



**HAL**  
open science

## Physique des milieux continus

Thierry Hocquet

► **To cite this version:**

| Thierry Hocquet. Physique des milieux continus. Licence. France. 2021. hal-03622020

**HAL Id: hal-03622020**

**<https://hal.science/hal-03622020>**

Submitted on 28 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# PHYSIQUE DES MILIEUX CONTINUS – LU3PY 514 –

Thierry Hocquet



# Préface

Ce cours est consacré à l'étude des milieux continus. La matière y est analysée comme un *continuum*, ce qui signifie d'abord qu'on se place à une échelle nettement plus grande que l'échelle atomique. Plusieurs domaines de la physique sont impliqués :

- d'abord la thermodynamique, cadre général d'analyse des systèmes macroscopiques sous l'angle énergétique,
- la mécanique pour décrire le comportement dynamique des éléments de matière,
- l'électromagnétisme pour étudier le couplage aux ondes électromagnétiques.

On abordera notamment :

- le transport de chaleur, de matière, d'impulsion,
- le comportement des fluides avec l'hydrodynamique (fluides parfaits, fluides visqueux),
- le comportement des solides avec l'élasticité,
- les phénomènes de surface.



Première partie

Cours



# Chapitre 1

## Description des milieux continus

### 1 Modélisation d'un milieu continu

#### 1.1 Hypothèse de continuité

En *physique des milieux continus*, on étudie des systèmes ayant un très grand nombre d'atomes (ou de molécules), c'est la *limite thermodynamique*. Alors, au regard de l'échelle macroscopique, l'échelle microscopique peut être ignorée. Ceci a une conséquence immédiate : la matière est vue comme un continuum et tout système peut être décrit par un nombre limité de variables : par exemple les champs de pression, de température, de vitesse, *etc.* On étudiera dans ce cours des milieux où chaque paramètre est soit uniforme, soit une fonction continue de l'espace. Mathématiquement, la matière est donc représentée par un continuum de points (espace affine) et ses transformations géométriques sont représentées par des transformations ponctuelles continues (translation, rotation, homothétie). Puisqu'elles représentent des mouvements de la matière, ces transformations vérifient les propriétés suivantes.

- Il y a biunivocité entre l'ensemble des points pris à des instants différents : aucun point n'apparaît ou ne disparaît, aucun point ne se sépare en deux ou vient fusionner avec un autre.
- Ces transformations peuvent être différenciées : tout couple de points infiniment voisins resteront infiniment voisins lors d'une transformation élémentaire. Ceci permet de définir le tenseur des déformations (voir chapitre 9).
- Un volume reste un volume, une surface qui entoure ce volume reste une surface. Un volume géométrique contenant une masse se déforme de manière continue avec cette masse (même s'il peut y avoir de la diffusion). La conséquence mathématique de cette hypothèse est une relation appelée *relation de continuité* (voir § 2.3).

#### 1.2 Équilibre local, densités

Pour analyser un système inhomogène, la démarche consiste à découper ce système *global* en éléments de matière, chaque élément devenant un sous-système *local* dont la taille doit être telle que soient vérifiés ensemble deux critères.

- Les paramètres inhomogènes à l'échelle globale peuvent être considérés comme uniformes à l'échelle locale, de sorte que l'inhomogénéité est échantillonnée. Ceci requiert une taille d'autant plus petite que les paramètres varient rapidement dans l'espace.
- Chaque élément de matière reste un système macroscopique. Ceci requiert une taille qui reste grande par rapport aux dimensions de l'échelle microscopique.

Si ces critères sont vérifiés, chaque élément de matière est un sous-système thermodynamique susceptible d'atteindre localement l'équilibre. Le système global peut donc être en situation de déséquilibre avec des gradients de température, de pression, *etc.*, pendant que chacun de ces sous-systèmes est en situation d'*équilibre local*. Admettre que ces critères sont vérifiés et que ce découpage est possible se résume en déclarant qu'on fait l'*hypothèse de l'équilibre local*. L'échelle de grandeur de ces sous-systèmes, intermédiaire entre les échelles macroscopique et microscopique, est appelée l'*échelle mésoscopique*.

Dans la suite, on affectera de la notation  $\delta$  les grandeurs globales des sous-systèmes. Pour commencer, chaque sous-système a, à un instant donné, une masse  $\delta m$ , un volume  $\delta V$ , donc une masse volumique

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta V} \quad (\text{en kg/m}^3). \quad (1)$$

Chaque sous-système a une énergie  $\delta E$ . On introduit alors la densité massique d'énergie selon

$$e = \frac{\delta E}{\delta m} \quad (\text{en J/kg}) \quad (2a)$$

et la densité volumique selon

$$\rho e = \frac{\delta E}{\delta V} \quad (\text{en J/m}^3). \quad (2b)$$



### 1.3 Séparation des énergies

L'énergie totale est la somme des énergies cinétiques et des énergies potentielles de l'ensemble des particules. Précisons cette séparation pour un élément de matière de masse  $\delta m$ .

(i) Énergie cinétique

Soit  $m_i$  la masse d'une particule  $i$  du fluide, de vitesse microscopique  $\vec{v}_i$ . L'élément de masse  $\delta m$  a une vitesse globale  $\vec{v}$  définie par la moyenne des impulsions :

$$\delta m \vec{v} = \left( \sum_i m_i \right) \vec{v} = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

On écrit ensuite  $\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}'_i$ , la vitesse relative  $\vec{v}'_i$  ne représentant alors que l'agitation thermique. Le théorème de König

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i^2$$

montre que l'énergie cinétique totale de l'élément de masse se sépare exactement en deux termes :

- un terme macroscopique de translation de l'élément de masse à la vitesse  $\vec{v}$  qui est  $\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \delta m \vec{v}^2 = e_c \delta m$ , où  $e_c$  est la densité massique d'énergie cinétique de translation ;
- un terme d'agitation thermique  $\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i^2$  qui contribue à l'énergie interne de l'élément de matière.

(ii) Énergie potentielle

L'énergie potentielle est celle des forces d'interaction entre les particules. Les différents modèles de force d'interaction montrent qu'on peut très souvent distinguer ces forces en deux catégories, selon leur portée.

- Les forces à longue portée (supérieure à la taille du système) sont par exemple la pesanteur, l'action d'un condensateur ou d'une bobine extérieure, les forces d'inertie. Elles contribuent à une énergie potentielle macroscopique qu'on écrit  $e_p \delta m$ , où  $e_p$  est la densité massique d'énergie potentielle.
- Les forces à courte portée (quelques distances atomiques) sont celles des forces de van der Waals. Elles contribuent à l'énergie interne de l'élément de matière.

La densité massique d'énergie totale  $e$  est donc écrite

$$e = \frac{1}{2} \vec{v}^2 + e_p + u,$$

où  $u$  est la densité massique d'énergie interne, qui relève de la thermodynamique.

Par exemple, dans un fluide homogène, on constate que deux variables locales suffisent à caractériser l'état thermodynamique d'un élément de matière, mettons sa pression  $P$  et sa température  $T$ . L'équation  $\rho = \rho(P, T)$  est l'équation d'état du fluide, elle est indépendante du champ de vitesse. Les coefficients thermoélastiques permettent de caractériser les propriétés locales de ce fluide. Ils sont définis pour un élément de masse  $\delta m$  fixé (système fermé). Écrivant  $\delta V = \delta m / \rho$  et  $d(1/\rho) = -d\rho/\rho^2$ , ce sont

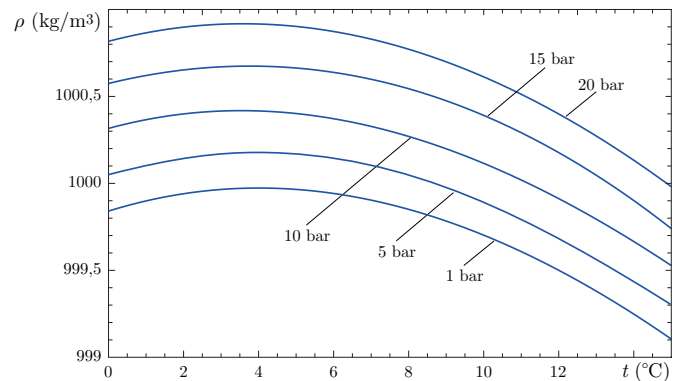
- le coefficient de compressibilité isotherme

$$\chi_T = - \frac{1}{\delta V} \left( \frac{\partial(\delta V)}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T; \quad (3a)$$

- le coefficient de dilatation thermique

$$\alpha = \frac{1}{\delta V} \left( \frac{\partial(\delta V)}{\partial T} \right)_P = - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P. \quad (3b)$$

Ci-dessous, quelques valeurs à température et pression ambiantes.



Courbes isobares de la masse volumique de l'eau.

fluides	$\chi_T$ (Pa <sup>-1</sup> )	$\alpha$ (K <sup>-1</sup> )
air	$1,0 \times 10^{-5}$	$36,7 \times 10^{-4}$
eau	$4,6 \times 10^{-10}$	$2,1 \times 10^{-4}$

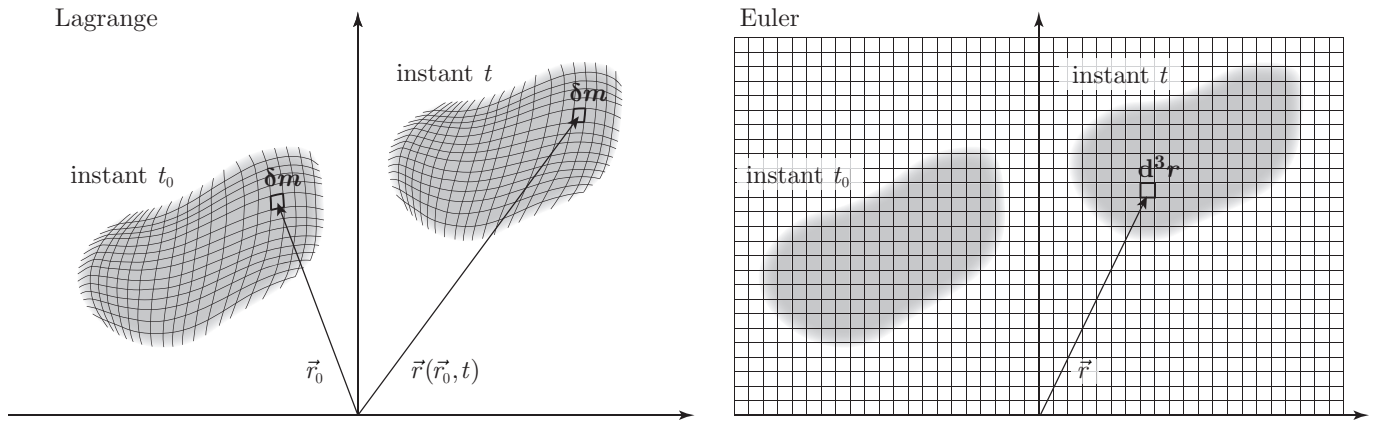
## 2 Représentation d'un milieu continu

### 2.1 Points de vue d'Euler et de Lagrange

D'un point de vue mathématique, on se place dans un référentiel et chaque point  $M$  de l'espace est repéré depuis l'origine  $O$  par un vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ . Puis on fait le choix d'un système de coordonnées de ce point  $M$  ou d'une base de l'espace et des composantes de ce vecteur  $\vec{r}$  (cartésiennes ou curvilignes). Le problème physique est différent : la description d'une inhomogénéité suppose la définition des sous-systèmes et leur repérage dynamique dans l'espace. Lorsque le milieu est déformable, mobile, voire siège de diffusion interne, la définition et le repérage de ces sous-systèmes est un problème délicat, d'autant plus qu'il est souvent éludé dans les écritures.

Considérons un maillage du système, définissant des sous-systèmes de volume  $\delta V = d^3r$  et de masse  $\delta m$ . Comme le système évolue dans le temps, on doit décider comment ce maillage évolue lui aussi, c'est-à-dire qu'on doit préciser la définition de ces sous-systèmes. Il existe deux options.

- Pour un élément de masse donné, on regarde son mouvement en fonction du temps : point de vue de Lagrange.
- En un endroit donné, on regarde le mouvement des éléments de masse qui défilent : point de vue d'Euler.



#### (i) Le point de vue de Lagrange

Un élément de masse donné  $\delta m$  est situé à un instant de référence  $t_0$  en  $\vec{r}_0$  où il occupe un volume  $d^3r_0$ . Cette position de référence  $\vec{r}_0$  sert à identifier cet élément de masse. À un instant quelconque  $t$ , il se situe en  $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$  où il occupe un volume  $d^3r$ . L'ensemble des positions de  $\delta m$  décrit par la loi horaire  $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$  constitue sa trajectoire. Ce point de vue est le plus proche de la cinématique du point, c'est celui qu'on doit implicitement invoquer pour écrire le principe fondamental de la dynamique.

Les grandeurs physiques locales sont écrites comme des fonctions  $a = a_L(\vec{r}_0, t)$ .

#### (ii) Le point de vue d'Euler

On se situe en un endroit donné de l'espace, repéré par le vecteur position  $\vec{r}$ , autour duquel on examine un volume donné  $d^3r$ . En fonction du temps  $t$ , on voit défilier les éléments de masse différents  $\delta m$ . Ce point de vue est le plus proche de celui de l'électromagnétisme (description des champs électromagnétiques  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ).

Les grandeurs physiques locales sont écrites comme des fonctions  $a = a_E(\vec{r}, t)$ .

La valeur des grandeurs physiques locales ne dépend pas du point de vue adopté : la correspondance entre les deux points de vue s'écrit

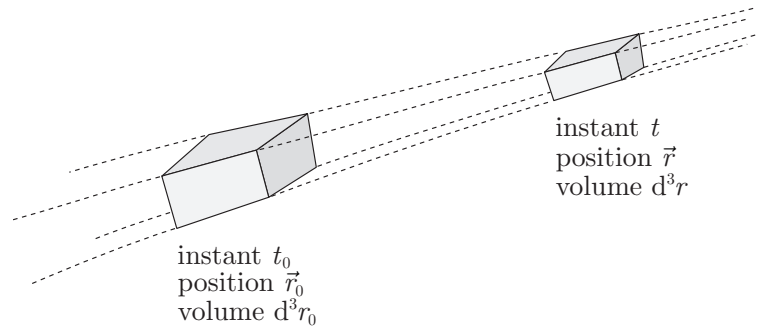
$$a_L(\vec{r}_0, t) = a_E(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t), \quad (4)$$

relation qui exprime qu'au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$  se trouve l'élément de masse qui était à l'instant  $t_0$  au point  $\vec{r}_0$ .

### 2.2 Champ de déformation, jacobien

Lorsque le milieu se déplace et/ou se déforme, chaque élément de matière passe d'une position de référence  $\vec{r}_0$  à l'instant  $t_0$  à la position  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ . La transformation du milieu est donc décrite par une transformation géométrique continue de l'espace, fonction du temps :

$$\vec{r}_0 \rightsquigarrow \vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t).$$



Pour mieux décrire cette transformation, on considère les dérivées partielles

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial r_{0j}} \quad (5)$$

qui forment un tenseur  $\bar{\bar{J}}$  appelé tenseur du gradient de la déformation. Le déterminant de ce tenseur est mathématiquement le rapport des éléments de volume du même élément de matière

$$J = \det \bar{\bar{J}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial r_{01}} & \frac{\partial r_1}{\partial r_{02}} & \frac{\partial r_1}{\partial r_{03}} \\ \frac{\partial r_2}{\partial r_{01}} & \frac{\partial r_2}{\partial r_{02}} & \frac{\partial r_2}{\partial r_{03}} \\ \frac{\partial r_3}{\partial r_{01}} & \frac{\partial r_3}{\partial r_{02}} & \frac{\partial r_3}{\partial r_{03}} \end{vmatrix} = \frac{d^3 r}{d^3 r_0}. \quad (6a)$$

Par conservation de la masse au cours de la transformation, on a  $\delta m = \rho_0 d^3 r_0 = \rho d^3 r$ , donc aussi

$$J = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (6b)$$

### 2.3 Champ de vitesse, relation de continuité

Pour décrire la cinématique de la déformation du système, c'est-à-dire son écoulement, on regarde le champ de vitesse, repérée *a priori* dans un référentiel galiléen. La définition du champ de vitesse est d'abord liée au point de vue de Lagrange, puisqu'il s'agit de décrire la cinématique des éléments de matière. Entre un instant  $t$  et un instant  $t + dt$ , la position d'un même élément de matière varie de  $d\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t + dt) - \vec{r}(\vec{r}_0, t) = \vec{v} dt$ , où  $\vec{v}$  est la vitesse de cet élément de masse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{\partial \vec{r}(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \right)_{\vec{r}_0}. \quad (7)$$

Cette définition étant posée, la vitesse est une variable physique, indépendante du point de vue adopté. D'une manière générale, pour toute grandeur  $a$  attachée à un élément de matière (masse volumique, température, pression, ...) dont on suit l'évolution au cours du mouvement, on peut définir de même le taux de variation : entre  $t$  et  $t + dt$ , on écrit  $da = a_L(\vec{r}_0, t + dt) - a_L(\vec{r}_0, t)$ , donc

$$\frac{da}{dt} = \left( \frac{\partial a_L(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \right)_{\vec{r}_0}. \quad (8)$$

La dérivée totale  $d/dt$  utilisée ici est appelée la *dérivée particulaire* parce qu'on suit la particule de matière au cours du temps.

Le champ de vitesse permet de calculer le taux variation du volume des éléments de matière par rapport au temps, au travers du taux de variation du jacobien. Nous allons présenter ici une démonstration de ce résultat basée sur les propriétés des jacobiens. Notons

- $J(t_0 \rightarrow t)$  le jacobien qui décrit le changement de variables de  $\vec{r}_0$  à  $\vec{r}$ ;
- $J(t_0 \rightarrow t + dt)$  le jacobien qui décrit donc le changement de variables de  $\vec{r}_0$  à  $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$ ;
- $J(t \rightarrow t + dt)$  le jacobien qui décrit le changement de variables de  $\vec{r}$  à  $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$ .

On a

$$J(t_0 \rightarrow t + dt) = J(t_0 \rightarrow t) \times J(t \rightarrow t + dt) \implies J(t_0 \rightarrow t + dt) - J(t_0 \rightarrow t) = J(t_0 \rightarrow t) [J(t \rightarrow t + dt) - 1].$$

Or  $J(t_0 \rightarrow t)$  est le jacobien  $J$  de la transformation, tel qu'il a été introduit en (6a), donc

$$\frac{dJ}{J} = J(t \rightarrow t + dt) - 1.$$

Le jacobien  $J(t \rightarrow t + dt)$  se calcule comme le déterminant des dérivées partielles des composantes de  $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$  aux composantes de  $\vec{r}$  : comme  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ ,

$$\frac{\partial r'_i}{\partial r_j} = \frac{\partial(r_i + v_i dt)}{\partial r_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial r_j} dt.$$

Dans l'objectif de calculer  $dJ/dt$ , on cherche la valeur du déterminant  $J(t \rightarrow t + dt)$  au premier ordre en  $dt$ , et c'est

$$J(t \rightarrow t + dt) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial v_1}{\partial r_1} dt & \frac{\partial v_1}{\partial r_2} dt & \frac{\partial v_1}{\partial r_3} dt \\ \frac{\partial v_2}{\partial r_1} dt & 1 + \frac{\partial v_2}{\partial r_2} dt & \frac{\partial v_2}{\partial r_3} dt \\ \frac{\partial v_3}{\partial r_1} dt & \frac{\partial v_3}{\partial r_2} dt & 1 + \frac{\partial v_3}{\partial r_3} dt \end{vmatrix} = 1 + \frac{\partial v_1}{\partial r_1} dt + \frac{\partial v_2}{\partial r_2} dt + \frac{\partial v_3}{\partial r_3} dt = 1 + \operatorname{div} \vec{v} dt.$$

On obtient donc

$$\frac{dJ}{J} = \operatorname{div} \vec{v} dt \implies \frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \vec{v}. \quad (9)$$

Cette relation importante est appelée la *relation de continuité*, car elle est la conséquence de la description de la déformation du milieu en une transformation continue. Comme le jacobien est relié à la masse volumique selon (6b), on en déduit

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (10)$$

qui est la *relation de conservation de la masse* écrite dans le point de vue de Lagrange. Lorsque  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , le jacobien, et donc le volume des éléments de matière et la masse volumique, ne varient pas au cours temps. L'écoulement ou la déformation sont dits alors incompressibles.

## 2.4 Expression eulérienne de la dérivée particulaire

Le point de vue d'Euler est souvent préféré en hydrodynamique : il est donc utile de savoir exprimer la dérivée particulaire dans ce point de vue. Soit de nouveau une grandeur  $a$  associée à un élément de matière. Dans le point de vue d'Euler, on l'écrit  $a = a_E(\vec{r}, t)$  avec, en suivant l'élément de masse au cours du temps,  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$  selon (4). Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , la position  $\vec{r}$  varie de  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , si bien que

$$\begin{aligned} da &= a_E(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - a_E(\vec{r}, t) \\ &= \frac{\partial a}{\partial t} dt + \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz = \frac{\partial a}{\partial t} dt + \frac{\partial a}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial a}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial a}{\partial z} v_z dt \\ &= \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} v_x + \frac{\partial a}{\partial y} v_y + \frac{\partial a}{\partial z} v_z \right) dt = \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a \right) dt. \end{aligned}$$

On arrive ainsi à

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a. \quad (11)$$

La dérivée totale du premier membre est la dérivée particulaire définie en (8). La dérivée partielle du second membre est la dérivée par rapport au temps dans le point de vue d'Euler.<sup>1</sup> Voyons deux exemples d'application de cette formule.

- Partant de l'équation de conservation de la masse dans le point de vue de Lagrange (10), et appliquant (11) à la masse volumique, il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Utilisant la relation  $\operatorname{div} \rho \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v}$ , on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad (12)$$

qui est l'expression de conservation de la masse dans le point de vue d'Euler.

1. Dans un point de vue donné, on peut permuter les dérivées partielles. Mais attention : on ne peut pas permuter la dérivée particulaire, dérivée partielle par rapport au temps dans le point de vue de Lagrange, avec les dérivées partielles par rapport à  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , qui relève du point de vue d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \text{mais} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \neq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{d}{dt} \right).$$

- Si  $a$  est une grandeur vectorielle, on peut d'abord écrire (11) pour chaque composante et il vient en rassemblant

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + v_x \frac{\partial\vec{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\vec{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\vec{a}}{\partial z} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}, \quad (13)$$

où  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  est l'opérateur scalaire

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (14)$$

Par exemple, pour exprimer l'accélération d'un élément de masse, on dérive la vitesse :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (15)$$

Le terme  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  est non linéaire en vitesse, ce qui vient compliquer toute la résolution des équations du mouvement dans les milieux continus.

# Chapitre 2

## Transport de matière et de chaleur

Nous allons étudier dans ce chapitre quelques phénomènes de transport : de matière, de chaleur et de charges. La démarche générale est toujours la même :

- on doit commencer par dresser l'équation bilan de la grandeur qui se transporte ;
- on écrit une relation phénoménologique qui fournit une expression de la densité de flux de cette même grandeur ;
- on en déduit une équation d'évolution de type *équation de diffusion* qui permet de résoudre le problème.

### 1 Principe général de l'écriture d'un bilan

#### 1.1 Écriture d'un bilan

Pour décrire le transport à travers un système, on échantillonne la matière en éléments de masse  $\delta m$ . Si  $\rho$  est la masse volumique, le volume  $d^3r$  de chaque sous-système est tel que  $\delta m = \rho d^3r$ . On se place dans le point de vue de Lagrange : la valeur de ces éléments de masse  $\delta m$  est fixée, même s'ils peuvent se déformer ou se déplacer. Ainsi, si le milieu n'est pas rigide,  $\delta m$  reste constant mais  $d^3r$  et  $\rho$  sont variables. Soit une grandeur d'état additive  $A$ , pouvant se transporter (comme la quantité de particules, l'énergie, la charge). On écrit

$$A = \int a \delta m = \iiint \rho a d^3r, \quad (1)$$

où  $a$  est la densité massique de la grandeur  $A$ ,  $\rho a$  la densité volumique. On a donc

$$\frac{dA}{dt} = \int \frac{da}{dt} \delta m = \iiint \rho \frac{da}{dt} d^3r. \quad (2a)$$

Par ailleurs, si  $A$  varie pour le système, on peut identifier deux causes.

- En premier,  $a$  peut se transporter à travers la matière par un processus de diffusion, avec une *densité de flux* (ou densité de courant, ou courant)  $\vec{j}_A$  : par définition,  $\vec{j}_A \cdot d^2\vec{r}$  est la quantité de la grandeur  $A$  qui traverse par unité de temps l'élément de surface  $d^2\vec{r}$  associé à un élément de masse.
- En second,  $a$  peut être créé ou annihilé dans chaque sous-système, avec un *taux de création* algébrique  $\sigma_A$  : par définition,  $\sigma_A d^3r$  est la quantité de la grandeur  $A$  créée dans le sous-système de volume  $d^3r$  par unité de temps.

On écrit ainsi

$$\frac{dA}{dt} = - \oint \vec{j}_A \cdot d^2\vec{r} + \iiint \sigma_A d^3r, \quad (2b)$$

le signe moins respectant la convention d'orientation des vecteurs éléments de surface délimitant un volume. L'intégrale de surface peut être transformée en utilisant le théorème d'Ostrogradsky, et on arrive à

$$\iiint \rho \frac{da}{dt} d^3r + \iiint \operatorname{div} \vec{j}_A d^3r = \iiint \sigma_A d^3r. \quad (2c)$$

Cette équation est la forme globale du bilan de la grandeur  $A$ . Il est valable quel que soit le volume d'intégration, donc on arrive à

$$\rho \frac{da}{dt} + \operatorname{div} \vec{j}_A = \sigma_A. \quad (3)$$

En utilisant l'équation (11) du chapitre 1, on arrive aussi à

$$\rho \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a \right) + \operatorname{div} \vec{j}_A = \sigma_A. \quad (4)$$

Ces deux équations sont la forme locale du bilan de la grandeur  $A$ . La deuxième écriture montre que, lorsque le milieu matériel est animé d'un mouvement, on doit distinguer

- le transport par *diffusion*, c'est-à-dire le transport au travers des différents éléments de matière, représenté par le courant  $\vec{j}_A$  ;
- le transport par *convection*, c'est-à-dire le transport en suivant le mouvement de chaque élément de matière à la vitesse  $\vec{v}$ , représenté par le terme  $\rho\vec{v} \cdot \vec{\nabla}a$ .

Nous avons supposé par défaut que  $A$  était une grandeur scalaire. Cependant il est possible de généraliser l'écriture d'un bilan à une grandeur vectorielle (comme l'impulsion), la densité de flux étant alors un tenseur d'ordre deux. À présent, pour chaque grandeur  $A$ , il reste à identifier  $\vec{j}_A$  et  $\sigma_A$ .

## 1.2 Bilan d'énergie totale

Comme exemple, voyons le cas de l'énergie totale  $E$ , de densité massique  $e$ . Comme l'énergie totale se conserve, il ne saurait y avoir de création ou d'annihilation locale, donc le taux de création est nul :  $\sigma_E = 0$ .

$$\rho \frac{de}{dt} + \text{div} \vec{j}_E = 0. \quad (5)$$

Le vecteur courant  $\vec{j}_E$  est la somme des contributions des processus d'échange d'énergie au travers de la matière. En général, le courant de diffusion d'énergie totale  $\vec{j}_E$  se confond avec le courant de diffusion d'énergie interne  $\vec{j}_U$ . Pour exprimer  $\vec{j}_U$ , on s'inspire du premier principe : l'énergie interne varie en raison d'un transfert de chaleur ou d'un travail reçu. Donc  $\vec{j}_U$  comprend les termes suivants.

- (i) En premier, on introduit un vecteur densité de flux de chaleur, noté  $\vec{q}$ . Par définition, la chaleur  $\delta Q$  échangée par le système avec l'extérieur pendant une durée  $dt$  est telle que

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \oint \vec{q} \cdot d^2\vec{r}. \quad (6)$$

Soulignons ici que le flux de chaleur n'est pas associé à une grandeur qui se transporte, la chaleur n'étant pas une fonction d'état. La notion de « bilan de chaleur » souvent invoquée dans la littérature n'a aucun sens thermodynamique.

- (ii) Après la chaleur, on liste les flux représentant un apport de travail au système. Dans un système en mouvement, on prend en compte le travail des forces de pression. Si le système est plongé dans un champ électromagnétique, il reçoit une puissance rayonnée donc le flux est celui du vecteur de Poynting  $\vec{S}$ .

Dans ce chapitre, nous n'étudierons que le transport dans un milieu fixe et rigide. Dans ce cas,

- il ne subsiste que le transport par diffusion ;
- les points de vue d'Euler et de Lagrange se confondent ;
- en conséquence, les dérivées  $\partial/\partial t$  et  $d/dt$  des grandeurs locales sont équivalentes.

## 2 Transport de matière

On désigne par « transport de matière » la migration de particules dans un substrat matériel hôte : ce peut être

- dans un milieu radioactif, diffusion de neutrons,
- dans une solution, diffusion d'un soluté, comme de l'oxygène ou du sucre dans l'eau (au repos),
- dans un solide cristallin, migration d'atomes étrangers ou de défauts, *etc.*

### 2.1 Bilan de matière

Considérons des particules pouvant se déplacer dans un milieu supposé fixe et rigide. Soit  $N$  est la nombre total de particules d'une espèce donnée dans un volume donné, et  $n$  la densité volumique de ces particules. On écrit

$$N = \iiint n d^3r \quad \text{et} \quad \frac{dN}{dt} = \iiint \frac{\partial n}{\partial t} d^3r$$

Soit  $\vec{j}_n$  et  $\sigma_n$  respectivement le courant de particules et le taux de production volumique, tel que

$$\frac{dN}{dt} = - \oint \vec{j}_n \cdot d^2\vec{r} + \iiint \sigma_n d^3r.$$

Le bilan local de l'espèce en densité  $n$  s'écrit donc

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_n = \sigma_n. \quad (7)$$

Le taux de production  $\sigma_n$  est donné selon la situation étudiée. Dans le cas des neutrons,  $\sigma_n$  est donné par la concentration des radioéléments. Dans le cas d'un soluté dans une solution, et en l'absence de réaction chimique,  $\sigma_n = 0$ . Mais le courant  $\vec{j}_n = 0$  reste indéterminé.

## 2.2 Lois de Fick

Pour compléter le jeu d'équations afin de pouvoir résoudre un problème, il manque donc relation indiquant comment le courant  $\vec{j}_n$  dépend de la densité  $n$ . Les lois de la mécanique ou les principes de la thermodynamique ne permettent pas d'apporter une réponse, il faut admettre un résultat supplémentaire, issu de l'expérience ou d'un calcul de physique statistique.

L'expérience montre qu'en présence d'un gradient de densité, le système répond par un flux de particules qui lui est proportionnel. D'une manière générale, en présence d'un gradient représentant un déséquilibre, un système répond par un flux associé qui lui est proportionnel : c'est le principe de la *réponse linéaire*. Cette loi phénoménologique n'est bien sûr valable que pour des gradients pas trop forts, sinon des termes non linéaires peuvent apparaître. Lorsqu'il est invoqué, le principe de la réponse linéaire est parfois désigné sous le nom de *quatrième principe de la thermodynamique*.

La relation générale entre deux vecteurs fait intervenir un tenseur, donc on écrit ici

$$\vec{j}_n = -\overline{\overline{D}} \vec{\nabla} n \quad (8a)$$

Par définition, le tenseur  $\overline{\overline{D}}$  ne dépend pas du gradient de la densité. Si on suppose de plus que le matériau est isotrope et qu'aucun autre effet ne vient entraver l'isotropie, le tenseur est réduit à un scalaire. La relation entre les deux vecteurs  $\vec{j}_n$  et  $\vec{\nabla} n$  fait alors intervenir un seul scalaire et prend la forme

$$\vec{j}_n = -D \vec{\nabla} n \quad (8b)$$

qui est la (première) loi de Fick. Le coefficient  $D$  est le *coefficient de diffusion*, il dépend de la nature du matériau et de l'espèce diffusée, il s'exprime en  $\text{m}^2/\text{s}$ . Avec le second principe, on peut établir que, quelle que soit la situation,  $D > 0$ . Cette inégalité assure que le courant  $\vec{j}_n$  est toujours dirigé des zones de forte densité vers les zones de faible densité.

La (première) loi de Fick (8b) injectée dans l'équation de bilan (7) aboutit à une équation sur la densité. Supposant le matériau homogène ( $D$  uniforme), cette équation s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \Delta n = 0, \quad (9)$$

qui est appelée la seconde loi de Fick. Cette équation (9), avec une dérivée première par rapport au temps et des dérivées secondes par rapport à l'espace, est appelée une *équation de diffusion*. Une telle équation n'est clairement pas invariante par retournement du temps ( $t \rightarrow -t$ ) : elle traduit un phénomène irréversible (avec augmentation de l'entropie de l'univers).

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, il faut connaître

- les conditions initiales, à savoir la carte de densité à un instant initial (ou supposer un régime temporel particulier, comme le régime permanent) ;
  - les conditions aux limites, à savoir la valeur de la densité ou du courant aux limites géométriques du matériau.
- Sans la résoudre, la structure de cette équation donne quelques éléments sur le comportement de sa solution.

- Si le système présente une longueur caractéristique  $L$ , une analyse dimensionnelle permet de définir un temps

$$\tau \sim \frac{L^2}{D} \quad (10a)$$

qui se révèle être le temps de relaxation.

- Si le système est excité à une pulsation  $\omega$ , une analyse dimensionnelle permet de définir une longueur

$$\delta \sim \sqrt{\frac{D}{\omega}} \quad (10b)$$

qui se révèle être une profondeur de peau.

- Si le système est dans un état stationnaire, en chaque point la densité ne dépend plus du temps donc  $\partial n / \partial t = 0$  et (9) devient l'équation de Laplace

$$\Delta n = 0 \quad (\text{état stationnaire}), \quad (11)$$

la densité est alors une fonction harmonique. La carte de densité ne dépend alors plus que des conditions aux limites, pas des propriétés du matériau (s'il est supposé homogène).

Dans un cas général, l'analyse de Fourier se révèle un outil performant pour aborder la résolution de l'équation de diffusion : historiquement, c'est pour résoudre cette équation que J. Fourier introduit en 1807 les séries de Fourier. On distingue deux cas :

- celui d'un milieu infini où l'on utilise la transformation de Fourier,
- celui d'un milieu fini avec les séries de Fourier.

Dans les cas les plus compliqués, seule une résolution numérique est possible.



### 3 Transport de chaleur

#### 3.1 Équation de la chaleur

Dans un milieu indéformable, soumis à aucune travail extérieur (mécanique, électromagnétique, ...), la seule forme d'énergie est l'énergie interne, la seule forme de transfert est la chaleur, donc on écrit

$$de = du = c dT \quad \text{et} \quad \vec{j}_E = \vec{q},$$

où  $c$  est la capacité calorifique par unité de masse et  $\vec{q}$  le courant de chaleur. L'équation (5) devient

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0, \quad (12)$$

qu'on appelle *équation de la chaleur*.

#### 3.2 Loi de Fourier

Comme dans le cas de la diffusion de particules, on doit compléter l'équation précédente par une relation phénoménologique reliant le courant de chaleur à la température. À l'équilibre thermodynamique, la température est (par définition) uniforme. Aussi, en dehors de l'équilibre, le principe de la réponse linéaire suggère d'écrire la proportionnalité entre  $\vec{q}$  et  $\vec{\nabla}T$ , ce qui conduit à écrire

$$\vec{q} = -\bar{\kappa} \vec{\nabla}T. \quad (13a)$$

Si on suppose le milieu isotrope, ce tenseur est réduit à un scalaire et il reste

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla}T \quad (13b)$$

qui est la loi de Fourier. Le coefficient  $\kappa$  est le coefficient de *conductivité thermique*, il dépend de la nature du matériau et s'exprime en W/m.K. D'après le second principe, on a toujours  $\kappa > 0$ . Cette inégalité assure que le courant de chaleur est toujours dirigé des zones chaudes (de haute température) vers les zones froides (de basse température).

Matériau	cuivre	fer	aluminium	germanium pur	eau pure
$\kappa$ (W/m.K)	390	59	237	60	0,6

Valeurs numériques des conductivités thermiques à température ambiante

La loi de Fourier (13b) injectée dans l'équation de la chaleur (12) aboutit à une équation sur la température. Supposant le matériau homogène ( $\kappa$  uniforme), l'équation de la chaleur devient

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} - D_{\text{th}} \Delta T = 0 \quad (14a)$$

avec

$$D_{\text{th}} = \frac{\kappa}{\rho c} \quad (14b)$$

le coefficient de *diffusivité thermique*, en  $\text{m}^2/\text{s}$ . Sous cette forme (14a), l'équation de la chaleur est identique à la seconde loi de Fick obtenue en (9) : c'est une équation de diffusion. Les remarques faites à son sujet et les techniques de résolution sont formellement identiques. Ainsi, pour un système de taille  $L$ , le temps de relaxation s'écrit

$$\tau \sim \frac{L^2}{D_{\text{th}}} = \frac{\rho c L^2}{\kappa}. \quad (15)$$

#### 3.3 Exemples à 1D

Nous allons résoudre les équations dans un cas unidimensionnel (1D). On suppose le milieu homogène et la conductivité thermique indépendante de la température. Le milieu est supposé invariant selon les directions  $y$  et  $z$ , aussi la température est une fonction  $T(x, t)$ . Par suite, la loi de Fourier montre que le flux de chaleur n'a qu'une composante selon  $x$  qu'on note simplement  $q(x, t)$ . Les deux fonctions  $T$  et  $q$  obéissent aux équations différentielles issues de (12) et (13b) :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \\ q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \end{cases} \implies \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (16)$$

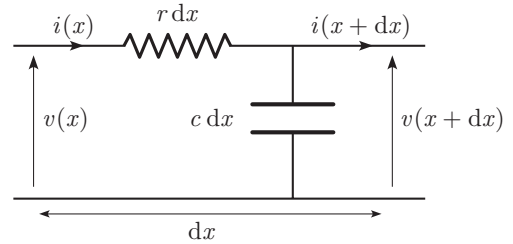
### 3.3.1 Analogie électrocinétique

Ces équations (16) sont formellement équivalentes à celle d'une ligne électrocinétique continue  $RC$  : on imagine un câble bifilaire dont chaque élément de longueur  $dx$  peut être représenté par une résistance  $r dx$  et une capacité  $c dx$  (voir schéma). Le courant  $i(x, t)$  circulant sur un fil et la tension  $v(x, t)$  entre les fils obéit aux équations

$$\begin{cases} i(x, t) - i(x + dx, t) = -\frac{\partial i}{\partial x} dx = c dx \frac{\partial v}{\partial t} \\ v(x, t) - v(x + dx, t) = -\frac{\partial v}{\partial x} dx = r dx i \end{cases} \implies \begin{cases} c \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} \\ i = -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \implies c \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (17)$$

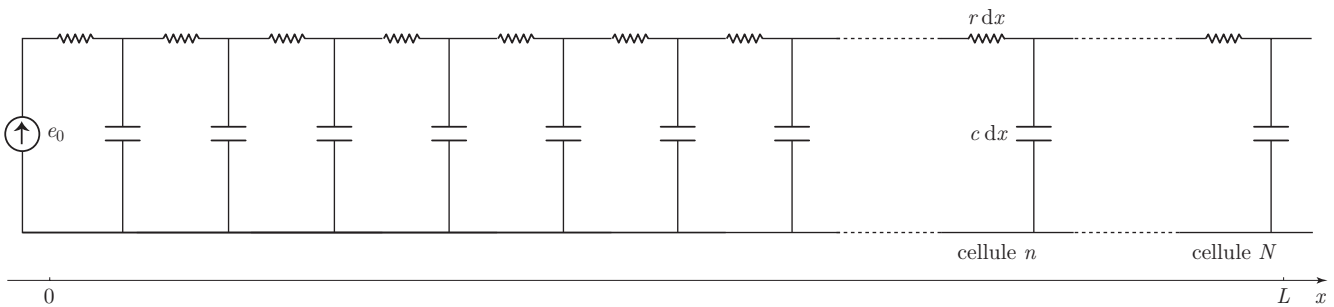
Les équations (17) obtenues pour la ligne  $RC$  sont analogues aux équations (16) obtenues pour la diffusion de la chaleur à 1D, en faisant la correspondance :

$T$	$\longleftrightarrow$	$v$
$q$	$\longleftrightarrow$	$i$
$\kappa$	$\longleftrightarrow$	$1/r$
$\rho c$	$\longleftrightarrow$	$c$



Cette correspondance entre les équations de la chaleur et les équations de la ligne  $RC$  permet de construire une analogie électrique de la diffusion de la chaleur. De même qu'une différence de potentiel  $v$  entraîne la circulation d'un courant électrique  $i$ , une différence de température entraîne la circulation d'un flux de chaleur. Les condensateurs emmagasinent l'énergie électrique de même que la capacité calorifique rend compte de l'augmentation d'énergie interne. On peut également compléter la ligne en entrée et en sortie pour tenir compte des conditions aux limites.

- Si le système est en contact thermique avec d'autres systèmes, les conditions aux limites sont représentées par l'association de lignes  $RC$  en entrée et en sortie ;
- Si le système en contact avec un thermostat, la condition aux limites en température est représentée par le branchement d'un générateur de tension.
- Si le système est thermiquement isolé, la condition aux limites sur le flux de chaleur est représentée par un circuit ouvert.



La ligne  $RC$  représentant un barreau de longueur  $L$ . Si le barreau est en contact avec un thermostat à  $T_0$  en  $x = 0$ , la condition aux limites  $T(x = 0, t) = T_0$  est représentée par le générateur de tension en entrée qui impose  $v(x = 0, t) = e_0$ . Si le barreau est thermiquement isolé en  $x = L$ , la condition aux limites  $q(x = L, t) = 0$  est représentée par un circuit ouvert en sortie qui impose  $i(x = L, t) = 0$ .

L'avantage de cette analogie est que, par habitude, on se représente plus facilement le fonctionnement d'un circuit électrique qu'un transfert de chaleur. L'analogie peut être d'ailleurs être imaginée en dimensions deux ou trois, mais elle n'a alors plus beaucoup d'intérêt. Si on veut monter une ligne  $RC$  à des fins de simulation, on doit associer un grand nombre de cellules  $RC$  (identiques, ou différentes pour simuler un milieu inhomogène). La simulation est limitée quant à la précision des profils : une ligne de  $N \gg 1$  cellules ne rend compte du profil de température d'un barreau de longueur  $L$  qu'à une précision  $\Delta x = L/N \ll L$  près.

