HAL open science

Les séries congruo-harmoniques alternées - Partie 1 - Somme et restes partiels

David Pouvreau

To cite this version:

David Pouvreau. Les séries congruo-harmoniques alternées - Partie 1 - Somme et restes partiels. Quadrature, 2022, 123. hal-03622997

HAL Id: hal-03622997

https://hal.science/hal-03622997

Submitted on 29 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Les séries congruo-harmoniques alternées
Partie 1 – Somme et restes partiels

par David Pouvreau[1]

1. Introduction

Pour tout couple fixé $(p; q)$ d'entiers naturels non nuls, la série de terme général $\frac{(-1)^k}{pk+q}$ est convergente. Elle satisfait en effet le critère spécial de convergence des séries alternées, la suite $\left(\frac{1}{pk+q}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et de limite 0. Nous noterons $S_{p,q}$ la somme de cette série :

$$S_{p,q} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk+q}.$$

Lorsqu'on somme de manière alternée les inverses de *tous* les entiers naturels non nuls, on obtient le cas particulier de la série dite « harmonique alternée », cas important qui correspond à $(p; q) = (1; 1)$ et que l'on retrouve impliqué même hors du champ des mathématiques pures, notamment en physique de la matière condensée dans les calculs de cohésion de réseaux ioniques (Asangul 2006, p. 163). On considère plus généralement ici la somme alternée des inverses des entiers naturels supérieurs ou égaux à q qui sont congrus à q modulo p. Nous l'appellerons la « série congruo-harmonique alternée (CHA) de paramètres $(p; q)$ ».

Cette première partie d'article expose le calcul général et explicite des sommes $S_{p,q}$, ainsi que leur représentation graphique. Le lien entre la sous-famille $\left(S_{p,1}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ et la fonction digamma ψ, ainsi que celui plus général entre la famille de sommes $\left(S_{p,q}\right)_{(p;q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ et la fonction Φ d'Hurwitz-Lerch y seront également évoqués. Sera enfin démontré un développement en fraction continue généralisée de chaque reste partiel de toute série CHA.

La seconde partie, publiée dans le numéro 124 de *Quadrature*, étudiera le problème de l'accélération de la convergence de ces séries, posé par l'extrême lenteur de cette convergence. Plusieurs algorithmes d'accélération fondés sur le développement en fraction continue des restes partiels seront alors présentés, et leurs performances étudiées de manière précise.

2. Identité de la somme de la série à une intégrale

On peut écrire, pour tout $x \in [0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ fixés :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(-x^{\frac{p}{q}}\right)^k = \frac{1-\left(-x^{\frac{p}{q}}\right)^{n+1}}{1-\left(-x^{\frac{p}{q}}\right)} = \frac{1}{1+x^{\frac{p}{q}}} + (-1)^n \frac{x^{(n+1)\frac{p}{q}}}{1+x^{\frac{p}{q}}}.$$

De cette identité se déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k\frac{p}{q}} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{\frac{p}{q}}} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\frac{p}{q}}}{1+x^{\frac{p}{q}}} dx$$

[1] Professeur agrégé de mathématiques en CPGE au Lycée Roland Garros, Le Tampon, La Réunion. IREM de La Réunion. Email : pvrdvd@gmail.com.

D'où résulte :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{pk+q}=\frac{1}{q}\int_0^1\frac{1}{1+x^{\frac{p}{q}}}dx+(-1)^n{R_{p,q}}^{(n)}\,,\quad \text{où}\quad {R_{p,q}}^{(n)}=\frac{1}{q}\int_0^1\frac{x^{(n+1)\frac{p}{q}}}{1+x^{\frac{p}{q}}}dx$$

Or, on a clairement $\lim\limits_{n\to+\infty}{R_{p,q}}^{(n)}=0$ puisque :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad 0<{R_{p,q}}^{(n)}<\frac{1}{q}\int_0^1 x^{(n+1)\frac{p}{q}}dx=\frac{1}{q}\frac{1}{(n+1)\frac{p}{q}+1}$$

Par conséquent, on obtient finalement en utilisant aussi le changement de variable $t=x^{\frac{1}{q}}$:

Théorème 1

$$\forall\,(p;q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\quad S_{p,q}=\int_0^1\frac{t^{q-1}}{1+t^p}dt$$

3. Calcul explicite de la somme par celui de l'intégrale

Théorème 2

Pour tout $(p;q)\in(\mathbb{N}^*)^2$:

(i) Si $p=q$, $S_{p,q}=\dfrac{\ln(2)}{p}$.

(ii) Si $q>p$ et $q\equiv 0\ [p]$, alors $S_{p,q}=\dfrac{(-1)^{m-1}}{p}\left(\ln(2)-\displaystyle\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\right)$ où $m=\dfrac{q}{p}$.

(iii) Si $p\geq 2$ et $q\in[\![1;p-1]\!]$, alors

$$S_{p,q}=\frac{\pi}{p^2}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}(p-1-2j)\sin\left((2j+1)\frac{q}{p}\pi\right)-\frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\cos\left((2j+1)\frac{q}{p}\pi\right)\ln\left(\sin\left((2j+1)\frac{\pi}{2p}\right)\right)$$

$$=\frac{\pi}{2p\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)}-\frac{2}{p}\sum_{j=1}^{p-1}\sin\left(j\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(j\frac{\pi}{2}+j\frac{q}{p}\pi\right)\ln\left(\sin\left(j\frac{\pi}{2p}\right)\right)$$

(iv) Si $q>p\geq 2$ et $q\not\equiv 0\ [p]$, alors, χ désignant le quotient et r le reste de la division euclidienne de q par p :

$$S_{p,q}=(-1)^{\chi}\left(S_{p,r}-\sum_{\ell=0}^{\chi-1}\frac{(-1)^{\ell}}{p\ell+r}\right)\quad\text{où } S_{p,r}\text{ se calcule par la formule du (iii).}$$

D'une manière plus unifiée, en notant $q=ap+b$ avec $a\in\mathbb{N}$ et $1\leq b\leq p$, on obtient :

$$(-1)^aS_{p,q}=\frac{(-1)^{p+b}-(-1)^b}{2p}\ln(2)$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\left((-1)^k-1\right)\left(\cos\left(k\frac{b}{p}\pi\right)\ln\left(2\sin\left(k\frac{\pi}{2p}\right)\right)-\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{k}{p}\right)\sin\left(k\frac{b}{p}\pi\right)\right)-\sum_{\ell=0}^{a-1}\frac{(-1)^{\ell}}{p\ell+b}$$

(avec la convention usuelle de poser la première somme égale à 0 si $p=1$ et la dernière somme égale à 0 si $a=0$).

