^- \in \left(\widetilde{\mathcal{H}} \right)_{/U}^- \quad (***)$$

Il résulte de (**) et (***) que $\widetilde{[h, k]}_{/U} \in \left(\widetilde{\mathcal{H}} \right)_{/U}^\perp$ et $\widetilde{[h, k]}_{/U} \in \left(\widetilde{\mathcal{H}} \right)_{/U}$. Ainsi

$$\widetilde{[h, k]}_{/U} = 0$$

Comme

$$[h, k] = \omega \left(\widetilde{[h, k]} \right) = \omega \left(\widetilde{[h, k]} \right)_{/U} = \omega \left(\widetilde{[h, k]}_{/U} \right) = 0$$

alors

$$[h, k] = 0.$$

Ce qui précède montre que

$$\omega(\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})) \subset \{u \in \mathcal{H}^\perp / [u, h] = 0 \text{ for every } h \in \mathcal{H}\}.$$

2) Montrons maintenant que

$$\{u \in \mathcal{H}^\perp / [u, h] = 0 \text{ for every } h \in \mathcal{H}\} \subset \omega(\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}}))$$

Soit $u \in \mathcal{H}^\perp$ tel que $[u, h] = 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ et soit $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$.

Notons avant tout que le champ de vecteur \mathcal{F} -feuillé transverse \widetilde{u} associé à u vérifie $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathcal{H}}^\perp$ et $\widetilde{u} \perp \mathcal{X}(\mathcal{F})$ d'où

$$\widetilde{u} \in \left(\mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus \widetilde{\mathcal{H}} \right)^\perp = \left(\mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) \right)^\perp$$

Comme $\mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus \widetilde{\mathcal{H}}$ alors il existe $X_{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ et $\widetilde{h} \in \widetilde{\mathcal{H}}$ tel que $X = X_{\mathcal{F}} + \widetilde{h}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} [\widetilde{u}, X] &= [\widetilde{u}, X_{\mathcal{F}}] + [\widetilde{u}, \widetilde{h}] \\ &= [\widetilde{u}, X_{\mathcal{F}}] + \widetilde{[u, h]} \\ &= [\widetilde{u}, X_{\mathcal{F}}] \quad \text{car } [u, h] = 0 \end{aligned}$$

Le fait que $\tilde{u} \in \ell(M, \mathcal{F})$ implique $[\tilde{u}, X_{\mathcal{F}}] \in \mathcal{X}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$. Ainsi l'égalité $[\tilde{u}, X] = [\tilde{u}, X_{\mathcal{F}}] \in \mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ et le fait $\tilde{u} \in \left(\mathcal{X}(\mathcal{F}) \oplus \tilde{\mathcal{H}}\right)^{\perp} = (\mathcal{X}(\mathcal{F}_{\mathcal{H}}))^{\perp}$ montre que $\tilde{u} \in \ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})$ ce qui signifie que $u \in \omega(\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}}))$. Ainsi

$$\{u \in \mathcal{H}^{\perp} / [u, h] = 0 \text{ for every } h \in \mathcal{H}\} \subset \omega(\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}}))$$

En conclusion de 1) et 2) on peut affirmer que

$$\omega(\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}})) = \{u \in \mathcal{H}^{\perp} / [u, h] = 0 \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}.$$

Ce qui signifie que

$$\ell(M, \mathcal{F}_{\mathcal{H}}) = \{\tilde{u} / u \in \mathcal{H}^{\perp} \text{ et } [u, h] = 0 \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}\}$$

où \tilde{u} est le champ \mathcal{F} -feuilleté transverse associé au vecteur $u \in \mathcal{G}$. ■

References

- [1] **C.Dadi, 2008.** “*Sur les extensions des feuilletages*”. Thèse unique, Université de Cocody, Abidjan.
- [2] **C.Dadi et H.Diallo, 2007.** “*Extension d'un feuilletage de Lie minimal d'une variété compacte*”. Afrika Matematika, Série 3, volume 18 pp 34-45.
- [3] **E.Fédida, 1973.** *Feuilletages du plan - Feuilletages de Lie*. Thèse d'Etat, Strasbourg .
- [4] **E.Fédida, 1974.** “*Sur l'existence des Feuilletages de Lie*”. CRAS de Paris, 278, 835-837.
- [5] **C.Godbillon, 1985.** “*Feuilletage; Etude géométriques I*”. Publ, IRMA, Strasbourg .
- [6] **P.Molino, 1988.** “*Riemannian foliations*”. Birkhäuser
- [7] **B.Reinhart, 1959.** “*Foliated manifold with bundle-like metrics*”, Ann. of Math. 69 119-132.1