### 3.3.2 État stationnaire

Considérons une plaque d'épaisseur  $e$  et de section  $\mathcal{S}$ , séparant deux sources de chaleur de température  $T_1$  et  $T_2$ . Si on ignore des effets de bord, seule intervient la dimension  $x$  de l'axe perpendiculaire à la plaque. Soit  $0 \leq x \leq e$  le domaine de la plaque. Les conditions aux limites sont  $T(x = 0, t) = T_1$ , et  $T(x = e, t) = T_2$ . Dans un état stationnaire et dans l'analogie électrocinétique, les capacités ne jouent plus aucun rôle et le milieu est analogue à une série de résistances. D'après (16), il reste

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \implies \quad T(x) = ax + b.$$

Dans un milieu unidimensionnel en état stationnaire, le profil de température est donc affine. Les constantes  $a$  et  $b$  sont fixées par les conditions aux limites : il vient

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e}x + T_1.$$

On en déduit le flux de chaleur  $q$  et la puissance thermique  $\mathcal{P}$  qui traverse la plaque :

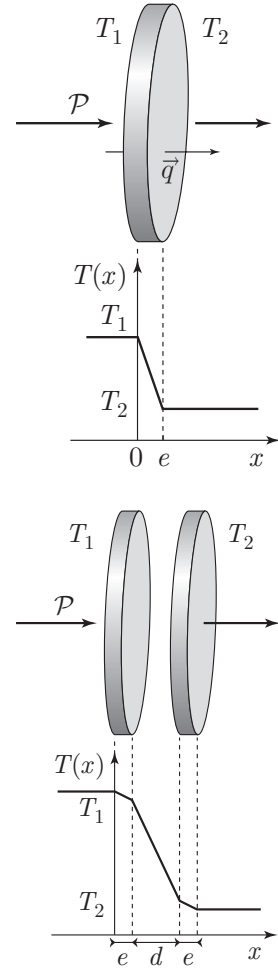
$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa \frac{T_2 - T_1}{e} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = q\mathcal{S} = -\frac{\kappa\mathcal{S}}{e}(T_2 - T_1) = \frac{1}{R}(T_1 - T_2),$$

où  $R = e/\kappa\mathcal{S} > 0$  est la *résistance thermique* en K/W. Pour que la plaque soit par exemple un bon isolant thermique, il faut que cette résistance soit grande, donc évidemment que la conductivité  $\kappa$  du matériau soit petite, la section  $\mathcal{S}$  petite et l'épaisseur  $e$  importante. Comme prévu, dans l'analogie électrocinétique, la plaque est représentée par une unique résistance.

L'empilement de plusieurs systèmes unidimensionnels se résoud simplement : dans la mesure où on peut admettre la continuité du courant de chaleur (en l'absence de source de chaleur aux interfaces) et de la température, on écrit la mise en série des résistances. Par exemple, un double vitrage avec deux épaisseurs de verre d'épaisseur  $e$  et de conductivité  $\kappa_v$  enfermant une couche de gaz d'épaisseur  $d$  et de conductivité  $\kappa_g$ , donne lieu à un profil affine par morceaux avec une résistance thermique totale

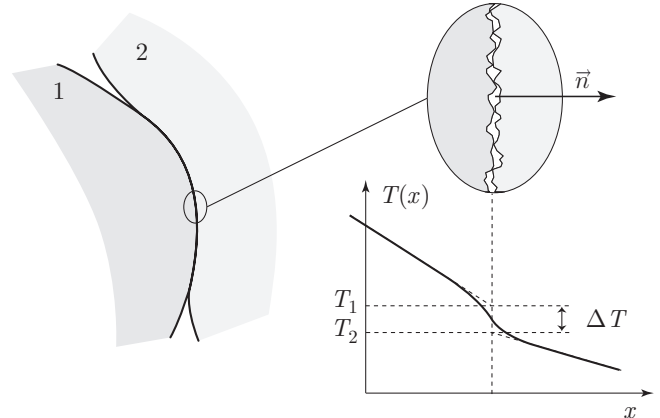
$$\frac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}} = R = \frac{e}{\kappa_v\mathcal{S}} + \frac{d}{\kappa_g\mathcal{S}} + \frac{e}{\kappa_v\mathcal{S}}.$$

C'est la faible valeur de la conductivité  $\kappa_g$  du gaz qui augmente la résistance thermique totale et limite donc la puissance thermique  $\mathcal{P}$  qui traverse le double-vitrage pour une différence de température  $T_1 - T_2$  donnée.



### 3.3.3 Résistance thermique de contact

Revenons ici sur l'hypothèse de continuité de la température : en situation hors d'équilibre, aucun principe n'oblige deux matériaux en contact thermique à présenter la même température sur leur surface de contact. On peut rencontrer cette situation lors du contact entre deux solides 1 et 2. En raison de la rugosité de leurs surfaces à l'échelle mésoscopique (voir schéma ci contre), les deux matériaux ne sont en réellement contact que sur des points d'appui, une phase gazeuse ou liquide remplissant les interstices. Cette matière interstitielle joue un rôle dans la conduction thermique, surtout si sa conductivité est faible par rapport à celle des solides. Le modèle le plus simple repose sur deux hypothèses.



- On peut négliger l'inertie thermique de cette très faible quantité de matière interstitielle pour laquelle on obtient alors les mêmes équations qu'en régime stationnaire.
- Comme à cette échelle on peut confondre localement toute interface avec son plan tangent, le problème peut être analysé de manière unidimensionnelle.

On se retrouve alors dans la même situation que celle du double-vitrage exposée précédemment. La différence de température  $\Delta T = T_1 - T_2$  entre les solides est donc proportionnelle au courant de chaleur  $q$  orienté de 1 à 2 qui traverse l'interface : on pose

$$\Delta T = r_c q, \quad (18)$$

où  $r_c \geq 0$  est appelé la *résistance thermique surfacique de contact*, en  $\text{m}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$ . Précisément, il faut comprendre  $T_1$  et  $T_2$  comme l'extrapolation des profils (instantanés et locaux) de température dans chaque solide. La valeur de  $r_c$  dépend beaucoup des états de surface : par exemple une pression exercée sur les solides réduit les interstices et donc la valeur de  $r_c$ . Dans les conditions usuelles, on trouve des valeurs entre 0,05 et 5  $\text{cm}^2 \cdot \text{K}/\text{W}$ . On notera bien que  $1/r_c$  est défini par unité de surface : la résistance thermique de contact au travers d'une surface  $\mathcal{S}$  que traverse une puissance thermique  $\mathcal{P} = q\mathcal{S}$  est  $R_c = \Delta T/\mathcal{P} = r_c/\mathcal{S}$ .

Une discontinuité de température peut aussi apparaître à l'interface entre deux matériaux, même sans la moindre rugosité, par exemple dans des couches épitaxiales ou entre un solide et un liquide : la résistance thermique surfacique de contact prend alors le nom de *résistance de Kapitza* et elle est notée  $r_K$ . Cet effet a été observé pour la première fois par P. Kapitza à très basse température entre un métal et de l'hélium liquide (superfluide), où on mesure  $r_K$  de l'ordre de  $1 \text{ cm}^2 \cdot \text{K/W}$ . La nature de cette discontinuité est plus fondamentale : l'explication la plus fréquemment présentée est la réfraction des modes de vibration à l'interface entre les deux matériaux.

### 3.3.4 Régime sinusoïdal

Supposons que les températures imposées aux limites du matériau varient de manière sinusoïdale autour d'une température  $T_0$ , à la pulsation  $\omega$ . Alors, passé le régime transitoire (qui survit un temps donné par (15)), on peut chercher la solution sous la forme  $T(x, t) = T_0 + \Re[\Theta(x) e^{i\omega t}]$ . En représentation complexe,  $\partial T / \partial t = i\omega \Theta e^{i\omega t}$  et  $\Delta T = \Theta'' e^{i\omega t}$ . L'équation de la chaleur (16) aboutit ainsi à

$$\Theta'' + k^2 \Theta = 0, \quad (19a)$$

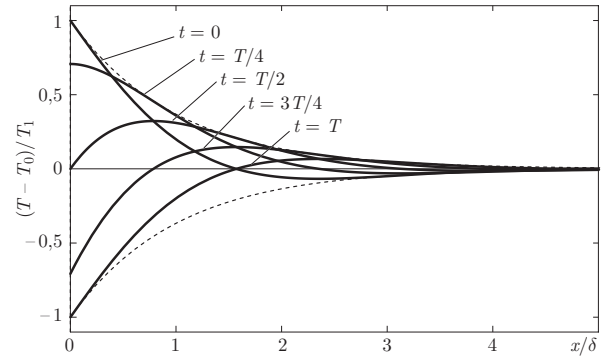
où on a posé

$$k = \frac{1 - i}{\delta}, \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{\rho c \omega}} = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}. \quad (19b)$$

La solution générale est de la forme  $\Theta(x) = a e^{ikx} + b e^{-ikx}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux constantes. Pour préciser cette solution, prenons par exemple un milieu semi-infini occupant le demi-espace  $x \geq 0$ , exposé en  $x = 0$  à une température modulée selon la loi  $T(x = 0, t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$ . En excluant la divergence pour  $x \rightarrow \infty$ , il reste  $\Theta = T_1 e^{ikx}$ , d'où en prenant la partie réelle

$$T(x, t) = T_0 + T_1 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) e^{-x/\delta}.$$

Dans le milieu, on observe une onde progressive de température, exponentiellement amortie sur la longueur  $\delta$ , appelée pour cette raison *profondeur de peau thermique*. Au-delà d'une profondeur de quelques  $\delta$ , l'onde de température est presque entièrement amortie (voir figure). Par exemple, calculons la profondeur de peau thermique pour de la terre sur une variation saisonnière, donc  $2\pi/\omega = 1$  an. La diffusivité thermique d'un sol sableux humide est  $D_{\text{th}} \sim 0,3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , ce qui donne  $\delta \sim 1,7 \text{ m}$  : donc au-delà de quelques mètres de profondeur, la température du sol est constante.



Profil de modulation de la température sur une demi-période ( $T = 2\pi/\omega$ ).

## 4 Transport de charges

### 4.1 Équations de bilan

On considère toujours un milieu indéformable, qui peut à présent être le siège de transfert d'énergie sous forme de chaleur et sous forme électromagnétique. Du point de vue électromagnétique, le milieu est supposé assimilable au vide où à un milieu linéaire, homogène et isotrope (LHI). Les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  décrivent l'état électromagnétique du système. La circulation des charges est décrite par une densité de courant électrique  $\vec{j}$ , nul à l'équilibre thermodynamique.<sup>1</sup> L'énergie totale est la somme de l'énergie interne de densité massique  $u$  et de l'énergie électromagnétique de densité volumique  $u_{\text{em}}$  : on a

$$\rho de = \rho du + du_{\text{em}} \quad \text{avec} \quad du = c dT,$$

$c$  étant toujours la capacité calorifique massique. D'après les équations de Maxwell, on a l'équation de Poynting

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div} \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (20)$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur de Poynting. Le flux d'énergie totale est la somme des deux contributions retenues :

$$\vec{j}_E = \vec{q} + \vec{S}. \quad (21)$$

En formant la différence de (5) avec (20), on arrive à

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{q} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{q} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (22)$$

1. Seuls les supraconducteurs peuvent atteindre un équilibre thermodynamique avec  $\vec{j} \neq 0$ . En ce cas, on doit prendre en compte un terme d'énergie supplémentaire, associé à l'énergie cinétique des courants.

qui est l'équation de la chaleur dans le matériau. Par rapport à l'équation (14a), le second membre est ici non nul, ce qui signifie qu'il y a dans le système des *sources de chaleur*, c'est-à-dire des phénomènes susceptibles de faire varier la température. Cette source de chaleur est ici la conséquence de la circulation du courant électrique, c'est l'effet Joule.

## 4.2 Loi d'Ohm

Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrostatique  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  est nul. En situation de déséquilibre, et dans le cadre de la réponse linéaire, on attend un courant  $\vec{j}$  proportionnel à  $\vec{E}$  :

$$\vec{j} = \bar{\sigma} \vec{E}. \quad (23a)$$

Si on suppose le milieu isotrope, ce tenseur est réduit à un scalaire et il reste

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (23b)$$

qui est la loi d'Ohm. Le coefficient  $\sigma$  est le coefficient de *conductivité électrique*, il dépend de la nature du matériau et s'exprime en  $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . D'après le second principe, on a toujours  $\sigma > 0$ .<sup>2</sup>

Matériau	cuivre	fer	aluminium	germanium pur	eau pure
$\sigma$ (W/m.K)	1,7 $\mu\Omega \cdot \text{cm}$	9,7 $\mu\Omega \cdot \text{cm}$	2,7 $\mu\Omega \cdot \text{cm}$	50 $\Omega \cdot \text{cm}$	18 M $\Omega \cdot \text{cm}$

Valeurs numériques des conductivités électriques à température ambiante

La loi de Fourier (13b) et la loi d'Ohm (23b) injectées dans l'équation de la chaleur (22) aboutit à une équation sur la température. Supposant le matériau homogène ( $\kappa$  et  $\sigma$  uniformes), cette équation s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \Delta T = \frac{j^2}{\sigma}. \quad (24)$$

Cette équation permet de calculer la carte de température dans un matériau parcouru par un courant électrique. On peut faire les mêmes remarques que celles concernant l'équation (14a), avec en complément la suivante : pour résoudre cette équation, il faut connaître la distribution de courant dans le matériau, c'est-à-dire avoir au minimum une idée de la solution des équations de Maxwell. Les exemples d'application de la loi d'Ohm relèvent du cours d'électromagnétisme, nous ne les développerons donc pas davantage ici. On retrouve entre autres l'expression de la résistance d'un barreau conducteur, ainsi que l'effet de peau électrique.

## 4.3 Effet Hall

Même lorsque le matériau est isotrope, l'isotropie du système est perturbée par la présence du champ magnétique  $\vec{B}$ . En effet, le champ magnétique, non nul même à l'équilibre contrairement au champ électrique, crée une direction privilégiée dans le système. Précisément, au lieu de l'isotropie, le système vérifie les symétries (locales) suivantes :

- il y a symétrie de rotation autour de l'axe qui porte  $\vec{B}$ ,
- lors d'une réflexion par rapport à un plan,  $\vec{B}$  est changé en l'opposé de son symétrique.<sup>3</sup>

Pour simplifier, considérons un échantillon plongé dans un champ magnétique uniforme porté par l'axe  $Oz$ . Le tenseur de conductivité  $\bar{\sigma}$  qui respecte les symétries est de la forme

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} L_1(B_z) & L_2(B_z) & 0 \\ -L_2(B_z) & L_1(B_z) & 0 \\ 0 & 0 & L_3(B_z) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L_1(-B_z) = L_1(B_z), \\ L_2(-B_z) = -L_2(B_z), \\ L_3(-B_z) = L_3(B_z). \end{cases}$$

En fonction du champ  $\vec{B}$ , les coefficients diagonaux sont pairs, les coefficients non diagonaux sont impairs. Si le champ magnétique est de faible intensité, on peut développer ces fonctions en posant

$$\begin{cases} L_1(\vec{B}) = \sigma_0 + aB_z^2, \\ L_2(\vec{B}) = bB_z, \\ L_3(\vec{B}) = \sigma_0 + cB_z^2. \end{cases}$$

2. On définit aussi la résistivité électrique  $\rho = 1/\sigma > 0$ , que nous éviterons d'utiliser ici pour ne pas créer de confusion avec la masse volumique.

3. Cette symétrie se comprend en imaginant que  $\vec{B}$  est créé par une bobine : lors de la réflexion, l'axe de la bobine est changé en son symétrique et les courants sont inversés.

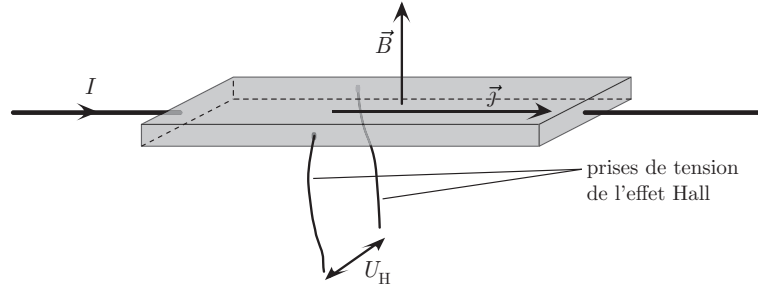
On a tenu compte du fait qu'en l'absence du champ  $\vec{B}$ , c'est-à-dire à l'ordre zéro,  $\bar{\sigma}$  est réduit à un scalaire noté ici  $\sigma_0$ . Les coefficients  $a$  et  $c$  traduisant la magnétorésistance.<sup>4</sup> Si on se limite à l'ordre 1, il reste

$$\bar{\sigma} \simeq \begin{pmatrix} \sigma_0 & bB_z & 0 \\ -bB_z & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \implies \bar{\sigma}^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 1/\sigma_0 & -R_H B_z & 0 \\ R_H B_z & 1/\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_0 \end{pmatrix}$$

Le coefficient  $R_H \simeq b/\sigma_0^2$  est la constante de Hall. La forme générale (23a) de la loi d'Ohm prend alors la forme

$$\vec{E} = \bar{\sigma}^{-1} \vec{j} = \frac{1}{\sigma_0} \vec{j} - R_H \vec{j} \wedge \vec{B}. \quad (25)$$

L'effet Hall est traduit par le terme  $-R_H \vec{j} \wedge \vec{B}$  dans le champ électrique, terme qui signifie que, même dans un matériau isotrope, on observe une tension transverse à la fois au courant et au champ magnétique. La constante de Hall peut être positive ou négative, selon le matériau. Le dispositif expérimental schématisé en figure permet d'en faire la mesure. Cet effet est par exemple utilisé pour mesurer l'intensité du champ magnétique dans les sondes à effet Hall.



Mesure de l'effet Hall. La difficulté du montage est de bien aligner les prises de la tension transverse  $U_H$  entre les deux faces, ceci pour éviter de capter une composante ohmique de la tension qui pourrait facilement saturer la composante de Hall. Pour être sûr d'extraire des mesures la tension due à l'effet Hall, il faut aussi inverser le champ magnétique pour ne garder, par différence, que la composante impaire en  $B$ . Les sondes à effet Hall utilisent des semiconducteurs, comme InSb, car l'effet Hall métallique est trop faible.

#### 4.4 Effets Peltier et Seebeck

En présence à la fois d'un gradient de température et d'un champ électrique, le matériau est le siège d'un flux de chaleur et de charge. En revenant pour simplifier à des coefficients scalaires, la réponse linéaire la plus générale n'est pas (13b) avec (23b), mais

$$\begin{cases} \vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T + TL \vec{E}, \\ \vec{j} = -L' \vec{\nabla} T + \sigma \vec{E}. \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & TL \\ L' & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\vec{\nabla} T \\ \vec{E} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Aux coefficients de conductivité  $\kappa$  et  $\sigma$  déjà introduits, on ajoute  $L$  et  $L'$  qui représentent des termes de couplage. Les quatre coefficients figurant dans la matrice sont les *coefficients cinétiques* ; ils peuvent être mesurés ou calculés dans le cadre de physique statistique des états hors d'équilibre. On a choisi ici d'écrire ces relations de sorte que les deux coefficients  $L$  et  $L'$  soient de même dimension. En 1931, Onsager a établi des relations de symétrie entre les coefficients cinétiques : en l'absence de champ magnétique, on a ici  $L = L'$ . On a ainsi plus simplement

$$\begin{cases} \vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T + TL \vec{E}, \\ \vec{j} = -L \vec{\nabla} T + \sigma \vec{E}. \end{cases} \quad (27)$$

Contrairement aux coefficients  $\kappa$  et  $\sigma$ , le coefficient  $L$  peut être positif ou négatif.

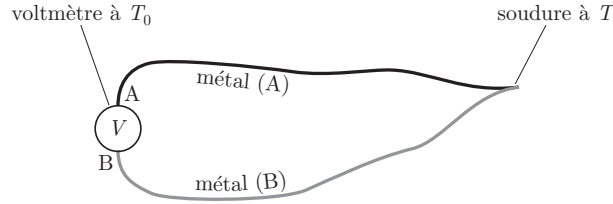
##### 4.4.1 Effet Seebeck

L'effet Seebeck est la possibilité d'observer une différence de potentiel entre deux points d'un circuit, sans circulation d'un courant, lorsqu'il existe une différence de température entre ces deux points. Lorsque  $\vec{j} = 0$ , on obtient en effet

$$\vec{E} = \varepsilon \vec{\nabla} T \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{L}{\sigma}, \quad (28)$$

appelé le *pouvoir thermoélectrique*. Cet effet est à la base de tous les dispositifs de thermocouple qui permettent de mesurer une température (puisqu'il transforme en quelque sorte une température en tension).

4. La magnétorésistance est en général un effet de faible intensité. Dans certains matériaux, les effets au second ordre en  $B$  sont toutefois importants : on observe une *magnétorésistance géante* dans des structures de films minces composées d'une alternance de couches ferromagnétiques et non magnétiques. Ces effets sont étudiés en nanotechnologie (*spintronique*) et utilisés dans le stockage des données (disque dur).



Pour que la différence de potentiel existe, il faut néanmoins utiliser deux fils conducteurs de natures différentes (en des métaux différents), mettons ici (A) et (B). Dans le dispositif le plus simple, les deux fils sont soudés en un point et la différence de potentiel est mesurée entre les deux autres extrémités (voir figure). Le voltmètre est à une température de référence  $T_0$  et la soudure à la température  $T$ . Le voltmètre impose un courant nul dans le circuit et mesure la circulation du champ électrique  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  :

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \varepsilon \vec{\nabla}T \cdot d\vec{\ell} = \int_{T_0}^T (\varepsilon_A - \varepsilon_B) dT. \quad (29a)$$

où  $\varepsilon_A$  et  $\varepsilon_B$  sont les pouvoirs thermoélectriques des deux métaux (A) et (B). Si on se place dans un régime de température où chacun de ces deux coefficients dépend peu de la température elle-même, on obtient

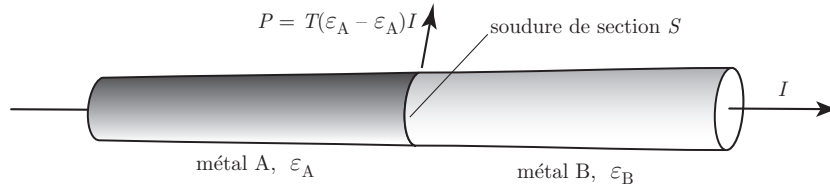
$$\Delta V = (\varepsilon_A - \varepsilon_B)(T - T_0), \quad (29b)$$

et on a réalisé un thermocouple. D'un point de vue électrocinétique, la soudure se comporte comme un générateur de *fem* (force électromotrice)  $\mathcal{E} = (\varepsilon_A - \varepsilon_B)(T - T_0)$ . Dans un thermocouple destiné à la métrologie, on choisit les deux métaux pour que cet effet soit facilement mesurable (par exemple chromel/alumel).

#### 4.4.2 Effet Peltier

L'effet Peltier est le dégagement (ou l'absorption) de chaleur quand il passe un courant au niveau d'une soudure entre deux métaux, en surplus de l'effet Joule et en situation isotherme. Lorsque  $\vec{\nabla}T = 0$ , on obtient en effet

$$\vec{q} = T L \vec{E} = T \varepsilon \vec{j}. \quad (30)$$



Considérons donc une soudure de section  $S$  entre deux métaux (A) et (B) au travers de laquelle il passe un courant  $I$  (voir figure). On a  $\vec{q}_A = T\varepsilon_A\vec{j}$  dans (A) et  $\vec{q}_B = T\varepsilon_B\vec{j}$  dans (B), avec la même densité de courant  $\vec{j}$  car le courant  $I = jS$  est le même dans les deux métaux. Il en résulte que  $\vec{q}_A \neq \vec{q}_B$ . Ainsi la puissance thermique qui traverse la soudure du côté de (A),  $q_A S$ , n'est pas égale à la puissance thermique qui traverse la soudure du côté de (B),  $q_B S$ . Il y a donc nécessairement un échange de chaleur entre la soudure et l'extérieur, dont la puissance vaut

$$P = -(q_B - q_A)S = +T(\varepsilon_A - \varepsilon_B)jS = T(\varepsilon_A - \varepsilon_B)I, \quad (31)$$

où  $T$  est la température de la soudure. Contrairement à l'effet Joule, l'effet Peltier est algébrique : s'il produit un dégagement de chaleur quand le courant passe dans un sens, il refroidit cette même soudure si le courant est inversé. Les modules Peltier sont par exemple utilisés en électrotechnique pour refroidir ou stabiliser en température des composants. On augmente l'effet en mettant plusieurs soudures en série.

# Chapitre 3

## Le rayonnement thermique

On s'intéresse dans ce chapitre au mode de transfert d'énergie (et d'impulsion) du rayonnement électromagnétique. Plus précisément, on étudie la situation du rayonnement dans le vide, en équilibre thermodynamique avec la matière environnante, qu'on désigne sous le nom de *rayonnement thermique*.

### 1 Quelques propriétés du rayonnement électromagnétique

#### 1.1 Description

Les équations de Maxwell montrent l'existence des ondes électromagnétiques. C'est une onde de structure transverse, c'est-à-dire que les champs électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  sont perpendiculaires à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde  $\vec{k}$ . Les équations de Maxwell montrent aussi que le champ électromagnétique possède une énergie, une impulsion et même un moment cinétique.

On s'intéresse ici au rayonnement électromagnétique dans le vide où la relation de dispersion est  $\omega = 2\pi\nu = kc$ , où  $\omega$  est la pulsation,  $\nu$  la fréquence et  $c$  la vitesse de la lumière. La linéarité des équations de Maxwell permet montrer que les champs électrique et magnétique peuvent se décomposer sur un ensemble de modes, chaque mode étant repéré par un vecteur d'onde  $\vec{k}$  et une polarisation  $\sigma$  :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{E}_{\vec{k}, \sigma}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{B}_{\vec{k}, \sigma}(\vec{r}, t), \quad (1)$$

où la sommation est faite sur toutes les valeurs du vecteur d'onde  $\vec{k}$  permises par les conditions aux limites et sur les deux directions de polarisation  $\sigma$ .<sup>1</sup> Pour un système macroscopique, la distribution des valeurs de  $\vec{k}$  peut être assimilée à un continuum, et donc la somme discrète sur  $\vec{k}$  remplacée par une intégrale.

Les densités volumiques et des densités de flux sont des grandeurs quadratiques en champ : de ce fait, on montre que leurs valeurs moyennes dans le temps s'obtiennent par une somme sur les modes (sans termes croisés). Dans toute la suite de ce chapitre, toutes ces grandeurs seront implicitement des moyennes temporelles mais, pour simplifier, on garde la même notation. Soit donc  $u$  la (moyenne temporelle de la) densité volumique d'énergie électromagnétique. Par décomposition sur les modes, on introduit la *densité spectrale* en posant

$$u(\vec{r}) = \iiint u_k(\vec{r}, \vec{k}) d^3k \quad (2a)$$

avec, en sommant sur les deux polarisations,

$$u_k(\vec{r}, \vec{k}) d^3r d^3k = \text{énergie électromagnétique dans le volume } d^3r \text{ situé en } \vec{r} \text{ pour les modes de vecteur d'onde } \vec{k} \text{ à } d^3k \text{ près.} \quad (2b)$$

Le rayonnement électromagnétique dans le vide peut aussi être décrit en termes de photons. Un photon est une particule définie après quantification du champ électromagnétique (transverse) d'un mode donné, possédant une énergie  $h\nu$  et une impulsion  $h\nu/c$ , où  $h$  est la constante de Planck. Soit

$$n_k(\vec{r}, \vec{k}) d^3r d^3k = \text{nombre de photons dans le volume } d^3r \text{ situé en } \vec{r} \text{ ayant un vecteur d'onde } \vec{k} \text{ à } d^3k \text{ près.} \quad (3)$$

On a alors simplement  $u_k(\vec{r}, \vec{k}) = h\nu n_k(\vec{r}, \vec{k})$ .

1. Les deux directions de polarisation  $\sigma$  sont associées à la décomposition du champ dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde : ce sont par exemple deux polarisations rectilignes orthogonales ou deux polarisations circulaires de sens opposés.

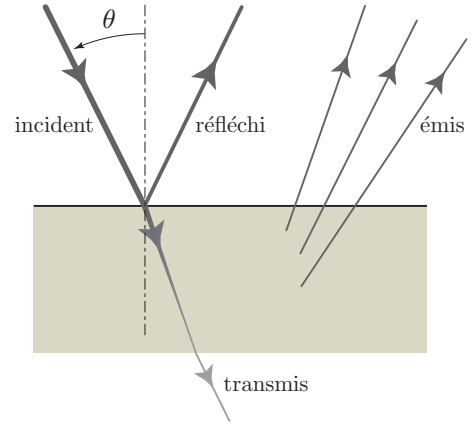


## 1.2 Éléments de radiométrie

Considérons un corps constitué d'une matière quelconque (métal ou isolant, milieu diélectrique ou magnétique), plongé dans le vide. Voyons ce qu'il advient lorsqu'un rayonnement incident, créé par des sources éloignées, arrive sur la surface du corps. L'étude de l'intensité lumineuse reçue, réfléchi, absorbée ou émise par la surface d'un corps est l'objet de la *radiométrie* (à ne pas confondre avec la *photométrie*, qui prend en compte la sensibilité de l'œil humain). Nous ne présentons ici que les grandeurs utiles à l'étude ultérieure du rayonnement thermique.

À partir de la normale à l'élément de surface du corps, on peut introduire les coordonnées sphériques avec notamment l'angle  $\theta$  par rapport à la normale.

- Le rayonnement entrant est celui des modes de vecteur d'onde dirigés vers la matière, c'est-à-dire avec un angle d'incidence  $\theta < \pi/2$ . Il correspond au rayonnement incident.
- Ce rayonnement entrant peut soit être réfléchi, soit absorbé, soit encore transmis par la matière.<sup>2</sup>
- Le milieu émet aussi un rayonnement, fonction notamment de sa température.
- Le rayonnement sortant est celui des modes de vecteur d'onde dirigés hors de la matière, c'est-à-dire avec un angle d'incidence  $\theta > \pi/2$ . Il correspond au rayonnement réfléchi et au rayonnement émis.



Ici, nous aurons juste besoin de calculer la puissance  $\mathcal{P}_i$  reçue par unité de surface du rayonnement incident. En utilisant la notion de photon, ce calcul est très similaire à ceux de la théorie cinétique des gaz. Précisément, on cherche à exprimer l'énergie incidente que reçoit l'élément de surface  $d^2\vec{r}$  pendant  $dt$ .

- Commençons par examiner les photons d'un seul mode, de vecteur d'onde  $\vec{k}$  dirigé vers la surface. L'énergie reçue est ceux des photons contenus dans le cylindre qui s'appuie sur cette surface et incliné de  $\theta$ , de longueur  $c dt$  et de hauteur  $c dt \cos \theta$ , de volume  $d^3r = c dt \cos \theta d^2r$ .
- Envisageons à présent les modes de vecteur d'onde  $\vec{k}$  à  $d^3k$  près. L'énergie des photons de ces modes est contenue dans le même cylindre et elle vaut donc, d'après (2b),

$$u_k(\vec{k}) d^3r d^3k = u_k(\vec{k}) c dt \cos \theta d^2r d^3k.$$

La puissance incidente par unité de surface de ces modes vaut ainsi

$$d^3\mathcal{P}_i = \frac{u_k(\vec{k}) d^3r d^3k}{d^2r dt} = u_k(\vec{k}) c \cos \theta d^3k. \quad (4a)$$

En sommant sur tous les modes incidents, c'est-à-dire sur toutes les directions du demi-espace extérieur et sur l'ensemble du spectre, on obtient

$$\mathcal{P}_i = \iiint_{\theta < \frac{\pi}{2}} u_k(\vec{k}) c \cos \theta d^3k \quad (4b)$$

qui est l'*éclairement énergétique* (ou *irradiance totale*), noté parfois  $E$ , mesuré en  $\text{W}/\text{m}^2$ . Par définition, cette grandeur ne dépend que des propriétés du rayonnement (pas du corps irradié).

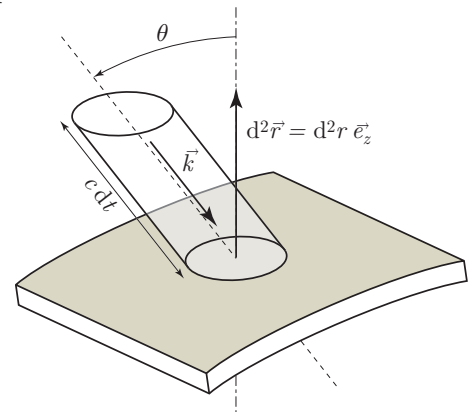
Les puissances réfléchi et absorbée permettent l'introduction de coefficients dépendant de la matière.

- (i) La réflexion peut se faire de manière spéculaire (selon des lois de Descartes) ou diffuse, selon l'état de surface de la matière. Globalement, la puissance réfléchi est écrite

$$\mathcal{P}_r = R \mathcal{P}_i, \quad (5)$$

où  $R$  est l'*albédo* (ou la *réflectance*) qui vérifie  $0 \leq R \leq 1$ . La valeur de l'albédo dépend de la nature du rayonnement incident (son spectre, sa direction principale) et de la surface. La détermination théorique de ce coefficient est un problème complexe. Dans les cas les plus simples, on peut le calculer : par exemple, pour un diélectrique linéaire homogène et isotrope, de surface plane, il est donné par intégration des relations de Fresnel.

2. Le rayonnement incident met en mouvement les charges libres ou liées du milieu. La réflexion correspond au rayonnement émis directement par ces charges, avec conservation de la phase de l'onde incidente. L'absorption correspond à la thermalisation du mouvement des charges. La transmission s'observe lorsque le rayonnement traverse le milieu.



(ii) La puissance absorbée à la surface est écrite

$$\mathcal{P}_a = a \mathcal{P}_i, \quad (6)$$

Le coefficient d'absorption global introduit ici vérifie  $0 \leq a \leq 1$ ; sa détermination théorique est aussi un problème complexe qui dépend des mécanismes mis en jeu.

- Si  $a = 1$ , le corps absorbe toute l'énergie reçue : ce cas servira de référence pour définir ultérieurement le *corps noir*, au § 3. Par exemple, le coefficient d'absorption d'une surface recouverte de *noir de carbone* est proche de 0,98.
- Si  $a = 0$ , le corps réfléchit ou transmet toute l'énergie reçue : c'est le cas d'un miroir parfait ou d'une vitre. Par exemple, le coefficient d'absorption d'une surface métallique polie dans le domaine du visible est proche de 0,01.
- Dans le cas général, le mécanisme d'absorption est progressif : il atténue l'amplitude des champs au fur et à mesure que l'onde pénètre dans la matière. La longueur caractéristique sur lequel le champ s'évanouit est appelée la profondeur de peau électromagnétique.

Enfin le corps émet vers l'extérieur un rayonnement de puissance  $\mathcal{P}_e$  par unité de surface, appelée *émittance énergétique*. Cette puissance rayonnée ne dépend par nature que des propriétés du corps. La loi de Kirchhoff au § 2.3 permettra de l'exprimer.

### 1.3 Pression de radiation

Sur la surface irradiée, le rayonnement échange de l'impulsion avec le corps, et exerce donc une force. La force normale est la *pression de radiation*, la force tangentielle est la *tension de radiation*. Lorsque le rayonnement est isotrope, la tension de radiation est nulle par raison de symétrie, aussi on ne calculera ici que la pression de radiation.

Le calcul de l'impulsion du rayonnement incident est très similaire à celui de l'énergie mené précédemment, à deux différences près.

- l'énergie des photons est  $h\nu$ , leur impulsion est  $h\nu/c$  dans la direction de propagation : on remplace donc la densité spectrale  $u_k(\vec{k})$  par  $u_k(\vec{k})/c$  dans la direction de propagation ;
- dans l'objectif de calculer la pression de radiation, on ne comptabilise que la composante normale à la surface de l'impulsion, ce qui revient à introduire un facteur  $-\cos\theta$  de projection.

Le flux d'impulsion du rayonnement incident par unité de temps sur l'élément de surface du corps est donc  $-P_i d^2\vec{r}$  avec, d'après (4b),

$$P_i = \iiint_{\theta < \frac{\pi}{2}} u_k(\vec{k}) \cos^2 \theta d^3k. \quad (7)$$

Le flux d'impulsion du rayonnement sortant s'exprime à l'identique du flux incident, avec un angle d'incidence  $\theta > \pi/2$  et dans la direction opposée : c'est donc  $P_s d^2\vec{r}$  avec

$$P_s = \iiint_{\theta > \frac{\pi}{2}} u_k(\vec{k}) \cos^2 \theta d^3k. \quad (8)$$

Si le corps est suffisamment épais, il n'y a aucune transmission. Alors, en régime permanent, le rayonnement incident est soit réfléchi, soit absorbé et rémis. Quel que soit le mécanisme, l'impulsion entrante dans le corps est  $-P_i d^2\vec{r}$ , l'impulsion sortante est  $P_s d^2\vec{r}$ . La variation l'impulsion par unité de temps dans le corps est donc  $-P_i d^2\vec{r} - (P_s d^2\vec{r}) = -P d^2\vec{r}$ , où

$$P = P_i + P_s = \iiint u_k(\vec{k}) \cos^2 \theta d^3k \quad (9)$$

est donc la pression de radiation.

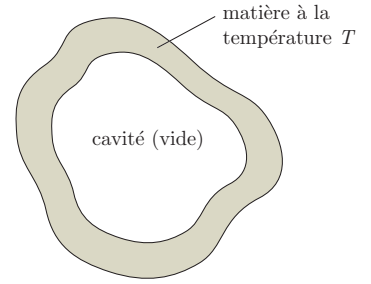
## 2 Le rayonnement thermique

### 2.1 Le rayonnement comme entité thermodynamique

La matière absorbe et émet en permanence un rayonnement électromagnétique, en raison de l'agitation des particules chargées qui la constituent. On ne traite ici que du *rayonnement thermique*, qui est le rayonnement électromagnétique émis par la matière en équilibre à une température  $T$ , c'est-à-dire précisément tel que toutes les charges en interaction avec le champ sont à l'équilibre thermique avec le reste de la matière.<sup>3</sup> On peut alors considérer que toute l'énergie électromagnétique émise ou reçue par la matière l'est aux dépens ou au bénéfice de son énergie interne.

3. Il n'est donc pas question ici de prendre en compte l'émission induite, le LASER, le rayonnement d'un arc électrique, d'une réaction chimique explosive, d'une réaction entre particules, d'une diode électroluminescente, etc.

Considérons une cavité vide de volume  $V$ , dont les parois sont formées par de la matière en équilibre à la température  $T$ . Tout le rayonnement contenu dans la cavité provient de la matière. Expérimentalement, on observe à l'aide de capteur qu'un très grand nombre de modes sont présents, le spectre de fréquence pouvant être assimilé à un continuum. Ce spectre dépend de la température des parois. Plus précisément, pour valider l'analyse thermodynamique, la taille de la cavité doit être grande devant les longueurs d'ondes essentiellement présentes. On verra (§ 3.2) que cette condition peut être mise en rapport avec la température : pour une cavité de taille 1 mètre, il faut  $T \gg 10^{-2}$  K.



Soit  $u_k(\vec{k}, T)$  la densité spectrale du rayonnement dans la cavité. Cette densité spectrale est en fait une fonction qui ne dépend ni de la forme ni de la nature des parois de la cavité. Ce résultat est la conséquence d'un raisonnement de thermodynamique : considérons deux cavités différentes, de même température, donc par définition à l'équilibre thermodynamique entre elles. Imaginons que les densités spectrales de ces deux cavités soient différentes pour un mode donné, c'est-à-dire une fréquence, une direction ou une polarisation donnée. Mettons alors les cavités en contact au travers d'un filtre fréquentiel ou d'un polariseur convenablement orienté pour sélectionner ce mode. Il en résulterait d'après (4b) un transfert d'énergie entre elles. Or par définition aucun transfert d'énergie n'a lieu entre deux systèmes à l'équilibre, donc les densités spectrales des deux cavités doivent être identiques.

Puisque le rayonnement ne dépend ni de la position ni de l'orientation de la cavité, il est homogène (indépendant du point  $\vec{r}$ ) et isotrope (indépendant de la direction). L'émission thermique ayant une polarisation aléatoire, le rayonnement est aussi globalement non polarisé. Toutes ces propriétés sont expérimentalement vérifiées. Pour tenir compte de ces propriétés, on introduit la densité spectrale en fréquence  $u_\nu(\nu, T)$  telle que

$$u_k(\vec{k}, T) d^3k = u_k(\vec{k}, T) 4\pi k^2 dk = u_\nu(\nu, T) d\nu$$

avec  $2\pi d\nu = c dk$ , donc

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{32\pi^4 \nu^2}{c^3} u_k(\vec{k}, T). \quad (10)$$

En résumé, la densité spectrale dans la cavité est une fonction universelle  $u_\nu(\nu, T)$  et sa densité volumique d'énergie ne dépend que de la température :

$$u(T) = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T) d\nu. \quad (11a)$$

Le rayonnement étant homogène, son énergie s'écrit

$$U(T, V) = Vu(T) \quad (11b)$$

De l'ensemble de ces propriétés, il ressort que le rayonnement thermique peut être considéré comme un système thermodynamique à part entière, avec des variables macroscopiques qui sont son volume  $V$  et sa température  $T$ . Ce système a aussi

- une énergie interne  $U$ , et donc une entropie  $S$  ;
- une pression  $P$  qui est la pression de radiation.

On peut faire une analogie : les modes indépendants du rayonnement se comportent comme les particules sans interaction d'un gaz parfait. L'interaction des modes du rayonnement avec la matière est alors l'analogie des collisions des particules du gaz avec les parois d'un récipient, donc la matière de la cavité joue le rôle d'un thermostat. Une particularité cependant : on conçoit difficilement le rayonnement sans interaction avec la matière,<sup>4</sup> donc c'est un système qui est rarement isolé.