Les deux premiers résultats sont relativement faciles à établir. Le troisième est nettement plus épineux et, une fois ce dernier obtenu, le quatrième se démontre sans difficulté. Quant à la formule unifiée, elle découle d'une variante du calcul qui suit, très similaire mais avec une sophistication supplémentaire qui permet d'aboutir à cette unité tout en présentant l'inconvénient d'une moindre concision. Les grandes lignes en sont fournies en annexe 2.

<u>Cas 1</u> : $q = p$

Dans ce cas, on obtient effectivement :

$$S_{p,q} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \frac{\ln(2)}{p}$$

<u>Cas 2</u> : $q > p$ avec $q \equiv 0\ [p]$

Alors il existe $m \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ tel que $q = mp$ et on obtient bien :

$$S_{p,q} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+m} = \frac{1}{p}\sum_{\ell=m}^{+\infty}\frac{(-1)^{\ell-m}}{\ell} = \frac{1}{p}\left(\sum_{\ell=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\ell-m}}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{m-1}\frac{(-1)^{\ell-m}}{\ell}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{p}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j+1} - \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\right) = \frac{(-1)^{m-1}}{p}\left(\ln(2) - \sum_{j=1}^{m-1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\right)$$

<u>Cas 3</u> : $p \geq 2$ et $q \in [\![1; p-1]\!]$

Commençons par chercher les pôles de la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X^{q-1}}{X^p+1}$. Il s'agira ensuite de les utiliser afin d'en déduire les décompositions de $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, puis dans $\mathbb{R}(X)$. Cette décomposition est nécessaire pour le calcul explicite de l'intégrale.

Soient $E\left(\frac{p}{2}\right)$ la partie entière de $p/2$ et $\omega_p = e^{i\frac{2\pi}{p}}$. Les pôles de $F(X)$ sont les racines p-ièmes de -1. Si $p \geq 3$ est impair, leur ensemble s'écrit $\{-1\} \cup \left\{e^{i\frac{\pi}{p}}{\omega_p}^j\ ; j \in \left[\!\left[0; E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right]\!\right]\right\} \cup \left\{e^{-i\frac{\pi}{p}}\overline{\omega_p}^j\ ; j \in \left[\!\left[0; E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right]\!\right]\right\}$. Si $p \geq 2$ est pair, cet ensemble est $\left\{e^{i\frac{\pi}{p}}{\omega_p}^j\ ; j \in \left[\!\left[0; E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right]\!\right]\right\} \cup \left\{e^{-i\frac{\pi}{p}}\overline{\omega_p}^j\ ; j \in \left[\!\left[0; E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right]\!\right]\right\}$. La décomposition de $F(X)$ dans $\mathbb{C}(X)$ s'en déduit, par application de résultats bien connus concernant la partie polaire associée à un pôle simple :

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{\beta_0}{X+1} + \sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\left(\frac{\alpha_j}{X - e^{i\frac{\pi}{p}}{\omega_p}^j} + \frac{\overline{\alpha_j}}{X - e^{-i\frac{\pi}{p}}\overline{{\omega_p}^j}}\right) \quad \text{où } \beta_0 = \frac{(-1)^{q-1}}{p(-1)^{p-1}} = \frac{(-1)^{p-q}}{p}$$

$$\text{et : } \forall j \in \left[\!\left[0; E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right]\!\right],\ \alpha_j = \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{p}}{\omega_p}^j\right)^{q-1}}{p\left(e^{i\frac{\pi}{p}}{\omega_p}^j\right)^{p-1}} = \frac{1}{p}{\omega_p}^{(q-p)j}e^{i\frac{\pi}{p}(q-p)} = -\frac{1}{p}e^{i\left(\frac{q}{p}\pi+2j\frac{q}{p}\pi\right)} = -\frac{1}{p}e^{iq\theta_{j,p}}$$

où $\theta_{j,p} = (2j+1)\frac{\pi}{p}$. En résulte la décomposition cherchée dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{p-q}}{p}\frac{1}{X+1} + \sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\frac{(\alpha_j+\overline{\alpha_j})X - \left(\alpha_j e^{-i\frac{\pi}{p}}\overline{{\omega_p}^j} + \overline{\alpha_j}e^{i\frac{\pi}{p}}{\omega_p}^j\right)}{X^2 - \left(e^{-i\frac{\pi}{p}}\overline{{\omega_p}^j} + e^{i\frac{\pi}{p}}{\omega_p}^j\right)X + \left|e^{i\frac{\pi}{p}}{\omega_p}^j\right|^2}$$

$$= \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{p-q}}{p}\frac{1}{X+1} + \sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \frac{2\mathrm{Re}(\alpha_j)X - 2\mathrm{Re}\left(\alpha_j e^{-i\frac{\pi}{p}}\overline{\omega_p{}^j}\right)}{X^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{p}}\omega_p{}^j\right)X+1}$$

$$= \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{p-q}}{p}\frac{1}{X+1} - \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \frac{2\cos\left(q\theta_{j,p}\right)X - 2\cos\left((q-1)\theta_{j,p}\right)}{X^2 - 2\cos\left(\theta_{j,p}\right)X+1}.$$

Le calcul de l'intégrale consiste alors à se laisser guider sur cette base par quelques formules classiques de primitives afin d'effectuer des transformations utiles, puis un changement de variable adéquat. L'utilisation de plusieurs propriétés de la fonction arctangente permet alors d'aboutir à l'explicitation voulue. On observe ainsi que pour tout $j \in \left[\!\left[0; E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right]\!\right]$:

$$\int_0^1 \frac{2t\cos\left(q\theta_{j,p}\right) - 2\cos\left((q-1)\theta_{j,p}\right)}{t^2 - 2t\cos\left(\theta_{j,p}\right)+1}dt$$

$$= \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\int_0^1 \frac{\left(2t - 2\cos\left(\theta_{j,p}\right)\right)}{t^2 - 2t\cos\left(\theta_{j,p}\right)+1}dt + \int_0^1 \frac{2\cos\left(q\theta_{j,p}\right)\cos\left(q\theta_{j,p}\right) - 2\cos\left((q-1)\theta_{j,p}\right)}{t^2 - 2t\cos\left(\theta_{j,p}\right)+1}dt$$