## 2.2 Propriétés thermodynamiques

La densité spectrale du rayonnement thermique étant isotrope, on peut compléter le calcul de la pression de radiation. En écrivant en coordonnées sphériques

$$d^3k = 2\pi \sin \theta d\theta k^2 dk = \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} \times 4\pi k^2 dk,$$

il vient d'après (9)

$$P = \underbrace{\int u_k(\vec{k}, T) 4\pi k^2 dk}_{u(T)} \underbrace{\int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi}}_{1/3},$$

4. Le rayonnement fossile de l'univers peut toutefois être considéré comme isolé, son interaction avec la matière datant des instants qui ont suivi le *big bang*.

soit

$$P(T) = \frac{u(T)}{3}. \tag{12}$$

Il est notable que la pression ne dépend que de la température : de fait, aucune autre variable intensive n'est présente dans le système. Il est maintenant possible de calculer toutes les fonctions thermodynamiques du rayonnement, à une constante près. La différentielle de l'énergie interne  $U = Vu(T)$  s'écrit  $dU = Vu' dT + u dV$ . Puis, comme  $P = u/3$ , l'identité thermodynamique s'écrit

$$T dS = dU + P dV = Vu' dT + (u + P) dV = Vu' dT + \frac{4u}{3} dV.$$

Écrivons à présent la relation de Maxwell (égalité des dérivées croisées) sur la différentielle  $dS$  :

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{Vu'}{T} \right) = \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{u}{T} \right) \implies u' = \frac{4u}{T}.$$

Cette équation différentielle se résoud en

$$u(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4, \tag{13a}$$

où  $4\sigma/c$  est une constante ainsi écrite ici pour s'accorder ultérieurement à la loi de Stefan-Boltzmann (16b). On obtient ainsi la pression

$$P(T) = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4. \tag{13b}$$

Cette relation peut être considérée comme l'équation d'état du rayonnement. Ce calcul est dû à Boltzmann.

### 2.3 Loi de Kirchhoff

L'isotropie de la densité spectrale permet de calculer l'éclairement énergétique  $\mathcal{P}_i$ , de même qu'il a été possible de calculer la pression de radiation. Avec (4b), on a

$$\mathcal{P}_i = c \underbrace{\int u_k(\vec{k}, T) 4\pi k^2 dk}_{u(T)} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi}}_{1/4},$$

soit, avec (13a),

$$\mathcal{P}_i(T) = \frac{1}{4} cu(T) = \sigma T^4. \tag{14}$$

Si la matière est à équilibre thermodynamique avec le rayonnement, il n'y a plus d'échange d'énergie entre eux : tout ce qu'absorbe la matière doit être réémis, donc

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_a,$$

qui est la loi de Kirchhoff (globale) du rayonnement. En utilisant les expressions (6) et (14), on arrive à

$$\mathcal{P}_e(T) = a\mathcal{P}_i(T) = a\sigma T^4. \tag{15}$$

Cette loi a plusieurs conséquences.

- D'abord elle montre qu'un corps à l'équilibre émet d'autant plus qu'il peut absorber, c'est-à-dire que  $a$  proche de l'unité.
- Ensuite, cette loi fait correspondre des grandeurs intrinsèques du corps (sa émittance et son coefficient d'absorption) à une grandeur intrinsèque du rayonnement (l'éclairement). On peut poursuivre le raisonnement : puisque l'émittance et le coefficient d'absorption du corps ne dépendent que de son état thermodynamique et pas du rayonnement, la loi de Kirchhoff reste valable pour un corps à l'équilibre interne, qui ne serait plus en l'équilibre avec le rayonnement qui l'environne. La puissance totale émise par unité de surface par un corps à l'équilibre thermodynamique est donc toujours donnée par (15), quel que soit son environnement, mais où  $T$  est à présent la température du corps.
- Enfin, si un corps n'est pas à l'équilibre thermodynamique, l'application de l'hypothèse de l'équilibre local (voir chapitre 1, § 1.2) permet l'utilisation des formules précédentes, la température  $T$  étant alors la température locale de sa surface. Ceci permet l'application de l'ensemble de ces résultats aux problèmes de transfert énergétique.

### 3 Le corps noir

#### 3.1 Définition du corps noir

On cherche à mesurer les grandeurs fondamentales associées au rayonnement thermique, la densité spectrale  $u_\nu(\nu, T)$  et la densité d'énergie  $u(T)$ . Pour ce faire, Kirchhoff a introduit en 1862 la notion de *corps noir*. Par définition, un corps noir absorbe tout ce qu'il reçoit : il ne doit y avoir aucune partie du spectre qui se réfléchit (l'albédo est nul), tout le rayonnement reçu est absorbé, transformé en énergie interne du corps, puis réémis. Pour un corps noir, on écrit donc

$$a = 1. \tag{16a}$$

D'après (15), la puissance totale émise par unité de surface par le corps noir vaut simplement

$$\mathcal{P}_e(T) = \sigma T^4. \tag{16b}$$

C'est la loi de Stefan-Boltzmann, la constante universelle  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann, qui est mesurable. Cette expression est valable pour un corps noir supposé en équilibre thermique, quel que soit son environnement. Pour un corps quelconque, en tenant compte d'un coefficient d'absorption  $a < 1$ , on trouve  $\mathcal{P}_e < \sigma T^4$ , ce qui signifie qu'à une température donnée, aucun corps n'émet autant qu'un corps noir.

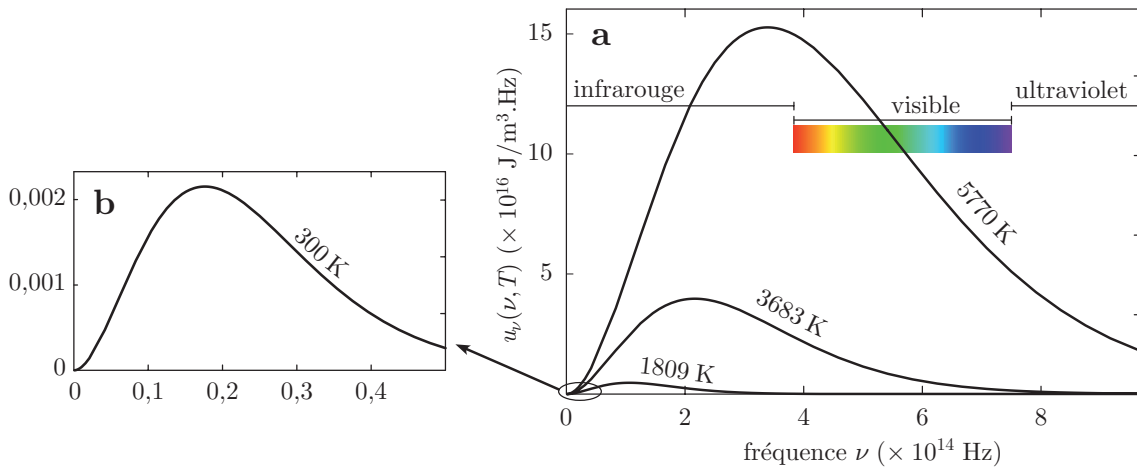
Expérimentalement, on réalise un corps noir avec ce qui ressemble à un four, plus précisément une *sphère intégratrice d'Ulbricht* (voir figure). Schématiquement, il s'agit d'une cavité percée d'un trou, dont la paroi interne a un albédo très faible : par réflexion et absorption successives, on peut considérer que toute l'énergie de rayonnement qui entre par le trou n'en sort quasiment plus. Plus précisément, la condition (16a) doit être vérifiée pour toute fréquence. Il suffit de porter la paroi de la sphère à une température contrôlée et de mesurer ce qu'elle émet à l'aide d'un détecteur spectral pour accéder à la loi  $u_\nu(\nu, T)$ .



#### 3.2 Résultats expérimentaux

À une température donnée, la loi  $u_\nu(\nu, T)$  présente un maximum à une fréquence  $\nu_m(T)$ .<sup>5</sup> À température ambiante,  $\nu_m(T)$  se situe dans l'infra-rouge et le corps noir n'émet quasiment rien dans le visible, d'où justement son appellation. Pour qu'un corps émette dans le visible, il doit être porté à une température de l'ordre de 5000 à 6000 K. À partir d'arguemnts basés sur l'effet Doppler, Wien a établi que le rapport  $\nu_m(T)/T$  est une constante, autrement dit la fréquence  $\nu_m(T)$  du maximum se déplace proportionnellement à la température

$$\nu_m(T) \propto T. \tag{17}$$

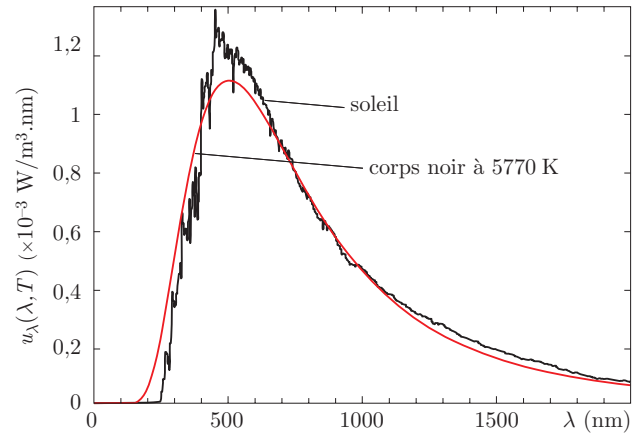


Densité spectrale du corps noir à différentes températures. En **a**, à la température de surface du soleil ( $T = 5770\text{ K}$ ), les températures de fusion du tungstène ( $T = 3683\text{ K}$ ) et du fer ( $T = 1809\text{ K}$ ). En **b**, à température ambiante ( $T = 300\text{ K}$ ).

Cette loi, bien vérifiée expérimentalement, est la loi du déplacement de Wien. Elle a de multiples applications.

5. La densité spectrale en longueur d'onde  $\lambda = c/\nu$  est  $u_\lambda(\lambda, T)$ , telle que  $u_\lambda d\lambda = u_\nu d\nu$ , donc  $u_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu$ . Par suite, le maxium en longueur d'onde de  $u_\lambda(\lambda, T)$  n'est pas exactement pour le même mode que le maximum en fréquence de  $u_\nu(\nu, T)$ .

- En astrophysique, la mesure du maximum d'intensité du spectre de la lumière reçue d'une étoile, dans la mesure où ce spectre est comparable à celui d'un corps noir, donne des informations sur sa température, du moins sa température de surface. Pour le soleil, la température de surface est ainsi estimée à 5 770 K.
- Pour toute source de lumière, le maximum d'intensité du spectre correspond à une *température de couleur* qui est celle du corps noir émettant un maximum d'intensité à la même fréquence. Si la source de lumière n'est pas un corps noir, sa température de couleur n'a rien à voir avec sa température réelle. Par exemple, les diodes électroluminescentes ont une température de couleur qui peut aller de 3 000 à 6 000 K, alors que leur propre température reste proche de la température ambiante.



Densité spectrale en longueur d'onde du soleil (mesurée au-dessus de l'atmosphère terrestre) et d'un corps noir à la température de 5770 K.

Des mesures précises ont permis d'élaborer des formes d'interpolation à la densité spectrale.

- Pour  $\nu \ll \nu_m(T)$ , la loi  $u_\nu(\nu, T)$  est expérimentalement en  $T\nu^2$ .
- Pour  $\nu \gg \nu_m(T)$ , Wien a proposé en 1896 une forme en  $\nu^3 e^{-C_1\nu/T}$ , où  $C_1$  est constante.

### 3.3 Apports de la physique statistique

Pour compléter ce chapitre sur le rayonnement thermique et le corps noir, nous allons exposer brièvement les résultats de la physique statistique. Le traitement statistique des modes du rayonnement s'appuie sur un résultat exact de l'électromagnétisme : on peut montrer que chaque mode se comporte comme un oscillateur harmonique indépendant à une dimension. La première approche est ensuite du ressort de la physique statistique classique, où s'applique le théorème d'équipartition. On obtient alors une densité spectrale

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T, \tag{18}$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann, qui est la loi de Rayleigh-Jeans. Cette loi est en accord avec l'expérience pour les basses fréquences  $\nu \ll \nu_m(T)$ . Mais elle ne prévoit pas le maximum  $\nu_m(T)$  de la densité spectrale et, surtout,  $u(T)$  diverge :

$$u(T) = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T) d\nu \rightarrow \infty.$$

Puisque ce sont les hautes fréquences qui font diverger l'intégrale, ce résultat aberrant a été baptisé « catastrophe ultraviolette ». À fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, le corps noir constituait une difficulté théorique majeure : la physique classique se révélait incapable de rendre compte du maximum de la loi de densité spectrale  $u_\nu(\nu, T)$  et de résoudre la catastrophe ultraviolette. L'existence d'une répartition thermique des modes du rayonnement suggérait que les fréquences jouent le même rôle que les énergies dans un système matériel mais, pour faire le lien entre énergie et fréquence, il manquait une constante. En 1900, dans une approche empirique, Planck propose la forme d'interpolation

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{C_2 \nu^3}{e^{C_1 \nu/T} - 1}$$

mathématiquement construite afin

- de coïncider avec la loi de Rayleigh-Jeans à basse fréquence ( $\nu \ll \nu_m(T)$  ou  $C_1 \nu/T \ll 1$ ),
- et de coïncider avec la forme proposée par Wien en  $\nu^3 e^{-C_1 \nu/T}$  à haute fréquence ( $\nu \gg \nu_m(T)$  ou  $C_1 \nu/T \gg 1$ ).

Le raccord à la loi de Rayleigh-Jeans (18) impose  $C_2/C_1 = 8\pi k_B/c^3$ . Par ailleurs, la présence d'un terme en  $e^{-C_1 \nu/T}$  à haute fréquence, de la forme du facteur statistique de Boltzmann  $e^{-\varepsilon/k_B T}$ , suggère de poser  $C_1 \nu/T = h\nu/k_B T$  où  $h\nu = \varepsilon$  serait une énergie associée au mode de fréquence  $\nu$  du rayonnement. La constante  $h$  est la seule à rester dans l'expression : on obtient  $C_1 = h/k_B$ ,  $C_2 = 8\pi h/c^3$ , donc

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \tag{19}$$

qui est la forme finale de la loi de Planck. Cette loi interpole remarquablement bien les données expérimentales.

Quelques mois plus tard, Planck tente une interprétation physique de sa formule avec deux idées : d'une part il applique les idées statistiques de Boltzmann, d'autre part il admet que les charges oscillantes de la matière ne peuvent

céder au rayonnement que des paquets d'énergie  $\varepsilon = h\nu$ . Pour Planck, cette dernière relation était un artifice sans fondement, et n'était d'ailleurs pas associée aux propriétés du rayonnement lui-même. Autrement dit, Planck n'avait pas d'idée de quantification et ne considérait pas sa constante  $h$  comme fondamentale. Quelques années plus tard, en 1905, Einstein propose pour la première fois une idée de quantification du rayonnement afin d'expliquer les données expérimentales de l'effet photoélectrique. Il donne alors un contenu physique à la formule  $\varepsilon = h\nu$  et, par suite, à la constante  $h$  qui est maintenant connue sous le nom de *constante de Planck-Einstein*. Il est du ressort de la physique statistique quantique de donner une justification précise à la loi de Planck : chaque oscillateur représentant un mode est quantifié et obéit à une distribution de Bose-Einstein. La quantification des champs achève la description, les quantum du rayonnement devenant les photons.

La loi de Planck permet le calcul complet des grandeurs thermodynamique. La densité volumique d'énergie interne est ainsi

$$u(T) = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T) d\nu = 8\pi \frac{(k_B T)^4}{(hc)^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{= 6\zeta(4) = \pi^4/15} = \frac{\pi^2}{15} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}, \quad (20)$$

ce qui, par comparaison à (13a), donne la valeur de la constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = \frac{\pi^2}{60} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2} \simeq 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4. \quad (21)$$

# Chapitre 4

## Bases de l'hydrodynamique

L'hydrodynamique traite de la dynamique des états fluides : ce sont les états gazeux ou liquides pour lesquels la matière peut s'adapter à la forme d'un solide environnant (récipient, paroi). Cette propriété s'interprète en admettant que le fluide ne présente à l'équilibre aucune résistance au cisaillement.

### 1 Rappels d'hydrostatique

À l'équilibre (mécanique et thermodynamique), un fluide est :

- de température uniforme, par définition thermodynamique de la température ;
- de vitesse nulle ( $\vec{v} = 0$ ), ou ayant un champ de vitesse identique à celui d'un solide ( $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ , où  $\vec{V}$  traduit une translation et  $\vec{\Omega} \wedge \vec{r}$  une rotation de vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ ). Ce champ de vitesse garantit l'absence de toute déformation (compression, cisaillement) dans le fluide, donc l'absence de force de viscosité, même dans un fluide réel (voir chapitre 6). Autrement dit, le fluide est à l'équilibre si on peut trouver un référentiel où il est au repos.

On va donc écrire les équations caractérisant le fluide au repos, c'est-à-dire de champ de vitesse nul.

#### 1.1 Forces dans le fluide au repos

On distingue deux types de forces.

- (i) Les forces d'origine externe au fluide agissant à longue distance. C'est le cas de la pesanteur ou des forces centrifuges. Écrivons le cas de la pesanteur : un élément de masse  $\delta m$  de volume  $d^3r$  subit son poids  $\delta m \vec{g} = \rho \vec{g} d^3r$ ,  $\rho \vec{g}$  étant donc la force par unité de volume.
- (ii) Les forces internes au fluide agissant à courte portée. À l'équilibre thermodynamique, le fluide ne présente aucune résistance au cisaillement (on considère que toute sollicitation de cisaillement est immédiatement résorbée par un écoulement). On en déduit que, sur tout élément de surface  $d^2\vec{r}$  de la matière, la force exercée n'a aucune composante parallèle à la surface et peut donc s'écrire  $-P d^2\vec{r}$ , où  $P$  est la pression.<sup>1</sup> On peut montrer que la pression est une grandeur isotrope (indépendante de la direction de l'élément de surface, voir chapitre 5). À quelques rares exceptions près, la pression dans un fluide est une grandeur positive.<sup>2</sup>

Si on choisit un volume  $V$  quelconque dans le fluide, il subit de la part du reste du fluide une force de pression résultante qui s'exprime à l'aide d'une intégrale de surface s'appuyant sur le volume. Il est utile de transcrire cette force sous la forme d'une intégrale de volume. Grâce à la formule du gradient, on peut écrire

$$\vec{F} = - \oint_V P d^2\vec{r} = - \iiint_V \vec{\nabla} P d^3r, \quad (1)$$

ce qui fait apparaître le terme  $-\vec{\nabla}P$  comme une force par unité de volume. Bien entendu, en vertu du principe d'action-réaction, le reste du fluide subit de la part de ce volume  $V$  une force opposée.

---

1. La pression est une grandeur qui souffre d'une grande multiplicité des unités, chacune utilisée selon le contexte ou les habitudes : le Pascal (unité du S.I.,  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ), le bar ( $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ), l'atmosphère ( $1 \text{ atm} = 1,01325 \text{ bar} \simeq 1 \text{ bar}$ ), le mm de mercure (en référence à l'expérience de Toricelli,  $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm de Hg}$ ), le kilogramme par  $\text{cm}^2$  (en confondant le poids avec la masse,  $1 \text{ bar} \simeq 1 \text{ kg/cm}^2$ ), ...

2. La pression  $P$  dans un fluide à l'équilibre est la somme de deux termes.

- Le premier est la *pression cinétique*  $P_{\text{cin}}$ , résultante des collisions des particules contre la paroi, donc toujours positive.
- Le second est la *pression interne*  $P_{\text{int}}$ , résultante des interactions entre les particules, qui peut être négative.

Dans un gaz, étant donné la faible contribution des interactions, la pression  $P = P_{\text{cin}} + P_{\text{int}}$  est toujours positive. Dans un liquide, il est possible d'observer des états de pression négative (liquide sous tension). Ces états sont métastables, la formation d'une bulle par cavitation rétablissant un état stable de pression positive, mais peuvent perdurer sur des temps longs (exemple : la sève dans les arbres).



## 1.2 Équation d'équilibre

Reprenons un volume  $V$  quelconque : à l'équilibre, la somme des forces exercée est nulle :

$$\iiint_V \rho \vec{g} d^3r - \iiint_V \vec{\nabla} P d^3r = 0.$$

Cette équation doit être vraie quel que soit le volume  $V$ , d'où forcément

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{g}. \quad (2)$$

C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique. Le second membre doit être complété si d'autres forces volumiques interviennent. Lorsque seule la pesanteur intervient, l'équation (2) montre que, quelle que soit la géométrie, la pression ne dépend que la cote verticale  $z$  (car la seule composante non nulle du gradient est selon  $z$  qui porte  $\vec{g}$ ). Autrement dit, tous les points situés à la même cote (ou profondeur) ont la même pression, c'est le *principe de Pascal*. Toujours en application de (2), il en résulte que la masse volumique ne peut dépendre elle aussi que de  $z$ .

Si la masse volumique  $\rho$  est uniforme, on peut intégrer facilement (2) : en orientant  $z$  vers le haut,

$$P = P_0 - \rho g(z - z_0), \quad (3)$$

où l'on a posé  $P_0 = P(z = z_0)$ . Voyons quelques applications.

- (i) Dans l'eau,  $\rho = 1 \text{ kg/L}$ . Avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2} \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$ , on en déduit que sur une hauteur de  $\Delta z = 10$  mètres la variation de pression  $\Delta P = \rho g \Delta z$  vaut approximativement 1 bar (ou 1 atm). Par exemple, en mer, à 40 mètres de profondeur, la pression est d'environ 5 bar.
- (ii) Dans le mercure,  $\rho = 13,5 \text{ kg/L}$ . Une variation de pression de 1 bar est obtenue sur une hauteur de 760 mm. Avec cette valeur, l'expérience de Toricelli sert de base à la définition du mm de mercure comme unité de pression.
- (iii) On citera aussi l'expérience du tonneau de Pascal, le principe des vases communicants, du puits artésien, des presses hydrauliques ou des châteaux d'eau.

## 1.3 Théorème d'Archimède

Considérons un corps de volume  $V$ , entièrement immergé dans un fluide au repos de masse volumique  $\rho_{\text{fl}}$ . La présence du corps ne perturbe pas la condition d'équilibre (2) du fluide dont la carte du champ de pression est donc inchangée. La force que le fluide exerce sur le corps est la résultante des forces de pression, soit

$$\vec{I} = - \oint_V P d^2\vec{r} = - \iiint_V \vec{\nabla} P d^3r = - \iiint_V \rho_{\text{fl}} \vec{g} d^3r.$$

L'intégrale fait apparaître la masse  $M_{\text{fl}}$  du fluide qui occuperait l'emplacement du corps, et on obtient

$$\vec{I} = - M_{\text{fl}} \vec{g}. \quad (4)$$

La force  $\vec{I}$  est la poussée d'Archimède, elle vaut donc l'opposé du poids du volume du liquide déplacé (théorème d'Archimède). Si le corps immergé a une masse volumique moyenne  $\rho_c$ , donc une masse totale  $\rho_c V$ , la résultante de son poids et de la poussée d'Archimède vaut

$$\vec{P} + \vec{I} = (\rho_c - \rho_{\text{fl}}) V \vec{g}. \quad (5)$$

La flottabilité du corps est donc uniquement fonction de la différence des masses volumiques.

Voyons quelques remarques.

- (i) Le théorème d'Archimède s'applique aussi dans le cas d'une masse volumique non uniforme du fluide (mais ne dépendant que de  $z$ , en raison du principe de Pascal). On peut donc traiter le cas d'un solide en partie émergé, l'air au-dessus du liquide étant un fluide léger dont on peut négliger le poids. Ainsi, seul le poids du volume du liquide déplacé (par la partie immergée du corps) intervient dans la poussée.
- (ii) Les applications sont nombreuses. Un glaçon flotte parce que la masse volumique de la glace ( $0,92 \text{ g/cm}^3$ ) est plus faible que celle de l'eau. Une montgolfière s'élève parce que l'air chaud contenu dans l'enveloppe est d'une densité plus faible que l'air ambiant. Enfin, le fait que ce soit la masse volumique globale  $\rho_c$  du corps qui intervienne dans la force totale permet de comprendre la flottabilité des navires : malgré leur poids, leur volume est tel que  $\rho_c < \rho_{\text{fl}}$ .
- (iii) Le point d'application de la poussée d'Archimède est le centre d'inertie du volume d'eau déplacé, non pas celui du corps immergé. Cette distinction intervient dans les problèmes de stabilité des bateaux lors un mouvement de roulis ou de tangage.

## 2 Cinématique des fluides

### 2.1 Rappels

Rappelons la description physique du système : le fluide est décrit comme un ensemble d'éléments de masse constants dont on suit le mouvement au cours de temps. Si la position à un instant de référence  $t_0$  est  $\vec{r}_0$ , sa position à un instant quelconque  $t$  est  $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$  : c'est le point de vue de Lagrange. Dans le point de vue d'Euler, on se place en une position  $\vec{r}$  de l'espace où on voit défilier au cours de temps les éléments de matière : l'élément de matière présent à l'instant  $t$  en  $\vec{r}$  est celui qui occupait à l'instant  $t_0$  la position  $\vec{r}_0$ , avec

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t). \quad (6)$$

Une grandeur locale  $A$  quelconque est donc soit décrite dans le point de vue de Lagrange avec  $A = A(\vec{r}_0, t)$ , soit dans le point de vue d'Euler avec  $A = A(\vec{r}, t)$ , avec la correspondance (6). La dérivée par rapport au temps dans le point de vue de Lagrange est la dérivée particulaire  $dA/dt$ , la dérivée par rapport au temps dans le point de vue d'Euler est la dérivée partielle  $\partial A/\partial t$ , la correspondance étant donnée par la relation établie au chapitre 1 :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})A. \quad (7)$$

Par exemple, l'accélération  $d\vec{v}/dt$  d'un élément de masse donné de vitesse  $\vec{v}$  s'écrit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \quad (8)$$

On peut montrer que  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{r} \dot{\otimes} \vec{v} \wedge \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2$ . Ces termes sont non linéaires en vitesse, ce qui complique beaucoup la résolution des équations différentielles.

Lorsque les équations fondamentales sont posées, on peut choisir l'un ou l'autre des points de vue pour la résolution des problèmes.

- À l'usage, le point de vue de Lagrange s'avère extrêmement technique à mettre en œuvre. Si on accepte de payer ce prix, il mène à des équations explicites, voire à des solutions exactes (ou à défaut des solutions où l'on maîtrise très bien les ordres d'approximation). Le point de vue de Lagrange est aussi intéressant dans les problèmes ondulatoires, car les éléments de masse  $dm$  ne s'éloignent jamais beaucoup de leur position initiale, et dans l'application des conditions aux limites sur des interfaces mobiles (cas des vagues).
- Cependant, en présence d'un véritable écoulement, le point de vue de Lagrange s'avère maladroit, parce qu'il oblige à repérer des éléments de masse par la position qu'ils occupaient à un instant  $t_0$ , position qui peut vite se situer loin du système étudié. En d'hydrodynamique, on préfère donc résoudre les problèmes en invoquant le point de vue d'Euler, c'est celui qui sera adopté par défaut dans ce cours et les exercices.

Attention, ne pas confondre *trajectoire* et *ligne de courant*.

- Les trajectoires font référence au point de vue de Lagrange : elles sont construites au cours du temps par l'ensemble des positions de chaque élément de masse. Elles sont facilement visualisables (en noyant des marqueurs dans le fluide), mais difficilement calculables dans le cas général (il faut trouver les lois horaires).
- Les lignes de courant font référence au point de vue d'Euler : elles sont déterminées à un instant donné par l'ensemble du profil du champ de vitesse. Elles sont difficilement visualisables, mais plus facilement calculables. On écrit qu'un élément de longueur  $d\vec{\ell}$  d'une ligne est parallèle à  $\vec{v}$ , ce qui amène par exemple à

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

qu'on peut intégrer.

### 2.2 Quelques écoulements particuliers

#### 2.2.1 Écoulement stationnaire

Dans un écoulement stationnaire, en chaque point de l'espace, la vitesse reste constante. Dans le point de vue d'Euler,  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  ne dépend donc pas de  $t$ , ce qu'on écrit

$$\text{écoulement stationnaire : } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \implies \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \quad (9)$$

Dans ce cas, les éléments de masse passent toujours par les mêmes valeurs de la vitesse en un point donné, aussi les lignes de courant se confondent avec les trajectoires.

### 2.2.2 Écoulement uniforme

Dans un écoulement uniforme, la vitesse est la même partout en chaque point de l'espace (dans le volume du fluide). Dans le point de vue d'Euler,  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  ne dépend donc pas de  $\vec{r}$ , ce qu'on écrit

$$\text{écoulement uniforme : } \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0 \implies \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (10)$$

### 2.2.3 Vorticité et écoulement irrotationnel

On appelle *vorticité* d'un écoulement la quantité

$$\vec{\omega} = \vec{r} \dot{\circ} \vec{v}. \quad (11)$$

Ce vecteur décrit le caractère tourbillonnaire du mouvement du fluide. Soit par exemple le champ de vitesse d'un fluide en rotation,  $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{r}$ . Dans ce cas, on calcule facilement  $\vec{\omega} = \vec{r} \dot{\circ} \vec{v} = 2\vec{\Omega}$ , si bien que la vorticité est liée au vecteur de rotation. Dans le cas général, on parle aussi de *vecteur tourbillon* qui est par définition  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{r} \dot{\circ} \vec{v}$ .

Lorsqu'il n'y a pas de vorticité, on dit que l'écoulement est *irrotationnel* :

$$\text{écoulement irrotationnel : } \vec{\omega} = \vec{r} \dot{\circ} \vec{v} = 0. \quad (12)$$

Alors, il existe une fonction  $\varphi(\vec{r}, t)$  telle que  $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ . Cette fonction  $\varphi$  est le *potentiel des vitesses*, on dit que l'écoulement irrotationnel est aussi un écoulement potentiel. L'avantage de cette situation est qu'au lieu de chercher trois fonctions scalaires  $v_x(\vec{r}, t)$ ,  $v_y(\vec{r}, t)$  et  $v_z(\vec{r}, t)$ , il suffit d'en trouver une seule  $\varphi(\vec{r}, t)$ . Les surfaces équipotentielles (d'équation  $\varphi = \text{cste}$ ) sont orthogonales aux lignes de courant, comme en électromagnétisme. L'analogie avec l'électromagnétisme permet d'ailleurs de résoudre certains problèmes d'hydrodynamique, ou inversement.

### 2.2.4 Écoulement incompressible

Il a été vu au chapitre 1 la relation de conservation de la masse : la masse volumique  $\rho$  et le champ de vitesse vérifient  $\vec{v}$  la relation

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (13)$$

On dit qu'un fluide est animé d'un *écoulement incompressible* lorsque le volume  $d^3r$  de chaque élément de masse reste constant (mais il peut se déformer). Alors  $\rho = \text{cste}$ , donc

$$\text{écoulement incompressible} \iff \frac{d\rho}{dt} \iff \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (14)$$

Lorsque l'écoulement est incompressible, la relation  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  montre qu'il existe un champ de vecteur  $\vec{w}$  tel que  $\vec{v} = \vec{r} \dot{\circ} \vec{w}$  (à l'identique de l'électromagnétisme :  $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{r} \dot{\circ} \vec{A}$ ). Dans le cas général, ce potentiel vecteur des vitesses a peu d'utilité, car il remplace un vecteur ( $\vec{v}$ ) par un autre ( $\vec{w}$ ). Cependant, dans le cas d'un écoulement à 2D dans le plan  $(O, x, y)$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = v_x(x, y, t) \vec{e}_x + v_y(x, y, t) \vec{e}_y,$$

on montre qu'on peut choisir

$$\vec{w}(\vec{r}, t) = \psi(x, y, t) \vec{e}_z.$$

En effet, écrivant  $\vec{v} = \vec{r} \dot{\circ} \vec{w}$ , on obtient  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ , d'où  $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$ . La fonction  $\psi(x, y, t)$  est la *fonction de courant*. Par construction, elle se conserve le long d'une ligne de courant. En effet, en différentiant à un instant donné le long d'une telle ligne, c'est-à-dire un élément de longueur  $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$  parallèle à  $\vec{v}$ ,

$$d\psi = \vec{\psi} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy = (\vec{v} \wedge d\vec{\ell}) \cdot \vec{e}_z = 0.$$

Attention : il faut faire la différence entre un « fluide incompressible » et un « écoulement incompressible ». Le fluide est incompressible si, quelles que soient les circonstances, sa masse volumique ne varie pas. Dans ce cas, son écoulement sera incompressible. Mais inversement, l'écoulement d'un fluide compressible peut être incompressible. Voyons à quelles conditions un fluide est considéré incompressible : l'équation d'état du fluide s'écrit  $\rho = \rho(P, T)$ , où  $P$  et  $T$  sont la pression et la température, et on introduit respectivement les coefficients de compressibilité isotherme  $\chi_T$  et de dilatation thermique  $\alpha$  définis par

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P.$$

Le fluide est donc incompressible si  $\chi_T = 0$  et  $\alpha = 0$ . Souvent, dans la résolution d'un problème d'hydrodynamique, on néglige les phénomènes thermiques, et le fluide est considéré incompressible si on peut écrire  $\chi_T = 0$ . Dans ce cas, l'écoulement est donc aussi incompressible et  $\text{div } \vec{v} = 0$ . Nous verrons, après avoir présenté l'équation de Bernoulli, à quelles conditions l'écoulement d'un fluide compressible peut être considéré incompressible.

### 3 Dynamique des fluides parfaits

#### 3.1 L'équation d'Euler

L'impulsion est une grandeur qui ne se conserve pas, puisqu'une force peut la faire varier. C'est aussi une grandeur qui se transporte à la fois par convection et par diffusion (au travers des forces de pression). L'équation de bilan sur l'impulsion est le principe fondamental de la dynamique, qu'on d'écrit pour un élément de masse  $\delta m = \rho d^3r$  donné :

$$\rho d^3r \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{somme des forces appliquées à } dm \implies \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{somme des forces volumiques.}$$

Nous avons déjà fait l'inventaire des forces dans un fluide : on distingue

- les forces à longue portée, comme la pesanteur de densité volumique  $\rho \vec{g}$ ,
- les forces à courte portée. On considère ici un *fluide parfait*, dépourvu de « frottement interne » entre ses couches même en dehors de l'équilibre, c'est-à-dire non visqueux (la viscosité fera l'objet de chapitres ultérieurs). La seule force à courte portée est alors la force de pression, de densité volumique est  $-\vec{\nabla}P$ .

On obtient donc

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g}.$$

En utilisant l'expression (8) de la dérivée particulaire,

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} \quad (15)$$

qui est l'équation d'Euler applicable à un fluide non visqueux.

L'équation d'Euler est l'une des plus importantes de l'hydrodynamique : sous couvert de ses hypothèses, elle permet de calculer les écoulements. Elle doit cependant être complétée par l'équation de conservation de la masse et par l'équation d'état du fluide, cette dernière pouvant souvent être remplacée par une hypothèse simplificatrice :

- fluide ou écoulement incompressible,
- écoulement isotherme ou isentropique,
- fluide barotrope, c'est-à-dire où on considère que  $\rho = \rho(P)$ , ...

L'équation d'Euler est une équation aux dérivées partielles (en temps et en espace), non linéaire. Comme lors de la résolution de toute équation différentielle, il faut des données pour déterminer les constantes d'intégration.

- En variable temps, ce sont les *conditions initiales*, c'est-à-dire la connaissance du champ de vitesse et/ou de pression à un instant donné. Cependant, si on considère un écoulement stationnaire ( $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ ), il ne subsiste dans l'équation d'Euler que des dérivées spatiales et les conditions initiales sont inutiles.
- En variables spatiales, ce sont les *conditions aux limites*, c'est-à-dire la connaissance du champ de vitesse et/ou de pression à tout instant en des lieux précis du système, ce qui revient en général à préciser comment se comporte le fluide à l'interface avec l'extérieur (parois d'un récipient, surface libre, ...). On distingue plusieurs cas.

- (i) Pour un écoulement sur une surface solide fixe, de normale  $\vec{n}$ , on écrit que le fluide ne peut pas pénétrer la surface, ce qui impose  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  : la composante normale de la vitesse est nulle. Il n'est rien dit sur la composante tangentielle pour un fluide non visqueux.
- (ii) Si deux fluides 1 et 2 coulent l'un sur l'autre sans se mélanger, l'interface qui les sépare est mobile. Notant  $\vec{n}$  la normale à cet interface, on écrit que les deux fluides ne se pénètrent pas l'un dans l'autre, ce qui impose  $\vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}$ . D'autre part, le principe d'action/réaction impose aussi que  $P_1 = P_2$  à l'interface. Par exemple, à l'interface eau/air, on écrira  $P = P_a$ , où  $P_a$  est la pression atmosphérique, supposée constante et uniforme.
- (iii) Autre cas de figure : dans un tuyau de section d'entrée  $S$ , on peut imposer le débit volumique global  $D$  (exprimé en  $\text{m}^3/\text{s}$ ) en écrivant

$$\oiint_S \vec{v} \cdot d^2\vec{r} = D. \quad (16)$$

Si on connaît le profil de vitesse sur la section (par exemple supposé uniforme), on détermine les constantes.

### 3.2 Une application : l'équation du son

On cherche une solution des équations précédentes de la forme  $\rho, P, \vec{v}$  = solution statique au repos (indice 0) + solution ondulatoire (indice 1), c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t) \\ P(\vec{r}, t) &= P_0(\vec{r}) + P_1(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) &= 0 + \vec{v}_1(\vec{r}, t).\end{aligned}$$

Dans la solution statique, la vitesse est nulle et on suppose la masse volumique  $\rho_0$  uniforme (mais la pression  $P_0$  peut dépendre du point). Écrivons les bilans de masse et d'impulsion, soit l'équation de continuité et l'équation d'Euler.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 + \rho_1)\vec{v}_1 &= 0, \\ (\rho_0 + \rho_1)\left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1\right) &= -\vec{\nabla}(P_0 + P_1) + (\rho_0 + \rho_1)\vec{g}.\end{aligned}$$

Dans ces équations, on trouve des termes d'ordre 0 (c'est forcément l'équation  $\vec{\nabla}P_0 = \rho_0\vec{g}$ ), des termes d'ordre 1 qui nous intéressent et des termes d'ordres supérieurs (produits des termes d'ordre 1) que nous allons négliger. Nous faisons donc l'*approximation linéaire*, et il reste

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \quad (17a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla}P_1 + \rho_1\vec{g}. \quad (17b)$$

Pour trouver les variables  $\rho_1, P_1$  et  $\vec{v}_1$ , nous avons une équation scalaire et une équation vectorielle : il nous manque une équation scalaire. C'est en fait l'équation d'état du fluide  $\rho = \rho(P, T)$ . Ici nous allons admettre un résultat : les ondes sonores dans un fluide sont isentropiques,<sup>3</sup> si bien qu'on peut utiliser le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{P_1} \quad \Longrightarrow \quad \rho_1 = \rho_0 \chi_S P_1 = \frac{1}{c^2} P_1. \quad (17c)$$

Les trois équations (17a), (17b) et (17c) sont les équations de l'onde sonore à l'approximation linéaire. On a posé

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}. \quad (18)$$

Pour une onde sonore, on peut justifier que le terme  $\rho_1\vec{g}$  dans l'équation (17b) est négligeable.<sup>4</sup> Ce terme étant omis, pour trouver l'équation d'onde, voyons le cas plus simple où à la fois le mouvement du fluide et la propagation se font à une dimension  $(O, x)$ . Il reste alors

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (20a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad (20b)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{c^2} P_1. \quad (20c)$$

On peut alors découpler les équations en élevant d'un ordre la dérivation : en utilisant successivement (20c), (20a) et (20b), on calcule

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c^2 \left( -\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} \right) = c^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}$$

qui aboutit donc à l'équation d'onde de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}. \quad (21)$$

3. Le son est une onde isentropique tant que la longueur d'onde reste grande devant la profondeur de peau thermique. Cette approximation est tout à fait correcte dans la gamme de fréquences habituelle (jusque  $10^9$  Hz dans l'air,  $10^{13}$  Hz dans l'eau).

4. Comparons les ordres de grandeur des deux termes du second membre de (17b) : écrivant  $\vec{\nabla}P_1 = c^2 \vec{\nabla}\rho_1$  et  $\|\vec{\nabla}\rho_1\| = k\rho_1$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde, on a

$$\frac{\rho_1 g}{\|\vec{\nabla}P_1\|} = \frac{\rho_1 g}{c^2 k \rho_1} = \frac{g}{\omega c}, \quad (19)$$

où l'on a utilisé la relation de dispersion (22) pour introduire la pulsation  $\omega$ . Dans l'air, même à une basse fréquence de 10 Hz, ce rapport est de l'ordre de  $10^{-3}$ .

On peut obtenir la même équation pour  $\rho_1$  et  $v_1$ . Ceci montre qu'une onde peut se propager avec la célérité  $c$  et avec une relation de dispersion

$$\omega = kc, \quad (22)$$

où  $\omega$  est la pulsation et  $\vec{k}$  le vecteur d'onde.

Dans l'eau,  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\chi_S = 4,5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  et on trouve  $c \simeq 1500 \text{ m/s}$ . Dans un gaz parfait,  $\chi_S = \chi_T/\gamma$ , avec  $\chi_T = 1/P_0$  et  $\gamma$  le rapport  $C_P/C_V$  des capacités calorifiques; comme  $P_0 = nRT_0/V = \rho_0 RT_0/M$ , où  $M$  est la masse molaire, il vient

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}, \quad (23)$$

soit environ  $300 \text{ m/s}$  dans l'air.

### 3.3 Discussion du rôle de la pesanteur : le nombre de Froude

Considérons un obstacle solide, de hauteur caractéristique  $h$ , que doit contourner un fluide. Soit cet obstacle est immobile et placé dans un fluide s'écoulant à la vitesse  $\vec{U}$ , uniforme loin de l'obstacle, soit il est mobile à la vitesse  $\vec{V} = -\vec{U}$  dans le fluide au repos : ces deux situations sont identiques, par relativité du mouvement. Comparons alors dans l'équation d'Euler les deux termes de transfert de la quantité de mouvement qui sont le premier lié à la convection  $\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  et le second à la pesanteur  $\rho\vec{g}$ . On peut évaluer en ordre de grandeur le terme de convection au voisinage de l'obstacle en écrivant  $\rho|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}| \sim \rho U \frac{U}{h} = \frac{\rho U^2}{h}$ . Le rapport des deux permet de définir le nombre de Froude

$$F = \frac{\text{convection inertielle}}{\text{pesanteur}} \sim \frac{\rho U^2/h}{\rho g} = \frac{U^2}{gh}, \quad (24)$$

qui est un nombre sans dimension dont la valeur permet de classer les écoulements, suivant le rôle joué par la pesanteur.<sup>5</sup>

- (i) Pour  $F \gg 1$ , donc pour un obstacle de petite taille et/ou une grande vitesse, le terme de pesanteur est négligeable et l'écoulement est piloté par la convection. Dans ce régime, un élément de masse du fluide est mis en mouvement par entraînement avec ses voisins, son poids jouant un faible rôle. La non linéarité du terme de convection dans l'équation différentielle traduit des écoulements instables, ce sont les écoulements dits *torrentiels*.
- (ii) Pour  $F \ll 1$ , donc pour un obstacle de grande taille et/ou une faible vitesse, le terme de convection est négligeable et l'écoulement est piloté par la pesanteur. Dans ce régime, un élément de masse du fluide est mis en mouvement sous l'effet de son poids. La linéarité de l'équation différentielle traduit des écoulements stables, ce sont les écoulements dits *fluviaux*.

La transition d'un régime à l'autre, observable par exemple dans le cas d'un écoulement sur une profondeur brusquement variable, provoque un *ressaut hydraulique*.

## 4 Équation de Bernoulli

Les différentes formes d'énergie pour un élément de masse  $\delta m = \rho d^3 r$  sont

- l'énergie interne  $u \delta m = \rho u d^3 r$ , avec  $u = u(\rho, T)$  ou  $u(\rho, s)$ ;
- l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} \delta m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \rho d^3 r \vec{v}^2$ ;
- l'énergie potentielle des forces extérieures, comme la pesanteur, soit  $\delta m g z = \rho g z d^3 r$ , où  $z$  est repéré sur un axe vertical ascendant;
- l'énergie potentielle des forces de pression, que l'on peut incorporer à l'énergie interne en considérant l'enthalpie  $H = U + PV$  soit, pour l'élément de masse,  $h \delta m = u \delta m + P d^3 r = (\rho u + P) d^3 r$ .

L'énergie totale par unité de volume est donc  $\rho u + P + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho g z$ . Comme l'énergie totale se conserve, il est possible d'en dresser un bilan de principe, de forme identique au bilan de masse. Mais nous allons plutôt en présenter ici une version simplifiée, appelée théorème de Bernoulli, qui dérive de l'équation d'Euler. L'identification des termes d'énergie dégagée ici sera néanmoins notre guide.

5. On verra ultérieurement que les ondes superficielles à la surface d'un fluide de faible profondeur  $h$  ( $h \ll \lambda$ , longueur d'onde) ont une célérité  $c = \sqrt{gh}$  : le nombre de Froude  $F = (U/c)^2$  est donc aussi donné par le rapport de la vitesse du fluide sur la vitesse des ondes de surface. On trouve parfois une autre définition du nombre de Froude,  $F' = \sqrt{F} = U/\sqrt{gh} = U/c$ .

## 4.1 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli peut se présenter plusieurs formes, selon les hypothèses faites sur le fluide ou la nature de l'écoulement. On suppose néanmoins toujours que le fluide est non visqueux (et il n'y a aucun flux de chaleur interne). Alors l'écoulement est isentropique, les variables thermodynamiques sont ainsi en quelque sorte sorties du bilan d'énergie, dont il ne reste que les variables mécaniques. Écrivons alors le bilan d'impulsion, à savoir l'équation d'Euler, en transformant le terme  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  pour faire apparaître  $\vec{v}^2$  :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{v}^2 + \vec{r} \dot{\text{ot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}.$$

On cherche à rassembler tous les termes énergétiques dans un gradient, ce qui est possible en écrivant  $\rho \vec{g} = -\rho \vec{\nabla}(gz) = -\vec{\nabla}(\rho gz) + gz \vec{\nabla} \rho$  et  $\frac{1}{2} \rho \vec{\nabla} \vec{v}^2 = \vec{\nabla}(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2) - \frac{1}{2} \vec{v}^2 \vec{\nabla} \rho$ . On est amené à définir la *charge* de l'écoulement

$$\mathcal{C} = P + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho gz, \quad (25)$$

qui est une énergie par unité de volume, mesurée en J/m<sup>3</sup>. On obtient alors

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{r} \dot{\text{ot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \right) - \left( gz + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \vec{\nabla} \rho = -\vec{\nabla} \mathcal{C}. \quad (26)$$

Le théorème de Bernoulli va préciser comment se conserve la charge. Nous allons donc voir dans quelles situations on peut annuler ou ignorer le premier membre.

### 4.1.1 Écoulement stationnaire et incompressible

Pour un écoulement stationnaire,  $\partial \vec{v} / \partial t = 0$  et  $\partial \rho / \partial t = 0$ . Pour un écoulement incompressible,  $\text{div} \vec{v} = 0$ . D'après le bilan de masse écrit en (13), il en résulte  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0$ . Alors, si on multiplie scalairement l'équation (26) par  $\vec{v}$ , on peut vérifier que tous les termes du premier membre disparaissent ( $\vec{r} \dot{\text{ot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$ ), d'où on obtient  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{C} = 0$ . Le long d'une ligne de courant d'élément de longueur  $d\vec{\ell}$ , on a donc

$$d\mathcal{C} = \vec{\nabla} \mathcal{C} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

puisque  $d\vec{\ell}$  est parallèle à  $\vec{v}$ . Il vient finalement

$$\mathcal{C} = P + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho gz = \text{cste} \quad \text{le long d'une ligne de courant}, \quad (27)$$

qui est le théorème de Bernoulli pour un écoulement stationnaire incompressible.<sup>6</sup> Pour appliquer ce théorème, il faut avoir une idée de la géométrie des lignes de courant, par exemple en raison des symétries. On prendra garde que, si la charge  $\mathcal{C}$  est une constante le long d'une ligne de courant donnée, elle varie *a priori* d'une ligne de courant à l'autre.<sup>7</sup>

Physiquement, le théorème de Bernoulli stipule que, le long d'une ligne de courant, la pression diminue lorsque l'altitude ou la vitesse augmente. La dépression créée par une augmentation de la vitesse est importante (puisque'elle est en  $v^2$ ), elle est appelée l'*effet Venturi*.

### 4.1.2 Fluide incompressible en écoulement irrotationnel

Pour un fluide incompressible,  $\rho = \text{cste}$ , donc  $\vec{\nabla} \rho = 0$ . Pour un écoulement irrotationnel,  $\vec{\omega} = \vec{r} \dot{\text{ot}} \vec{v} = 0$  et il existe une fonction  $\varphi$ , potentiel des vitesses, telle que  $\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$ . Alors (26) se réécrit

$$\vec{\nabla} \left( \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{C} \right) = 0 \quad \implies \quad \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{C} = f(t),$$

où  $f(t)$  est une fonction du temps seulement. On peut toujours incorporer cette fonction inconnue (en fait, sa primitive) au potentiel  $\varphi$  sans modifier le champ de vitesse, et on arrive à

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{C} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + \rho gz = \text{cste} \quad \text{dans tout le fluide}, \quad (28)$$

qui est le théorème de Bernoulli pour un fluide incompressible en écoulement irrotationnel. La constante peut-être choisie nulle, mais on prendra garde que le choix du potentiel  $\varphi$  est alors réduit. Les applications de cette version du théorème de Bernoulli sont plus techniques et moins nombreuses.

6. On notera bien que cette première forme du théorème de Bernoulli suppose seulement l'écoulement incompressible, ce qui est plus général que de supposer le fluide incompressible (comme on doit le faire par la suite). Cette distinction, souvent omise dans la littérature, permet par exemple d'utiliser (27) dans l'air.

7. Soient deux lignes de courant AB et CD : on a  $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$  et  $\mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(D)$  mais  $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(C)$  et  $\mathcal{C}(B) \neq \mathcal{C}(D)$ .

### 4.1.3 Fluide incompressible en écoulement stationnaire et irrotationnel

Pour un fluide incompressible,  $\rho = \text{cste}$ , donc  $\vec{\nabla}\rho = 0$ . Pour un écoulement stationnaire et irrotationnel,  $\partial\vec{v}/\partial t = 0$  et  $\vec{r}\partial\vec{v} = 0$ . Alors (26) donne  $\vec{\nabla}C = 0$  et

$$C = P + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 + \rho gz = \text{cste} \quad \text{dans tout le fluide,} \quad (29)$$

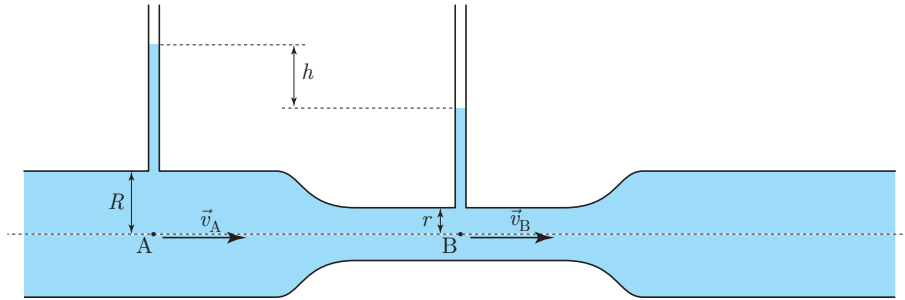
qui est le théorème de Bernoulli pour un fluide incompressible en écoulement stationnaire et irrotationnel. Les hypothèses sont nombreuses, mais le résultat est plus général.

## 4.2 Exemples d'application

Les exemples d'applications du théorème de Bernoulli sont nombreux. Ils supposent tous une idée *a priori* des lignes de courant, avec certaines approximations.

### 4.2.1 Débitmètre à tube de Venturi

Dans une canalisation cylindrique horizontale s'écoule un fluide en régime permanent. On cherche à mesurer le débit  $D$  de l'écoulement (voir (16)). Pour ce faire, la canalisation présente un étranglement : en suivant l'écoulement, le rayon de sa section est  $R$ , puis  $r < R$ , puis à nouveau  $R$ . Un manomètre différentiel mesure la différence des pressions dans le fluide entre les deux parties large et étroite de la canalisation (voir figure).



L'écoulement du fluide est supposé incompressible. On choisit la ligne de courant qui suit l'axe du fluide, passant par les points A (en section large) et B (en section étroite), situés à la même hauteur. Le théorème de Bernoulli donne

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \quad \implies \quad P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2). \quad (30a)$$

Au niveau des sections passant par A et B, la vitesse n'ayant qu'une composante horizontale, la pression ne dépend que de  $z$  (d'après l'équation d'Euler) comme en hydrostatique. Il s'en suit que la différence de pression  $P_A - P_B$  est simplement mesurée par la différence de pression au niveau du manomètre différentiel, représenté par la hauteur  $h$  sur le dispositif de la figure :

$$P_A - P_B = \rho gh. \quad (30b)$$

On suppose ensuite que la vitesse du fluide est uniforme sur une section de la canalisation (du moins dans les régions de section constante). De plus, l'écoulement du fluide est supposé incompressible, de sorte qu'il y a conservation du débit  $D$ . On en déduit

$$D = \pi R^2 v_A = \pi r^2 v_B \quad \implies \quad v_B^2 - v_A^2 = \frac{D^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4} \right). \quad (30c)$$

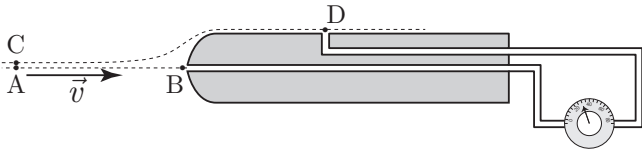
Ces trois équations mènent à l'expression cherchée du débit en fonction de la hauteur  $h$  :

$$D = \sqrt{\frac{2\pi^2 gh}{\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4}}}. \quad (30d)$$

### 4.2.2 Sonde de Pitot

Une sonde (ou tube) de Pitot est un dispositif permettant de mesurer la vitesse  $\vec{v}$  de l'écoulement de l'air en régime permanent. Elle est constituée d'un cylindre profilé où sont creusés deux tubes fins : le premier débouche sur l'axe du cylindre (en B), le deuxième sur la face latérale (en D). Ces deux tubes sont reliés à la sortie de la sonde à un manomètre différentiel. La faible dimension du dispositif permet de négliger les variations de pression dans l'air due à la pesanteur (*i.e.*, on omet le terme  $\rho gz$  dans le théorème de Bernoulli).





On place le tube dans le sens de l'écoulement de l'air. En amont de la sonde, l'écoulement n'est pas perturbé, les lignes de courant sont parallèles. Dans les tubes internes de la sonde, l'air est au repos. Une première ligne de courant AB, passant par l'axe de la sonde, arrive à l'ouverture B où la vitesse est nulle, par continuité : appliquant le théorème de Bernoulli, on a

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_B. \tag{31a}$$

La seconde ligne de courant CD passe près de la face latérale de la sonde. Si la largeur de la sonde est assez faible, on peut supposer que la vitesse est peu perturbée, de sorte que  $v_D = v_C = v$ .<sup>8</sup> Appliquant le théorème de Bernoulli, on a alors simplement

$$P_D = P_C. \tag{31b}$$

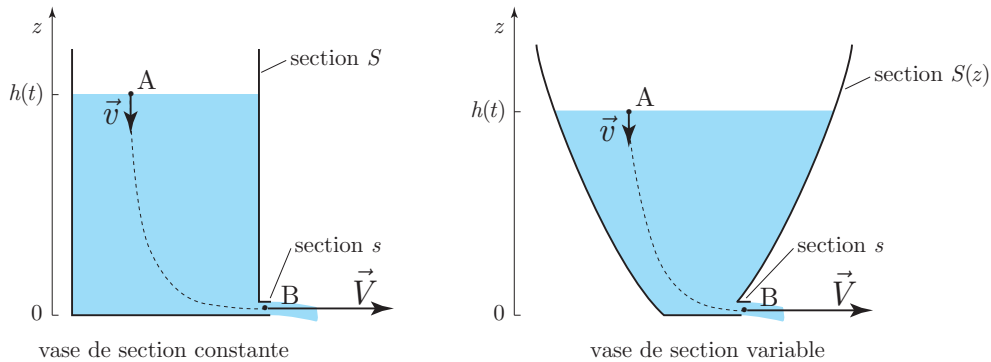
Comme l'air est au repos dans les tubes internes à la sonde, le manomètre mesure  $\Delta P = P_B - P_D$ , et il vient

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}. \tag{31c}$$

Les sondes de Pitot sont utilisées en aéronautique pour mesurer la vitesse d'un avion par rapport à l'air (sa vitesse par rapport au sol est différente, en raison des vents). Les principaux problèmes de fonctionnement sont dus à l'obturation des tuyaux internes de la sonde, en raison des insectes (ou autres) rencontrés sur la piste et, principalement, de la formation de givre en haute altitude.

### 4.2.3 Vidange d'un récipient

Un récipient, de section horizontale  $S$ , est percé à sa base d'un petit trou de section  $s \ll S$ . Ce récipient est rempli d'un liquide qui s'écoule lentement par le trou. On cherche la loi horaire de la hauteur  $h(t)$  du liquide dans le récipient.



La vitesse du liquide à la surface libre de hauteur  $h(t)$  est  $\vec{v} = -\dot{h}\vec{e}_z$ , où  $(O, z)$  est un axe vertical ascendant. La vitesse du liquide à la sortie du trou est notée  $\vec{V}$ . Le liquide étant supposé incompressible, et en admettant que les vitesses sont constantes sur les sections  $S$  et  $s$ , on a par conservation du débit

$$Sv = sV \implies v = \frac{s}{S}V \ll V. \tag{32a}$$

Si  $s \ll S$ , l'écoulement est aussi suffisamment lent pour qu'on puisse le considérer quasi-permanent. On applique alors le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant AB, où A est un point à la surface libre et B un point à la sortie du trou. Ces deux points sont à la même pression, égale à la pression extérieure. On a donc

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \frac{1}{2}\rho V^2. \tag{32b}$$

<sup>8</sup>. La vitesse varie rapidement de la valeur  $v$ , au point D, à zéro, dans le tube interne. Ce fort gradient est permis par la viscosité de l'air, plus précisément la *couche limite* : voir le chapitre sur la viscosité.

Dans cette équation, d'après (32a), et en conformité avec l'hypothèse du régime quasi-permanent, on doit pouvoir négliger  $v^2$  devant  $V^2$ , d'où il vient

$$\rho gh = \frac{1}{2}\rho V^2 \implies V = \sqrt{2gh} \quad (32c)$$

qui est la loi de Torricelli. La vitesse  $V$  du liquide au niveau du trou s'exprime en fonction de la hauteur  $h$  du liquide selon une loi qui ressemble étonnamment à celle de la chute libre. Si maintenant on écrit

$$\frac{dh}{dt} = -v = -\frac{s}{S}V = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh}, \quad (32d)$$

on aboutit à une équation différentielle qui permet de prévoir la loi  $h(t)$ . Si le récipient a une section  $S$  constante, l'équation s'intègre facilement. Posant  $h_0 = h(t=0)$  la hauteur initiale, on trouve

$$h(t) = \left(1 - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2h_0}}t\right)^2 h_0 = \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right)^2 h_0, \quad (32e)$$

où  $\Delta t = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$  est la durée théorique de vidange du récipient. Cette durée n'est pas proportionnelle au volume initial  $Sh_0$  du liquide : pour un volume de liquide donné, on trouve  $\Delta t \propto 1/\sqrt{h_0}$ .

Il est possible aussi de fabriquer un récipient de section variable  $S(z)$  telle que  $\dot{h} = \text{cste}$ . D'après (32d), pour qu'il est soit ainsi, il faut que  $\sqrt{h}/S = \text{cste}$ , donc  $S(z) \propto \sqrt{z}$ . Dans ce cas, la hauteur  $h(t)$  varie linéairement avec le temps, on réalise une horloge à eau (ou *clepsydre*).

### 4.3 Retour sur l'hypothèse d'incompressibilité

Le théorème de Bernoulli sous sa première forme (27) souffre d'une hypothèse restrictive : l'incompressibilité de l'écoulement. Voyons dans quelles conditions cette hypothèse est recevable, même pour un fluide compressible.

Si on peut appliquer le théorème de Bernoulli, une variation de la vitesse de 0 à  $v$  le long d'une ligne de courant entraîne une variation de pression (toute chose égale par ailleurs) de  $\Delta P \sim -\rho v^2$ . Prenant en compte la compressibilité (adiabatique) du fluide, la variation de masse volumique est alors  $\Delta \rho = \rho \chi_S \Delta P = \Delta P/c^2 \sim -\rho(v/c)^2$ , où  $c = 1/\sqrt{\rho \chi_S}$  est la vitesse du son. On trouve donc, en valeur absolue,

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 = M^2 \quad (33)$$

où  $M = v/c$  est le *nombre de Mach*. L'écoulement peut-être considéré comme incompressible au regard du théorème de Bernoulli si  $v \ll c$  (ou  $M \ll 1$ ). Ainsi, on peut appliquer le théorème de Bernoulli dans l'air, même par les grandes rafales ( $v \sim 100 \text{ km/h} \implies M \sim 0,1$ ).<sup>9</sup>

---

9. Pour un écoulement compressible, le théorème de Bernoulli en écoulement stationnaire doit être remplacé par la conservation de l'enthalpie qui prend la forme  $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{P}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + gz = \text{cste}$  pour un gaz parfait (équation de Saint Venant), où  $\gamma = C_P/C_V$  est le rapport des capacités calorifiques.



# Chapitre 5

## Le tenseur des contraintes

### 1 Tenseur des contraintes de Cauchy

Considérons un élément de matière de masse  $\delta m$ , de volume  $d^3r$  et de masse volumique  $\rho = \delta m/d^3r$ . Les forces agissant sur cet élément de matière sont de deux types.

- Les forces à longue portée sont celles exercées par un dispositif extérieur. La force totale exercée sur l'élément de matière est notée

$$\delta \vec{F} = \vec{f} \delta m = \rho \vec{f} d^3r, \quad (1)$$

où  $\vec{f}$  est la densité massique de force. L'exemple le plus courant est bien sûr la pesanteur, où  $\vec{f} = \vec{g}$ , accélération de la pesanteur. On peut rencontrer aussi le cas des forces d'inertie dans un référentiel non galiléen.

- Les particules constituant le système sont en interaction (forces de van der Waals). Ces forces internes à la matière sont à très courte portée, ce qui permet à l'échelle macroscopique de les représenter par des forces surfaciques. Dans ce chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à ces forces et nous allons résumer la démarche permettant de les décrire avec le tenseur des contraintes.

#### 1.1 Définition du tenseur des contraintes

Soit un élément de surface  $d^2\vec{r} = d^2r \vec{n}$  de l'élément de matière,  $\vec{n}$  étant la normale extérieure. En raison de l'interaction entre les particules, il s'exerce sur élément de surface une force surfacique résultante  $\delta \vec{F}_s$  et un moment surfacique résultant  $\delta \vec{M}_s$ .

##### a) Postulat de Cauchy

Puisque les efforts résultants sont le fait des couches superficielles de particules,  $\delta \vec{F}_s$  et  $\delta \vec{M}_s$  sont proportionnels à l'aire de la surface. Plus précisément, on écrit

$$\delta \vec{F}_s = \vec{T} d^2r. \quad (2)$$

Le vecteur de force surfacique  $\vec{T}$  dépend bien sûr d'abord de l'état thermodynamique local. Géométriquement, le postulat de Cauchy stipule qu'il ne dépend que de la normale  $\vec{n}$  (donc pas de la courbure locale de la surface par exemple). Par ailleurs, on suppose que le moment résultant est nul :  $\delta \vec{M}_s = 0$ .<sup>1</sup>

##### b) Lemme de Cauchy

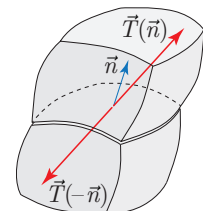
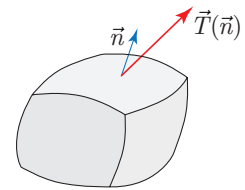
Soient deux éléments de matière en contact par un même élément de surface. La force exercée par le premier sur le second est  $\vec{T}(\vec{n}) d^2r$  tandis que la force exercée par le second sur le premier est  $\vec{T}(-\vec{n}) d^2r$ . En raison de principe d'action/réaction de Newton, ces deux forces sont opposées, d'où

$$\vec{T}(-\vec{n}) = -\vec{T}(\vec{n}). \quad (3)$$

##### c) Théorème de Cauchy

Au voisinage d'un point donné, on peut définir une infinité d'éléments de matière, et donc d'éléments de surface de vecteurs normaux  $\vec{n}$  différents. Le théorème de Cauchy stipule qu'on peut écrire

$$\vec{T}(\vec{n}) = \bar{\sigma} \vec{n}, \quad (4a)$$



1. Cette hypothèse permet d'établir ultérieurement la symétrie du tenseur des contraintes. Elle est valable dans la quasi totalité des matériaux, à l'exception de ceux qui ne possèdent pas à l'échelle mésoscopique une symétrie sphérique. C'est le cas des solutions de polymères ou des cristaux liquides.

où  $\bar{\sigma}$  est un tenseur qui ne dépend que du point. Pour établir ce résultat, on considère un tétraèdre dont un sommet est positionné sur un point  $P$ , dont la face  $\mathcal{F}$  en regard est de vecteur surface  $d^2\vec{r} = d^2r \vec{n}$  et, enfin, dont les trois faces adjacentes appartiennent aux plans définis les axes du repère, c'est-à-dire ont pour vecteurs normaux les vecteurs de base  $-\vec{e}_1$ ,  $-\vec{e}_2$  et  $-\vec{e}_3$ . L'aire de la face adjacente de normale  $-\vec{e}_i$  est obtenue par projection et vaut  $d^2\vec{r} \cdot \vec{e}_i$ . La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'élément de matière définie par ce tétraèdre s'écrit

$$\vec{T}(\vec{n}) d^2r + \vec{T}(-\vec{e}_1) (d^2\vec{r} \cdot \vec{e}_1) + \vec{T}(-\vec{e}_2) (d^2\vec{r} \cdot \vec{e}_2) + \vec{T}(-\vec{e}_3) (d^2\vec{r} \cdot \vec{e}_3) + \rho \vec{f} d^3r = \rho \vec{a} d^3r,$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération et  $d^3r = h d^2r / 3$  est le volume du tétraèdre,  $h$  étant la distance du point  $P$  à la face  $\mathcal{F}$ . Simplifiant par  $d^2r$ , puis faisant tendre  $h$  vers zéro pour rapprocher  $\mathcal{F}$  et  $P$ , il reste

$$\vec{T}(\vec{n}) = -\vec{T}(-\vec{e}_1) (\vec{n} \cdot \vec{e}_1) - \vec{T}(-\vec{e}_2) (\vec{n} \cdot \vec{e}_2) - \vec{T}(-\vec{e}_3) (\vec{n} \cdot \vec{e}_3) = \vec{T}(\vec{e}_j) n_j.$$

On a utilisé le Lemme de Cauchy (3) et noté  $n_j$  les composantes du vecteur normal  $\vec{n}$ . Par définition, les vecteurs  $\vec{T}(\vec{e}_j)$  ne dépendent pas de  $\vec{n}$  donc du choix de la face  $\mathcal{F}$ . On pose  $\sigma_{ij} = T_i(\vec{e}_j)$  et il vient

$$T_i(\vec{n}) = \sigma_{ij} n_j, \quad (4b)$$

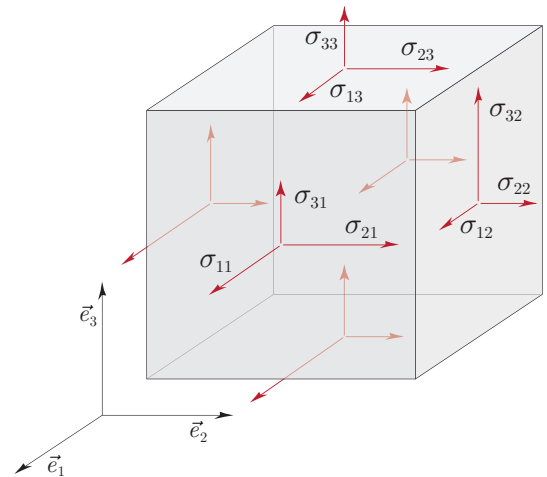
qui est équivalent à (4a). Ainsi définis, les coefficients  $\sigma_{ij}$  forment les composantes d'un tenseur  $\bar{\sigma}$  appelé *tenseur des contraintes de Cauchy*.

## 1.2 Signification du tenseur des contraintes

Par définition,  $\sigma_{ij}$  est la force par unité de surface exercée selon  $\vec{e}_i$  sur un élément de surface dont la normale est dirigée selon  $\vec{e}_j$ . On distingue donc deux types d'effort :

- les coefficients diagonaux  $\sigma_{ii}$  traduisent des forces parallèles aux vecteurs normaux, ce sont des efforts de compression ( $\sigma_{ii} < 0$ ) ou de dilatation ( $\sigma_{ii} > 0$ );
- les coefficients non diagonaux  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) traduisent des forces tangentiels aux surfaces, ce sont des efforts de cisaillement qui, pour chaque élément de surface, peuvent être exercés dans deux directions indépendantes.

La figure ci-contre montre les forces par unité de surface exercées sur les six faces d'un cube, orienté selon les axes du repère. Nous allons donner l'interprétation des différents termes dans les cas des fluides et des solides, les développements feront l'objet des chapitres suivants.



### 1.2.1 Cas des fluides

Dans un fluide à l'équilibre thermodynamique, on admet que toute sollicitation de cisaillement est immédiatement résorbée, de sorte que le tenseur des contraintes est diagonal. Un tenseur d'ordre deux, diagonal dans toute base de l'espace, est forcément isotrope, de sorte qu'on pose comme au chapitre 4

$$\text{fluides à l'équilibre thermodynamique : } \bar{\sigma} = -P \bar{\delta} \iff \sigma_{ij} = -P \delta_{ij}. \quad (5a)$$

C'est cette pression  $P$  qui figure dans l'identité thermodynamique d'un fluide avec le terme  $-P dV$ . En dehors de l'équilibre, on pose

$$\bar{\sigma} = -P \bar{\delta} + \bar{\sigma}', \quad (5b)$$

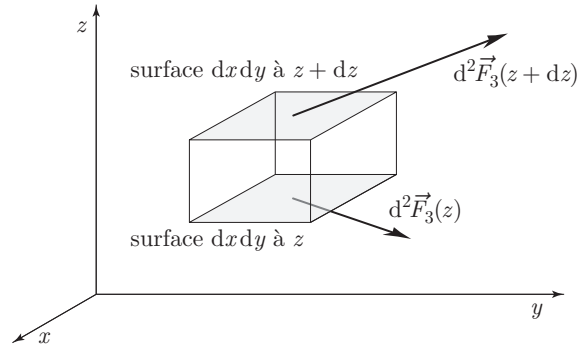
où  $\bar{\sigma}'$  est appelé le *tenseur de viscosité*. Soulignons que, dans cette décomposition, la pression  $P$  est la valeur à l'équilibre thermodynamique donnée par (5a), ce n'est pas *a priori* la partie diagonale de  $\bar{\sigma}$ . Autrement dit, il peut subsister des termes diagonaux dans  $\bar{\sigma}'$ . L'expression de  $\bar{\sigma}'$  dépend ensuite de la nature du fluide visqueux, le cas le plus simple étant le fluide newtonien, qui sera vu au chapitre 6.

### 1.2.2 Cas des solides

Un solide possède la propriété de rigidité : il exerce toujours une résistance au cisaillement. Les termes non diagonaux de  $\bar{\sigma}$  sont donc *a priori* non nuls, même à l'équilibre. La notion de pression comme définie pour les fluides perd son sens (sauf dans le cas de l'action d'un liquide sur un solide). L'expression de  $\bar{\sigma}$  dépend de la nature du solide, notamment s'il est considéré isotrope ou non. Le cas le plus simple est celui des solides élastiques isotropes, qui sera vu au chapitre 9.

## 2 Applications des lois de la dynamique

Considérons un élément de matière de masse  $\delta m = \rho d^3 r$  qui, à un instant  $t$ , est de la forme d'un forme parallélépipède aligné sur les axes, de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ .



### 2.1 Bilan d'impulsion

Commençons par évaluer la résultante des forces de contrainte que cet élément de matière subit du reste de la matière. Sur la face horizontale située en  $z$ , de surface  $-dx dy \vec{e}_z$ , il subit la force

$$d^2 \vec{F}_3(z) = -[\sigma_{xz}(z)\vec{e}_x + \sigma_{yz}(z)\vec{e}_y + \sigma_{zz}(z)\vec{e}_z] dx dy.$$

Sur la face horizontale située en  $z + dz$ , de surface  $dx dy \vec{e}_z$ , il subit la force

$$d^2 \vec{F}_3(z + dz) = [\sigma_{xz}(z + dz)\vec{e}_x + \sigma_{yz}(z + dz)\vec{e}_y + \sigma_{zz}(z + dz)\vec{e}_z] dx dy.$$

La somme des forces agissant sur ces deux faces en regard s'écrit donc

$$d^3 \vec{F}_3 = d^3 \vec{F}_3(z + dz) + d^3 \vec{F}_3(z) = \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \vec{e}_y + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \vec{e}_z \right) dx dy dz = \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} \vec{e}_i d^3 r.$$

Le même calcul s'applique bien sûr aux faces en regard situées en  $x$  et  $x + dx$ , en  $y$  et  $y + dy$ . La résultante de la force de contrainte exercée sur l'élément de matière s'écrit donc, en sommant toutes les faces,

$$d^3 \vec{F} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} \vec{e}_i d^3 r = \text{div } \bar{\sigma} d^3 r. \quad (6)$$

On a introduit le vecteur

$$\text{div } \bar{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} \vec{e}_i, \quad (7)$$

qui peut être interprété comme la force volumique équivalente à l'action surfacique du tenseur des contraintes. On peut noter que, lorsque le tenseur des contraintes se réduit à une pression comme en (5a), on retrouve la force volumique de pression, comme vu au chapitre 4 :

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} \quad \implies \quad \text{div } \bar{\sigma} = -\frac{\partial P}{\partial r_i} \vec{e}_i = -\vec{\nabla} P.$$

Le principe fondamental de la dynamique (autrement dit le bilan d'impulsion) appliqué à l'élément de matière peut alors s'écrire par unité de volume :  $\vec{a}$  étant l'accélération de l'élément de matière, on obtient

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{f} + \text{div } \bar{\sigma}. \quad (8)$$

La condition d'équilibre mécanique des éléments de matière s'écrit donc

$$\rho \vec{f} + \text{div } \bar{\sigma} = 0 \quad \iff \quad \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} = 0. \quad (9)$$

En mécanique, en tenant compte des conditions aux limites (donnée des contraintes à la surface de l'échantillon), cette condition d'équilibre permet de calculer le champ de contraintes. Dans un fluide en particulier, elle mène aux lois de l'hydrostatique, comme il a été exposé au chapitre 4.

## 2.2 Bilan de moment cinétique

Écrivons à présent le théorème du moment cinétique (autrement dit le bilan de moment cinétique), défini par rapport à l'origine du repère. Le moment cinétique de l'élément de matière est  $\delta\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v} \delta m$ , sa dérivée est

$$\frac{d(\delta\vec{L})}{dt} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \delta m = \vec{r} \wedge \vec{a} \delta m = \rho \vec{r} \wedge \vec{a} d^3r.$$

Évaluons le moment des forces agissant dans la matière.

- Le moment des forces à longue portée est simplement  $\vec{r} \wedge \vec{f} \delta m = \rho \vec{r} \wedge \vec{f} d^3r$ .
- Le moment des forces de contraintes est plus compliqué à évaluer, car il faut sommer les contributions des six faces. Comme au paragraphe précédent, commençons par les faces horizontales situées en  $z$  et  $z + dz$  : la somme des moments des forces agissant sur ces deux faces est

$$\begin{aligned} [\vec{r}(z + dz) \wedge \sigma_{iz}(z + dz) \vec{e}_i - \vec{r}(z) \wedge \sigma_{iz}(z) \vec{e}_i] dxdy &= \frac{\partial(\vec{r} \wedge \sigma_{iz} \vec{e}_i)}{\partial z} dxdydz \\ &= \left( \vec{e}_z \wedge \sigma_{iz} \vec{e}_i + \vec{r} \wedge \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} \vec{e}_i \right) dxdydz. \end{aligned}$$

Le même calcul s'applique aux faces en regard situées en  $x$  et  $x + dx$ , en  $y$  et  $y + dy$ . La moment total des forces de contrainte exercées sur l'élément de matière s'écrit donc, en sommant toutes les faces,

$$\left( \vec{e}_j \wedge \sigma_{ij} \vec{e}_i + \vec{r} \wedge \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} \vec{e}_i \right) dxdydz = \left[ -\sigma_{ij} \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j + \vec{r} \wedge \operatorname{div} \vec{\sigma} \right] d^3r.$$

Appliqué à l'élément de matière, le théorème du moment cinétique par unité de volume prend finalement la forme

$$\rho \vec{r} \wedge \vec{a} = \rho \vec{r} \wedge (\vec{f} + \operatorname{div} \vec{\sigma}) - \sigma_{ij} \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j.$$

Avec (8) les deux premiers termes se compensent, la troisième est donc nul, d'où on déduit

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \tag{10}$$

Le bilan de moment cinétique permet donc d'établir un résultat important : en l'absence de moment surfacique,<sup>1</sup> le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique. On note que ce résultat est valable dans tout état, même en dehors de l'équilibre. Cette symétrie a de nombreuses conséquences car elle conditionne grandement l'écriture des lois dans les milieux continus.

# Chapitre 6

## Les fluides visqueux newtoniens

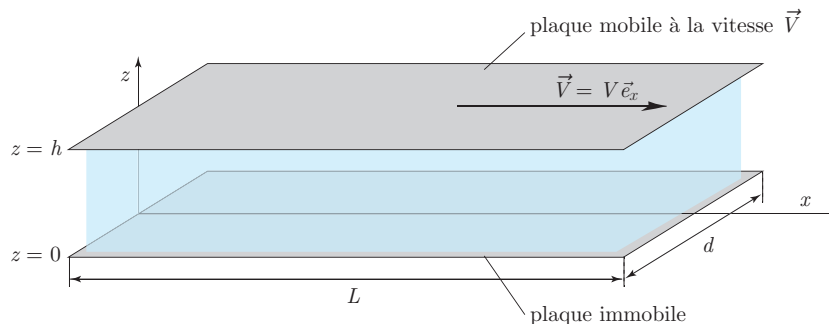
La viscosité est la capacité d'un fluide à résister à la sollicitation d'un écoulement non uniforme : en présence d'un gradient du champ de vitesse, la viscosité provoque des efforts internes de cisaillement. Tous les fluides sont plus ou moins visqueux,<sup>1</sup> et négliger la viscosité est une approximation désignée sous le nom de *fluide parfait*. L'équation d'Euler décrit l'écoulement des fluides parfaits, nous allons présenter l'équation de Navier-Stokes qui décrit l'écoulement des fluides visqueux de type newtoniens.

La complexité, et donc la richesse, de l'équation de Navier-Stokes montre que la viscosité est à l'origine d'un très grand nombre de phénomènes : amortissement des ondes (sonores, de surface) par dissipation, perte de charge dans un tuyau, turbulence et force de traînée, instabilités hydrodynamiques, *etc.*

### 1 L'équation de Navier-Stokes

#### 1.1 Introduction à la viscosité

Considérons la géométrie très simple suivante : deux grandes plaques parallèles et horizontales sont situées en  $z = 0$  et  $z = h$ . Un fluide occupe l'espace entre les deux plaques, lesquelles sont suffisamment grandes pour pouvoir négliger les effets de bord. Initialement, les deux plaques sont immobiles, le fluide également. Puis, la plaque du bas étant maintenue immobile, la plaque du haut est mise en mouvement à la vitesse  $\vec{V} = V\vec{e}_x$ . Cette configuration est celle de l'*écoulement de Couette*, sur lequel nous reviendrons.



Si le fluide est parfait, il n'y a aucune raison pour qu'il se mette en mouvement : en effet, la solution statique où le champ de vitesse reste nul vérifie l'équation d'Euler et respecte la condition aux limites (qui ne concerne que la composante normale à la surface de la vitesse). En réalité, le très fort gradient de vitesse induit entre la plaque mobile et la couche de fluide qui la mouille ne peut subsister : par un phénomène assimilable à un frottement, la plaque va entraîner cette couche de fluide qui va ainsi se mettre en mouvement. Puis, de proche en proche, chaque couche de fluide va entraîner de même la couche voisine et, finalement, tout le fluide sera en mouvement selon un champ de vitesse stationnaire  $\vec{v} = v_x(z)\vec{e}_x$ , avec  $v_x(h) = V$  et  $v_x(0) = 0$ .

La mise en mouvement du liquide dans ce scénario est interprétée comme la diffusion de la quantité de mouvement du fluide sous l'effet d'un gradient de la vitesse. Soit, dans cette géométrie, une surface dans le fluide, parallèle aux plaques,  $d^2\vec{r} = d^2r \vec{e}_z$ . En présence d'un champ de vitesse  $\vec{v} = v_x(z, t)\vec{e}_x$  non uniforme, la couche supérieure à  $d^2\vec{r}$  entraîne la couche inférieure, c'est-à-dire exerce une force de viscosité  $d\vec{F} = dF \vec{e}_x$ , avec  $dF$  proportionnel à  $d^2r$  et à  $\partial v_x / \partial z$ . On écrit

$$d\vec{F} = \sigma'_{xz} d^2r \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \sigma'_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (1)$$

1. En fait, seul l'hélium liquide  $^4\text{He}$  superfluide, observable à  $T < 2,17$  K, est considéré comme strictement non visqueux.



On a introduit le coefficient de *première viscosité*  $\eta$  qui relie la composante  $\sigma'_{xz}$  du tenseur des contraintes visqueuses à la dérivées  $\partial v_x/\partial z$ .

## 1.2 Fluides newtoniens

La généralisation de la relation (1) requiert un peu de formalisme tensoriel. Introduisons d'abord le *tenseur des taux de déformation*  $\bar{\gamma}$  de composantes

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} \right). \quad (2)$$

Si le fluide est à l'équilibre thermodynamique, la viscosité ne doit pas être sollicitée. Or le champ de vitesse d'un fluide à l'équilibre doit être identique à celui d'un solide, c'est-à-dire de la forme  $\vec{v} = \vec{V} + \Omega \wedge \vec{r}$ . On peut montrer mathématiquement que le champ de vitesse est de cette forme si et seulement si  $\bar{\gamma} = 0$ . C'est donc ce tenseur  $\bar{\gamma}$  qui quantifie l'écart de l'écoulement d'un liquide par rapport à la situation d'équilibre, donc le degré de cisaillement. La généralisation de la relation (1) est donc une relation entre le tenseur de viscosité  $\bar{\sigma}'$  et le tenseur des taux de déformation  $\bar{\gamma}$ . Lorsqu'on admet que cette relation est linéaire, on se place dans le modèle des *fluides newtoniens*. Malheureusement, une relation linéaire entre deux tenseurs d'ordre deux amène à introduire un tenseur d'ordre quatre. Heureusement, si le fluide est isotrope, et compte tenu de la symétrie des tenseurs  $\bar{\sigma}'$  et  $\bar{\gamma}$ , on peut montrer que ce tenseur d'ordre quatre s'exprime avec deux scalaires. Précisément, on peut par exemple poser

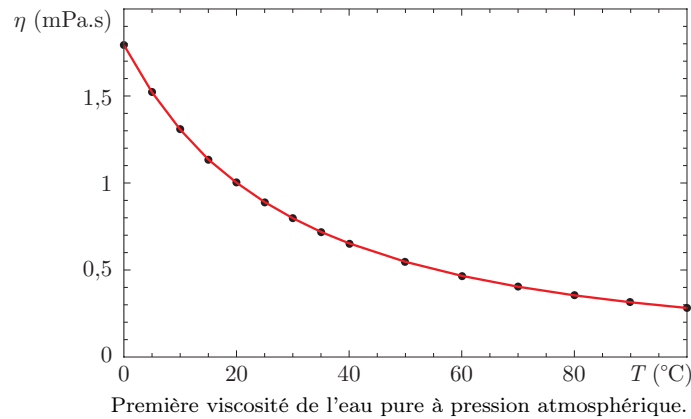
$$\sigma'_{ij} = a\gamma_{ij} + b\delta_{ij}\gamma_{kk},$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes. Cependant, l'usage est plutôt d'écrire la formule suivante, tout à fait équivalente,<sup>2</sup>

$$\sigma'_{ij} = 2\eta \left( \gamma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\gamma_{kk} \right) + \zeta\delta_{ij}\gamma_{kk} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial r_k} \right) + \zeta\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial r_k}. \quad (3)$$

Les deux scalaires  $\eta$  et  $\zeta$  sont les coefficients de viscosité, qui s'expriment en Pa.s (ou anciennement en Poiseuille avec 1 Pl = 1 Pa.s, ou encore en Poise avec 1 P = 0,1 Pl). Le coefficient  $\eta$  est la *viscosité de cisaillement* (ou première viscosité), le coefficient  $\zeta$  est la *viscosité de volume* (ou seconde viscosité). Leurs valeurs dépendent de la nature du fluide et *a priori* de la température, de la pression et de sa composition. Concernant la viscosité de cisaillement  $\eta$ , le tableau suivant en donne des valeurs à température et pression ambiantes pour des corps purs, la figure les variations pour l'eau pure entre 0 et 100 °C.

fluide	air	eau	mercure	huile d'olive	huiles de moteur	glycérine
$\eta$ (mPa.s)	0,018	1,002	1,55	84	140 – 900	1500



La viscosité de volume  $\zeta$  est beaucoup plus difficile à mesurer et on dispose de peu de valeurs. Dans l'eau à température ambiante,  $\zeta \sim$  mPa.s. Dans les fluides monoatomiques, les calculs de physique statistique (avec l'équation de Boltzmann) prévoient une valeur nulle. Ignorer ce coefficient est une approximation désignée sous le nom d'*hypothèse de Stokes*.