$$= \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\left[\ln\left(t^2 - 2\cos\left(\theta_{j,p}\right)t+1\right)\right]_0^1$$
$$+\left(\cos\left((q+1)\theta_{j,p}\right) - \cos\left((q-1)\theta_{j,p}\right)\right)\int_0^1 \frac{1}{\left(t-\cos\left(\theta_{j,p}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\theta_{j,p}\right)}dt$$

$$= \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\left(1-\cos\left(\theta_{j,p}\right)\right)\right) - 2\frac{\sin\left(q\theta_{j,p}\right)\sin\left(\theta_{j,p}\right)}{\sin^2\left(\theta_{j,p}\right)}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{t-\cos\left(\theta_{j,p}\right)}{\sin\left(\theta_{j,p}\right)}\right)^2}dt$$

$$= \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\left(1-\cos\left(\theta_{j,p}\right)\right)\right) - 2\frac{\sin\left(q\theta_{j,p}\right)}{\sin\left(\theta_{j,p}\right)}\sin\left(\theta_{j,p}\right)\int_a^b \frac{1}{1+u^2}du$$

$$\text{où } a = -\frac{1}{\tan\left(\theta_{j,p}\right)} \text{ et } b = \tan\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)$$

$$= \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\times 2\sin^2\left(\theta_{j,p}\right)\right) - 2\sin\left(q\theta_{j,p}\right)\left[\arctan(b) + \arctan(-a)\right]$$

$$= \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(\left(2\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right)^2\right) - 2\sin\left(q\theta_{j,p}\right)\left(\frac{\theta_{j,p}}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{-a}\right)\right)$$

$$= 2\cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\left|\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right|\right) - 2\sin\left(q\theta_{j,p}\right)\left(\frac{\theta_{j,p}}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta_{j,p}\right)$$

$$= 2\cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{p}(p-1-2j)\sin\left(q\theta_{j,p}\right).$$

S'en déduit alors l'identité (1) :

$$S_{p,q} = \frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{p-q}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{p^2}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}(p-1-2j)\sin\left(q\theta_{j,p}\right).$$

Transformons maintenant le résultat ainsi obtenu afin d'aboutir à la première formulation du (iii). On peut à cette fin commencer par établir :

<u>Lemme 1</u>

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \dfrac{(-1)^{q+1}}{2} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$$

Notons : $\alpha = \displaystyle\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} e^{iq\theta_{j,p}}$. On a :

$$\alpha = \sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} e^{iq(2j+1)\frac{\pi}{p}} = e^{i\frac{q}{p}\pi} \sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \left(e^{i\frac{q}{p}2\pi}\right)^j = e^{i\frac{q}{p}\pi} \frac{1-\left(e^{i\frac{q}{p}2\pi}\right)^{E\left(\frac{p}{2}\right)}}{1-e^{i\frac{q}{p}2\pi}}$$

$$= e^{i\frac{q}{p}\pi} \frac{e^{i\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi}\left(e^{-i\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi} - e^{i\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi}\right)}{e^{i\frac{q}{p}\pi}\left(e^{-i\frac{q}{p}\pi} - e^{i\frac{q}{p}\pi}\right)} = e^{i\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi} \frac{-2i\sin\left(\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi\right)}{-2i\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} = \frac{\sin\left(\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi\right)}{\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} e^{i\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi}.$$

D'où :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right) = \mathrm{Re}(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi\right)}{\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} \cos\left(\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{2q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi\right)}{2\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)}.$$

Si p est pair, on obtient bien :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2q}{p}\frac{p}{2}\pi\right)}{2\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} = 0.$$

Et si p est impair, de la forme $2r+1$ où $r \in \mathbb{N}^*$ on obtient bien aussi :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2r}{2r+1}q\pi\right)}{2\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} = \frac{\sin\left(q\pi - \frac{1}{2r+1}q\pi\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2r+1}q\pi\right)} = \frac{(-1)^q}{2}\frac{\sin\left(-\frac{1}{2r+1}q\pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2r+1}q\pi\right)} = \frac{(-1)^{q+1}}{2}.$$

Ce premier lemme permet déjà de simplifier significativement l'identité (1). En l'utilisant, on obtient en effet que si p est pair, alors :

$$\frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{p-q}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right)$$

$$= 0\ln(2) - \frac{2}{p}\ln(2)\times 0 - \frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right) = -\frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right).$$

Et que si p est impair, alors aussi bien :

$$\frac{1-(-1)^p}{2}\frac{(-1)^{p-q}}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1-(-1)}{2}\frac{-(-1)^q}{p}\ln(2) - \frac{2}{p}\ln(2)\frac{(-1)^{q+1}}{2} - \frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{\ln(2)}{p}\left((-1)^q + (-1)^{q+1}\right) - \frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right) = -\frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right).$$

On en déduit dans tous les cas la première identité annoncée au (iii) :

$$S_{p,q} = \frac{\pi}{p^2}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} (p-1-2j)\sin\left(q\theta_{j,p}\right) - \frac{2}{p}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(q\theta_{j,p}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{\theta_{j,p}}{2}\right)\right).$$

Poursuivons alors la transformation afin d'aboutir à la seconde identité annoncée au (iii). On peut commencer par obtenir la seconde somme formelle apparaissant dans cette identité par :

$$\sum_{k=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left((2k+1)\frac{q}{p}\pi\right)\ln\left(\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2p}\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p-1}\left(\cos\left(j\frac{q}{p}\pi\right) - (-1)^j\cos\left(j\frac{\pi}{p}\right)\right)\ln\left(\sin\left(j\frac{\pi}{2p}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p-1}\left(\cos\left(j\frac{q}{p}\pi\right) - \cos\left(j\frac{q}{p}\pi + j\pi\right)\right)\ln\left(\sin\left(\frac{j}{p}\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sum_{j=1}^{p-1}\sin\left(j\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(j\frac{\pi}{2} + j\frac{q}{p}\pi\right)\ln\left(\sin\left(j\frac{\pi}{2p}\right)\right).$$

La première somme de la seconde identité du (iii) peut quant à elle être démontrée de deux manières qui aboutissent à l'identité, dont (iii) découle ensuite immédiatement :

$$\forall\, q \in [\![1; p-1]\!],\ \sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} (p-1-2j)\sin\left(q\theta_{j,p}\right) = \frac{p}{2\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} \qquad (2).$$

Le détail de ces preuves est renvoyé en annexe 1. La première consiste à observer que :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} (p-1-2j)\sin\left(q\theta_{j,p}\right) = (p-1)g\left(\frac{q}{p}2\pi\right) - 2f'\left(\frac{q}{p}2\pi\right)$$

où f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} e^{i\left(jx+\frac{q}{p}\pi\right)}\right)$ et $g(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} e^{i\left(jx+\frac{q}{p}\pi\right)}\right)$.