## 1.3 Équation de Navier-Stokes

On cherche à compléter l'équation d'Euler pour prendre en compte les forces de viscosité. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à un élément de matière se déplaçant dans le fluide, en tenant compte du poids et des forces de contraintes. Avec  $\rho$  la masse volumique, on écrit d'abord

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right) = \rho \vec{g} + \text{div } \bar{\sigma},$$

2. La justification de cette écriture est que tenseur en facteur du coefficient  $2\eta$  est de trace nulle, ce qui s'avère utile dans des développements ultérieurs.

en ayant utilisé l'expression eulérienne de la dérivée particulaire. On décompose le tenseur des contraintes selon  $\bar{\sigma} = -P\bar{\delta} + \bar{\sigma}'$  :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \text{div } \bar{\sigma}',$$

où  $\bar{\sigma}'$  est le tenseur de viscosité. Pour compléter l'équation d'Euler, il s'agit donc de calculer la force de viscosité représentée par le vecteur  $\text{div } \bar{\sigma}'$ . Ici on utilise (3), en supposant les coefficients de viscosité uniformes :

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{\sigma}' &= \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial r_j} \vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial r_j} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial r_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial r_k} \right] \vec{e}_i \\ &= \left[ \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 r_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial r_j \partial r_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v_k}{\partial r_i \partial r_k} \right) + \zeta \frac{\partial^2 v_k}{\partial r_i \partial r_k} \right] \vec{e}_i \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 r_j} \vec{e}_i + \left( \frac{\eta}{3} + \zeta \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial r_i \partial r_k} \vec{e}_i \\ &= \eta \vec{\Delta} \vec{v} + \left( \frac{\eta}{3} + \zeta \right) \vec{\nabla} \text{div } \vec{v}. \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \vec{\Delta} \vec{v} + \left( \frac{\eta}{3} + \zeta \right) \vec{\nabla} \text{div } \vec{v} \quad (4)$$

qui est l'équation de Navier-Stokes. Cette équation est beaucoup plus complexe que celle d'Euler, notamment parce qu'elle contient des dérivées secondes par rapport aux coordonnées. Cette équation peut être lue de plusieurs façons.

- En hydrodynamique, c'est l'équation du mouvement qui pilote la dynamique l'écoulements des fluides visqueux newtoniens.
- En terme de transport, c'est l'équation de diffusion de la quantité de mouvement, comparable aux équations de diffusion présentées au chapitre 2 pour la chaleur ou des particules. Cette équation de diffusion est ici notablement compliquée par la nature tensorielle de la viscosité, la prise de compte de la convection et la présence des termes source liés aux forces volumiques. Néanmoins, les termes caractéristiques  $\rho \partial \vec{v} / \partial t$  et  $\eta \vec{\Delta} \vec{v}$  sont présents et permettent d'introduire, comme au chapitre 2, la diffusivité de l'impulsion

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (5)$$

Dans ce contexte,  $\eta$  est appelé le coefficient de viscosité dynamique et  $\nu$  le coefficient de viscosité cinématique.

- Un cas particulier important est celui des écoulements incompressible où  $\text{div } \vec{v} = 0$  : dans ce cas, l'équation se simplifie en

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \vec{\Delta} \vec{v}. \quad (6)$$

Pour obtenir les solutions de cette équation différentielle, il faut déterminer les constantes d'intégration, ce qui implique les conditions initiales et les conditions aux limites. Toutes les conditions invoquées dans la résolution de l'équation d'Euler sont applicables, en particulier la continuité de la composante normale de la vitesse sur une interface. Mais, pour résoudre l'équation de Navier-Stokes, on doit invoquer une condition supplémentaire, puisque l'ordre de dérivation est supérieur. Il s'agit précisément d'une condition aux limites sur la vitesse : puisqu'on admet maintenant qu'un gradient de vitesse engendre une force, il est exclu que la vitesse soit discontinue (parce qu'on exclut l'apparition de force superficielle de cisaillement). On complète donc les conditions aux limites en imposant la continuité de (toutes les composantes de) la vitesse aux interfaces.

- (i) Pour un écoulement sur une surface solide fixe, on écrit  $\vec{v}(\vec{r}, t) = 0$  au contact du solide. Pour un écoulement sur une surface solide mobile à la vitesse  $\vec{V}$ , on écrit  $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{V}$  au contact du solide.
- (ii) Si deux fluides visqueux 1 et 2 coulent l'un sur l'autre sans se mélanger, on écrit  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$  à l'interface. Par ailleurs, le principe d'action/réaction impose que les deux forces exercées par chaque fluide sur l'autre, au travers d'un élément de surface  $d^2 \vec{r}$  de leur interface, s'opposent, ce qui s'écrit  $\bar{\sigma}_1 d^2 \vec{r} = -\bar{\sigma}_2 d^2 \vec{r}$ , où  $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}_2$  sont les tenseurs des contraintes dans chaque fluide. D'après (3), cette condition revient en général à l'égalité des pressions et des dérivées de la vitesse. Par exemple, dans l'écoulement de Couette considéré précédemment, si on remplace la plaque supérieure par de l'air (non visqueux) à la pression  $P_a$ , les conditions aux limites à la surface libre du fluide sont  $P = P_a$  et  $\partial v_x / \partial z = 0$  en  $z = h$ .

## 2 Exemples d'écoulements réguliers

Dans tous les exemples qui suivent, on suppose les écoulements incompressibles, on se place en régime permanent et on oublie la pesanteur. Les conditions et les hypothèses qui sont faites conduisent à des écoulements stables, qu'on qualifiera par la suite de *rampants* ou *laminaires*.

## 2.1 Écoulements de Couette et de Poiseuille entre deux plaques

On reprend la géométrie des deux plaques représentées en 1.1, afin de déterminer complètement les champs de vitesse et de pression. On précise donc ici la dimension de ces plaques : longueur  $L$  le long de l'écoulement et largeur  $d$ , avec toujours  $L, d \gg h$ , hauteur entre les plaques pour pouvoir ignorer les effets de bords. La vitesse et la pression dans le fluide sont cherchées de la forme

$$\vec{v}(\vec{r}) = v(x, z) \vec{e}_x \quad \text{et} \quad P(\vec{r}) = P(x, z).$$

L'écoulement étant incompressible,  $\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{v}(\vec{r}) = v(z) \vec{e}_x$ . Alors on a

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( v \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\Delta} \vec{v} = \Delta v \vec{e}_x = \frac{d^2 v}{dz^2} \vec{e}_x.$$

De l'équation de Navier-Stokes (4), il ne subsiste que  $\vec{\nabla} P = \eta \vec{\Delta} \vec{v}$ , soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \eta \frac{d^2 v}{dz^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

De ces deux équations, la seconde montre que la pression  $P$  ne dépend pas de  $z$  (elle est donc homogène sur toute la section perpendiculaire à l'écoulement) et la première montre que  $\partial P / \partial x$  ne dépend pas de  $x$ . Donc on peut écrire

$$P(x) = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{L} x = P_1 - \frac{\Delta P}{L} x, \quad (7)$$

où l'on a introduit les pressions  $P_1$  et  $P_2$  à l'entrée et à la sortie et la variation  $\Delta P = P_1 - P_2$ . Par suite,

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta P}{L} \quad \Longrightarrow \quad v(z) = -\frac{1}{2} \frac{\Delta P}{\eta L} z^2 + az + b.$$

Les deux conditions aux limites du fluide visqueux  $v(z=0) = 0$  et  $v(z=h) = V$  imposent les valeurs des constantes  $a$  et  $b$ , d'où il vient

$$v(z) = -\frac{1}{2} \frac{\Delta P}{\eta L} z(z-h) + \frac{Vz}{h}. \quad (8)$$

L'écoulement du fluide entre les plaques a donc deux origines : la variation de pression  $\Delta P$  et la mise en mouvement d'une plaque à la vitesse  $V$ . On peut étudier séparément ces deux termes.

- (i) Si on choisit  $\Delta P = 0$ , le fluide ne se met en mouvement qu'en raison du mouvement relatif des plaques entre elles. Le profil de vitesse est linéaire. C'est l'*écoulement de Couette*, réalisé par exemple dans les dispositifs de lubrification entre deux solides. On peut calculer la force exercée par le fluide sur la plaque mobile de surface  $S = Ld$

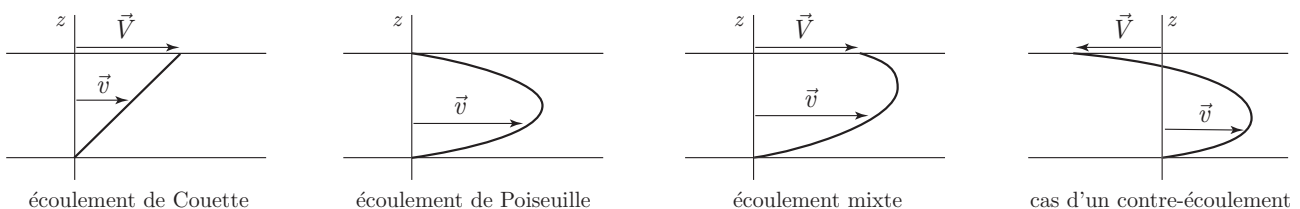
$$\vec{F} = -\eta S \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=h} \vec{e}_x = -\eta \frac{Ld}{h} \vec{V}. \quad (9)$$

Cette force, proportionnelle et opposée à la vitesse, traduit un frottement visqueux.

- (ii) Si on choisit  $V = 0$ , le fluide ne se met en mouvement qu'en raison de la variation de pression imposée en amont et en aval. Le profil de vitesse est parabolique. C'est l'*écoulement de Poiseuille*, réalisé par exemple dans les canalisations. On peut calculer le débit circulant au travers de la section  $hd$  en fonction de la chute de pression imposée  $\Delta P$  :

$$D = d \int_0^h v(z) dz = \frac{1}{12\eta} \frac{\Delta P}{L} h^3 d. \quad (10)$$

Dans le cas général, le profil de vitesse est une parabole décalée. Dans certaines conditions, il est même possible d'observer un contre-écoulement.



## 2.2 Écoulement de Poiseuille dans un tuyau

On considère l'écoulement d'un liquide dans un tuyau immobile de rayon  $R$  et de longueur  $L$ . Soient  $P_1$  et  $P_2$  les pressions à l'entrée et à la sortie du tuyau. L'écoulement est provoqué par la différence de pression  $\Delta P = P_1 - P_2$ , et on cherche à exprimer le débit  $D$  en fonction de  $\Delta P$ .

On choisit naturellement les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  selon l'axe du tuyau. Supposant le tuyau assez long ( $L \gg R$ ), on ignore les effets de bords aux limites du tuyau et on écrit les champs de vitesse et de pression selon

$$\vec{v}(\vec{r}) = v(r, z) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad P(\vec{r}) = P(r, z).$$

L'écoulement étant incompressible,  $\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{v}(\vec{r}) = v(r) \vec{e}_z$ . Alors on a

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( v \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\Delta} \vec{v} = \Delta v \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \vec{e}_z.$$

De l'équation de Navier-Stokes (4), il ne subsiste que  $\vec{\nabla} P = \eta \vec{\Delta} \vec{v}$ , soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right). \end{aligned}$$

De ces deux équations, la première montre que la pression  $P$  ne dépend pas de  $r$  (elle est homogène sur une section normale du tuyau) et la seconde montre que  $\partial P / \partial z$  ne dépend pas de  $z$ . Donc on peut écrire

$$P(z) = P_1 + \frac{P_2 - P_1}{L} z = P_1 - \frac{\Delta P}{L} z. \quad (11)$$

Par suite,

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{\Delta P}{L} \quad \Longrightarrow \quad v(r) = - \frac{1}{4} \frac{\Delta P}{\eta L} r^2 + a \ln r + b.$$

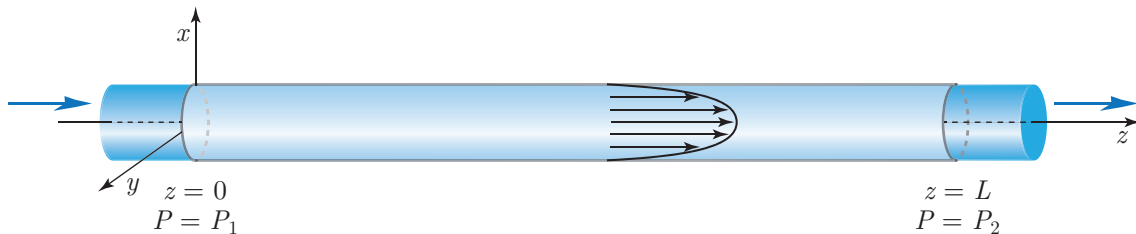
Le terme en  $\ln r$  ferait diverger la vitesse en  $r = 0$ , donc  $a = 0$ . La condition aux limites du fluide visqueux à la surface du tuyau,  $v(R) = 0$ , impose ensuite la valeur de  $b$ , et il vient

$$v(r) = \frac{1}{4} \frac{\Delta P}{\eta L} (R^2 - r^2), \quad (12)$$

soit un profil parabolique de la vitesse. On peut enfin calculer le débit, en  $\text{m}^3/\text{s}$  :

$$D = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} R^4 \quad (13)$$

Le fait que le débit soit proportionnel à  $R^4$  (ou au carré de la surface de la section) constitue la loi de Poiseuille.



## 2.3 Écoulement de Couette entre deux cylindres

On considère deux cylindres solides de même axe  $(O, z)$ . Le premier de rayon  $R_1$  est contenu dans le deuxième de rayon  $R_2 > R_1$ . Le cylindre intérieur tourne sur son axe à la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ , le deuxième est fixe. Un fluide visqueux occupe l'espace entre les cylindres pour assurer la lubrification.

On choisit naturellement les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Supposant les cylindres de même longueur  $L \gg R_2$  et  $R_1$ , on ignore les effets de bords et on écrit les champs de vitesse et de pression selon

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_r(r) \vec{e}_r + v_\theta(r) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad P(\vec{r}) = P(r).$$

L'écoulement étant incompressible,  $\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow rv_r(r) = \text{cste}$ . La condition aux limites sur la vitesse sur les parois des deux cylindres annule cette constante, d'où  $v_r(r) = 0$  et on garde  $\vec{v}(\vec{r}) = v_\theta(r) \vec{e}_\theta$ . Alors on a

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \left( v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (v_\theta \vec{e}_\theta) = \frac{v_\theta^2}{r} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\frac{v_\theta^2}{r} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \Delta \vec{v} = \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta = \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_\theta}{dr} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta.$$

De l'équation de Navier-Stokes (4), il ne subsiste encore que  $\vec{\nabla} P = \eta \Delta \vec{v}$ , soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{v_\theta^2}{r}, \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \eta \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_\theta}{dr} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Comme la pression ne dépend pas de  $\theta$ , le second membre de la deuxième équation est nul. Il vient

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_\theta}{dr} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left( \frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\theta(r) = ar + \frac{b}{r}.$$

Les deux conditions aux limites du fluide visqueux  $v_\theta(R_1) = \omega R_1$  et  $v_\theta(R_2) = 0$  imposent les valeurs de  $a$  et  $b$ , d'où il vient

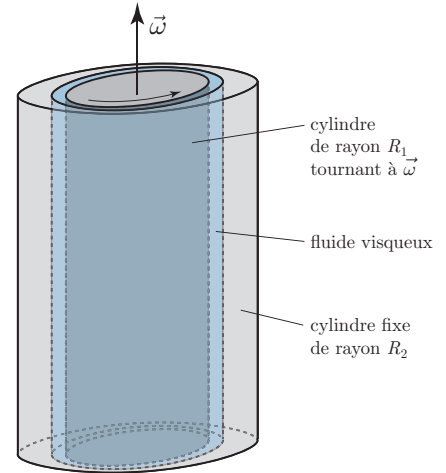
$$v_\theta(r) = \frac{\omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{R_2^2}{r} - r \right). \quad (14)$$

Il est possible d'intégrer le champ de pression, mais le plus intéressant est de déterminer le moment des forces exercées par le fluide sur les cylindres, lesquelles passent par la composante  $\sigma_{r\theta}$  du tenseur des contraintes. On en trouve l'expression générale en coordonnées cylindriques dans la littérature et on calcule

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = -2\eta \frac{b}{r^2} = -2\eta \omega \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}$$

La force exercée selon  $\vec{e}_\theta$  sur un élément de surface  $d^2\vec{r} = R_1 d\theta dz \vec{e}_r$  du cylindre intérieur est  $d\vec{F} = \sigma_{r\theta}(R_1) d^2r \vec{e}_\theta$ , son moment est  $d\vec{M} = R_1 dF \vec{e}_z$ . Après intégration, on trouve ainsi le moment résultant  $\vec{M}$  du fluide exercé sur le cylindre intérieur :

$$\vec{M} = -4\pi\eta \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \vec{\omega}. \quad (15)$$



Ce couple, proportionnel et opposé à la vitesse angulaire, traduit un frottement visqueux. Ce dispositif est à la base du principe de la lubrification des solides en mouvement.

### 3 Régimes d'écoulement et nombre de Reynolds

Les écoulements étudiés précédemment supposent des champs de vitesse et de pression relativement simples, respectant les symétries : ce sont les écoulements *laminaires* ou *rampants*. Mais la viscosité peut donner naissance à des écoulements beaucoup plus complexes qui sont les écoulements *turbulents*. Il existe des arguments dimensionnels permettant de classer les différentes situations et donc de simplifier l'approche du problème. On se limite comme précédemment aux écoulements incompressibles en régime permanent.

La situation étudiée est celle de l'écoulement d'un fluide contournant un obstacle solide de longueur caractéristique  $L$  (diamètre, rayon de courbure, ...). Soit cet obstacle est immobile et placé dans un fluide s'écoulant à la vitesse  $\vec{U}$ , uniforme loin de l'obstacle, soit il est mobile à la vitesse  $\vec{V} = -\vec{U}$  dans le fluide au repos. Ces deux situations sont identiques, par relativité du mouvement.

#### 3.1 Nombre de Reynolds

En hydrodynamique, une méthode incontournable d'approche des problèmes est la théorie de la *similitude* : à partir des grandeurs caractéristiques d'un écoulement, et en invoquant des lois d'échelle, on peut introduire des nombres sans dimensions qui, selon leurs valeurs, permettent des approximations simplifiant l'analyse et la résolution des problèmes. Supposons que les deux termes  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  et  $\eta \Delta \vec{v}$  subsistent *a priori* dans l'équation de Navier-Stokes. On évalue en ordre de grandeur ces deux termes de transfert interne de la quantité de mouvement :

- le terme de convection, associé à l'inertie du fluide, est  $\rho \|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}\| \sim \rho U \frac{U}{L} = \frac{\rho U^2}{L}$  ;
- le terme de diffusion visqueuse est  $\eta \|\vec{\Delta}\vec{v}\| \sim \eta \frac{U}{L^2}$ .

Le rapport de ces deux termes

$$\frac{\text{convection inertielle}}{\text{diffusion visqueuse}} \sim \frac{\rho U^2/L}{\eta U/L^2} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu} = Re \quad (16)$$

est appelé le *nombre de Reynolds*. L'examen des solutions de l'équation de Navier-Stokes montre qu'on peut classer les écoulements selon la valeur du nombre de Reynolds.

- (i) Pour  $Re \ll 1$ , donc pour un obstacle de petite taille et/ou une faible vitesse, le terme de convection est négligeable et l'écoulement est piloté par la viscosité. Il reste

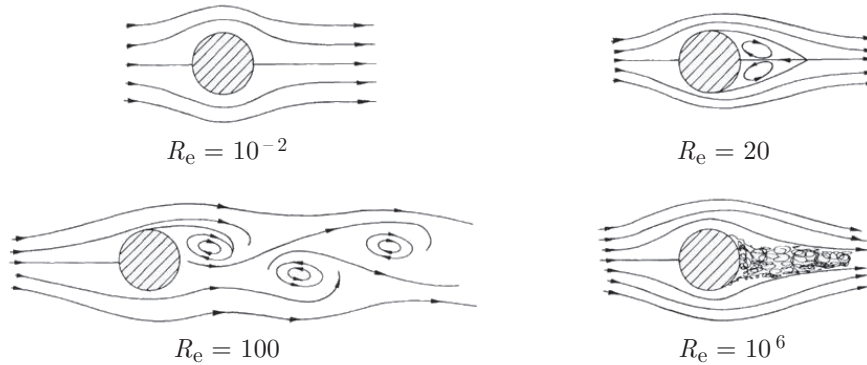
$$\vec{\nabla} P \simeq \eta \vec{\Delta}\vec{v} + \rho \vec{g}. \quad (17)$$

La linéarité de cette équation traduit des écoulements stables. Ce sont les écoulements *rampants*. Les lignes de courant ont une allure assez comparable à celles des fluides parfaits, mais le champ de pression est différent.

- (ii) Pour  $Re \gg 1$ , donc pour un obstacle de grande taille et/ou une forte vitesse, le terme de viscosité est négligeable et l'écoulement est piloté par la convection. Il reste

$$\vec{\nabla} P \simeq \rho(\vec{g} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}). \quad (18)$$

La non linéarité de cette équation traduit des écoulements instables. Ce sont les écoulements *turbulents*. Selon la valeur croissante du nombre de Reynolds, une grande variété de profil des lignes de courant est observable : des tourbillons en aval de l'obstacle, plusieurs tourbillons alternés (allée de von Karman), et finalement une zone de turbulence sur laquelle nous reviendrons (en 44.2).



Le nombre de Reynolds permet aussi de discuter de la nature des écoulements pour lesquels le terme de convection  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  est, par géométrie, négligeable : il suffit que la vitesse varie dans une direction orthogonale à sa direction, comme pour les dispositifs étudiés en 2.1 et 2.2. Dans ce cas, on montre que l'écoulement peut rester non turbulent jusqu'à des valeurs assez élevées du nombre de Reynolds, de l'ordre de  $10^3$ , on dit alors que l'écoulement est *laminaire*. Pour l'écoulement de Poiseuille dans un tuyau (2.2), on observe un écoulement laminaire jusqu'à  $Re \simeq 2300$  ; au delà de cette valeur seuil, les turbulences apparaissent et réduisent fortement le débit.

### 3.2 Force de traînée et de force de portance

La force exercée par le fluide sur l'obstacle vaut

$$\vec{F} = \iint \vec{\sigma} d^2\vec{r}. \quad (19)$$

On cherche à estimer les forces exercées par un fluide sur un corps immergé, en raison de la viscosité. Pour simplifier, on ignore donc la pesanteur (responsable de la poussée d'Archimède, car déjà calculée dans le cas des fluides parfaits) et on se place en régime permanent. Le tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$  est la somme de deux composantes :

- la pression  $P$  qu'il faut calculer à l'aide de l'équation de Navier-Stokes, et dont l'ordre de grandeur dépend donc du régime d'écoulement.
- les contraintes visqueuses, qui sont toujours de l'ordre de  $\eta \partial v_i / \partial r_j \sim \eta U / L$  d'après (3).

La force  $\vec{F}$  est ensuite l'intégrale de  $\vec{\sigma}$  sur la surface de l'obstacle, de l'ordre de  $L^2$ . On trouve que cette force est alors la somme de deux composantes :

- une composante parallèle à la vitesse  $\vec{U}$ , appelée force de traînée,
- une composante perpendiculaire à la vitesse  $\vec{U}$ , appelée force de portance.

### 3.2.1 Forces à faible nombre de Reynolds

Négligeant la convection et ignorant la pesanteur, il reste

$$\vec{\nabla}P = \eta\vec{\Delta}\vec{v}, \quad (20)$$

qu'on appelle *équation de Stokes*. En ordre de grandeur, la pression  $P$  sur l'obstacle est donc telle que  $P/L \sim \eta U/L^2$ , soit  $P \sim \eta U/L$ , forcément du même ordre que les contraintes visqueuses dans ce régime. À faible nombre de Reynolds, le tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$  est donc de l'ordre de  $\eta U/L$ . La force  $\vec{F}$  est alors telle que  $F \sim \eta U/L \times L^2 = \eta UL$ . On écrit

$$F = \eta CUL, \quad (21)$$

où le coefficient  $C > 0$ , sans dimension, est uniquement un facteur numérique. Si l'obstacle est de forme symétrique (par rapport à l'axe défini par  $\vec{U}$ ), on attend une force  $\vec{F} = -\eta CL\vec{U}$ , soit uniquement une force de traînée. Par exemple, une sphère de rayon  $R$  en mouvement à la vitesse  $\vec{V}$  dans un fluide subit une force de traînée qu'on trouve égale (après un calcul assez lourd) à

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{U} \quad (22)$$

(formule de Stokes). Cette formule traduit un frottement visqueux, elle n'est donc valable que pour  $R_e = UR/\nu \ll 1$ .

### 3.2.2 Forces à fort nombre de Reynolds

Négligeant la viscosité, il reste  $\vec{\nabla}P = -\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ . En ordre de grandeur, la pression  $P$  sur l'obstacle est donc telle que  $P/L \sim \rho U^2/L$ , soit  $P \sim \rho U^2$ , beaucoup plus importante que les contraintes visqueuses  $\eta U/L$  dans ce régime, puisque  $R_e \gg 1$ . On note qu'on retrouve, au moins en ordre de grandeur, les valeurs déduites du théorème de Bernoulli : ce résultat sera expliqué en section 4. À fort nombre de Reynolds, le tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$  est donc de l'ordre de  $\rho U^2$ . La force  $\vec{F}$  est alors telle que  $F \sim \rho U^2 \times L^2 = \rho U^2 L^2$ . Comme  $L^2$  est proportionnel à la section  $S$  de l'obstacle, on pose

$$\text{force de traînée : } F_x = \frac{1}{2}C_x\rho SU^2, \quad (23)$$

$$\text{force de portance : } F_z = \frac{1}{2}C_z\rho SU^2, \quad (24)$$

où  $C_x$  et  $C_z$  sont respectivement les coefficients de traînée et de portance. On note que, dans ce régime d'écoulement, ces forces sont indépendantes du coefficient de viscosité. Par exemple, une voiture roulant à 100 km/h présente un nombre de Reynolds  $R_e \sim 10^6 \gg 1$ . Tout l'art des ingénieurs de l'automobile consiste à diminuer le  $C_x$  pour améliorer ses performances et diminuer le  $C_z$  (voire le rendre négatif) pour améliorer la tenue de route. Pour les voitures citadines,  $C_x \sim 0,2$  à  $0,3$ . Autre exemple, un avion de ligne présente un Reynolds  $R_e \simeq 10^8$ , mais on cherche au contraire à augmenter le  $C_z$  pour augmenter la force de portance.

## 4 Couche limite et turbulence

On s'intéresse dans ce chapitre aux écoulements à fort nombre de Reynolds,  $R_e \gg 1$ . Ce régime d'écoulement est très courant au quotidien (voir les exemples précédents) et présente une situation physiquement assez étonnante : la viscosité joue incontestablement un rôle (en témoigne l'existence des forces de traînée et de portance), mais l'écoulement du fluide semble piloté par l'équation d'Euler qui décrit les fluides parfaits. Pour lever le paradoxe, il faut examiner sur quelle longueur est amené à varier le champ de vitesse. Dans la définition du nombre de Reynolds, on suppose que le champ de vitesse varie sur une longueur caractéristique  $L$ , taille de l'obstacle. En réalité, nous allons montrer qu'une autre échelle de longueur peut apparaître dans le système, beaucoup plus petite, qui sera la profondeur de la couche limite.

### 4.1 Couche limite

Revenons sur la condition aux limites d'un écoulement, précisément sur la vitesse tangentielle  $v_t$  du fluide à la surface d'un solide. Dans un fluide parfait, la valeur de  $v_t$  n'est pas fixée ; dans un fluide visqueux, elle est forcément égale à la vitesse locale du solide, par exemple nulle ( $v_t = 0$ ) si le solide est immobile. On aboutit alors à un paradoxe dans le régime d'écoulement à grand nombre de Reynolds :

- négligeant la viscosité devant la convection, on retrouve l'équation d'Euler qui serait celle d'un fluide parfait,
- mais la condition aux limites reste celle d'un fluide visqueux.

La notion de *couche limite* précise le comportement du fluide près de la surface du solide et résout ce paradoxe. Même à fort nombre de Reynolds, l'approximation qui consiste à négliger la viscosité devant la convection n'est pas valable au voisinage immédiat du solide, précisément parce qu'une forte variation de la vitesse apparaît, entraînant une forte augmentation du terme  $\vec{\Delta}\vec{v}$ . On imagine donc que le solide est entouré d'une couche de fluide d'épaisseur  $\delta_v$  telle que

- dans cette épaisseur, une forte variation de la vitesse (de 0 à  $U$ ) fait que la viscosité domine, en accord avec l'application de la condition aux limites visqueuse. Le terme prépondérant de diffusion de l'impulsion y est de l'ordre de  $\eta \|\vec{\Delta} \vec{v}\| \sim \eta U / \delta_v^2$  ;
- en dehors de cette épaisseur, le gradient de vitesse est faible et la convection redevient prépondérante, avec comme précédemment  $\rho \|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\| \sim \rho U^2 / L$ .

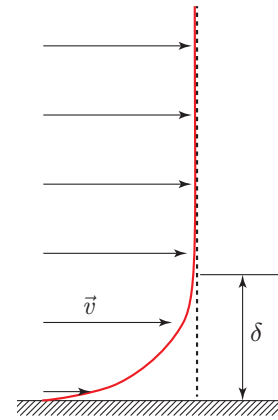
Pour éviter des forces de cisaillement à la frontière de cette couche, les deux termes prépondérants doivent se correspondre :

$$\eta \frac{U}{\delta_v^2} \sim \frac{\rho U^2}{L} \implies \delta_v \sim \sqrt{\frac{\eta L}{\rho U}}. \tag{25}$$

On remarque que

$$\frac{\delta_v}{L} \sim \sqrt{\frac{\eta}{\rho U L}} = \frac{1}{\sqrt{Re}} \ll 1. \tag{26}$$

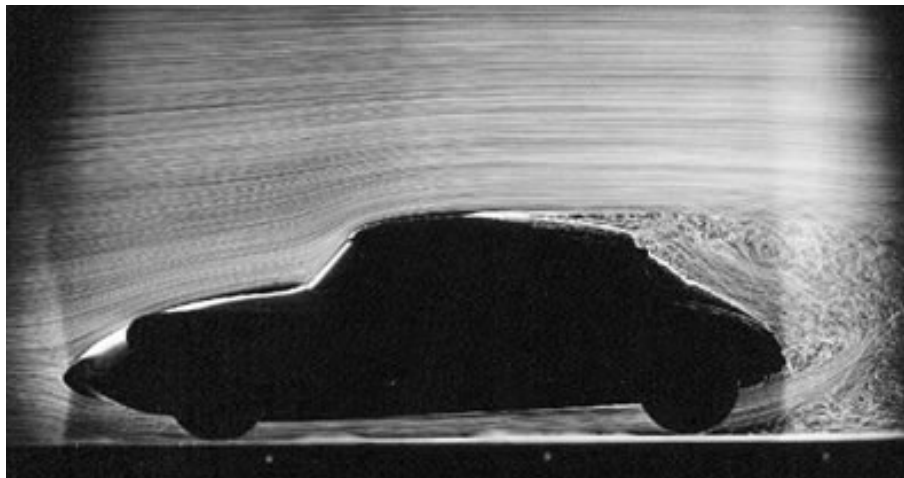
La couche limite a donc une très faible épaisseur par rapport à la taille de l'obstacle. Le régime d'écoulement à fort nombre de Reynolds d'un fluide visqueux peut donc être géré comme celui d'un fluide parfait, l'obstacle étant grossi de l'épaisseur de la couche limite qui vient prendre en compte la condition aux limites adéquate.



En rouge, profil de vitesse du fluide visqueux.  
En noir pointillés, profil de vitesse du fluide parfait.

## 4.2 Turbulence

Mais, pour de très fortes valeurs du nombre de Reynolds, la situation est en fait encore plus complexe. On observe alors que l'écoulement se divise spatialement en deux zones, comme le montre la figure obtenue en soufflerie pour une voiture (de marque française).



- En amont de l'écoulement, et sur la face avant du solide, l'approximation de la couche limite est valable. Les lignes de courants sont stables et l'équation d'Euler peut être appliquée. L'écoulement y est en général irrotationnel et, dans ce cas, l'équation de Bernoulli peut aussi être appliquée.
- En aval de l'écoulement, et sur la face arrière du solide, une zone de turbulence apparaît. Dans cette zone, le champ de vitesse  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  varie de manière chaotique. Les variations rapides (en  $\vec{r}$  et en  $t$ ) de la vitesse font que les termes de viscosité et d'inertie jouent à nouveau un rôle important, aucune approximation simple n'est correcte. Les propriétés du chaos sont, entre autres, une très forte sensibilité aux conditions initiales, ce qui fait qu'il est quasiment impossible de prévoir exactement les lignes de courant. Seul un traitement statistique est envisageable. L'apparition de cette zone de turbulence (appelée aussi zone de sillage) s'appelle le *phénomène de décollement*. Dans cette zone, l'approximation de la couche limite est caduque, on dit qu'il y a *décollement de la couche limite*. Dans la zone de turbulence a lieu une forte dissipation de l'énergie cinétique, associée à une forte augmentation de la force de traînée et une diminution de la force de portance. On cherche donc en général à reculer la ligne de décollement de la couche limite pour réduire cette zone de turbulence.





# Chapitre 7

## Transport convectif

Ce chapitre est consacré au transport convectif, c'est-à-dire le transport de grandeurs (énergie, solutés, ...) accompagnant le mouvement de la matière. Dans les fluides, ce mode de transport peut être prédominant par rapport au transport diffusif. La coexistence des deux modes, en même temps que la prise en compte de la nature des écoulements, rend ces problèmes extrêmement complexes. Nous nous donnerons ici que quelques notions, et on abordera seulement les échanges de chaleur.

### 1 Principes généraux du transfert thermique

#### 1.1 Position du problème

L'écriture générale d'un bilan a été vue en (4) au chapitre 2 : pour une grandeur  $A$  de densité massique  $a$ , il se met sous la forme

$$\rho \frac{da}{dt} + \operatorname{div} \vec{j}_A = \rho \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a \right) + \operatorname{div} \vec{j}_A = \sigma_A,$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\vec{v}$  le champ de vitesse, et où  $\vec{j}_A$  et  $\sigma_A$  sont respectivement le courant diffusif et le taux de production de la grandeur  $A$ . On distingue :

- le transport par *diffusion*, représenté par le courant  $\vec{j}_A$  ;
- le transport par *convection*, représenté par le terme  $\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} a$ .

Pour décrire le transport de chaleur,

- on applique cette équation à l'énergie interne en écrivant  $du = c dT + \dots$ , avec  $c$  la capacité calorifique massique et  $T$  la température : on a donc un terme

$$\rho c \frac{du}{dt} = \rho c \frac{dT}{dt} + \dots = \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right) + \dots;$$

- le courant  $\vec{j}_A$  est le courant de chaleur  $\vec{q}$  qui, en suivant le loi de Fourier, s'écrit  $\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T$ , avec  $\kappa$  la conductivité thermique (qu'on supposera ici uniforme).

Ainsi, les deux termes de transport de la chaleur sont

- le transport par *diffusion*, représenté par le courant  $\operatorname{div} \vec{q} = -\kappa \Delta T$  ;
- le transport par *convection*, représenté par le terme  $\rho c \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T$ .

L'analyse du problème passe par la théorie de la *similitude* : on introduit les grandeurs caractéristiques suivantes.

- $L$  est la dimension du solide (taille d'un obstacle, diamètre d'un tuyau, *etc.*) ;
- $U$  est la vitesse relative de l'écoulement par rapport au solide (vitesse loin d'un obstacle immobile ou vitesse d'un objet dans un fluide statique, vitesse en amont de l'entrée d'un tuyau, *etc.*) ;
- $T_{\text{sol}}$  est la température du surface du solide et  $T_{\text{fl}}$  la température caractéristique du fluide, supposée homogène loin du solide. On va noter

$$\Theta = T_{\text{fl}} - T_{\text{sol}} \quad (1)$$

la différence de température (afin de ne pas confondre avec le laplacien  $\Delta T$ ).

L'objectif est de décrire les échanges de chaleur entre le solide et le fluide en fonction de leurs propriétés d'une part, de  $L$ ,  $U$  et  $\Theta$  d'autre part, afin par exemple de déterminer comment un objet chaud se refroidit dans l'air. Rappelons le nombre le plus important en hydrodynamique,

$$Re = \frac{\text{transport convectif d'impulsion}}{\text{transport diffusif d'impulsion}} = \frac{\rho}{\eta} UL,$$

qui est le nombre de Reynolds, où  $\eta$  est le coefficient de première viscosité.

## 1.2 Nombre de Prandtl

Pour étudier les échanges thermiques, un nombre important est le rapport entre les coefficients de diffusion de l'impulsion  $\eta/\rho$  (voir (5) au chapitre 6) et de la chaleur  $\kappa/\rho c$  (voir (14b) au chapitre 2), qui forme le nombre de Prandtl :

$$P_r = \frac{\text{diffusivité de l'impulsion}}{\text{diffusivité de la chaleur}} = \frac{\eta/\rho}{\kappa/\rho c} = \frac{\eta c}{\kappa}. \quad (2a)$$

Il a été vu en (15) au chapitre 2 que le temps caractéristique de relaxation de la température est inversement proportionnel à son coefficient de diffusion. Il en va de même pour l'impulsion : on peut donc exprimer le nombre de Prandtl en fonction du rapport des temps de relaxation par diffusion :

$$P_r = \frac{\text{temps de relaxation de la température}}{\text{temps de relaxation de l'impulsion}}. \quad (2b)$$

Le nombre de Prandtl ne dépend que de la nature du fluide : d'après son expression (2a), il est d'autant plus élevé que le fluide est visqueux et il est d'autant plus faible que le fluide est un bon conducteur de chaleur. Le tableau suivant donne quelques valeurs à température et pression ambiantes.

fluide	mercure	air	eau	huiles de moteur
$P_r$	0,03	0,7	7	de 100 and 40 000

À la lumière de la relation (2b), le nombre de Prandtl permet de prévoir le comportement suivant :

- pour  $P_r \ll 1$ , la température est la variable rapide, elle peut donc s'ajuster rapidement par diffusion aux variations du champ de vitesse, on dit que la température suit la vitesse ;
- pour  $P_r \gg 1$ , la vitesse est la variable rapide, elle peut donc s'ajuster rapidement par diffusion aux variations de la température, on dit que la vitesse suit la température.

Nous allons limiter le cadre de cette présentation aux écoulements les plus couramment rencontrés dans les problèmes d'échange thermique :

- ceux pour lesquels on peut négliger l'échauffement dû à la viscosité (situation la plus courante) ;
- ceux pour lesquels le nombre de Reynolds  $R_e$  est grand, donc les écoulements laminaires (voire turbulents). Dans ce cas, on sait le fluide s'écoule près des obstacles avec un gradient de vitesse concentré sur la couche limite en vitesse, d'épaisseur

$$\delta_v \sim \sqrt{\frac{\eta L}{\rho U}} = \frac{L}{\sqrt{R_e}}. \quad (3)$$

## 1.3 Couche limite en température et loi de Newton

À l'image de la couche limite en vitesse, il existe une couche limite en température : on observe que l'essentiel du gradient de température au voisinage du solide est concentré dans une couche de fluide d'épaisseur  $\delta_{th}$ . L'existence de cette couche limite en température permet de justifier une loi approchée qui simplifie la résolution de la plupart des problèmes. Le courant de chaleur dans le fluide au voisinage du solide est  $q \sim \kappa \Theta / \delta_{th}$ . On en déduit la *loi de Newton* : à la surface d'un solide de normale (extérieure)  $\vec{n}$ , le courant de chaleur dans le fluide vaut

$$\vec{q} \simeq -h\Theta \vec{n} = -h(T_{fl} - T_{sol}) \vec{n}, \quad (4a)$$

avec

$$h \sim \frac{\kappa}{\delta_{th}} \quad (4b)$$

qui est le *coefficient de transfert thermique*, en  $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}$ . La loi de Newton est une loi semi-empirique qui sert par exemple de condition aux limites lorsqu'on cherche le profil de température dans le solide. Le coefficient de transfert thermique permet de définir le nombre de Nusselt

$$N_u = \frac{hL}{\kappa} \sim \frac{L}{\delta_{th}}. \quad (5)$$

En régime laminaire, l'épaisseur  $\delta_v$  de la couche limite en vitesse est reliée au nombre de Reynolds selon la relation (3), ce permet d'écrire

$$N_u \sim \sqrt{R_e} \frac{\delta_v}{\delta_{th}} \quad (\text{régime laminaire}). \quad (6)$$

Comme on va le voir, c'est ensuite le nombre de Prandtl  $P_r$  qui gouverne le rapport des épaisseurs des couches limites en vitesse et en température.

## 2 Analyse de quelques situations

En ingénierie thermique, l'enjeu consiste à essayer d'estimer le coefficient de transfert thermique  $h$  ou, ce qui est équivalent, le nombre de Nusselt  $N_u$ , en fonction des caractéristiques de l'écoulement au travers des nombres adimensionnés. Le résultat dépend :

- en premier de l'origine de la convection, forcée ou naturelle,
- du régime d'écoulement (rampant, laminaire, turbulent),
- de la géométrie du dispositif.

Nous présentons ici quelques arguments qui permettent d'obtenir des ordres de grandeur du coefficient de transfert thermique  $h$  dans des situations simples et en régime laminaire. On trouvera des justifications plus élaborées, des valeurs plus précises ainsi que des estimations en régime turbulent dans la plupart des ouvrages consacrés au transfert thermique.

### 2.1 Convection forcée

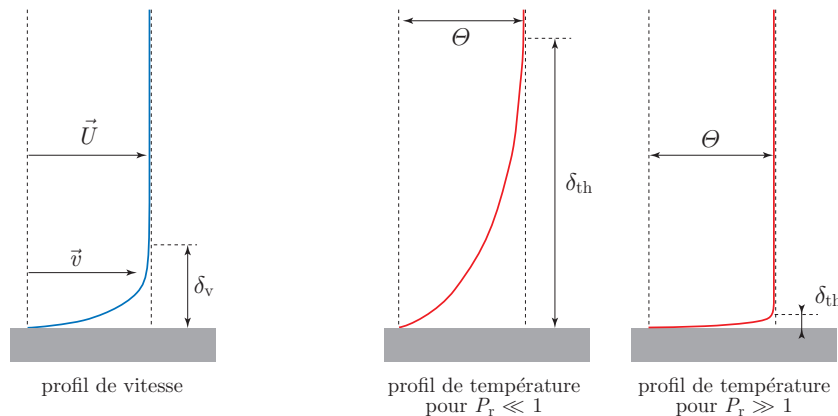
On parle de *convection forcée* lorsque l'écoulement est provoqué par un dispositif extérieur au système, comme dans le cas d'un échangeur thermique ou d'une soufflerie. En convection forcée, la variable  $U$  est une donnée imposée.