L'explicitation de $\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} e^{i\left(jx+\frac{q}{p}\pi\right)}$ par la même voie qu'au lemme 1 permet alors d'en déduire celles de $f(x)$ et de $g(x)$, dont découle finalement l'identité (2) au moyen de formules trigonométriques classiques. La seconde démonstration, légèrement plus courte, repose quant à elle à la fois sur le lemme 1 et sur un second lemme très efficace :

<u>Lemme 2</u>

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(2(j+1)\frac{q}{p}\pi\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^q - 1}{2} & \text{si } p \text{ est pair} \\ -1/2 & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}.$$

Il s'agit alors d'établir que des deux lemmes et de formules trigonométriques classiques découle la possibilité d'utiliser un principe de sommation quasi-télescopique, puis de conclure à l'identité (2) au moyen d'une discussion selon la parité de p.

<u>Cas 4</u> : $q > p \geq 2$, avec $q \not\equiv 0 \quad [p]$

Notons dans ce cas r le reste de la division euclidienne de q par p : cette division de quotient noté χ s'écrit $q = p\chi + r$, avec $r \in [\![1; p-1]\!]$. On obtient le résultat annoncé par :

$$S_{p,q} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{p(k+\chi)+r} = \sum_{\ell=\chi}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell-\chi}}{p\ell+r} = (-1)^{\chi} \sum_{\ell=\chi}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{p\ell+r} = (-1)^{\chi}\left(S_{p,r} - \sum_{\ell=0}^{\chi-1} \frac{(-1)^{\ell}}{p\ell+r}\right).$$

4. Cas particuliers remarquables et observations complémentaires

La sous-famille $\left(S_{p,1}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de la famille $\left(S_{p,q}\right)_{(p;q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est intéressante. On retrouve immédiatement $S_{1,1} = \ln(2)$ et on obtient plus généralement avec le théorème 2 que :

$$\forall\, p \geq 2,\ \ S_{p,1} = \frac{\pi}{2p\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} - \frac{2}{p}\sum_{j=1}^{p-1} \sin\left(j\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(j\frac{\pi}{2}+\frac{j}{p}\pi\right)\ln\left(\sin\left(\frac{j}{p}\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

On retrouve avec ce résultat les deux autres cas particuliers classiques :

$$S_{2,1} = \frac{\pi}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi)\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$S_{3,1} = \frac{\pi}{6\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} - \frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Les éléments de la sous-famille $\left(S_{p,1}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont en fait liés à la fonction digamma ψ, dérivée logarithmique de la fonction Γ d'Euler étendue comme suit à une moitié du plan complexe :

$$\Gamma : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C}\backslash\{z\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Re}(z)\leq 0\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \psi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C}\backslash\{z\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Re}(z)\leq 0\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \dfrac{1}{\Gamma(z)}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\ln(t)\,e^{-t}dt \end{array}\right.$$

(où Γ' désigne la dérivée de Γ au sens généralisé de la dérivation des fonctions méromorphes).
Un théorème publié en 1812 par Gauss énonce que pour tous $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $m \in [\![1; n-1]\!]$:

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right) = -\gamma - \ln(2n) - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\tan\left(\frac{m}{n}\pi\right)} + 2\sum_{j=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cos\left(2\pi j\frac{m}{n}\right)\ln\left(\sin\left(\pi\frac{j}{n}\right)\right) \quad \text{où } \gamma \text{ est la constante d'Euler.}$$

En combinant ce théorème et l'expression de $S_{p,1}$ obtenue plus haut, on retrouve facilement une autre formulation déjà connue de $S_{p,1}$ que l'on peut d'ailleurs déduire d'une propriété générale de ψ (voir Erdélyi A. & al. (1981), Weisstein (2021)) :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \ S_{p,1} = \frac{1}{2p}\left(\psi\left(\frac{p+1}{2p}\right) - \psi\left(\frac{1}{2p}\right)\right).$$

Par ailleurs, il apparaît plus profondément encore que tous les éléments de la sous-famille $\left(S_{p,1}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont étroitement liés à la fonction transcendante Φ de Hurwitz-Lerch, définie par :

$$\Phi(z;s;a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(a+k)^s} \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{C} \text{ tel que } 1-a \notin \mathbb{N}, \text{tout } s \in \mathbb{C} \text{ et tout } z \text{ tel que } |z| < 1.$$

Il est en effet clair que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \ S_{p,1} = \frac{1}{p}\Phi\left(-1;1;\frac{1}{p}\right).$$

Cette identité peut d'ailleurs s'observer d'une autre manière en utilisant le fait qu'on dispose aussi pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive de la représentation intégrale générale :

$$\Phi(z;s;a) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-ze^{-x}}\,dx$$

(Ferreira & Lopez (2004)). De cette représentation résulte en effet immédiatement en particulier :

$$\frac{1}{p}\Phi\left(-1;1;\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{p}x}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

Et il suffit alors d'effectuer le changement de variable $t = e^{-\frac{1}{p}x}$ pour obtenir :

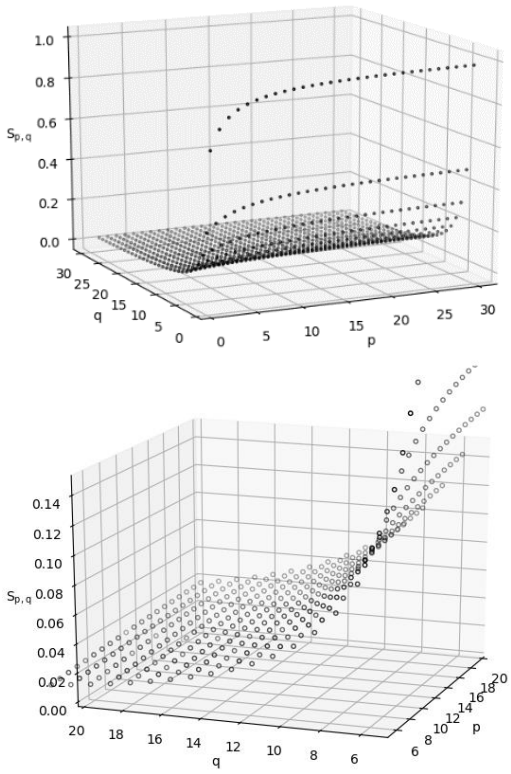
$$\frac{1}{p}\Phi\left(-1;1;\frac{1}{p}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^p}\,dt = S_{p,1}.$$

Il importe en fait d'observer qu'en réalité, ce lien avec la fonction Φ concerne l'*ensemble* de la famille $\left(S_{p,q}\right)_{(p;q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. On vérifie en effet aussi bien l'identité :

$$\forall\, (p;q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \ S_{p,q} = \frac{1}{p}\Phi\left(-1;1;\frac{q}{p}\right).$$

5. Représentation graphique de la famille des sommes

Les représentations graphiques de la famille $\left(S_{p,q}\right)_{(p;q)\in([1;+\infty[\cap\mathbb{N})^2}$ donnent à voir une belle régularité qui traduit le fait que le théorème 1 exprime les $S_{p,q}$ comme les valeurs prises aux couples d'entiers naturels non nuls d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1;+\infty[^2$ des deux variables *réelles* p et q – ainsi que la possibilité d'exprimer les $S_{p,q}$ de manière unifiée avec la fonction Φ.



6. Développements en fractions continues généralisées des restes partiels

Nous avons établi que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ S_{p,q} = {S_{p,q}}^{(n)} + (-1)^{n+1}{R_{p,q}}^{(n)},\ \ \text{où}\ \ {R_{p,q}}^{(n)} = \frac{1}{q}\int_0^1 \frac{x^{(n+1)\frac{p}{q}}}{1+x^{\frac{p}{q}}}\,dx.$$

Nous allons montrer ici qu'une telle évaluation exacte de ${R_{p,q}}^{(n)}$ est, comme dans le cas particulier $(p;q) = (2;1)$ déjà étudié, toujours rationnellement accessible au moyen d'un développement en fraction continue généralisée :

Théorème 3

Pour tout $(p;q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{pk+q} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{pk+q} + \cfrac{(-1)^{n+1}}{{\alpha_{p,q}}^{(n)} + \cfrac{(1p)^2}{{\alpha_{p,q}}^{(n)} + \cfrac{(2p)^2}{{\alpha_{p,q}}^{(n)} + \cfrac{(3p)^2}{{\alpha_{p,q}}^{(n)} + \cdots}}}} \qquad \text{où}\ \ {\alpha_{p,q}}^{(n)} = 2pn + p + 2q$$

Remarquons d'abord pour établir ce résultat que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}{R_{p,q}}^{(n)} + {R_{p,q}}^{(n+1)} &= (-1)^{n+1}\left[\left(S_{p,q} - {S_{p,q}}^{(n)}\right) - \left(S_{p,q} - {S_{p,q}}^{(n+1)}\right)\right]\\ &= (-1)^{n+1}\left({S_{p,q}}^{(n+1)} - {S_{p,q}}^{(n)}\right) = (-1)^{n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{p(n+1)+q}.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ {R_{p,q}}^{(n)} + {R_{p,q}}^{(n+1)} = \frac{1}{pn+(p+q)} \qquad (1).$$

Un argument crucial est que $({R_{p,q}}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite convergente vérifiant (1). En effet, soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant aussi (1). Posons $v_n = r_n - {R_{p,q}}^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par construction, la suite de terme général $(v_{n+1} + v_n)$ est stationnaire et de valeur 0. Il en résulte : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n v_0$; soit aussi : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ r_n = {R_{p,q}}^{(n)} + (-1)^n v_0$. Par conséquent : (r_n) converge si, et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n v_0$ existe et est réelle, donc si, et seulement si $v_0 = 0$; ce qui équivaut bien à la nullité de la suite (v_n) et donc à : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ r_n = {R_{p,q}}^{(n)}$.

Supposons maintenant qu'il existe deux suites réelles $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ {R_{p,q}}^{(n)} = \cfrac{a_0}{n+b_0+\cfrac{a_1}{n+b_1+\cfrac{a_2}{n+b_2+\cdots}}}.$$

Pour tout $(n;k) \in \mathbb{N}^2$ fixé, notons alors :

$$F_n^{(k)} = \cfrac{a_k}{n+b_k+\cfrac{a_{k+1}}{n+b_{k+1}+\cfrac{a_{k+2}}{n+b_{k+2}+\cdots}}}.$$

a_k/n est clairement un équivalent de $F_n^{(k)}$ lorsque n est voisin de $+\infty$ et : $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_n^{(k)} = 0$.

Par ailleurs, il résulte de (1) que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ doivent nécessairement vérifier :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \frac{a_0}{n+b_0+F_n^{(1)}}+\frac{a_0}{n+1+b_0+F_{n+1}^{(1)}}=\frac{1}{pn+(p+q)}.$$

C'est-à-dire aussi l'identité (2) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \left(n+b_0+F_n^{(1)}\right)\left(n+1+b_0+F_{n+1}^{(1)}\right)=a_0\big(pn+(p+q)\big)\left(2n+1+2b_0+F_n^{(1)}+F_{n+1}^{(1)}\right).$$

En ordonnant et en divisant par n, puis en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n^{(1)}=0=\lim\limits_{n\to+\infty} F_{n+1}^{(1)}$, on obtient que nécessairement : $\begin{cases} 1-2pa_0=0 \\ 2b_0+1-pa_0-2pa_0b_0-2(p+q)a_0=0 \end{cases}$. C'est-à-dire : $\begin{cases} a_0=\frac{1}{2p} \\ b_0=\frac{1}{2}+\frac{q}{p} \end{cases}$.

L'identité (2) se réécrit alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad 2n\left(F_n^{(1)}+F_{n+1}^{(1)}\right)+\left(4+2\frac{q}{p}\right)F_n^{(1)}-\left(0-2\frac{q}{p}\right)F_{n+1}^{(1)}+4F_n^{(1)}F_{n+1}^{(1)}-1^2=0 \qquad (3)$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n^{(1)}=\frac{a_1}{n+b_1+F_n^{(2)}} \quad \text{et} \quad F_{n+1}^{(1)}=\frac{a_1}{n+1+b_1+F_{n+1}^{(2)}}$$

En reportant dans (3), on obtient donc, après réduction au même dénominateur, l'identité (4) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad 0=(1-4a_1)n^2+\left(-6a_1-4a_1b_1+1+2b_1-4a_1\frac{q}{p}+(1-2a_1)\left(F_n^{(2)}+F_{n+1}^{(2)}\right)\right)n$$
$$+\left(b_1+{b_1}^2-4a_1-2a_1\frac{q}{p}-4a_1b_1\left(1+\frac{q}{p}\right)-4{a_1}^2+\left(1+b_1-2a_1\frac{q}{p}\right)F_n^{(2)}-\left(4+2\frac{q}{p}-b_1\right)a_1F_{n+1}^{(2)}+F_n^{(2)}F_{n+1}^{(2)}\right)$$