Pour un écoulement laminaire, un argument de similitude permet d'évaluer le rapport  $\delta_{th}/\delta_v$  en fonction du nombre de Prandtl, en reproduisant le raisonnement qui a mené à l'expression de  $\delta_v$  au chapitre 6. Dans la couche limite en température, le gradient de la température est élevé, de l'ordre de  $\Theta/\delta_{th}$ ; donc le transport diffusif de chaleur est prépondérant, de l'ordre de  $\kappa \Delta T \sim \kappa \Theta/\delta_{th}^2$ . À la sortie de la couche, le gradient de température est faible, de l'ordre de  $\Theta/L$ ; donc le transport convectif de chaleur redevient prépondérant, de l'ordre de  $\rho c \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \sim \rho c v_{th} \Theta/L$ , où  $v_{th}$  est la vitesse du fluide à la distance  $\delta_{th}$  de la paroi. L'épaisseur de la couche limite laminaire en température est la distance à la paroi du solide telle que ces deux contributions se correspondent, donc

$$\kappa \Theta/\delta_{th}^2 \sim \rho c v_{th} \Theta/L \implies \delta_{th}^2 \sim \frac{\kappa L}{\rho c v_{th}} = \frac{1}{P_r} \frac{L^2 U}{R_e v_{th}} \implies \delta_{th} \sim \frac{\delta_v}{\sqrt{P_r}} \sqrt{\frac{U}{v_{th}}},$$

où on a utilisé (3). Il y a alors deux cas limites (voir figures) :

- pour  $\delta_{th} \gg \delta_v$ , alors  $v_{th} \sim U$  et il vient  $\delta_{th} \sim \frac{\delta_v}{\sqrt{P_r}}$ , ce qui est cohérent si  $P_r \ll 1$ ;
- pour  $\delta_{th} \ll \delta_v$ , alors  $v_{th} \sim \frac{\delta_{th}}{\delta_v} U$  et il vient  $\delta_{th} \sim \frac{\delta_v}{\sqrt{P_r}} \sqrt{\frac{\delta_v}{\delta_{th}}} \implies \delta_{th} \sim \frac{\delta_v}{\sqrt[3]{P_r}}$ , ce qui est cohérent si  $P_r \gg 1$ .



Profil de vitesse dans le fluide au voisinage du solide, en régime laminaire et en convection forcée, et profils attendus de température selon les valeurs du nombre de Prandtl.

Dans le cas de l'écoulement le long d'une plaque plane et mince de longueur  $L$ , des calculs complets fournissent les résultats donnés dans le tableau suivant. Il se trouve que les résultats obtenus pour  $P_r \gg 1$  sont en fait corrects dès que  $P_r > 0,6$ , donc en particulier pour la plupart des gaz dans les conditions ambiantes.

plaque mince	$N_u$ en régime laminaire	$N_u$ en régime turbulent
$P_r \ll 1$	$1,13 R_e^{1/2} P_r^{1/2}$	
$P_r \gg 1$	$0,664 R_e^{1/2} P_r^{1/3}$	$0,036 R_e^{4/5} P_r^{1/3}$

## 2.2 Convection naturelle

On parle de *convection naturelle* lorsque l'écoulement apparaît spontanément dans un fluide exposé à un écart de température, comme dans un refroidissement par ailettes ou le chauffage d'un local. En convection naturelle, la variable  $U$  est une variable interne du système. L'écart de température  $\Theta$  s'observe sur l'épaisseur  $\delta_{th}$  de la couche limite en température et entraîne la circulation du fluide à une vitesse  $U$  répartie sur l'épaisseur  $\delta_v$  de la couche limite en vitesse. Le profil de vitesse est cependant plus compliqué que dans le cas de la convection forcée puisque la vitesse est nulle à la fois sur la paroi et loin de la paroi (voir figures).

Pour un fluide dans le champ de pesanteur, initialement statique et soumis à un gradient de température, le mécanisme de la convection naturelle est le suivant. Une approximation d'usage dans cette circonstance est l'*approximation de Boussinesq*, qui consiste à négliger la dépendance en pression de la masse volumique : on écrit  $\rho(T, P) \simeq \rho(T)$ .<sup>1</sup> L'écart de température  $\Theta$  induit par dilatation thermique une variation de masse volumique  $\delta\rho \sim -\alpha\rho\Theta$  où

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

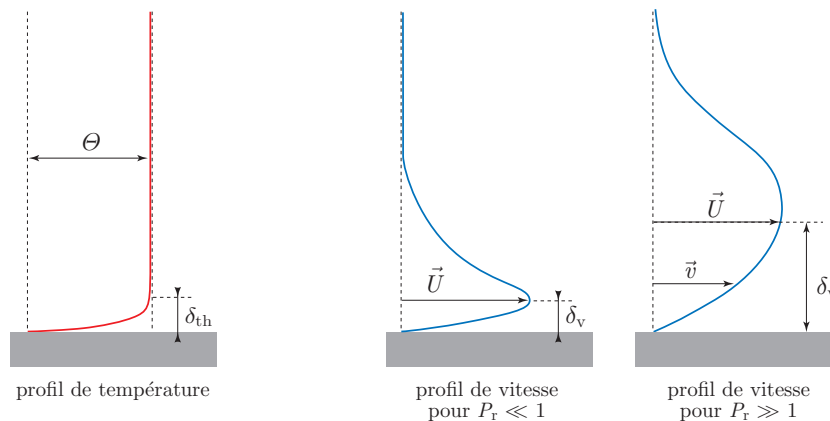
est le coefficient de dilatation thermique. Il en résulte une variation de la force volumique de pesanteur  $\delta\rho \vec{g}$  qui met le fluide localement en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$ . Cette vitesse est limitée par l'un des deux termes de force volumique présent dans l'équation de Navier-Stokes : la force de viscosité  $\eta \Delta \vec{v}$  et la force d'inertie représentée par le terme de convection  $\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ . Puisque nous nous limitons aux écoulements à grand nombre de Reynolds, c'est ce dernier terme qui l'emporte. La vitesse caractéristique  $U_c$  de la convection naturelle du fluide est donc telle que les deux termes  $\delta\rho \vec{g} \sim \alpha\rho g\Theta$  et  $\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \sim \rho U_c^2/L$  se compensent, d'où

$$U_c \sim \sqrt{\alpha|\Theta|gL}. \quad (7)$$

Par exemple, dans l'air avec des conditions ambiantes,  $L = 20$  cm et  $\Theta = 20$  °C, on trouve  $U \sim 40$  cm/s, d'où un nombre de Reynolds  $R_e \sim 5 \times 10^3 \gg 1$ .

Comme dans le cas de la convection forcée, l'enjeu consiste à exprimer le coefficient de transfert thermique  $h$  ou le nombre de Nusselt  $N_u$  en fonction de la vitesse  $U_c$  et du nombre de Prandtl  $P_r$ . Le profil de vitesse étant plus compliqué que dans le cas de la convection forcée, il n'existe pas de raisonnement simple permettant d'estimer le rapport  $\delta_{th}/\delta_v$ . Ce rapport reste néanmoins fonction du nombre de Prandtl :

- Pour  $P_r \gg 1$ , on trouve  $\delta_v \gg \delta_{th}$ , le fluide est mis en mouvement sur une épaisseur plus importante que celle de la variation de température, résultat analogue à celui de la convection forcée.
- Pour  $P_r \ll 1$ , on trouve  $\delta_v \sim \delta_{th}$ , le fluide est mis en mouvement sur une épaisseur comparable à celle de la variation de température car, le mouvement étant créé par la variation de température, il n'est pas possible d'observer  $\delta_v \ll \delta_{th}$  en convection naturelle.



Profil de température dans le fluide au voisinage du solide, en profils attendus de vitesse en régime laminaire et en convection naturelle, selon les valeurs du nombre de Prandtl.

La convection naturelle offre aussi un exemple d'instabilité hydrodynamique, l'*instabilité de Rayleigh-Bénard*. Une couche horizontale de fluide, de hauteur  $L$  est en contact avec deux thermostats : celui du bas impose une température  $T_b$  plus élevée que la température  $T_h$  imposée par celui du haut. Le système est donc soumis à la fois au champ de pesanteur et à un gradient de température, tous deux verticaux. Le fluide près de la source chaude, situé en bas, se dilate et a tendance à monter, entraînant un mouvement de convection. Aux faibles vitesses, ce mouvement

1. Cette approximation est valable pour un liquide considéré incompressible et, dans un gaz, pour des hauteurs  $L \ll P/\rho g$

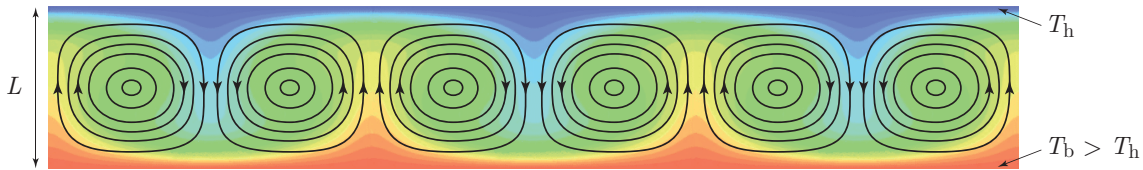
est contrarié par la viscosité. On peut montrer que le comportement global du système est piloté par un autre nombre sans dimension, le nombre de Rayleigh

$$R_a = \frac{\rho^2 g \alpha c}{\eta \kappa} \Theta L^3, \quad (8)$$

avec  $\Theta = T_b - T_h > 0$ . Il existe une valeur critique  $R_c$  telle que :

- pour  $R_a < R_c$ , le transport de chaleur entre les plaques se fait par diffusion thermique, sans aucun mouvement de convection de fluide.
- pour  $R_a > R_c$  des rouleaux de convection apparaissent, ces rouleaux étant d'une largeur de l'ordre de la hauteur  $L$  et contrarotatifs de manière alternée.

Expérimentalement, le thermostat du bas est une plaque chauffante. La théorie permet de calculer la valeur de  $R_c$  : si le thermostat du haut est aussi une plaque rigide, on prévoit  $R_c \simeq 1708$  ; si le thermostat du haut est l'air libre, on prévoit  $R_c \simeq 1100$ . Ces valeurs sont en bon accord avec l'expérience.



Rouleaux de convection de Rayleigh-Bénard (obtenus en simulation 2D).

### 2.3 Nombre de Biot

Dans l'étude d'un problème à une dimension en régime stationnaire, on définit la résistance thermique d'un matériau : voir chapitre 2, § 3.3.2. Dans l'étude des transferts thermiques, il est donc instructif de comparer les résistances thermiques du solide et du liquide. Soit  $\mathcal{S}$  leur surface de contact et  $\mathcal{P}$  le flux de chaleur qui la traverse.

- Si  $\kappa_{\text{sol}}$  est la conductivité thermique du solide d'épaisseur  $L$ , sa résistance thermique est  $R_{\text{sol}} = L/\kappa_{\text{sol}}\mathcal{S}$ . L'écart de température dans le solide est de l'ordre de  $R_{\text{sol}}\mathcal{P}$ .
- Le gradient de température dans le fluide est localisé dans la couche limite en température d'épaisseur  $\delta_{\text{th}}$ , donc sa résistance thermique est  $R_{\text{fl}} \sim \delta_{\text{th}}/\kappa\mathcal{S} \sim 1/h\mathcal{S}$ . L'écart de température dans le fluide est de l'ordre de  $R_{\text{fl}}\mathcal{P}$ .

Le rapport de ces deux résistances thermiques est le nombre de Biot :

$$B_i = \frac{R_{\text{sol}}}{R_{\text{fl}}} \sim \frac{hL}{\kappa_{\text{sol}}}. \quad (9)$$

L'estimation du nombre de Biot peut permettre de simplifier la résolution des problèmes.

- Si  $B_i \ll 1$ , on peut considérer que le solide a une température quasiment uniforme. En pratique, cette approximation est satisfaisante pour  $B_i < 0,1$  : on dit alors que le solide est *thermiquement mince*. L'application de cette approximation dans un régime lentement variable conduit à des équations simples, avec une relaxation exponentielle de la température du solide.
- Si  $B_i > 0,1$ , on dit que le solide est *thermiquement épais* et l'approximation précédente est caduque.



# Chapitre 8

## Phénomènes de surface

Dans ce chapitre, on aborde les notions permettant de décrire la surface des liquides. On distinguera :

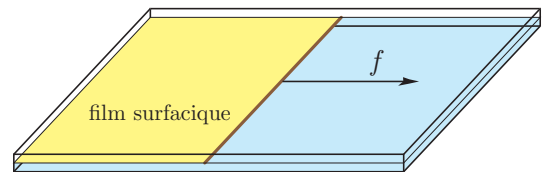
- les surfaces libres où le liquide est en contact avec un gaz, par exemple l'interface eau/air : problème des bulles d'air dans l'eau, des gouttes d'eau dans l'air, des bulles de savon, des ondes superficielles, ...
- les surfaces contraintes où le liquide est en contact avec un solide : mouillage, étalement des gouttes de liquide, ascension capillaire, ménisque dans un tube, ...

On désigne souvent sous le nom d'*effets capillaires* les phénomènes associés à l'influence des interfaces dans un système. La notion centrale est celle de la *tension superficielle*, qui est à la surface ce que la pression est au volume.

### 1 La tension superficielle $\sigma$

#### 1.1 Présentation en termes de forces

Considérons un film étalé à la surface d'un liquide, par exemple de l'essence à la surface de l'eau. Ce film est confiné sur une surface  $\mathcal{S}$  par l'intermédiaire d'un petit bâtonnet flottant, de longueur  $\ell$  (correspondant à la largeur du récipient). Ce film a une surface d'équilibre qu'on peut augmenter en exerçant une force sur le bâtonnet. On constate expérimentalement que, pour maintenir une position donnée du bâtonnet, il faut exercer une force  $f$  proportionnelle à la longueur  $\ell$ . On définit donc la force par unité de longueur,



$$\sigma = \frac{f}{\ell} \quad (1)$$

qui est la tension superficielle du film, en N/m. C'est l'analogue de la pression, définie comme force par unité de surface dans un gaz. Le film exerce sur un élément de longueur  $d\ell$  du bâtonnet une force de traction égale à  $df = \sigma d\ell$ .

Lorsqu'on déplace de manière quasistatique le bâtonnet de  $dx$  pour accroître la surface de  $d\mathcal{S} = \ell dx$ , la force  $f = \sigma \ell$  travaille de

$$\delta W = f dx = \sigma \ell dx = \sigma d\mathcal{S}, \quad (2)$$

formule à rapprocher de celle du travail des forces de pression  $\delta W = -PdV$  (noter toutefois la différence de signe). Cette expression (2) du travail de la force de tension superficielle va nous permettre de faire le lien avec l'approche thermodynamique.

#### 1.2 Présentation thermodynamique

Soit un système présentant deux phases (1) et (2) séparées par un interface de surface  $\mathcal{S}$ . La valeur de la surface intervient dans les variables d'état du système, en plus de l'entropie  $S$ , des volumes des deux phases, *etc.* D'après (2), l'identité thermodynamique exprimant la différentielle de l'énergie interne  $U$  doit s'écrire

$$dU = T dS + \dots + \sigma d\mathcal{S}, \quad (3)$$

où  $T$  est la température et  $\sigma$  à nouveau la tension superficielle. En termes d'énergie libre  $F = U - TS$ , on a

$$dF = -S dT + \dots + \sigma d\mathcal{S}. \quad (4)$$



La définition thermodynamique de la tension superficielle est donc

$$\sigma = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{S, \dots} = \left( \frac{\partial F}{\partial S} \right)_{T, \dots} \quad (5)$$

La définition thermodynamique de la tension superficielle permet aussi d'entrevoir son interprétation microscopique. Les molécules d'un liquide ont, dans le volume de ce liquide, une énergie de cohésion  $-\varepsilon < 0$  : pour sortir une molécule du volume, il faut fournir au système l'énergie  $+\varepsilon$ . Ainsi, pour vaporiser  $N_A$  molécules, il faut fournir  $N_A \varepsilon \sim L$ , où  $L$  est la chaleur latente molaire de vaporisation. Dans l'eau,  $L \simeq 40$  kJ/mol et on trouve  $\varepsilon \sim 0,4$  eV. Quand on accroît la surface du liquide de  $dS$ , on amène  $dN$  molécule du volume à la surface ; ce faisant, elles perdent environ la moitié de leur environnement, donc il a fallu leur apporter la moitié de l'énergie de cohésion, soit  $\varepsilon/2$ . Le travail  $\sigma dS$  correspond donc à l'énergie  $\frac{\varepsilon}{2} dN$ . Si  $a$  est la distance moyenne entre les molécules, on a aussi  $dS = a^2 dN$ , donc

$$\sigma dS = \sigma a^2 dN \sim \frac{\varepsilon}{2} dN \quad \implies \quad \sigma \sim \frac{\varepsilon}{2a^2}$$

Pour estimer  $a$ , on écrit que le volume molaire vaut  $V_m = N_A a^3$ . Dans l'eau,  $V_m = 18$  cm<sup>3</sup>, d'où  $a \sim 3$  Å et  $\sigma \sim 0,3$  N/m. En réalité, l'ordre de grandeur de  $\varepsilon$  est ici majoré et on mesure  $\sigma = 0,07$  N/m pour l'interface eau/air.

Première remarque. Précisément, la tension de surface est définie pour un interface entre deux milieux. Or, bien souvent, le système présente plusieurs interfaces : par exemple, pour de l'eau dans un verre, on a trois interfaces associés à trois tensions superficielles différentes :  $\sigma_{\text{eau/air}}$ ,  $\sigma_{\text{eau/verre}}$  et  $\sigma_{\text{verre/air}}$ . On connaît  $\sigma_{\text{eau/air}} = 0,07$  N/m, les deux autres dépendent beaucoup de l'état de surface du verre.

Seconde remarque. La prise en compte des phénomènes superficiels entrave la propriété d'extensivité des systèmes thermodynamiques. Un système est extensif lorsque ses grandeurs comme l'énergie, l'entropie, ... sont proportionnels à la quantité de matière, comme l'est en général le volume (proportionnel à la taille du système au cube). L'introduction de la surface  $S$  (proportionnelle à la taille au carré) dans les variables d'états brise l'extensivité et rend caduques toutes les propriétés associées (relation de Clapeyron pour la chaleur latente, ...).

### 1.3 Le principe de la surface minimale

Considérons l'énergie libre d'un système ayant un seul interface, tel que  $dF = -S dT + \dots + \sigma dS$ . Le plus souvent, la tension superficielle ne dépend que de la température (pas des volumes).<sup>1</sup> Supposons aussi que la forme du système, et donc la variable surface  $S$  en particulier, n'intervienne pas ailleurs dans l'identité thermodynamique. Alors

$$\left( \frac{\partial F}{\partial S} \right)_{T, \dots} = \sigma(T) \quad \implies \quad F(T, \dots, S) = F(T, \dots, 0) + \sigma S = F_0 + \sigma S$$

où  $F_0$  est l'énergie libre en ignorant la contribution de la surface. À l'équilibre thermodynamique, à température fixée, l'énergie libre est minimale par rapport aux variations des variables internes, parmi lesquelles la surface  $S$  figure. On aboutit alors au résultat suivant : à température donnée, le système trouve son équilibre pour une surface  $S$  minimale.

Soit un système comme une bulle d'air dans l'eau, une goutte d'eau dans l'air ou une bulle de savon. Si on peut négliger les effets de la pesanteur (cf. paragraphe 1.4), la seule contribution de la surface à l'énergie libre est le terme de tension superficielle. La surface doit donc être minimale, pour un volume donné. On démontre en mathématiques que la forme est alors la sphère,<sup>2</sup> comme observé. De même, deux bulles ou deux gouttes mises en contact vont fusionner en une seule, car la surface totale sera ainsi plus petite.

En physique de la matière molle, on appelle *surfactant* un composé qui, dissous dans le liquide, diminue sa tension superficielle. La contribution de la surface à l'énergie libre est alors moins importante, et le liquide peut plus facilement former des interfaces. C'est le cas des savons,<sup>3</sup> qui aident l'eau à mousser. C'est aussi le cas des sécrétions à l'intérieur des alvéoles pulmonaires, pour aider celles-ci à rester gonflées même pendant l'expiration (un collapse des alvéoles serait traumatisant).

### 1.4 Longueur capillaire nombre de Bond

Ainsi qu'on peut l'observer sous l'eau, lorsqu'une bulle d'air devient trop grosse, elle perd sa forme sphérique en commençant par s'écraser. C'est clairement l'effet du différentiel de pression sur la hauteur de la bulle, donc l'effet

1. On a expérimentalement  $\sigma(T) = \sigma(T_0) - b(T - T_0)$ , où  $b > 0$  :  $\sigma$  diminue avec l'augmentation de température, en raison de la diminution de l'énergie de cohésion.

2. Ce résultat est simple, mais mathématiquement assez difficile à établir. On peut au moins le vérifier sur l'exemple suivant. Pour une sphère de volume  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , la surface est  $S = 4\pi R^2 = (36\pi)^{1/3} V^{2/3} \simeq 4,84 V^{2/3}$ . Pour un cube de volume  $V = a^3$ , la surface est  $S = 6a^2 = 6V^{2/3}$ , donc une surface plus importante que la sphère pour le même volume.

3. Une molécule de savon est *amphiphile*, c'est-à-dire qu'elle possède une terminaison *hydrophile* (groupement ionique) attirée par l'eau et une autre terminaison à la fois *lipophile* (chaîne carbonée) attirée par les lipides et *hydrophobe*. Ces molécules peuvent ainsi tapisser la surface de l'eau, surtout si celle-ci est en contact avec des corps gras, et diminuer la contribution énergétique de la surface.

de la pesanteur. Il y a ainsi une longueur en dessous de laquelle on peut ignorer les effets de la pesanteur, c'est la *longueur capillaire*  $\ell_c$ . Pour la déterminer, on peut faire une analyse dimensionnelle.

Soient deux fluides de masses volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$  séparés par un interface de tension superficielle  $\sigma$ . On essaye de construire une longueur avec les grandeurs  $\Delta\rho = |\rho_2 - \rho_1|$  en  $\text{kg/m}^3$ ,  $\sigma$  en  $\text{N/m} = \text{kg/s}^2$  et  $g$  en  $\text{m/s}^2$ . Il suffit de poser  $\ell_c \propto (\Delta\rho)^\alpha \sigma^\beta g^\gamma$  en mètres, et on trouve  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$  et  $\gamma = -\frac{1}{2}$ . On définit précisément la longueur capillaire selon

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\Delta\rho g}}. \quad (6)$$

Cette longueur représente la taille critique du système pour laquelle il y a compétition entre les effets capillaires et de gravité. Par exemple, pour l'interface eau/air,  $\Delta\rho = \rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{air}} \simeq \rho_{\text{eau}}$ , et on trouve  $\ell_c \simeq 2,6$  mm. Si  $L$  est une taille caractéristique du système (taille d'une bulle, diamètre d'un tube capillaire, ...), on définit le *nombre de Bond*

$$B = \left(\frac{L}{\ell_c}\right)^2 = \frac{\Delta\rho g L^2}{\sigma}. \quad (7)$$

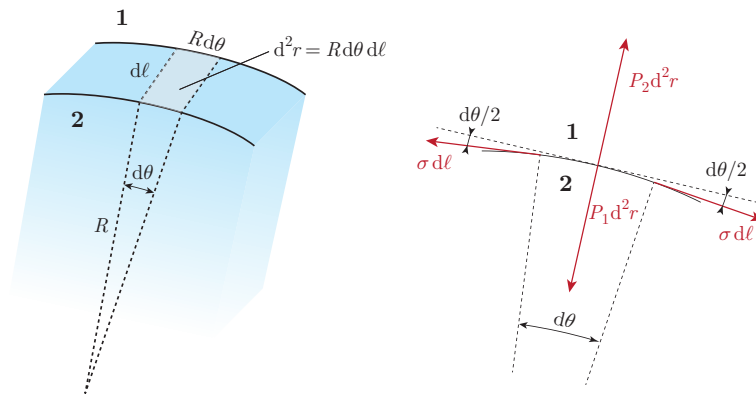
Lorsque  $B \ll 1$  ( $L \ll \ell_c$ ), les effets capillaires dominent ; lorsque  $B \gg 1$  ( $L \gg \ell_c$ ), les effets de gravité dominent.

## 2 La loi de Laplace

La présence des forces de tension superficielle à l'interface entre deux fluides entraîne une différence de pression de part et d'autre de l'interface, lorsque celui-ci présente une courbure. La relation qui exprime cette différence de pression est la loi de Laplace ; elle intervient au titre de condition aux limites dans les problèmes d'hydrodynamique. Selon les cas, pour établir cette loi, nous allons voir qu'il est plus commode d'utiliser la tension superficielle sous son aspect dynamique (équilibre des forces) ou thermodynamique (minimum d'un potentiel).

### 2.1 Bilan des forces

Considérons une géométrie simple où deux fluides 1 et 2 ont un interface courbé selon une seule direction, à la manière d'une tôle ondulée (ce sera la géométrie retenue pour étudier les ondes superficielles, voir 4).



On dresse le bilan des forces sur un élément de surface entre les deux fluides, par exemple quand le centre de courbure est situé dans le fluide 2. Soit  $dl$  l'élément longueur droite et  $Rd\theta$  l'élément de longueur courbé, où  $R$  est la rayon de courbure (voir figure). Les deux pressions  $P_1$  et  $P_2$  de part et d'autre de l'interface exercent une force  $(P_2 - P_1) Rd\theta dl$  dirigée perpendiculairement à l'élément de surface. Les forces de tension superficielle agissant sur les bords de longueur  $dl$  sont inclinées d'un angle  $\pm d\theta/2$  par rapport à la tangente à l'élément de surface, donc ont une projection totale sur la normale  $2(\sigma dl) \sin(d\theta/2) \simeq \sigma dl d\theta$ . En faisant le bilan des forces,  $(P_2 - P_1) Rd\theta dl = \sigma dl d\theta$ , d'où

$$P_2 - P_1 = \frac{\sigma}{R} \quad \text{à l'interface (loi de Laplace)}. \quad (8)$$

Cette formule est généralisable à un élément de surface tel que le centre de courbure soit situé dans le fluide 1, à condition de considérer que le rayon de courbure  $R$  est algébrique. D'une manière générale, la courbure d'un interface entraîne donc une différence de pression de part et d'autre de cet interface, la pression étant plus élevée du côté concave. On note que la différence entre les deux pressions est d'autant plus forte que le rayon de courbure est petit. Lorsque la surface est plane, le rayon de courbure est infini et on retrouve la condition  $P_2 = P_1$  (car les forces de tension superficielle sont alors orthogonales aux forces de pression).

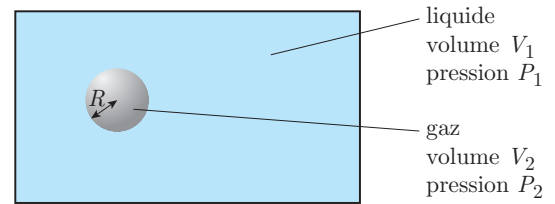
Pour un interface de forme quelconque, on peut définir mathématiquement en chaque point de la surface deux rayons de courbure algébriques  $R$  et  $R'$  (associés à deux arcs localement perpendiculaires) et la loi de Laplace s'écrit plus généralement

$$P_2 - P_1 = \sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (\text{loi de Laplace}). \quad (9)$$

Faisons une remarque importante pour la suite : étant donné que l'interface entre deux fluides n'a pas de masse appropriée, la condition d'équilibre des forces, qui a permis de dériver la loi de Laplace, est toujours valable, même lorsque les fluides ne sont pas au repos (de même que la loi action/réaction est toujours valable). La loi de Laplace remplace donc la continuité de la pression à l'interface entre deux fluides en présence de tension superficielle, même lorsque l'interface est mobile.

## 2.2 Équilibre d'une bulle

Considérons un volume  $V_1$  de liquide dans lequel est incluse une bulle de gaz de volume  $V_2$ . On se place dans le régime où la pesanteur est négligeable ( $B \ll 1$ ), de sorte que les pressions sont uniformes et la bulle sphérique. À la surface de cette bulle, trois forces sont en présence : la force de pression  $P_1$  du liquide, la force de pression  $P_2$  du gaz et la force de tension superficielle  $\sigma$  de l'interface liquide/gaz. Le plus simple est ici d'écrire le minimum d'énergie libre, en choisissant une température  $T$  et volume total  $V = V_1 + V_2$  fixés. On écrit



$$dF = -S dT - P_1 dV_1 - P_2 dV_2 + \sigma dS. \quad (10)$$

Les trois variables  $V_1$ ,  $V_2$  et  $S$  sont reliées et seule l'une d'entre elles constitue une variable interne. D'abord, puisque le volume total est fixé,  $dV_1 + dV_2 = 0$ . Ensuite, puisque la bulle est sphérique de rayon  $R$ ,  $dS = \frac{2}{R} dV_2$ . D'où

$$dF = -S dT - \left( P_2 - P_1 - \frac{2\sigma}{R} \right) dV_2. \quad (11)$$

Au minimum de  $F$  par rapport à  $V_2$ , on écrit  $(\partial F / \partial V_2)_T = 0$  et il vient

$$P_2 - P_1 = \frac{2\sigma}{R}. \quad (12)$$

qui est la loi de Laplace dans le cas d'une surface sphérique ( $R' = R$  dans (9)). La pression à l'intérieur de la bulle est donc plus forte qu'à l'extérieur, ceci d'autant plus que son rayon est petit. On peut comparer  $\Delta P_L = \frac{2\sigma}{R}$  à la variation de pression hydrostatique dans le liquide sur le diamètre de la bulle si on rétablit la pesanteur, soit  $\Delta P_{\text{hydro}} = 2\rho g R$  :

$$\frac{\Delta P_L}{\Delta P_{\text{hydro}}} = \frac{2\sigma/R}{2\rho g R} = \frac{\sigma}{\rho g R^2} = \frac{1}{B} \gg 1.$$

La bulle n'est sphérique et la loi de Laplace sous sa forme (12) n'est donc valable que pour  $R \ll \ell_c$ , longueur capillaire. Si  $R \gg \ell_c$ , la bulle est oblate.

Remarque : Pour une bulle de savon dans l'air, le problème est presque identique, à ceci près que le film mince qui constitue la paroi de la bulle présente deux interfaces liquide/gaz, donc la surface doit être comptée deux fois : écrivant donc  $dS = 2 \times \frac{2}{R} dV_2$ , on obtient

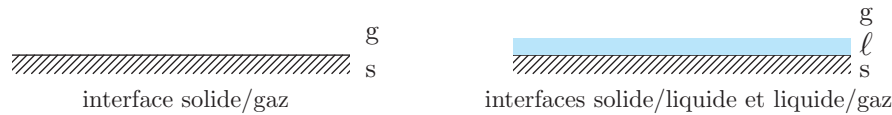
$$P_2 - P_1 = \frac{4\sigma}{R} \quad (\text{bulles de savon}).$$

## 3 Le mouillage

### 3.1 Étalement d'un liquide

On examine le problème de l'étalement d'un liquide sur une surface solide plane (horizontale). Les trois tensions superficielles interviennent :  $\sigma_{sg}$  pour l'interface solide/gaz,  $\sigma_{sl}$  pour l'interface solide/liquide et  $\sigma_{lg}$  pour l'interface liquide/gaz. Est-il favorable d'étaler ou non le liquide à la surface du solide ? Pour répondre à cette question, il suffit de comparer les énergies :

- si le solide est sec, l'énergie par unité de surface est  $\sigma_{sg}$ ,
- si un film liquide est étalé, l'énergie par unité de surface est  $\sigma_{sl} + \sigma_{lg}$ .



La différence de ces deux termes définit le *paramètre de mouillage*

$$E = \sigma_{sg} - (\sigma_{sl} + \sigma_{lg}). \quad (13)$$

Si  $E > 0$ , le mouillage est favorable : un liquide déposé sur le solide formera donc un film mince, voire monomoléculaire, on parle de *mouillage total*. Si  $E < 0$ , le mouillage est défavorable : si un liquide est déposé sur le solide, il formera des gouttes, on parle de *mouillage partiel*.

Le paramètre de mouillage dépend déjà du solide. On distingue deux types de solides, selon leur énergie de cohésion  $\varepsilon$  à laquelle est reliée la tension superficielle  $\sigma_{sg}$ .

- (i) Les solides durs : métaux, oxydes, verres, dans lesquels les liaisons sont fortes (liaisons ionique, covalente ou métallique) avec des énergies de cohésion élevées. Ces solides ont de fortes énergies de surface,  $\sigma_{sg} \sim 0,5$  à  $1$  N/m, ce qui fait que souvent  $E > 0$  et le mouillage des liquides est total. Mais corrélativement, ils sont facilement pollués par des impuretés, ce qui altère beaucoup leurs propriétés de surface : une goutte d'eau devrait s'étaler sur une surface métallique comme de l'aluminium, elle ne le fait pas en raison de problèmes de contamination et d'hystérésis.
- (ii) Les solides mous : polymères, téflon, dans lesquels les liaisons sont faibles (liaisons de van der Waals, à pont hydrogène) avec des énergies de cohésion faibles. Ces solides ont des faibles énergies de surface,  $\sigma_{sg} \sim 10^{-2}$  N/m, ce qui fait que souvent  $E < 0$  et le mouillage des liquides est partiel.

Cette distinction entre les solides est par exemple utilisée en imprimerie, dans le procédé *offset* : sur une plaque d'aluminium (solide dur) est déposée une couche de polymère (solide mou) qui reproduit le motif à imprimer. La plaque est mouillée, et l'eau ne peut s'étaler que sur l'aluminium. Puis l'encre est déposée et, ne parvenant pas à se mélanger à l'eau, elle s'étale sur le polymère. La plaque est ensuite mise sur les rouleaux pour l'impression sur le papier.

### 3.2 Angle de raccordement : loi de Young-Dupré

On examine dans la suite le cas du mouillage partiel ( $E < 0$ ). Une goutte de liquide, déposée à la surface du solide, prend une forme qui dépend des tensions superficielles et de la pesanteur. Le paramètre significatif est l'angle  $\theta_\ell$  de raccordement du liquide sur le solide.



On peut écrire le bilan des forces s'exerçant sur la ligne de contact solide/liquide/gaz. Pour un élément de longueur  $d\ell$ , les trois forces de tension sont  $\sigma_{sg}d\ell$ ,  $\sigma_{sl}d\ell$  et  $\sigma_{lg}d\ell$ , chacune tangentes à l'interface concerné. À l'équilibre de la goutte, la somme des forces est nulle, ce qui donne pour la composante horizontale <sup>4</sup>

$$\sigma_{sg} = \sigma_{sl} + \sigma_{lg} \cos \theta_\ell \quad \implies \quad \cos \theta_\ell = \frac{\sigma_{sg} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lg}} \quad (14)$$

qui est la relation de Young-Dupré. Si  $\sigma_{sg} > \sigma_{sl}$ ,  $\cos \theta_\ell > 0$  donc  $\theta_\ell < 90^\circ$ , la goutte a un profil écrasé, on dit que le liquide est *mouillant*. Si  $\sigma_{sg} < \sigma_{sl}$ ,  $\cos \theta_\ell < 0$  donc  $\theta_\ell > 90^\circ$ , la goutte a un profil bombé, on dit que le liquide est *non mouillant*. Utilisant (14) dans (13), on peut noter qu'il vient

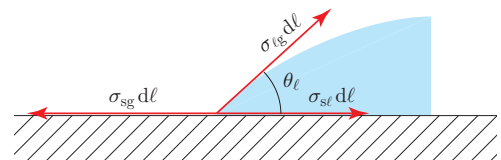
$$E = -(1 - \cos \theta_\ell) \sigma_{lg} < 0,$$

en accord avec l'hypothèse d'un mouillage partiel. Quand les valeurs des tensions superficielles donnent  $\cos \theta_\ell < -1$ , c'est que le mouillage est impossible. <sup>5</sup>

Quand la quantité de liquide déposé sur le solide augmente, la goutte s'écrase sous son poids, mais l'angle de raccordement  $\theta_\ell$ , piloté par le seule relation de Young-Dupré, reste le même. Si la surface du solide est inclinée, la goutte se déforme mais la relation de Young-Dupré reste valable à la ligne de contact. En revanche, au-delà d'un angle critique d'inclinaison, la goutte se met en mouvement et l'angle est fonction de la dynamique (voire de l'hystérésis).

4. La composante verticale comprend aussi la réaction du support

5. C'est la situation qui est recherchée pour les vêtements anti-pluie ou les poêles anti-adhérentes.

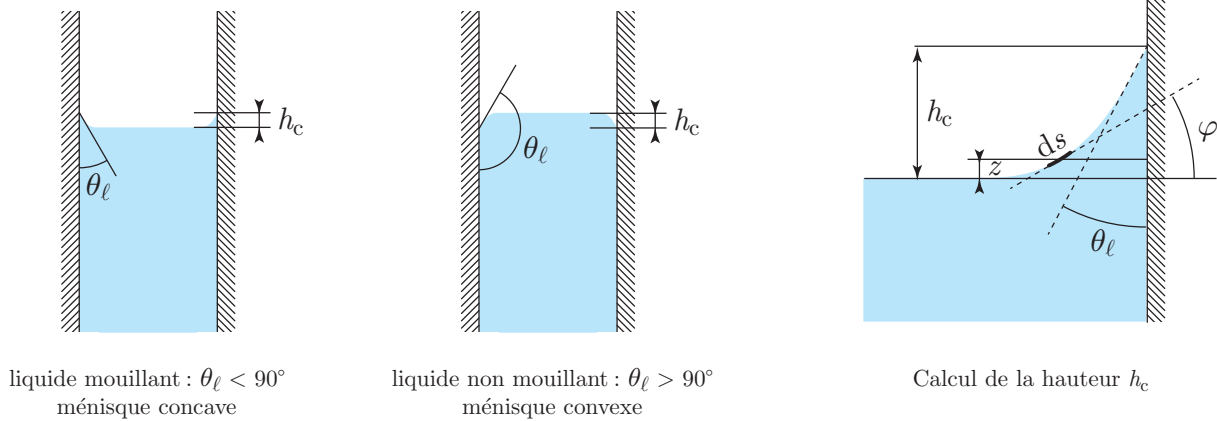


### 3.3 Forme d'un ménisque

Considérons un récipient cylindrique de rayon  $R \gg \ell_c$  rempli de liquide. Les effets capillaires sont réduits car le nombre de Bond est  $B = (R/\ell_c)^2 \gg 1$ . La surface libre du liquide forme toutefois un ménisque, fonction des propriétés de mouillage du liquide. Précisément, selon que ce liquide est mouillant ou non-mouillant sur la paroi, l'angle de raccordement  $\theta_\ell$  donné par la relation de Young-Dupré est aigu ou obtus. Il en résulte que le ménisque est respectivement concave ou convexe. La forme exacte du ménisque peut être dérivée, mais le calcul est complexe. Le résultat simple est la hauteur  $h_c$  que forme le ménisque en creux ou en bosse, donnée par

$$h_c^2 = 2\ell_c^2(1 - \sin \theta_\ell). \quad (15)$$

La hauteur du ménisque est donc de l'ordre de la longueur capillaire :  $h_c \sim \ell_c \ll R$ .



On peut établir la relation (15) en prenant une géométrie simplifiée, dans laquelle le liquide est confiné entre deux plaques planes, ceci afin que l'interface ne soit courbée que dans une seule direction (la relation est transposable à un récipient cylindrique de grand rayon). On suppose que, loin des parois du récipient, la surface est plane, sa hauteur servant de référence  $z = 0$ . Près des parois, à la hauteur  $z$ , on considère un élément de longueur  $ds$  courbé sur l'interface, incliné d'un angle  $\varphi$  par rapport à l'horizontale (voir figure). On peut s'écrire  $ds = R'd\varphi = dz/\sin \varphi$ , où  $R'(z) = dz/\sin \varphi d\varphi$  est le rayon de courbure de l'interface. La pression au-dessus du liquide étant  $P_0 = P(z = 0)$ , les lois de l'hydrostatique et de Laplace (8) donnent

$$P_0 - P(z) = \rho g z = \frac{\sigma}{R'} = \sigma \sin \varphi \frac{d\varphi}{dz}.$$

Il vient  $\rho g z dz = \sigma \sin \varphi d\varphi$ , ce qui s'écrit et s'intègre

$$z dz = \ell_c^2 \sin \varphi d\varphi \implies \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{h_c} = -\ell_c^2 [\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2} - \theta_\ell} \implies h_c^2 = 2\ell_c^2(1 - \sin \theta_\ell),$$

qui est la relation cherchée.

### 3.4 Ascension capillaire : loi de Jurin

Considérons maintenant un récipient de très petit diamètre, c'est-à-dire un tube capillaire de rayon  $r \ll \ell_c$ . Les effets capillaires sont prépondérants puisque  $B = (r/\ell_c)^2 \ll 1$ . Si le tube est en partie immergé dans un bain, on observe une ascension ou une dépression du liquide dans le tube.<sup>6</sup> Si on néglige la forme arrondie du ménisque, on peut rendre compte facilement de cet effet par un argument énergétique. La variation d'énergie libre associée à une élévation (algébrique)  $h$  du liquide dans le tube est la somme de deux contributions :

- l'énergie surfacique de mouillage ;
- l'énergie potentielle de pesanteur du liquide (par référence au niveau du bain).

Selon le signe du paramètre de mouillage  $E$ , on doit distinguer deux situations différentes.

(i) Si  $E < 0$ , on est en situation de mouillage partiel, mais l'ascension ou la dépression capillaire peut néanmoins être observée. Calculons les contributions énergétiques :

- l'énergie surfacique de mouillage, où on écrit que le liquide remplace le gaz au contact du solide sur une hauteur  $h$ , soit  $2\pi r h (\sigma_{sl} - \sigma_{sg}) = -2\pi r h \sigma_{\ell g} \cos \theta_\ell$  en utilisant la loi de Young-Dupré (14) ;

6. Cet effet a été observé par Léonard de Vinci en 1490, puis par Francis Hauksbee et James Jurin, puis enfin expliqué par Pierre-Simon de Laplace en 1806, soit trois siècles après sa découverte.