En divisant par n puis en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n^{(2)}=0=\lim\limits_{n\to+\infty} F_{n+1}^{(2)}$, on obtient que nécessairement :

$$\begin{cases} 4a_1-1=0 \\ 6a_1+4a_1b_1-1-2b_1+4a_1q/p=0 \end{cases}$$

C'est-à-dire : $\begin{cases} a_1=1/4 \\ b_1=\frac{1}{2}+\frac{q}{p} \end{cases}$. En reportant dans l'identité (4), on obtient désormais l'identité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad 2n\left(F_n^{(2)}+F_{n+1}^{(2)}\right)+\left(6+2\frac{q}{p}\right)F_n^{(2)}-\left(2-2\frac{q}{p}\right)F_{n+1}^{(2)}+4F_n^{(2)}F_{n+1}^{(2)}-2^2=0$$

Pour tout entier $k \geq 2$, notons maintenant (H_k) la proposition :

$$\begin{cases} a_{k-1}=\dfrac{(k-1)^2}{4} \\ b_{k-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{q}{p} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad 2n\left(F_n^{(k)}+F_{n+1}^{(k)}\right)+2\left(k+1+\dfrac{q}{p}\right)F_n^{(k)}-2\left(k-1-\dfrac{q}{p}\right)F_{n+1}^{(k)}+4F_n^{(k)}F_{n+1}^{(k)}-k^2=0 \end{cases}$$

Nous avons établi plus haut que (H_2) est vraie. Supposons (H_k) vraie pour un certain $k \geq 2$ fixé.

En utilisant $F_n^{(k)}=\dfrac{a_k}{n+b_k+F_n^{(k+1)}}$ et $F_{n+1}^{(k)}=\dfrac{a_k}{n+1+b_k+F_{n+1}^{(k+1)}}$, on obtient l'identité (5) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad -2na_k\left(2n+1+2b_k+\left(F_n^{(k+1)}+F_{n+1}^{(k+1)}\right)\right)+k^2\left(n+b_k+F_n^{(k+1)}\right)\left(n+1+b_k+F_{n+1}^{(k+1)}\right)$$
$$-\left(2(k+1)+2\frac{q}{p}\right)a_k\left(n+1+F_{n+1}^{(k+1)}\right)+\left(2(k-1)-2\frac{q}{p}\right)a_k\left(n+F_n^{(k+1)}\right)+4{a_k}^2=0$$

D'où, après avoir développé, ordonné et divisé par n la relation obtenue :

$$\forall\, n \geq 1,\ \ (k^2 - 4a_k)n$$
$$+\left(-2a_k - 4a_k b_k + 2k^2 b_k + k^2 - 2\left(k+1+\frac{q}{p}\right)a_k + 2\left(k-1-\frac{q}{p}\right)a_k + (k^2-2a_k)\left(F_n^{(k+1)} + F_{n+1}^{(k+1)}\right)\right)$$
$$+\frac{k^2\left({b_k}^2 + b_k\right) - 2\left(k+1+\frac{q}{p}\right)a_k(1+b_k) + 2\left(k-1-\frac{q}{p}\right)a_k b_k - 4{a_k}^2}{n}$$
$$+\frac{\left(k^2(1+b_k) + 2\left(k-1-\frac{q}{p}\right)a_k\right)F_n^{(k+1)} + \left(k^2 b_k - 2\left(k+1+\frac{q}{p}\right)a_k\right)F_{n+1}^{(k+1)} + k^2 F_n^{(k+1)} F_{n+1}^{(k+1)}}{n} = 0$$

Il résulte alors de $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n^{(k+1)} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} F_{n+1}^{(k+1)}$ que nécessairement :

$$\begin{cases} k^2 - 4a_k = 0 \\ -2a_k - 4a_k b_k + 2k^2 b_k + k^2 - 2\left(k+1+\frac{q}{p}\right)a_k + 2\left(k-1-\frac{q}{p}\right)a_k = 0 \end{cases}$$

On obtient sans difficulté $a_k = \frac{k^2}{4}$, puis : $b_k = \frac{1}{2} + \frac{q}{p}$. L'identité (5) se réécrit alors, après division par k^2 :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 2n\left(F_n^{(k+1)} + F_{n+1}^{(k+1)}\right) + 2\left(k+2+\frac{q}{p}\right)F_n^{(k+1)} - 2\left(k-\frac{q}{p}\right)F_{n+1}^{(k+1)} + 4F_n^{(k+1)}F_{n+1}^{(k+1)} - (k+1)^2 = 0$$

Ce qui établit que (H_{k+1}) est vraie. Par récurrence, (H_k) est donc vraie pour tout $k \geq 2$.

En résulte finalement que : $\forall\, k \geq 1,\ \begin{cases} a_k = \frac{k^2}{4} \\ b_k = \frac{1}{2} + \frac{q}{p} \end{cases}$.

Le développement en fraction continue généralisée de ${R_{p,q}}^{(n)}$, s'il existe, ne peut donc être que

$$\cfrac{\frac{1}{2p}}{n + \left(\frac{1}{2}+\frac{q}{p}\right) + \cfrac{\frac{1^2}{4}}{n + \left(\frac{1}{2}+\frac{q}{p}\right) + \cfrac{\frac{2^2}{4}}{n + \left(\frac{1}{2}+\frac{q}{p}\right) + \cfrac{\frac{3^2}{4}}{n + \left(\frac{1}{2}+\frac{q}{p}\right) + \cdots}}}}$$

Réciproquement, ce développement en fraction continue généralisée satisfait par construction la relation (1). Comme il converge (vers 0) lorsque n tend vers l'infini, le fait que $({R_{p,q}}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite convergente vérifiant (1) montre que ce développement est bien celui de ${R_{p,q}}^{(n)}$. Le théorème 3 en découle au moyen de l'utilisation du facteur $2p$.