- l'énergie potentielle de pesanteur du liquide dans le tube, de masse  $\rho\pi r^2 h$ , dont le centre de masse est à la hauteur  $\frac{h}{2}$ , soit  $\frac{1}{2}\rho g\pi r^2 h^2$ .

On cherche donc le minimum de la variation totale d'énergie libre

$$\Delta F = -2\pi r h \sigma_{\ell g} \cos \theta_{\ell} + \frac{1}{2}\rho g\pi r^2 h^2$$

par rapport à  $h$ , ce qui donne

$$h = \frac{2\sigma_{\ell g}}{\rho g r} \cos \theta_{\ell} = \frac{2\ell_c^2}{r} \cos \theta_{\ell}. \quad (16a)$$

On peut alors distinguer les deux cas suivants. Si le liquide est :

- mouillant,  $\cos \theta_{\ell} > 0$  avec  $h > 0$  et on observe une ascension capillaire avec un ménisque concave ;
  - non mouillant,  $\cos \theta_{\ell} < 0$  avec  $h < 0$  et on observe une dépression capillaire avec un ménisque convexe.
- (ii) Si  $E > 0$ , on est en situation de mouillage total et forcément on observe une ascension. La situation est néanmoins un peu plus compliquée à analyser : le mouillage étant favorable, un film mince (microscopique) se développe sur la paroi interne du tube. Ce film dit *précurseur* ne coûte presque rien en énergie potentielle de pesanteur, mais il rapporte beaucoup en énergie de mouillage. L'ascension capillaire sur le diamètre (macroscopique) du tube forme un ménisque qui se raccorde au film avec un angle  $\theta_{\ell} = 0$  par continuité. Calculons les contributions énergétiques :
- l'énergie surfacique de mouillage, où on écrit que le liquide remplace le gaz au contact du liquide sur une hauteur  $h$ , soit  $-2\pi r h \sigma_{\ell g}$  ;
  - l'énergie potentielle de pesanteur du liquide dans le tube, identique au cas précédent, soit  $\frac{1}{2}\rho g\pi r^2 h^2$ .

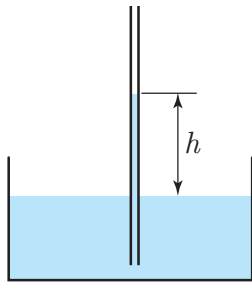
On cherche donc le minimum de la variation totale d'énergie libre

$$\Delta F = -2\pi r h \sigma_{\ell g} + \frac{1}{2}\rho g\pi r^2 h^2$$

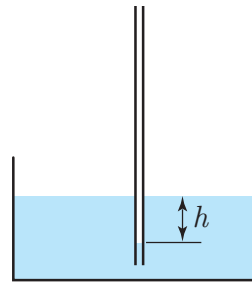
par rapport à  $h$ , ce qui donne

$$h = \frac{2\sigma_{\ell g}}{\rho g r} = \frac{2\ell_c^2}{r}. \quad (16b)$$

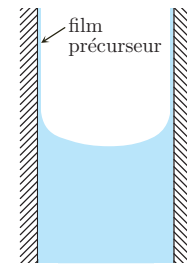
La formule (16a) ou (16b) est la loi de Jurin. Ces deux formules sont identiques si on considère que  $\theta_{\ell} = 0$  dans le cas du mouillage total. Puisque  $\ell_c \gg r$ , on obtient  $h \gg \ell_c \sim h_c$ , ce qui justifie qu'on puisse négliger la forme du ménisque dans cette approche. On note que  $h \propto 1/r$  : plus le tube capillaire est fin, plus l'effet est important. Par exemple, dans un tube de verre de rayon 0,5 mm, l'eau monte à une hauteur  $h \simeq 25$  mm.



ascension capillaire :  $h > 0$



dépression capillaire :  $h < 0$



cas du mouillage total

## 4 Ondes superficielles

Les ondes à la surface d'un liquide sont un phénomène très facilement observable, mais assez difficile à mettre en équation. Nous allons détailler ce calcul, en vue d'obtenir la relation de dispersion.

### 4.1 Position du problème

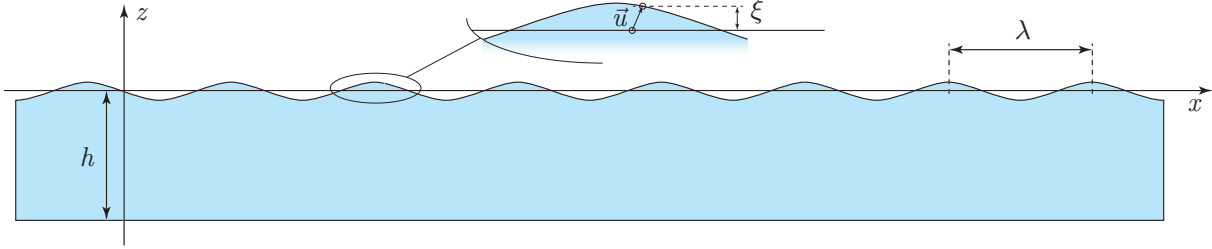
Les variables du problème sont la pression  $P$ , la vitesse  $\vec{v}$  et la hauteur de l'ondulation du liquide à sa surface qu'on va noter  $\xi$ . On va tenir compte de la pesanteur, de la tension de surface  $\sigma$  liquide/gaz et de la profondeur  $h$  du liquide à l'équilibre. Le calcul est mené dans l'approximation des écoulements incompressibles ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ) et sous l'approximation linéaire (amplitude de l'ondulation en surface faible devant la longueur d'onde :  $|\xi| \ll \lambda$ ).

Notant Oz l'axe vertical ascendant, la position d'équilibre de la surface du liquide est  $z = 0$ , situation dans laquelle le champ de pression s'écrit  $P_0 - \rho g z$ , où  $P_0$  est la pression atmosphérique (que nous supposons constante). En présence de l'onde ( $\vec{v} \neq 0$ ,  $\xi \neq 0$ ), on écrit

$$P = P_0 - \rho g z + p \quad \text{pour } z \leq \xi, \quad (17)$$

où  $p$  est la surpression dans le liquide. Pour simplifier, on choisit une propagation selon un seul axe horizontal  $Ox$ , si bien que les variables s'écrivent (dans le point de vue d'Euler)

$$p = p(x, z, t), \quad \vec{v} = \vec{v}(x, z, t) = v_x(x, z, t) \vec{e}_x + v_z(x, z, t) \vec{e}_z, \quad \xi = \xi(x, t).$$



## 4.2 Mise en équation

### 4.2.1 Lois de bilan

Pour mettre le problème en équation, on doit d'abord écrire les lois de bilan de l'hydrodynamique. D'abord le bilan de masse, en écoulement incompressible :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (18a)$$

Puis le bilan d'impulsion, à savoir l'équation d'Euler :

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} \right) = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} P + \rho \vec{g} \quad \Longrightarrow \quad \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (18b)$$

en ayant négligé le terme  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}$  qui est du second ordre. Conséquence de ces deux équations, la surpression vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta p = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p = - \rho \frac{\partial \operatorname{div} \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta p = 0. \quad (18c)$$

### 4.2.2 Conditions aux limites en déplacement

Ensuite, on doit écrire les conditions aux limites sur la surface libre et sur le fond. La plus grande difficulté de ce problème est l'application des conditions aux limites sur la surface libre, parce qu'elle est repérée dans le point de vue d'Euler par une coordonnée variable.<sup>7</sup> Soit  $\vec{u}$  le vecteur déplacement repérant le mouvement d'un élément de masse depuis sa position à l'équilibre. On a

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

en négligeant le terme de second ordre. À la surface du liquide, un élément de masse, situé en  $z = 0$  à l'équilibre, se retrouve à la hauteur  $u_z = \xi$ . La composante  $u_x$  est *a priori* non nulle, mais reste du second ordre dès lors que  $\xi \ll \lambda$  (voir figure), donc est négligée. On retient donc  $\vec{u} = \xi \vec{e}_z$  à la surface libre du liquide et, par suite,

$$v_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \text{à la surface du liquide.} \quad (19a)$$

La condition aux limites au fond du liquide est plus simple :

$$v_z(z = -h) = 0. \quad (19b)$$

7. Il serait plus facile d'écrire les conditions aux limites sur la surface libre dans le point de vue de Lagrange, mais ce point de vue, inhabituel en hydrodynamique, entraîne d'autres difficultés.

### 4.2.3 Condition aux limites en pression

On tient compte de la tension superficielle liquide/gaz, notée  $\sigma$ . D'après la loi de Laplace écrite en (8), on a

$$P = P_0 + \frac{\sigma}{R} \quad \text{à la surface du liquide,}$$

où  $R$  est le rayon de courbure algébrique (positif si l'eau est concave). Compte tenu de (17), il vient

$$p = \rho g \xi + \frac{\sigma}{R} \quad \text{à la surface du liquide.}$$

Le rayon de courbure algébrique  $R$  est calculable, à un instant donné, à partir de la géométrie de la surface, c'est-à-dire la loi  $\xi(x, t)$ . Pour un arc paramétré par une loi  $z(x)$ , la formule mathématique est

$$\frac{1}{R} = - \frac{z''(x)}{[1 + z'^2(x)]^{3/2}}.$$

Au premier ordre, on retient donc ici  $\frac{1}{R} = - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ , d'où

$$p = \rho g \xi - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{à la surface du liquide.} \quad (20)$$

### 4.2.4 Équation d'onde et relation de dispersion

Comme on va le voir, les ondes à la surface du liquide n'obéissent pas à une équation d'onde de d'Alembert. On obtient l'équation sur la surpression en dérivant deux fois (20) par rapport au temps. Compte tenu de (19a) et (18b), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'équation d'onde

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \rho g \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad \text{à la surface du liquide.} \quad (21)$$

Cherchons une solution propagative sur l'axe  $Ox$ , c'est-à-dire telle que les variables  $\xi$ ,  $p$ ,  $v_x$  et  $v_z$  soient en  $e^{i(kx - \omega t)}$  avec une amplitude dépendant de  $z$  : pour la surpression, on écrit

$$p(x, z, t) = \Re[f(z) e^{i(kx - \omega t)}],$$

où  $\omega$  et  $k$  sont la pulsation et le nombre d'onde. En reportant cette expression dans (21), il vient

$$\rho \omega^2 f(\xi) = (\rho g + \sigma k^2) f'(\xi). \quad (22)$$

Comme la surpression vérifie l'équation de Laplace  $\Delta p = 0$ , on obtient  $f''(z) - k^2 f(z) = 0$ , soit  $f(z) = A e^{kz} + B e^{-kz}$ . Compte tenu de (18b), on obtient  $-i\omega \rho v_z = -f'(z) e^{i(kx - \omega t)}$  et la condition (19b) impose donc  $f'(z = -h) = 0$  qui conduit à  $f(z) \propto \text{ch } k(z + h)$ . On en déduit  $f'(\xi)/f(\xi) = k \text{ th } k(\xi + h) \simeq k \text{ th } kh$ , ce qui donne avec (22) la relation de dispersion

$$\rho \omega^2 = (\rho g k + \sigma k^3) \text{ th } kh. \quad (23)$$

En introduisant la longueur capillaire  $\ell_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$ , cette relation prend la forme

$$\omega^2 = gk[1 + (k\ell_c)^2] \text{ th } kh. \quad (24)$$

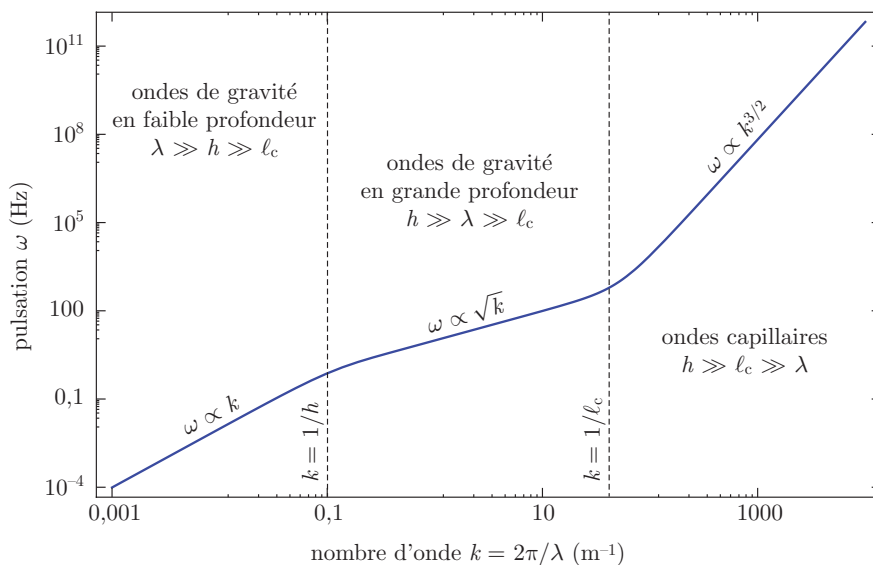
### 4.2.5 Discussion

En général, la profondeur du liquide au repos  $h$  est supérieure à la longueur capillaire  $\ell_c$ . Supposant ici  $h \gg \ell_c$ , on distingue trois régimes, selon la valeur de la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ .

- (i) Pour  $\lambda \gg h \gg \ell_c$ , on a  $k\ell_c \ll 1$  et  $\text{th}(kh) \simeq kh$ , de sorte qu'il reste  $\omega \simeq \sqrt{gh} k \propto k$ . C'est le seul cas où la relation de dispersion est non dispersive, c'est-à-dire qu'on prévoit une vitesse de phase  $c = \omega/k = \sqrt{gh}$ , indépendante de la fréquence. C'est le régime des ondes de gravité en faible profondeur.
- (ii) Pour  $h \gg \lambda \gg \ell_c$ , on a  $k\ell_c \ll 1$  et  $\text{th}(kh) \simeq 1$ , de sorte qu'il reste  $\omega \simeq \sqrt{gk} \propto \sqrt{k}$ , c'est le régime des ondes de gravité en grande profondeur (cas de la houle).



(iii) Pour  $h \gg \ell_c \gg \lambda$ , on a  $k\ell_c \gg 1$  et  $\text{th}(kh) \simeq 1$ , de sorte qu'il reste  $\omega \simeq \sqrt{g\ell_c^2 k^3} \propto k^{3/2}$ , c'est le régime des ondes capillaires (petites rides à la surface de l'eau).



Représentation de la relation de dispersion des ondes superficielles à la surface de l'eau, en échelle log-log, pour  $\ell_c = 2,6$  mm et  $h = 10$  m.

En notant l'amplitude  $p_1$  de surpression à  $z = 0$ , on peut écrire explicitement d'après (18b) et (19a)

$$p = p_1 \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \cos(kx - \omega t), \quad \begin{cases} v_x = \frac{kp_1}{\rho\omega} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \cos(kx - \omega t) \\ v_z = \frac{kp_1}{\rho\omega} \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{ch } kh} \sin(kx - \omega t) \end{cases}, \quad \xi = \frac{kp_1}{\rho\omega^2} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \cos(kx - \omega t)$$

D'après la forme du champ de vitesse, on prévoit que les éléments de masse du liquide ont une trajectoire elliptique, voire circulaire près de la surface pour  $kh \gg 1$ .

# Chapitre 9

## Élasticité dans les solides

Un système matériel soumis à une contrainte (tenseur des contraintes, chapitre 5) se déforme (tenseur des déformations, § 1.1). On dit qu'un système est *élastique* si, partant d'un état et appliquant une contrainte, il revient dans l'état initial lorsqu'on enlève la contrainte. En cas contraire, le système présente de la plasticité, phénomène qui sera décrit au chapitre 10. Ce chapitre est consacré à l'étude des solides élastiques. On choisit un état de référence

- sans contrainte extérieure appliquée par l'opérateur (état non déformé),
- de température uniforme  $T_0$ .

Ce chapitre s'appuie grandement sur les notions introduites au chapitre 1, dont il reprend aussi l'ensemble des notations. En particulier, le système constitué par le solide est divisé en sous-systèmes qui sont les éléments de matière de masse  $\delta m$  fixée (point de vue de Lagrange), de volume  $\delta V$  variable et de masse volumique  $\rho = \delta m / \delta V$ .

### 1 Théorie de l'élasticité

#### 1.1 Le tenseur des déformations

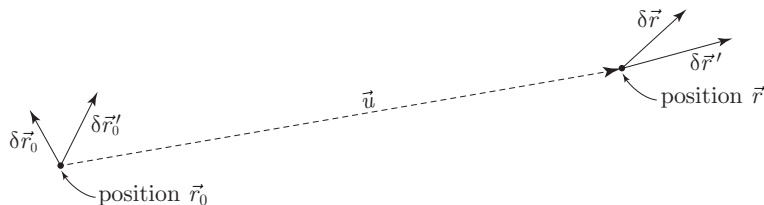
Lorsque le solide se déplace et/ou se déforme sous l'effet des contraintes appliquées, chaque élément de matière passe de l'état de position de référence  $\vec{r}_0$  à l'instant  $t_0$  à la position  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ . La transformation du milieu est décrite par une transformation géométrique continue de l'espace, fonction du temps :

$$\vec{r}_0 \rightsquigarrow \vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t).$$

Pour mieux décrire cette transformation, on introduit la différence

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0 \tag{1}$$

appelé vecteur déplacement. Si le solide est animé d'un mouvement de translation ou de rotation d'ensemble, le vecteur déplacement est non nul, bien qu'il n'y ait aucune déformation. Pour apprécier les déformations, on doit plutôt examiner les variations des distances et des angles dans la matière. Soient donc dans l'état de référence deux écarts élémentaires de position autour de  $\vec{r}_0$ , notés  $\delta\vec{r}_0$  et  $\delta\vec{r}'_0$ . Dans l'état à l'instant  $t$ , ces deux écarts deviennent respectivement  $\delta\vec{r}$  et  $\delta\vec{r}'$  autour de  $\vec{r}$ . On calcule la variation des longueurs et des angles au moyen de la variation du produit scalaire, de  $\delta\vec{r}_0 \cdot \delta\vec{r}'_0$  à  $\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r}'$ .



En écrivant  $\delta r_k = \frac{\partial r_k}{\partial r_{0i}} \delta r_{0i} = \left( \delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial r_{0i}} \right) \delta r_{0i}$  et  $\delta r'_k = \frac{\partial r_k}{\partial r_{0j}} \delta r'_{0j} = \left( \delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial r_{0j}} \right) \delta r'_{0j}$ , on obtient

$$\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r}' = \delta r_k \delta r'_k = \left( \delta_{ki} + \frac{\partial u_k}{\partial r_{0i}} \right) \left( \delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial r_{0j}} \right) \delta r_{0i} \delta r'_{0j} = \delta r_{0k} \delta r'_{0k} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_{0j}} + \frac{\partial u_j}{\partial r_{0i}} + \frac{\partial u_k}{\partial r_{0i}} \frac{\partial u_k}{\partial r_{0j}} \right) \delta r_{0i} \delta r'_{0j}.$$

On écrit ce résultat sous la forme

$$\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r}' - \delta\vec{r}_0 \cdot \delta\vec{r}'_0 = 2e_{ij} \delta r_{0i} \delta r'_{0j}, \tag{2}$$

où on a introduit le *tenseur des déformations de Green-Lagrange*  $\bar{\bar{e}}$  de composantes

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_{0j}} + \frac{\partial u_j}{\partial r_{0i}} + \frac{\partial u_k}{\partial r_{0i}} \frac{\partial u_k}{\partial r_{0j}} \right). \tag{3}$$

Quelques remarques à propos de cette définition.

- Le tenseur de Green-Lagrange est symétrique mais non linéaire en déformation.
- Par définition, à l'instant de référence  $t_0$ , le tenseur de Green-Lagrange est nul. Ensuite, à un instant quelconque  $t$ , il est nul lorsque la transformation conserve le produit scalaire, c'est-à-dire est localement orthogonale. Lorsque le tenseur de Green-Lagrange est nul partout, le matériau ne subit aucune déformation, c'est-à-dire que son déplacement est identique à celui d'un solide indéformable.

Dans ce cours, on n'étudiera que les petites déformations, pour lesquelles

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial r_{0j}} \right| \ll 1. \tag{4}$$

Attention : cette condition ne porte que sur la variation relative du vecteur déplacement, le vecteur déplacement lui-même peut être important, ce qui est le cas par exemple lors de la flexion d'une barre ou l'élongation d'un ressort. Dans l'approximation des petites déformations, de nombreuses simplifications apparaissent.

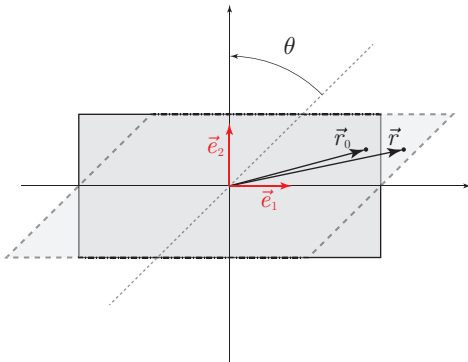
- (i) Les points de vue de Lagrange et d'Euler sont équivalents en ce sens que, pour toute grandeur locale  $a$ , on peut écrire, par application de (4),

$$\frac{\partial a}{\partial r_{0i}} = \frac{\partial a}{\partial r_j} \frac{\partial r_j}{\partial r_{0i}} = \frac{\partial a}{\partial r_j} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial r_{0i}} \right) \simeq \frac{\partial a}{\partial r_i}.$$

- (ii) Le terme quadratique en déformation dans  $e_{ij}$  peut être négligé, de sorte que

$$\bar{\bar{e}} \simeq \bar{\bar{\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right). \tag{5}$$

Compte tenu de la remarque précédente, ce nouveau tenseur des déformations  $\bar{\bar{\varepsilon}}$  a été écrit avec les variables du point d'Euler, plus simples à manipuler. Par définition, ce tenseur est linéaire en déformation. C'est celui qui est utilisé par défaut dans de nombreux problèmes d'élasticité. Les figures suivantes donnent des exemples à deux dimensions, un cisaillement et une compression/dilatation, avec la donnée des tenseurs  $\bar{\bar{e}}$  et  $\bar{\bar{\varepsilon}}$ .

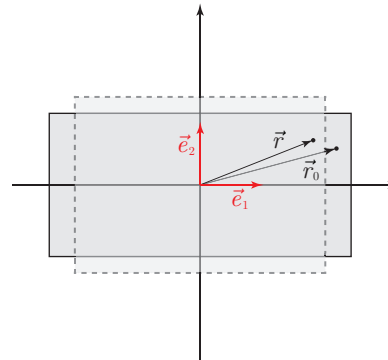


Cisaillement, avec  $c(t) = \text{tg } \theta(t)$  :

$$\bar{\bar{e}} = \begin{pmatrix} 0 & c/2 \\ c/2 & c^2/2 \end{pmatrix}$$

Petite déformation :  $|c| \ll 1$

$$\bar{\bar{e}} \simeq \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & c/2 \\ c/2 & 0 \end{pmatrix}$$



Compression ou dilatation de  $a(t)$  selon  $\bar{e}_1$  et  $b(t)$  selon  $\bar{e}_2$  :

$$\bar{\bar{e}} = \begin{pmatrix} (a^2 - 1)/2 & 0 \\ 0 & (b^2 - 1)/2 \end{pmatrix}$$

Petite déformation :  $a \simeq b \simeq 1$

$$\bar{\bar{e}} \simeq \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} a - 1 & 0 \\ 0 & b - 1 \end{pmatrix}$$

- (iii) Le jacobien  $J$  de la transformation est mathématiquement le rapport des éléments volumes  $\delta V$  déformé et  $\delta V_0$  non déformé : en recopiant l'équation (6a) du chapitre 1

$$J = \det \bar{\bar{J}} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial r_{01}} & \frac{\partial u_1}{\partial r_{02}} & \frac{\partial u_1}{\partial r_{03}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial r_{01}} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial r_{02}} & \frac{\partial u_2}{\partial r_{03}} \\ \frac{\partial u_3}{\partial r_{01}} & \frac{\partial u_3}{\partial r_{02}} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial r_{03}} \end{vmatrix} = \frac{\delta V}{\delta V_0}.$$

En développant au premier ordre ce déterminant et en gardant les variables du point de vue d'Euler, il vient

$$J \simeq 1 + \frac{\partial u_1}{\partial r_1} + \frac{\partial u_2}{\partial r_2} + \frac{\partial u_3}{\partial r_3} = 1 + \operatorname{div} \vec{u}.$$

La variation relative de volume est donc

$$\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V} = J - 1 \simeq \operatorname{div} \vec{u} = \varepsilon_{ii}. \quad (6)$$

## 1.2 Thermodynamique de la déformation

Calculons le travail reçu par un système au cours d'une déformation. Le système est un échantillon de matière qui reçoit les contraintes exercées par un opérateur, par exemple à l'aide d'une presse hydraulique. Ces contraintes s'exercent à l'aide du tenseur des contraintes de Cauchy sur la surface extérieure de l'échantillon. Soit donc  $\delta^2 \vec{r} = \vec{n} \delta^2 r$  un élément la surface où s'exerce la force superficielle  $\vec{T} = \vec{\sigma} \vec{n}$  développée par l'opérateur, et soit  $d\vec{r} = d\vec{u}$  la variation de position du point d'application de cette force. Le travail élémentaire développé de l'opérateur est

$$\delta W = \oint (\vec{\sigma} \vec{n} \delta^2 r) \cdot d\vec{u} = \oint \sigma_{ij} du_i \delta^2 r_j = \iiint \frac{\partial(\sigma_{ij} du_i)}{\partial r_j} d^3 r,$$

en ayant appliqué le théorème d'Ostrogradski. On décide ensuite d'exprimer ce travail dans la situation suivante :

- en l'absence de force à longue portée (comme un champ de pesanteur) et lors d'une transformation quasistatique où l'équilibre mécanique est à chaque instant réalisé. La condition d'équilibre (9) du chapitre 5 s'écrit  $\operatorname{div} \vec{\sigma} = 0$ .
- dans l'approximation des petites déformations, et on retient l'écriture avec les variables du point de vue d'Euler.

On peut alors développer :

$$\frac{\partial(\sigma_{ij} du_i)}{\partial r_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} du_i + \sigma_{ij} \frac{\partial(du_i)}{\partial r_j} = \operatorname{div} \vec{\sigma} \cdot d\vec{u} + \sigma_{ij} \frac{\partial(du_i)}{\partial r_j} = \sigma_{ij} d\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j}\right)$$

par application de la condition d'équilibre, et ayant permuté la variation temporelle dans  $du_i$  et la dérivée partielle par rapport à  $r_j$  (ce qui est correct dans les variables du point de vue d'Euler). Ensuite, puisque le tenseur des contraintes est symétrique, on peut ne retenir que la partie symétrique de  $\partial u_i / \partial r_j$ , c'est-à-dire la composante  $\varepsilon_{ij}$  du tenseur des déformations introduit en (5). Il reste finalement pour le travail élémentaire quasistatique

$$\delta W_q = \iiint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d^3 r. \quad (7)$$

Cette expression figure dans les écritures thermodynamiques : par exemple, si  $f$  et  $s$  sont l'énergie libre et l'entropie par unité de masse, on écrit l'identité thermodynamique dans les variables température  $T$  et déformation  $\vec{\varepsilon}$

$$\rho df = -\rho s dT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (8)$$

On en déduit la relation

$$\sigma_{ij} = \rho \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T. \quad (9)$$

À température fixée, on peut écrire

$$d\sigma_{ij} = c_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (10)$$

où les coefficients  $c_{ijkl}$  forment un tenseur de rang quatre appelé *tenseur d'élasticité*.<sup>1</sup> Ce tenseur comprend *a priori*  $3^4 = 81$  composantes. Heureusement, des symétries relationnelles viennent réduire ce nombre. D'abord, les tenseurs  $\vec{\varepsilon}$  et  $\vec{\sigma}$  étant symétriques, on a

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk} \quad (11a)$$

qui sont les relations de *petite symétrie* : il ne reste que 36 composantes indépendantes. Ensuite, en utilisant (9),

$$c_{ijkl} = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)_T = \rho \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_T$$

si bien que

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (11b)$$

qui est la relation de *grande symétrie* : il ne reste alors au plus que 21 composantes indépendantes.

1. En prenant en compte une variation  $dT$  de la température, la différentielle complète s'écrit

$$d\sigma_{ij} = c_{ijkl} [d\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} dT]$$

où les coefficients  $\alpha_{kl}$  forment un tenseur de rang deux appelé *tenseur de dilatation thermique*. Par construction, ce tenseur est symétrique et ne comprend donc que 6 composantes indépendantes.

### 1.3 Lois de Hooke

Le modèle le plus simple de solide élastique est celui pour lequel on admet que, partant de l'état de référence non déformé, toute contrainte entraîne une déformation qui lui est proportionnelle : c'est la loi de Hooke. Cette loi n'est valable que pour les petites déformations. En assimilant donc la contrainte  $\overline{\sigma}$  et la déformation  $\overline{\varepsilon}$  à des différentielles, et d'après (10), la relation de Hooke s'écrit <sup>2</sup>

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (12)$$

À cette approximation, les 21 coefficients  $c_{ijkl}$  du tenseur de rigidité sont considérés comme des constantes, c'est-à-dire plus exactement ne dépendent que de l'état non déformé. Les coefficients  $c_{ijkl}$  sont appelées les *constantes élastiques*.

Le phénomène d'élasticité reçoit une interprétation microscopique qui dépend du milieu.

- Dans un solide, la contrainte induit une petite variation des distances entre les atomes, les ions ou les molécules qui constituent la structure, et ces variations rendent compte de la déformation macroscopique du milieu. Ainsi, dans un monocristal, ce sont les paramètres de mailles qui varient. De ce fait, la symétrie du tenseur de rigidité recopie la symétrie du cristal. Lorsque la déformation est trop importante, elle induit des défauts dans la structure (dislocations, lacunes), lesquelles sont au moins en partie irréversibles, ce qui induit la plasticité.
- Dans un élastique de caoutchouc, c'est l'allongement des molécules de polymères, par dépliement de leur structure en monomères, qui induit l'élasticité.

## 2 Le solide isotrope

### 2.1 Première écriture

Lorsque le solide est isotrope, le tenseur des constantes élastiques se simplifie considérablement. La situation est formellement identique à celle des fluides visqueux newtoniens, où il a été introduit deux coefficients de viscosité. De même ici, la loi de Hooke reliant les deux tenseurs symétriques  $\overline{\sigma}$  et  $\overline{\varepsilon}$  dans un solide isotrope ne fait intervenir que deux constantes élastiques. À l'identique de la relation (3) du chapitre 6, on écrit <sup>3</sup>

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) + K \delta_{ij} \varepsilon_{kk} = G \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k} \right) + K \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k}. \quad (13)$$

Il n'est pas difficile d'inverser la relation précédente pour obtenir

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) + \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{kk}. \quad (14)$$

Les deux scalaires  $K$  et  $G$  sont respectivement les modules de compression et de cisaillement (ou module de Coulomb) ; ils s'expriment tous deux en Pa. Des valeurs numériques sont donnés dans le tableau suivant.

	diamant	tungstène	acier	cuivre	aluminium	zinc	plomb	verre	nylon
$M$ (g.mol <sup>-1</sup> )	12,02	183,84	~ 55,9	63,55	26,98	65,38	207,2	~ 53	226,3
$\rho$ (10 <sup>3</sup> kg.m <sup>-3</sup> )	3,52	19,3	7,8	8,94	3,99	7,13	11,35	2,53	1,14
$K$ (GPa)	500	415	160	140	75	70	45	44	4,4
$G$ (GPa)	480	160	80	45	26	42	5	29	1,2
$\alpha$ (10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup> )	6,6	13,8	57	51	69	87	90	27	120

La signification des ces deux modules  $K$  et  $G$  est issue des situations schématiques de compression et de cisaillement, telles que présentées dans la figure ci-dessous. On considère que le matériau reste isotherme ( $T = T_0$ ) avec une déformation homogène ( $\overline{\varepsilon}$  uniforme).

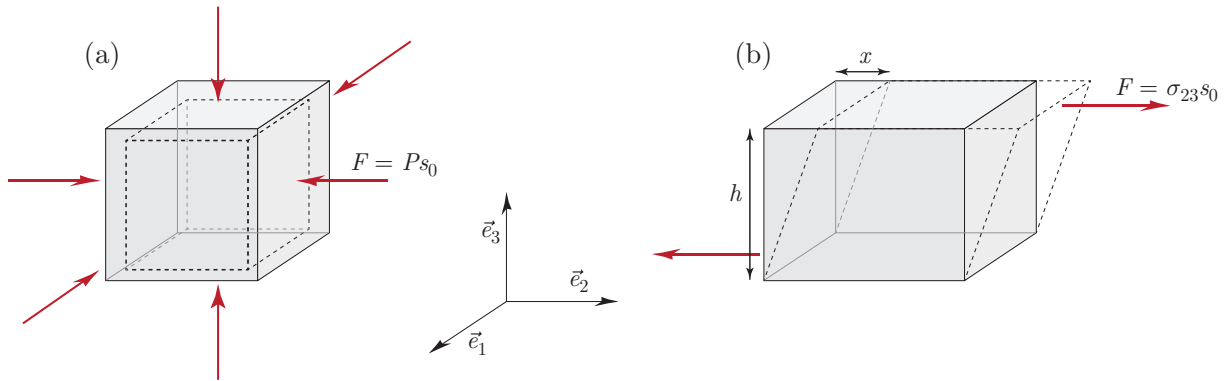
2. Si le solide subit aussi une petite variation de température  $T - T_0$ , la relation complète est écrite

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} [\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} (T - T_0)].$$

Cette relation est l'équation d'état du solide élastique.

3. Dans le solide isotrope, le tenseur de dilatation thermique est réduit à un scalaire. On écrit  $\alpha_{ij} = \frac{1}{3} \alpha \delta_{ij}$ , où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique volumique, en K<sup>-1</sup>. Il vient

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) + K \delta_{ij} \varepsilon_{kk} - \alpha K \delta_{ij} (T - T_0).$$



Définition des modules de compression et de cisaillement sur un cube. Dans l'état non déformé, le cube a des arêtes de longueur initiale  $h_0$ , des faces de surface initiale  $s_0 = h_0^2$  et un volume initial  $V_0 = h_0^3$ . En (a) chaque face est soumise à une force normale de compression  $F = Ps_0$ , provoquant une variation de volume  $dV = V - V_0$ . En (b) les deux faces horizontales sont soumises à une force tangentielle de cisaillement  $F = \sigma_{23}s_0$  provoquant un glissement de  $x$  selon  $\vec{e}_2$ , la hauteur selon  $\vec{e}_3$  restant  $h = h_0$ .

- Le module de compression  $K$  exprime la variation relative de volume dans un effort de compression isotherme. Dans la situation de la figure (a), on a  $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} \Rightarrow \sigma_{ii} = -3P$ . D'après (6), la variation relative de volume vaut  $dV/V_0 = \varepsilon_{ii}$ . Donc, avec (13), on a bien

$$-\frac{1}{V_0} \frac{dV}{P} = \frac{3\varepsilon_{ii}}{\sigma_{ii}} = \frac{1}{K}.$$

- Le module de cisaillement  $G$  exprime le décalage relatif entre deux faces dans un effort de cisaillement isotherme. Dans la situation de la figure (b), la seule contrainte est  $\sigma_{23}$  et la seule déformation  $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial r_3} = \frac{1}{2} \frac{x}{h}$ . Donc, avec (13), on a bien

$$\frac{1}{h} \frac{x}{\sigma_{23}} = \frac{2\varepsilon_{23}}{\sigma_{23}} = \frac{1}{G}.$$

Enfin, il est assez intuitif (et est possible de montrer en thermodynamique avec le second principe), que les modules de compression et de cisaillement sont toujours positifs :

$$K \geq 0 \quad \text{et} \quad G \geq 0. \quad (15)$$

## 2.2 Autres écritures

Toujours dans un solide isotrope, au lieu des deux modules  $K$  et  $G$ , on peut définir d'autres jeux de coefficients.

- Pour un usage mathématique, les *coefficients de Lamé*  $\lambda$  et  $\mu$  sont ceux qui simplifient l'écriture des constantes élastiques : on pose

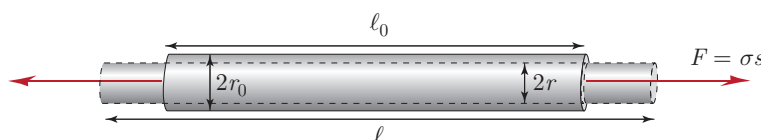
$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (16a)$$

ce qui conduit à la relation

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (16b)$$

- Pour un usage expérimental, on introduit deux autres coefficients adaptés à la description de la déformation d'une barre cylindrique. Dans l'état non déformé, sa longueur est  $\ell_0$  et son rayon  $r_0$ . On exerce une traction selon son axe, avec une force par unité de surface  $\sigma$ . Sa longueur et son rayon deviennent  $\ell$  et  $r$ . On introduit alors le *module d'Young*  $E$  (en Pa) et le *coefficient de Poisson*  $\nu$  (sans unité) :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{\ell_0} \frac{\ell - \ell_0}{\sigma} \quad \text{et} \quad \nu = -\frac{(r - r_0)/r_0}{(\ell - \ell_0)/\ell_0}. \quad (17)$$



On peut bien sûr établir des relations entre ces jeux de coefficients, que le tableau suivant regroupe.

	$(K, G)$	$(\lambda, \mu)$	$(E, \nu)$
$K =$		$\lambda + \frac{2\mu}{3}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
$G =$		$\mu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$
$\lambda =$	$K - \frac{2G}{3}$		$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
$\mu =$	$G$		$\frac{E}{2(1+\nu)}$
$E =$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}$	
$\nu =$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	

Les inégalités (15) conduisent aux autres inégalités

$$\mu \geq 0, \quad \lambda \geq -\frac{2\mu}{3} \quad \text{et} \quad E \geq 0, \quad -1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$

avec  $\lambda$  du signe de  $\nu$ . Dans la plupart des matériaux, le coefficient de Poisson  $\nu$  est positif. Un matériau de coefficient de Poisson négatif est dit *auxétique*.

Le développement de l'ensemble de ces équations est la théorie de l'élasticité et leur application est la mécanique des matériaux. La diversité des situations et la complexité des équations font que les calculs dans ce domaine peuvent devenir assez lourds. De tels calculs mènent par exemple à l'expression de la constante de raideur  $k$  d'un ressort : pour des petites elongations, cette raideur ne dépend que du module de cisaillement  $G$  et on montre que

$$k = \frac{G}{8n} \frac{d^4}{D^3},$$

avec  $n$  le nombre de spires (non jointives),  $d$  le diamètre du fil et  $D$  le diamètre (moyen) du ressort.

### 3 Premières applications

#### 3.1 Équation du mouvement

Écrivons la force de contrainte par unité de volume, à savoir  $\text{div } \bar{\sigma}$ . En recopiant le calcul mené au chapitre 6, § 1.3, on obtient

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{\sigma} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} \bar{e}_i = \left[ G \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 r_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial r_j \partial r_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial r_i \partial r_k} \right) + K \frac{\partial^2 u_k}{\partial r_i \partial r_k} \right] \bar{e}_i \\ &= G \frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 r_j} \bar{e}_i + \left( K + \frac{G}{3} \right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial r_i \partial r_k} \bar{e}_i \\ &= G \vec{\Delta} \vec{u} + \left( K + \frac{G}{3} \right) \vec{\nabla} \text{div } \vec{u}. \end{aligned}$$

On écrit plus souvent cette densité de force en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson : d'après le tableau précédent, on trouve

$$\text{div } \bar{\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \vec{\Delta} \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \vec{\nabla} \text{div } \vec{u} \right].$$

En prenant en compte le champ de pesanteur au titre de force à longue distance, l'équation du mouvement s'écrit ainsi

$$\rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \text{div } \bar{\sigma} + \rho \vec{g} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \vec{\Delta} \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \vec{\nabla} \text{div } \vec{u} \right] + \rho \vec{g}, \quad (18)$$

qui est l'équation de Navier. La résolution de cette équation est un problème complexe. On doit prendre en compte les conditions initiales et les conditions aux limites. Ces conditions aux limites sont d'une importance cruciale en élasticité. Elles peuvent se présenter sous plusieurs formes.

- Si la surface est libre, le vecteur déplacement n'est pas imposé, mais la force appliquée sur la surface est nulle. Par exemple, la condition sur une surface libre de vecteur normal selon  $Oz$  est  $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ . Dans les problèmes d'élasticité, on ignore souvent la pression atmosphérique pour deux raisons : d'une part elle est uniforme à l'échelle de l'échantillon, d'autre part sa valeur est faible comparée à la plupart des modules d'élasticité.

- Si la surface subit l'action d'une contrainte imposée, la force agissante est connue et fixe les valeurs des composantes du tenseur des contraintes.
- Si la surface est en contact avec un autre solide considéré non déformable, le vecteur déplacement est nul.

Un cas particulier est l'étude des solides en équilibre statique. L'annulation de l'accélération dans l'équation (18) mène à la condition

$$\vec{\Delta} \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} = - \frac{2(1+\nu)}{E} \rho \vec{g}. \quad (19)$$

### 3.2 Ondes élastiques

On étudie ici la propagation d'ondes élastiques dans un solide. Pour simplifier, on va se limiter aux ondes planes, c'est-à-dire telles que les quantités oscillantes ne dépendent que du temps et d'une seule coordonnée cartésienne, disons  $z$ . Alors

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = u_x(z, t) \vec{e}_x + u_y(z, t) \vec{e}_y + u_z(z, t) \vec{e}_z,$$

donc

$$\vec{\Delta} \vec{u} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \vec{e}_y + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \vec{e}_z, \quad \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \vec{e}_z.$$

Par ailleurs, ne considérant que de petites amplitudes de vibration, la dérivée particulière  $d/dt$  se confond avec la dérivée eulérienne  $\partial/\partial t$ . Tous ces résultats, injectés dans l'équation du mouvement (18), mènent à trois équations

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Ces équations sont des équations d'onde de d'Alembert et rendent compte de la propagation d'une onde dans le milieu. La composante selon  $z$  du déplacement, parallèle à la direction de propagation, représente les modes longitudinaux, indexés  $l$  et d'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} = c_l^2 \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2}, \quad \text{avec} \quad c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (20a)$$

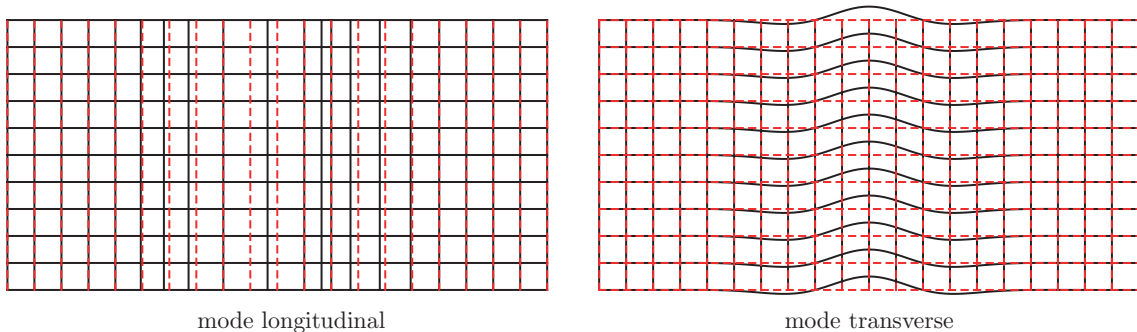
la vitesse de propagation des modes longitudinaux. Les composantes selon  $x$  ou  $y$  du déplacement, perpendiculaires à la direction de propagation, représentent les modes transverses, indexés  $t$  et d'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial^2 u_t}{\partial z^2}, \quad \text{avec} \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (20b)$$

la vitesse de propagation des modes transverses. On peut montrer que la solution générale avec un vecteur d'onde  $\vec{k}$  est une superposition de modes longitudinaux ( $\vec{u} // \vec{k}$ ) et transverses ( $\vec{u} \perp \vec{k}$ ). Le coefficient de Poisson vérifiant  $-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ , on peut aussi montrer que

$$\frac{c_l}{c_t} \geq \sqrt{\frac{4}{3}} > 1. \quad (21)$$

Rappelons que ces tous résultats ne sont valables que dans un milieu isotrope.