Le cas de la série de Mādhava-Leibniz $(p;q) = (2;1)$ fournit par exemple, avec pour la seconde égalité (distincte de la formule de Brouncker quoique similaire) l'application à $n = 1$:

$$\forall\, n \geq 1,\ \ \pi = 4\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^n \cfrac{4}{4n + \cfrac{2^2 1^2}{4n + \cfrac{2^2 2^2}{4n + \cfrac{2^2 3^2}{4n + \cdots}}}} = 4 - \cfrac{4}{4 + \cfrac{4(1^2)}{4 + \cfrac{4(2^2)}{4 + \cfrac{4(3^2)}{4 + \cdots}}}}$$

Dans le cas de la série « harmonique alternée » $(p;q)=(1;1)$, on obtient semblablement :

$$\forall\, n\geq 1,\quad \ln(2)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}+(-1)^n\cfrac{1}{2n+1+\cfrac{1^2}{2n+1+\cfrac{2^2}{2n+1+\cfrac{3^2}{2n+1+\cdots}}}}=1-\cfrac{1}{3+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{3+\cfrac{3^2}{3+\cdots}}}}$$

7. Conclusion

Le calcul de la somme des séries congruo-harmoniques alternées entrepris ici lie de manière saisissante les couples d'entiers naturels non nuls, le nombre π, les fonctions circulaires, la fonction logarithme népérien et plusieurs autres fonctions transcendantes spéciales. Il le fait en combinant des techniques classiques d'intégration et les propriétés fondamentales du corps des nombres complexes, de l'anneau des polynômes à coefficients complexes et des corps de fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$. Ce calcul est une belle illustration, parmi d'autres, des relations aussi profondes que fascinantes entre arithmétique, géométrie, algèbre et analyse…

Son principal intérêt est de fournir par des moyens relativement élémentaires une formulation des sommes des séries considérées qui présente l'avantage de ne pas utiliser des fonctions transcendantes sophistiquées telles que les fonctions digamma ou de Hurwitz-Lerch, tout en explicitant au moyen de fonctions plus usuelles certaines de leurs valeurs exactes : cette simplicité met en principe le calcul à la portée des étudiants de mathématiques de premier cycle.

Quant à l'intérêt algorithmique du développement en fraction continue généralisée des restes partiels énoncé dans le théorème 3, c'est la seconde partie de cet article consacrée à l'accélération de la convergence des séries CHA qui en montrera toute la profondeur…

Annexe 1 : Deux preuves de l'identité : $\forall\, q\in[\![1;p-1]\!],\ \displaystyle\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}(p-1-2j)\sin\left(q\theta_{j,p}\right)=\frac{p}{2\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)}$

<u>Première démonstration</u>

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}(p-1-2j)\sin\left(q\theta_{j,p}\right)=(p-1)g\left(\frac{q}{p}2\pi\right)+2f'\left(\frac{q}{p}2\pi\right)$$

où f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}e^{i\left(jx+\frac{q}{p}\pi\right)}\right)$ et $g(x)=\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}e^{i\left(jx+\frac{q}{p}\pi\right)}\right)$. Or :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}e^{i\left(jx+\frac{q}{p}\pi\right)}=e^{i\frac{q}{p}\pi}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\left(e^{ix}\right)^j=e^{i\frac{q}{p}\pi}\frac{1-e^{iE\left(\frac{p}{2}\right)x}}{1-e^{ix}}=e^{i\frac{q}{p}\pi}\frac{e^{iE\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}}\left(e^{-iE\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}}-e^{iE\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}=\frac{\sin\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)\frac{x}{2}+\frac{q}{p}\pi\right)}.$$

On en déduit :

$$f(x)=\frac{\sin\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)\frac{x}{2}+\frac{q}{p}\pi\right)\quad\text{et}\quad g(x)=\frac{\sin\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)\frac{x}{2}+\frac{q}{p}\pi\right).$$

D'où immédiatement : $g\left(\frac{q}{p}2\pi\right)=\dfrac{\sin^2\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)}{\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)}$. De plus, on obtient aussi l'explicitation :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}E\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)\frac{x}{2}+\frac{q}{p}\pi\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)\frac{\sin\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)\frac{x}{2}+\frac{q}{p}\pi\right)$$

En résulte :

$$f'\left(\frac{q}{p}2\pi\right) = \frac{\frac{1}{2}E\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right) - \frac{1}{2}\sin\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{q}{p}\pi\right)}\cos\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)\frac{\sin^2\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)}{\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)}$$
$$= \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{q}{p}\pi\right)}\left(-\sin\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) + E\left(\frac{p}{2}\right)\cos^2\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\right.$$
$$\left.-\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-1\right)\sin^2\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{q}{p}\pi\right)}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) + E\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) + \sin^2\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\right)$$

S'en déduit ensuite :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}(p-1-2j)\sin(q\theta_{j,p}) = (p-1)\frac{\sin^2\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)}{\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)}$$
$$+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{q}{p}\pi\right)}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) + E\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) + \sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin^2\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{q}{p}\pi\right)}\left(2p\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin^2\left(E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) - \cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) + 2E\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{q}{p}\pi\right)}\left(-\cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) + 2E\left(\frac{p}{2}\right)\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right) + p\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right) - p\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\right)$$
$$= \frac{p}{2\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} + \frac{1}{2\sin^2\left(\frac{q}{p}\pi\right)}\left(2\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-\frac{p}{2}\right) - \cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\right)$$

Le résultat annoncé découle alors du fait que si $p = 2r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$2\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-\frac{p}{2}\right) - \cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)$$
$$= \sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos(q\pi)\,(r-r) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin(q\pi) = 0.$$

Et du fait qu'on obtient aussi bien, dans le cas où $p = 2r+1$ avec $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)\cos\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)\left(E\left(\frac{p}{2}\right)-\frac{p}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{q}{p}\pi\right)\sin\left(2E\left(\frac{p}{2}\right)\frac{q}{p}\pi\right)$$
$$= \sin\left(\frac{q}{2r+1}\pi\right)\cos\left(\frac{q}{2r+1}\pi\right)\left(r-\left(r+\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{q}{2r+1}\pi\right)\sin\left(\frac{2r}{2r+1}q\pi\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{q}{2r+1}\pi\right)\cos\left(\frac{q}{2r+1}\pi\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{q}{2r+1}\pi\right)\sin\left(\frac{q}{2r+1}\pi\right) = 0.$$

<u>Seconde démonstration</u> (proposée par Gilles Patry)

On commence par établir le lemme 2 : $\displaystyle\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(2(j+1)\frac{q}{p}\pi\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^q-1}{2} & \text{si } p \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}$

Il résulte en effet du lemme 1 que :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(2(j+1)\frac{q}{p}\pi\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\left(2(j+1)\frac{q}{p}\pi\right)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{q}{p}\pi}\alpha\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi\right)}{\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} e^{i\left(\frac{q}{p}\left(1+E\left(\frac{p}{2}\right)\right)\pi\right)}\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{q}{p}E\left(\frac{p}{2}\right)\pi\right)}{\sin\left(\frac{q}{p}\pi\right)} \cos\left(\frac{q}{p}\left(1+E\left(\frac{p}{2}\right)\right)\pi\right)$$

Si p est pair, de la forme $2r$ où $r \in \mathbb{N}^*$ on obtient donc bien :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(2(j+1)\frac{q}{p}\pi\right) = \frac{\sin\left(q\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{q}{r}\frac{\pi}{2}+q\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{q}{r}\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{q}{r}\frac{\pi}{2}+q\pi\right)-\sin\left(\frac{q}{r}\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{q}{r}\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{(-1)^q-1}{2}.$$

Et si p est impair, de la forme $p = 2r+1$ où $r \in \mathbb{N}^*$, on obtient là encore comme annoncé :

$$\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1} \cos\left(2(j+1)\frac{q}{p}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{r}{2r+1}q\pi\right)\cos\left(\frac{r+1}{2r+1}q\pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2r+1}q\pi\right)} = \frac{\sin(q\pi)-\sin\left(\frac{1}{2r+1}q\pi\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2r+1}q\pi\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Une fois ce lemme 2 établi, on observe que :

$$\frac{\pi}{p^2}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}(p-1-2j)\sin\left((2j+1)\frac{q\pi}{p}\right) = \frac{\pi}{p\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\frac{(p-1-2j)}{p}\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)\sin\left((2j+1)\frac{q\pi}{p}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\,p\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\frac{(p-1-2j)}{p}\left(\cos\left(2j\frac{q\pi}{p}\right)-\cos\left((2(j+1)\frac{q\pi}{p}\right)\right)$$

Les termes de cette dernière somme se télescopent partiellement, « laissant » un facteur $2/p$ à chaque étape. Discutons alors la valeur de cette somme selon la parité de p. Si p est pair, on obtient :

$$\frac{\pi}{p^2}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}(p-1-2j)\sin\left((2j+1)\frac{q\pi}{p}\right) = \frac{\pi}{2\,p\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}\left(\frac{p-1}{p}\cos(0)-\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\frac{2}{p}\left(\cos\left((2(j+1)\frac{q\pi}{p}\right)\right)+\frac{1}{p}\cos\left(p\frac{q\pi}{p}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\,p\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}\left(\frac{p-1}{p}-\frac{2}{p}\times\frac{(-1)^q-1}{2}+\frac{1}{p}\times(-1)^q\right) \text{ d'après le Lemme 2}$$

$$= \frac{\pi}{2\,p\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}.$$

Et si p est impair, alors, en utilisant là encore le lemme 2 pour obtenir la deuxième égalité :

$$\frac{\pi}{p^2}\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}(p-1-2j)\sin\left((2j+1)\frac{q\pi}{p}\right) = \frac{\pi}{2\,p\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}\left(\frac{p-1}{p}\cos(0)-\sum_{j=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)-1}\frac{2}{p}\left(\cos\left((2(j+1)\frac{q\pi}{p}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\,p\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}\left(\frac{p-1}{p}+\frac{2}{p}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\,p\sin\left(\frac{q\pi}{p}\right)}.$$

Dans les deux cas, l'identité obtenue est évidemment équivalente à (2).

Annexe 2 : Éléments de preuve de la formule unifiée du théorème 2

Une approche un peu différente du calcul de l'intégrale, proposée par Dominique Tournès, aboutit à l'unification des quatre cas du théorème 2. Le point de départ décisif en est l'observation de l'identité :

$$F(X) = \frac{X^{q-1}}{X^p+1} = \frac{X^{p+q-1}}{X^{2p}-1} - \frac{X^{q-1}}{X^{2p}-1}$$

On cherche ensuite la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{X^r}{X^{2p}-1}$ pour tout $r < 2p$, qu'on applique aux deux cas $r = p+q-1$ et $r = q-1$. On obtient alors, pour $q \in [\![1;p]\!]$:

$$F(X) = \frac{(-1)^{p+q}-(-1)^q}{2p}\frac{1}{X+1}$$
$$+\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p-1}((-1)^k-1)\left(\cos\left(k\frac{q}{p}\pi\right)\frac{2X-2\cos\left(\frac{k}{p}\pi\right)}{X^2-2\cos\left(\frac{k}{p}\pi\right)X+1} - \frac{2\sin\left(k\frac{q}{p}\pi\right)}{\sin\left(\frac{k}{p}\pi\right)}\frac{1}{\left(\frac{X-\cos\left(\frac{k}{p}\pi\right)}{\sin\left(\frac{k}{p}\pi\right)}\right)^2+1}\right).$$

L'intégration sur $[0;1]$ de la fonction F fournit ensuite, toujours pour $q \in [\![1;p]\!]$:

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{p+q}-(-1)^q}{2p}\ln(2) + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}((-1)^k-1)\left(\cos\left(k\frac{q}{p}\pi\right)\ln\left(2\sin\left(k\frac{\pi}{2p}\right)\right) - \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{k}{p}\right)\sin\left(k\frac{q}{p}\pi\right)\right)$$

Il ne reste plus alors qu'à montrer que les quatre cas distingués dans le théorème 2 se regroupent sous la formule unificatrice annoncée, en posant $q = ap+b$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $1 \leq b \leq p$.

Remerciements

Je remercie Gilles Patry, agrégé de mathématiques et IA-IPR de Rennes pour ses suggestions, sa contribution alternative à l'une des démonstrations et sa réalisation des figures.

Je remercie aussi Dominique Tournès, professeur à l'Université de La Réunion, pour ses aides bibliographiques et son apport à l'élaboration d'une formule unificatrice du théorème 2.

Bibliographie

Aslangul C., *Applications de la mécanique quantique*, Cours de l'ENS Paris, 2006, p. 163. (http://www.docme.su/doc/1341845/2743.aslangul-c.---applications-de-mecanique-quantique--2...)

Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. « The ψ Function », in *Higher Transcendantal Functions*, Vol. 1, New York : Krieger, 1981, pp. 15-20.

Ferreira C., Lopez J.L., « Asymptotic expansions of the Hurwitz-Lerch zeta function », *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 298, 2004, pp. 210-224.

Pouvreau D., « Sur l'accélération de la convergence de la série de Mādhava-Leibniz », *Quadrature*, n° 97, 2015, pp. 17-25.

Weisstein E.W., « Digamma function », in Wolfram Mathworld, 2021, https://mathworld.wolfram.com/DigammaFunction.html