Représentation graphique de modes longitudinal et transverse à deux dimensions. La structure d'équilibre est maillée en rouge, la structure déformée par l'onde en noir.





# Chapitre 10

## Éléments de rhéologie

Les corps en phase condensée offrent une variété de propriétés bien plus grande que celle des gaz, souvent étudiés en thermodynamique. Pour circonscrire le domaine, nous nous limitons ici aux systèmes monophasés, excluant donc par exemple la matière granulaire. En première analyse, on peut distinguer les liquides et les solides, essentiellement au regard de la réponse à un effort de cisaillement (composante non diagonale du tenseur des contraintes) : un liquide est fluide, un solide est rigide. Ainsi l'eau est liquide, un morceau d'acier est solide. Mais au-delà de cette distinction schématique, le comportement de la matière condensée est plus complexe.

- Certains matériaux relèvent à la fois du liquide et du solide. Ainsi un verre chauffé devient pâteux et se déforme sous son propre poids. Selon la température, environ entre 550 °C et 1300 °C, le verre passe continûment d'un état solide très ductile à un état liquide très visqueux.
- La distinction entre un liquide et un solide repose sur le temps de mesure. Un matériau apparemment solide peut présenter un comportement liquide si on attend assez longtemps. Par exemple des couches du manteau terrestre ou des glaciers paraissent solides à l'échelle humaine, mais s'écoulent sur des échelles de temps géologiques. On distingue deux échelles de temps : la durée  $\Delta t$  de l'observation expérimentale et la durée caractéristique  $\tau_\varepsilon$  de relaxation de la forme. Le rapport constitue le *nombre de Deborah*<sup>1</sup> :

$$D_e = \frac{\tau_\varepsilon}{\Delta t}. \quad (1)$$

Si  $D_e \ll 1$ , le matériau est fluide, donc considéré liquide. Si  $D_e \gg 1$ , le matériau est rigide, donc considéré solide.

- Par ailleurs, les propriétés des matériaux peuvent dépendre non seulement des conditions instantanées, mais aussi des conditions antérieures. Un matériau dont l'état dépend de son histoire présente le phénomène d'hystérésis.

La description des états condensés fait grand usage de toutes les notions introduites pour les milieux inhomogènes au chapitre 6, dont nous reprenons ici toutes les conventions et notations. Pour commencer, on caractérise le comportement mécanique de la matière avec principalement trois tenseurs :

- le tenseur des déformations  $\bar{\varepsilon}$ , qui renseigne comment le matériau se déforme ;
- le tenseur des taux de déformation  $\bar{\gamma}$ , qui renseigne comment le matériau s'écoule.
- un tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$ , en général imposé par l'opérateur ;

L'étude de la déformation ou de l'écoulement de la matière condensée sous l'effet d'une contrainte appliquée est la *rhéologie*.<sup>2</sup> Pour illustrer ces comportements, on trace un *rhéogramme*, qui est un graphe représentant  $\bar{\sigma}$  en fonction de  $\bar{\varepsilon}$  pour un solide ou de  $\bar{\gamma}$  pour un liquide. Nous ne présentons dans les deux sections à suivre que les bases de la rhéologie, on trouvera des développements dans les ouvrages spécialisés. Les modèles les plus simples de solide et de liquide sont les suivants.

- Pour un solide *élastique*,  $\bar{\sigma}$  dépend linéairement de  $\bar{\varepsilon}$  : la déformation est proportionnelle à la contrainte.
- Pour un liquide *newtonien*, les composantes non diagonales de  $\bar{\sigma}$  dépendent linéairement de  $\bar{\gamma}$  : l'écoulement est proportionnelle à la contrainte de cisaillement.

---

1. Le nombre de Deborah a été introduit par M. Reiner en référence au cantique de la prophétesse Deborah (la Bible, livre des Juges) : « les montagnes coulèrent devant l'éternel ».

2. Le terme rhéologie a été introduit en 1928 par E. Bingham en référence au grec Πάντα ῥηεῖ (Panta rhei : tout s'écoule, citation attribuée à Héraclite). Selon les ouvrages et les auteurs, la rhéologie étudie plus précisément le comportement des liquides et des solides lorsque leurs propriétés s'écartent de celles d'un solide élastique ou d'un liquide newtonien. On parle aussi parfois de *rhéophysique*, réservant alors le terme de rhéologie à l'étude des liquides non newtoniens.

# 1 Solides : au-delà de l'élasticité

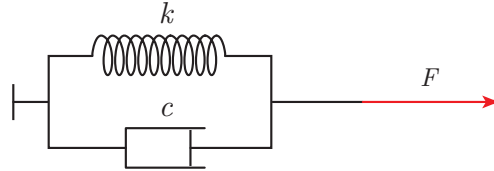
Soumis à des contraintes de grande amplitude et/ou variant rapidement, tous les solides ont un comportement qui s'éloigne de l'élasticité. Pour simplifier la description de ces propriétés, nous allons choisir une géométrie simple, à savoir l'allongement d'un câble : sous l'effet d'une contrainte de traction  $\sigma$ , l'allongement relatif de longueur est  $\varepsilon$ . Dans le régime élastique, on a  $\varepsilon = \sigma/E$ , où  $E$  est le module d'Young.

## 1.1 Viscoélasticité

Une première modification des lois de l'élasticité consiste, tout en gardant un régime linéaire, à supposer que la déformation ne suit pas instantanément les variations de la contrainte. Le modèle le plus simple consiste à introduire un temps de relaxation  $\tau_\varepsilon$  de la déformation en écrivant

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} + \varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (2)$$

Ce temps de relaxation  $\tau_\varepsilon$  de la déformation est donc aussi le temps de relaxation de la forme de l'échantillon, c'est lui qui intervient dans la définition (1) du nombre de Deborah. Pour des faibles déformations,  $\dot{\varepsilon} \simeq \gamma$ , composante du tenseur des taux de déformation : la contrainte  $E\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} \simeq E\tau_\varepsilon \gamma$  ajoutée ici à la contrainte élastique  $E\varepsilon$  est analogue à une contrainte de viscosité dans les fluides newtoniens. Pour cette raison, les modèles intégrant la relaxation de la déformation à l'élasticité dans les solides sont dits de *viscoélasticité*. Le montage mécanique équivalent obéissant à l'équation (2) est la mise en parallèle d'un ressort avec un amortisseur : c'est le modèle du *solide de Voigt* (ou de Kelvin-Voigt).



Modèle du solide de Voigt. Un ressort de raideur  $k$  est en parallèle avec un amortisseur de constante  $c$ , leur allongement commun est  $x$ . La force  $-kx$  exercée par le ressort s'ajoute à la force  $-c\dot{x}$  exercée par l'amortisseur, donc l'opérateur exerce une force  $F$  opposée à la résultante : on a  $c\dot{x} + kx = F \Rightarrow \tau \dot{x} + x = F/k$ , où  $\tau = c/k$  est le temps de relaxation du dispositif, équation analogue à (2).

La solution générale de l'équation (2) vérifiant la condition initiale  $\varepsilon(t_0) = 0$  s'écrit

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\tau_\varepsilon E} \int_{t_0}^t e^{-(t-t')/\tau} \sigma(t') dt' = \frac{1}{E} \int_{t_0}^t (1 - e^{-(t-t')/\tau}) \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt'. \quad (3)$$

Ce modèle rudimentaire avec un unique temps de relaxation peut être amélioré de la façon suivante, toujours dans le régime linéaire. Pour un solide quelconque, depuis l'état sans contrainte et non déformé à  $t_0$ , on imagine d'abord une expérience dite de *fluage*. À l'instant  $t_0$ , on applique une contrainte  $\sigma_0$  constante et on regarde l'évolution de la déformation pour  $t' > t_0$  :

$$\sigma(t) = H(t - t_0)\sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(t) = F(t - t_0) \frac{\sigma_0}{E}, \quad (4)$$

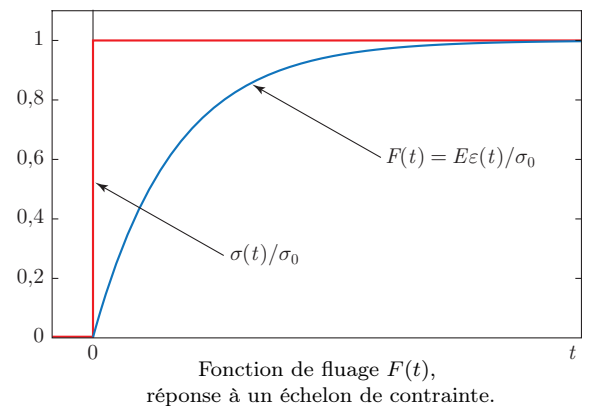
où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside et  $F(t)$  la *fonction de fluage*. Cette fonction donne la réponse de l'échantillon à un échelon de contrainte. Pour un solide réel, une expérience à contrainte imposée (dite de fluage) permet de la mesurer. Elle vérifie

$$F(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1.$$

Un profil quelconque de contrainte  $\sigma(t)$  est échantillonné en pas variables  $d\sigma$  qui s'ajoutent aux précédents. À chaque instant  $t' > t_0$ , le pas de contrainte  $d\sigma(t')$  induit une variation de la déformation  $d\varepsilon(t) = F(t - t')d\sigma(t')/E$ . Par linéarité, ces pas de variations de la déformation s'ajoutent : ce principe de superposition est appelé dans ce contexte le *principe de superposition de Boltzmann*, et il conduit à

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \int_{t_0}^t F(t - t') \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt' = \frac{1}{E} \int_{t_0}^t \frac{dF(t - t')}{dt} \sigma(t') dt', \quad (5)$$

qui est bien la généralisation de (3). Le retard dans l'évolution temporelle de la déformation par rapport à la contrainte entraîne une hystérésis : la déformation  $\varepsilon(t)$  à un instant  $t$  donné est fonction de l'histoire de l'échantillon au travers



des valeurs de la contrainte  $\sigma(t')$  pour les instants  $t' < t$ . Les transformations du système sont alors irréversibles et s'accompagnent donc d'une augmentation de l'entropie de l'univers. Un moyen usuel de décrire ce phénomène est de solliciter l'échantillon avec une variation alternative de contrainte : depuis l'état initial non déformé à  $t_0$ ,

- la première augmentation de la contrainte donne lieu à la courbe de *première déformation* ;
- puis la contrainte diminue et, à contrainte nulle, il subsiste une déformation rémanente  $\varepsilon_r > 0$  ;
- pour annuler la déformation, il faut atteindre une contrainte négative  $-\sigma_c$  appelée contrainte coercitive.

Si l'échantillon est thermalisé de température  $T_0$ , après plusieurs périodes, la courbe  $\sigma$  versus  $\varepsilon$  se stabilise sur un *cycle d'hystérésis*. Lorsque le cycle est établi, le premier principe appliqué à la transformation sur une période s'écrit

$$\Delta U = Q + W = 0,$$

où  $W > 0$  est le travail mécanique reçu et  $Q < 0$  est la chaleur échangée avec le thermostat. Sur un cycle, la variation de l'entropie du système est  $\Delta S = 0$ , donc la variation d'entropie de l'univers est celle du thermostat :

$$\Delta S_{\text{univ}} = -\frac{Q}{T_0} > 0.$$

D'après l'expression du travail des forces de contraintes, la chaleur dégagée dans le thermostat est

$$Q = -W = -\oint \sigma d\varepsilon = \oint \varepsilon d\sigma < 0, \tag{6}$$

égale à l'opposé de l'aire du cycle dans les axes  $(\sigma, \varepsilon)$ . On obtient la fonction  $\varepsilon(t)$  sur le cycle en prenant  $t_0 \rightarrow -\infty$  dans (5) pour effacer la mémoire de la courbe de première déformation. Considérons par exemple une variation sinusoïdale de la contrainte de pulsation  $\omega$ , écrite  $\underline{\sigma}(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$  en représentation complexe. Sur le cycle, on obtient

$$\underline{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{E} \int_{-\infty}^t \frac{dF(t-t')}{dt} e^{i\omega t'} dt' = \frac{\sigma_0}{E} \underline{G}(\omega) e^{i\omega t}$$

avec  $\underline{G}(\omega)$  la transformée de Fourier de la dérivée de la fonction de fluage :

$$\underline{G}(\omega) = \int_0^\infty \frac{dF}{dt} e^{-i\omega t} dt = G'(\omega) + iG''(\omega) = |\underline{G}(\omega)| e^{-i\delta}.$$

Il vient  $\underline{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)}$  avec  $\varepsilon_0 = \sigma_0 |\underline{G}(\omega)| / E$  et  $\text{tg } \delta = -G''(\omega) / G'(\omega)$  : la déformation est en retard de phase sur la contrainte. L'angle  $\delta$  est appelé *l'angle de perte*, il dépend des caractéristiques de l'échantillon et de la pulsation. Le tableau suivant donne quelques valeurs à température ambiante et à la fréquence  $\omega/2\pi = 1$  Hz.

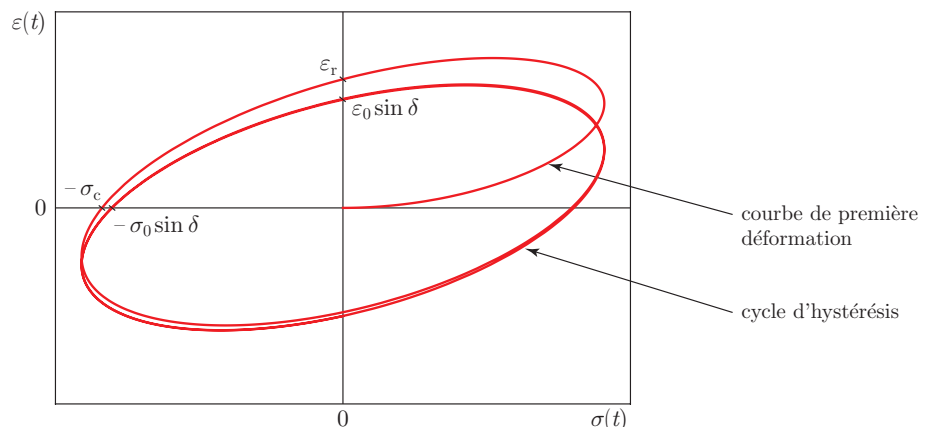
solide	acier	aluminium	verre	bois	PMMA
tg $\delta$	0,0005	0,001	0,0043	0,02	0,1

La formule (6) fournit la chaleur dégagée sur un cycle : en intégrant sur une période, on trouve

$$Q = -\pi \varepsilon_0 \sigma_0 \sin \delta < 0.$$

Pour un solide élastique (sans relaxation),  $F(t) = H(t)$ , on trouve  $\underline{G}(\omega) = 1$  et  $\delta = 0$ , il n'y a pas de dissipation. Pour le solide de Voigt piloté par l'équation (2), on a  $F(t) = (1 - e^{-t/\tau})H(t)$ , on trouve  $\underline{G}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau_\varepsilon}$ ,  $\text{tg } \delta = \omega\tau_\varepsilon$  et

$$Q = -\frac{\pi\sigma_0^2}{E} \frac{\omega\tau_\varepsilon}{1 + \omega^2\tau_\varepsilon^2}.$$



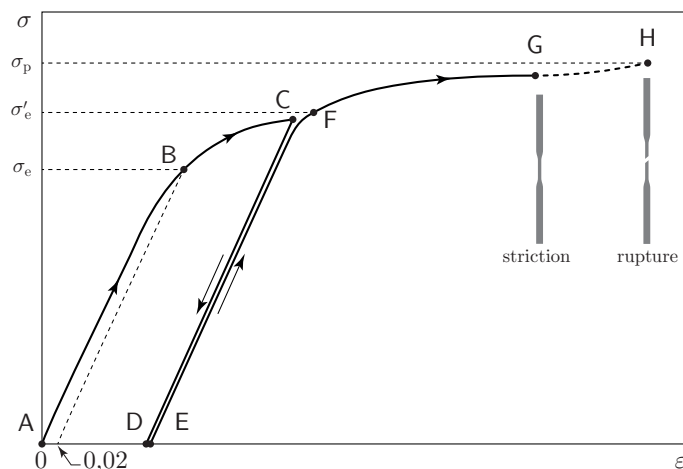
Cycle d'hystérésis d'un matériau viscoélastique en régime sinusoïdal.

## 1.2 Plasticité et rupture

Pour un solide élastique, et même viscoélastique, la déformation causée par une contrainte est réversible : elle disparaît avec la contrainte qui l'a créée. Lorsque l'amplitude de la déformation augmente, on dépasse le régime élastique pour entrer dans le régime *plastique* : tout ou une partie de la déformation subsiste après annulation de la contrainte. Cette déformation résiduelle  $\varepsilon_r$  est aussi appelée la déformation rémanente. Dans un solide cristallin, tandis que la déformation dans le régime élastique est due à une variation des paramètres de maille du réseau, la déformation plastique est due à l'apparition de défauts dans la structure : défauts ponctuels ou dislocations, déplacements de grains.

Reprenons un câble soumis à une contrainte de traction  $\sigma$  et présentant un allongement relatif de longueur  $\varepsilon$ , et faisons varier la contrainte (voir figure et les points correspondants).

- Pour des faibles valeurs de  $\sigma$ , on reste dans le régime élastique (AB). Le *seuil d'élasticité*  $\sigma_e$  en B est la contrainte au-delà de laquelle le matériau présente un comportement plastique. En pratique, il est souvent défini tel que la déformation rémanente soit  $\varepsilon_r = 0,02$ .
- Passé le seuil d'élasticité, on entre en régime plastique (BC). La raideur diminue fortement : le matériau devient *ductible*, et ce d'autant plus que la température est élevée. Les déformations plastiques du matériau se font le plus souvent à volume constant (l'augmentation de longueur du câble s'accompagne d'une diminution de son diamètre). C'est dans ce régime qu'on peut donner forme aux pièces dans une forge, par emboutissage, laminage, tréfilage, filage, pliage.
- Dans le régime plastique, après annulation de la contrainte (CD), le matériau retrouve un comportement élastique depuis sa nouvelle forme (EF). Le nouveau seuil d'élasticité  $\sigma'_e$  en F est souvent plus élevé que le précédent, ce qui signifie que le matériau est devenu plus résistant : l'apparition des défauts dans sa structure a augmenté sa dureté. Ce procédé pour augmenter la résistance des matériaux est l'*écrouissage*.
- Si la contrainte augmente, la déformation cesse d'être homogène : il apparaît en G une *striction* dans le câble, c'est-à-dire une zone plus effilée qui concentre la déformation (la relation globale  $\varepsilon$  versus  $\sigma$  cesse alors d'être significative). Si la contrainte augmente encore, le câble finit rapidement par céder (H) : le *seuil de plasticité*  $\sigma_p$  est la contrainte où on observe la rupture.
- Un matériau est dit *ductible* si sa zone de plasticité  $\sigma_p - \sigma_e$  est étendue. Il est dit *fragile* en cas contraire, si  $\sigma_p \sim \sigma_e$ .



Rhéogramme illustrant les régimes élastique, plastique, la striction et la rupture.

Dans le régime plastique, un matériau présente donc une forte hystérésis. Il peut présenter une viscoplasticité, c'est-à-dire être sensible à la vitesse de variation de la contrainte. L'influence de la température est bien sûr aussi déterminante : par exemple, les propriétés d'un métal ne sont pas les mêmes selon son traitement thermique. Après avoir chauffé le métal à blanc, on peut :

- le refroidir lentement pour résorber les défauts internes et obtenir un matériau souple (procédé de recuit) ;
- ou, après écrouissage, le refroidir brusquement pour obtenir un matériau résistant (procédé de trempe).

## 2 Liquides non newtoniens

De nombreux liquides présentent une réponse en cisaillement différente de la loi linéaire des liquides newtoniens présentés au chapitre 6 : ce sont les *liquides non newtoniens*, grandement étudiés pour la variété de leurs propriétés et leurs nombreuses applications. En général, ces liquides contiennent en suspension des structures de taille mésoscopique, c'est-à-dire de grande taille par rapport aux échelles atomiques mais de petite taille par rapport à l'échelle macroscopique. Ces structures peuvent être des macromolécules (polymères), elles peuvent être minérales (comme dans les boues) ou

biologiques (comme les éléments figurés dans le sang). Ce sont les interactions entre ces particules qui sont à l'origine du comportement complexe de ces liquides.

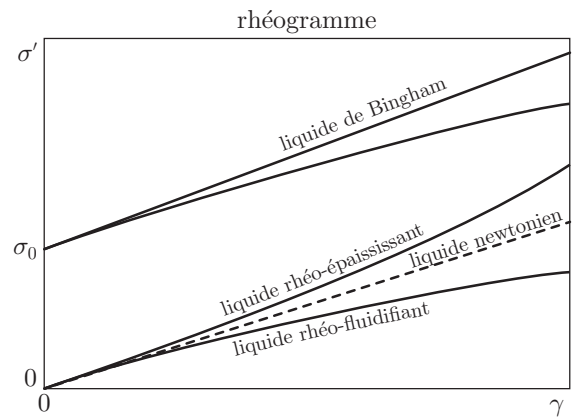
On étudie en général la réponse au cisaillement au travers d'une loi  $\sigma'(\gamma)$ , où  $\sigma'$  et  $\gamma$  sont respectivement des composantes non diagonales de  $\overline{\sigma}'$  et  $\overline{\gamma}$ . Cette étude est menée à l'aide d'un rhéomètre. Pour un liquide newtonien, on a  $\sigma' = 2\eta\gamma$ .

### 2.1 Liquides à viscosité effective

Dans les liquides à viscosité effective, il subsiste une loi  $\sigma'(\gamma)$ , mais elle n'est plus linéaire. La figure et le tableau ci-dessous résument les différents cas observés, qu'on peut classer en deux groupes.

- Dans le premier groupe on observe une loi  $\sigma' = 2\eta(\gamma)\gamma$ , la fonction  $\eta(\gamma)$  étant la *viscosité effective*. Ce sont les *liquides newtoniens généralisés* parmi lesquels les liquides *rhéo-fluidifiants* sont les plus courants : concrètement ces liquides sont d'autant plus fluides qu'on les agite, la mise en mouvement ayant rompu des liaisons entre les structures mésoscopiques.
- Dans le second cas on observe une loi  $\sigma' = \sigma_0 + 2\eta(\gamma)\gamma$ . Ce sont les *liquides à seuil* : concrètement, le liquide reste immobile tant que la contrainte ne dépasse pas le *contrainte de seuil*  $\sigma_0 > 0$ .

loi $\sigma'(\gamma)$	$\eta(\gamma)$	noms et exemples
$2\eta(\gamma)\gamma$	décroissant	liquide <i>rhéo-fluidifiant</i> sang, mélasse, peintures acryliques
	croissant	liquide <i>rhéo-épaississant</i> (ou liquide <i>dilatant</i> ) solution d'amidon de maïs
$\sigma_0 + 2\eta(\gamma)\gamma$	constant	<i>liquide de Bingham</i> (cas théorique)
	décroissant	boues de forage, ciment frais
	croissant	(non observé)

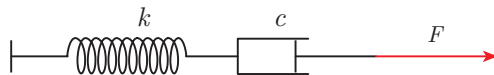


### 2.2 Viscoélasticité

Par définition, dans un liquide, le temps de relaxation de la forme  $\tau_\epsilon$  (introduit pour les solide viscoélastique) est beaucoup plus faible que la durée de l'observation. En revanche, on peut observer une relaxation des contraintes. Le modèle le plus simple consiste à introduire un temps de relaxation  $\tau_\sigma$  de la contrainte en écrivant

$$\tau_\sigma \dot{\sigma}' + \sigma' = 2\eta\gamma. \tag{7}$$

Pour les faibles déformations,  $\gamma \simeq \dot{\epsilon}$ , où  $\epsilon$  est une composante du tenseur des déformations (voir le chapitre 9 : le terme ajouté est associé à une déformation en  $\tau_\sigma \sigma'/2\eta$ , analogue à celle d'un solide élastique (voir § 1.1). Pour cette raison, les modèles intégrant la relaxation de la contrainte à la viscosité dans les liquides sont dits de *viscoélasticité*. Le montage mécanique équivalent obéissant à l'équation (7) est la mise en série d'un ressort avec un amortisseur : c'est le modèle du *liquide de Maxwell*.



Modèle du liquide de Maxwell. Un ressort de raideur  $k$ , d'allongement  $x_k$  et exerçant une force  $-kx_k$ , est en série avec un amortisseur de constante  $c$ , d'allongement  $x_c$  et exerçant une force  $-cx_c$ . La force  $F$  exercée par l'opérateur est  $F = kx_k = cx_c$ . L'allongement total est  $x = x_k + x_c$ , donc  $\dot{x} = \dot{F}/k + F/c \Rightarrow \tau\dot{F} + F = c\dot{x}$ , où  $\tau = c/k$  est le temps de relaxation du dispositif, équation analogue à (7).

Ce modèle rudimentaire avec un unique temps de relaxation peut être amélioré de la façon suivante, toujours dans le régime linéaire. Pour un liquide quelconque, depuis un état sans écoulement, on applique un taux de cisaillement  $\gamma$  et on regarde la relaxation de la contrainte  $\sigma'$ .

$$\gamma(t) = H(t - t')\gamma_0 \implies \sigma'(t) = 2\eta R(t - t')\gamma_0. \tag{8}$$

La mesure de la *fonction de relaxation*  $R(t)$  permet ensuite d'obtenir la réponse en contrainte à une variation  $\gamma(t)$  quelconque du taux de cisaillement. Étant donnée la similitude des équations (2) et (7), (4) et (8), les algèbres de la viscoélasticité des solides et des liquides sont identiques : on trouvera le détail et la résolution des équations au § 1.1.

### 2.3 Autres propriétés

Bien d'autres phénomènes peuvent être observés dans les liquides, nous n'en donnons ici qu'un rapide aperçu.

- Thixotropie : pour une contrainte  $\sigma$  ou un taux de déformation  $\dot{\gamma}$  imposé (et passé la relaxation), la viscosité apparente  $\sigma/2\dot{\gamma}$  diminue en fonction du temps, sur une durée d'au moins plusieurs minutes. Si on cesse de le solliciter, le fluide ne va retrouver ses propriétés initiales qu'après plusieurs heures au repos. La thixotropie est due à une évolution structurelle du liquide, elle induit une forte hystérésis. La synovie et les sables mouvants sont des exemples de fluides thixotropes. Un fluide thixotrope peut aussi être rhéofluidifiant, voire à seuil.
- Antithixotropie : c'est la propriété inverse, la viscosité apparente augmente en fonction du temps. La crème fouettée est un exemple de fluide antithixotrope. La rhéopexie est un cas limite de l'antithixotropie : le liquide se solidifie au fur et à mesure qu'on l'agite.
- Contraintes normales : lors d'un écoulement avec cisaillement, il peut apparaître des contraintes normales, c'est-à-dire une variation des composantes diagonales du tenseur des contraintes. Cette variation est positive dans le sens de l'écoulement (effet de tension) et négative dans les directions perpendiculaires (effet de pression). Cet effet est à l'origine de la variation du diamètre d'un jet à la sortie d'un conduit et de l'effet Weissenberg.

## Deuxième partie

### Annexes





# Annexe A

## Quelques méthodes mathématiques

### 1 Tenseurs et calcul tensoriel

L'espace physique  $\mathcal{E}$  est supposé représenté par un espace euclidien (espace vectoriel muni d'un produit scalaire). Dans cet espace, les grandeurs vectorielles ont une existence intrinsèque. Par exemple, le vecteur vitesse d'une particule ou le champ électrique ne dépendent pas du choix d'une base, seules leurs composantes en dépendent. La notion de tenseur généralise la notion de vecteur. On se limitera dans cet exposé au choix de bases orthonormées.<sup>1</sup>

#### 1.1 Symboles et règle de somme

Pour un usage ultérieur (fréquent), on introduit deux symboles et une règle d'écriture.

##### 1.1.1 Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker<sup>2</sup> est

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

Par définition, ce symbole est symétrique sur ses deux indices.

##### 1.1.2 Symbole de Levi-Civita

Le symbole de Levi-Civita<sup>2</sup> est

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \quad (\text{rotation de } (1, 2, 3)), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1) \text{ ou } (2, 1, 3) \quad (\text{rotation et transposition de } (1, 2, 3)), \\ 0 & \text{si } i = j, j = k \text{ ou } i = k. \end{cases} \quad (2)$$

Par définition, ce symbole est antisymétrique sur ses trois indices : c'est la signature de la permutation de (1,2,3) à (i, j, k). On le nomme parfois « symbole complètement antisymétrique » d'ordre trois.

##### 1.1.3 Convention sommatoire d'Einstein

Cette convention a été introduite par Einstein pour alléger les écritures des formules en relativité générale et, depuis, elle est devenue d'un usage courant. Soient deux grandeurs telles que des symboles ou des composantes de tenseurs. Si, dans une expression multilinéaire de ces grandeurs, un indice est répété (indice muet), alors la somme sur l'ensemble de ses valeurs est implicite.

$$\begin{aligned} a_i b_i & \text{ signifie } \sum_i a_i b_i \\ a_{ij} b_j & \text{ signifie } \sum_j a_{ij} b_j \\ a_{ij} b_i c_j & \text{ signifie } \sum_i \sum_j a_{ij} b_i c_j \end{aligned}$$

---

1. Dans certaines circonstances, il peut être préférable de choisir des bases quelconques, non orthonormées : dans ce cas, on est amené à distinguer les composantes covariantes (indice en position basse) et contravariantes (indice en position haute) des tenseurs. Par ailleurs, en relativité générale, l'espace physique n'est pas euclidien mais riemannien.

2. Leopold Kronecker (1823 - 1891), mathématicien allemand. Tullio Levi-Civita (1873 - 1941), mathématicien italien.

La disparition du signe somme dans les expressions tensorielles (avec des indices « flottants ») rend les écritures plus compactes et lisibles. Mais il ne faut pour autant pas oublier la sommation implicite et commettre des erreurs comme, par exemple, factoriser abusivement par l'un des termes d'un produit. On pourra vérifier les formules suivantes :

$$\delta_{ii} = 3, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{jik} = -6 \quad (3)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}. \quad (4)$$

## 1.2 Exemples d'utilisation

Soit une base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Soient trois vecteurs  $\vec{u} = u_i\vec{e}_i$ ,  $\vec{v} = v_i\vec{e}_i$  et  $\vec{w} = w_i\vec{e}_i$ . On a les formules suivantes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i, \quad (5a)$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \epsilon_{ijk} u_i v_j \vec{e}_k, \quad (5b)$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (5c)$$

Supposons de plus la base identique en tout point de l'espace.<sup>3</sup> Introduisant le rayon-vecteur  $\vec{r} = x_i\vec{e}_i$ , on a  $d\vec{r} = dx_i\vec{e}_i$ , d'où  $d\vec{r}^2 = dx_i dx_i \geq 0$ . L'élément de longueur s'écrit

$$dr = \sqrt{dx_i dx_i}. \quad (6)$$

On a aussi des formules compactes pour l'analyse vectorielle en coordonnées cartésiennes. En notant  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \partial_i f \vec{e}_i \quad (7a)$$

$$\text{div } \vec{u} = \partial_i u_i \quad (7b)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} = \epsilon_{ijk} \partial_i u_j \vec{e}_k \quad (7c)$$

$$\Delta f = \partial_i \partial_i f \quad (7d)$$

## 1.3 Notion de tenseur (euclidien)

Il y a plusieurs niveaux d'approche des tenseurs, de la plus vague (un tenseur est une entité à un ou plusieurs indices qui apparaît dans des formules physiques) à la plus technique (un tenseur est une application multilinéaire de  $\mathcal{E}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ). Nous adoptons ici une présentation pragmatique proche des préoccupations de la physique, où la notion de tenseur généralise celle de vecteur.

Reprenons une base orthonormée de l'espace physique  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , puis une autre base orthonormée  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ . Soit  $A$  la matrice de changement de base, de composantes  $A_{ij}$ . Les formules de changement de base de  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  à  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  sont

$$\vec{e}'_i = A_{ij} \vec{e}_j \iff A_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j. \quad (8a)$$

Cette matrice  $A$  est orthogonale, c'est-à-dire que son inverse est égale à la transposée :  $A^{-1} = {}^t A$ . Les formules de changement de base de  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  à  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont

$$\vec{e}_i = ({}^t A)_{ij} \vec{e}'_j = A_{ji} \vec{e}'_j \iff A_{ji} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j. \quad (8b)$$

Un tenseur d'ordre  $n$  est un élément  $L$  d'un espace vectoriel de dimension  $3^n$ , donc les  $3^n$  composantes  $L_{ijk\dots}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $L'_{ijk\dots}$  dans la base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  se transforment selon les règles<sup>4</sup>

$$L'_{ijk\dots} = A_{ip} A_{jq} A_{kr} \cdots L_{pqr\dots} \quad (9a)$$

et

$$L_{ijk\dots} = A_{pi} A_{qj} A_{rk} \cdots L'_{pqr\dots}. \quad (9b)$$

### 1.3.1 Tenseur d'ordre zéro : scalaire

Un tenseur d'ordre zéro est un *scalaire*, son unique composante est invariante par changement de base. Exemples : la masse  $m$  d'une particule, la pression  $P$  d'un gaz. En revanche, une composante d'un vecteur comme la vitesse, ou la somme des composantes, n'est pas un scalaire au sens tensoriel du terme.

3. On peut considérer aussi des bases locales pour lesquelles les vecteurs  $\vec{e}_i$  dépendent du point. C'est le cas lorsqu'on utilise les coordonnées cylindriques, sphériques ou, plus généralement, curvilignes.

4. Plus exactement, les formules (11) et (9) doivent être généralisées à des bases quelconques.

### 1.3.2 Tenseur d'ordre un : vecteur

Un tenseur d'ordre un est un vecteur de l'espace  $\mathcal{E}$ . Ainsi, le vecteur  $\vec{u} = u_i \vec{e}_i = u'_i \vec{e}'_i$  a des composantes  $u_i$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $u'_i$  dans la base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  qui, d'après (8) se transforment selon

$$u'_i = \vec{u} \cdot \vec{e}'_i = A_{ij} \vec{u} \cdot \vec{e}_j = A_{ij} u_j \quad \text{et} \quad u_i = \vec{u} \cdot \vec{e}_i = A_{ji} \vec{u} \cdot \vec{e}'_j = A_{ji} u'_j. \quad (10)$$

Exemples : la vitesse  $\vec{v}$  d'une particule, le champ électrique  $\vec{E}$ . En revanche, la réunion de trois scalaires, quand bien même seraient-ils de même dimension, n'est pas *a priori* un vecteur.

### 1.3.3 Tenseur d'ordre deux : opérateur linéaire

Un tenseur d'ordre deux est un opérateur linéaire  $\bar{L}$  dans  $\mathcal{E}$ . Posons  $\vec{v} = \bar{L}(\vec{u})$ . Si on écrit

$$v_i = L_{ij} u_j \quad \text{et} \quad v'_i = L'_{ij} u'_j,$$

on introduit les composantes de  $\bar{L}$ , respectivement  $L_{ij}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $L'_{ij}$  dans la base  $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ . On a

$$v'_i = A_{ij} v_j = A_{ij} L_{jk} u_k = A_{ij} L_{jk} A_{lk} u'_l,$$

ce qui signifie que  $L'_{il} = A_{ij} L_{jk} A_{lk}$  ou, mieux,

$$L'_{ij} = A_{ik} A_{jl} L_{kl}. \quad (11a)$$

De même, on a

$$v_i = A_{ji} v'_j = A_{ji} L'_{jk} u'_k = A_{ji} L'_{jk} A_{kl} u_l,$$

ce qui signifie que  $L_{il} = A_{ji} L'_{jk} A_{kl}$  ou, mieux,

$$L_{ij} = A_{ki} A_{lj} L'_{kl}. \quad (11b)$$

Le fait que les neuf composantes de l'opérateur  $\bar{L}$  vérifient les formules (11a) et (11b) montre que  $\bar{L}$  est un tenseur d'ordre deux. Voici quelques exemples.

- Le tenseur d'inertie  $\bar{J}$ , le tenseur de permittivité  $\bar{\epsilon}$ , le tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$ , *etc.*
- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs, la grandeur  $\vec{u} \otimes \vec{v}$  est un tenseur d'ordre deux de composantes  $u_i v_j$ , appelé produit tensoriel des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
- Le symbole de Kronecker est un tenseur d'ordre deux, dont les composantes sont  $\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ .

Quelques propriétés des tenseurs d'ordre deux.

- Pour un tenseur d'ordre deux  $\bar{L}$ , son transposé  ${}^t\bar{L}$  est tel que, quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ ,

$$\vec{u}' \cdot \bar{L}(\vec{u}) = {}^t\bar{L}(\vec{u}') \cdot \vec{u},$$

ce qui est équivalent à  ${}^tL_{ij} = L_{ji}$ .

- Un tenseur d'ordre deux  $\bar{L}$  est symétrique si  ${}^t\bar{L} = \bar{L}$ , ce qui est équivalent à  $L_{ij} = L_{ji}$ .
- Un tenseur d'ordre deux  $\bar{L}$  est antisymétrique si  ${}^t\bar{L} = -\bar{L}$ , ce qui est équivalent à  $L_{ij} = -L_{ji}$ .
- Pour un tenseur d'ordre deux  $\bar{L}$ , sa trace  $\text{tr } \bar{L}$  et son déterminant  $\text{dét } \bar{L}$  sont

$$\text{tr } \bar{L} = L_{ii} \quad \text{et} \quad \text{dét } \bar{L} = \epsilon_{ijk} L_{1i} L_{2j} L_{3k} = (\bar{L}(\vec{e}_1) \wedge \bar{L}(\vec{e}_2)) \cdot \bar{L}(\vec{e}_3). \quad (12)$$

Ce sont des scalaires, c'est-à-dire des grandeurs indépendantes de la base.

- Pour deux tenseur d'ordre deux  $\bar{M}$  et  $\bar{N}$ , l'application linéaire composée  $\bar{L} = \bar{M}\bar{N}$  est un autre tenseur d'ordre deux (on omet souvent le symbole  $\circ$  de la composition) de composante  $L_{ij} = M_{ik} N_{kj}$ . La (double) contraction de  $\bar{M}$  avec  $\bar{N}$  est le scalaire

$$\bar{M} \cdot \bar{N} = \text{tr}(\bar{M}\bar{N}) = M_{ij} N_{ji}. \quad (13)$$



# Bibliographie

## Transport

- [1] Adrian BEJAN. *Heat transfer*. John Wiley & Sons, 1993.
- [2] R. Byron BIRD, Warren E. STEWART et Edwin N. LIGHTFOOT. *Transport phenomena*. John Wiley & Sons, 2002.
- [3] John CRANK. *The mathematics of diffusion*. Oxford University Press, 1986.

## Rayonnement thermique

- [4] Lev LANDAU et Evgueni LIFCHITS. *Électrodynamique des milieux continus*. Édition Mir, 1990.

## Hydrodynamique

- [5] Étienne GUYON, Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT. *Hydrodynamique physique*. 3<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 2012.
- [6] Lev LANDAU et Evgueni LIFCHITS. *Mécanique des fluides*. Édition Mir, 1989.

## Transport convectif

- [7] François CHARRU. *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences, 2007.
- [8] Edward L. CUSSLER. *Diffusion mass transfer in fluid systems*. Cambridge University Press, 1984.
- [9] Guillermo HAUKE. *An Introduction to fluid mechanics and transport phenomena*. Springer, 2008.

## Phénomènes de surface

- [10] Pierre-Gilles de GENNES, Françoise BROCHARD-WYART et Davis QUÉRÉ. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002.

## Élasticité

- [11] Eugène COSSERAT et François COSSERAT. *Théorie des corps déformables*. Hermann, 1909.
- [12] Dominique FRANÇOIS, André PINEAU et André ZAOUÏ. *Comportement mécanique des matériaux : élasticité et plasticité*. Lavoisier-Hermès, 2009.
- [13] Barry J. GOODNO et James M. GERE. *Mechanics of materials*. Cengage Learning, 2018.
- [14] Lev LANDAU et Evgueni LIFCHITS. *Théorie de l'élasticité*. Édition Mir, 1990.

## Rhéologie

- [15] Richard Monson CHRISTENSEN. *Theory of viscoelasticity : an introduction*. Academic Press, 1982.
- [16] Guy COUARRAZE, Jean-Louis GROSSIORD et Nicolas HUANG. *Initiation à la rhéologie*. Lavoisier, 2014.
- [17] Philippe COUSSOT. *Rhéophysique : la matière dans tous ses états*. EDP Sciences, 2012.
- [18] Philippe COUSSOT et Jean-Louis GROSSIORD. *Comprendre la rhéologie : de la circulation du sang à la prise du béton*. EDP Sciences, 2002.
- [21] Roderic S. LAKES. *Viscoelastic solids*. CRC Press, 1999.



# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>3</b>
<b>I Cours</b>	<b>5</b>
<b>1 Description des milieux continus</b>	<b>7</b>
1 Modélisation d'un milieu continu . . . . .	7
1.1 Hypothèse de continuité . . . . .	7
1.2 Équilibre local, densités . . . . .	7
1.3 Séparation des énergies . . . . .	8
2 Représentation d'un milieu continu . . . . .	9
2.1 Points de vue d'Euler et de Lagrange . . . . .	9
2.2 Champ de déformation, jacobien . . . . .	9
2.3 Champ de vitesse, relation de continuité . . . . .	10
2.4 Expression eulérienne de la dérivée particulaire . . . . .	11
<b>2 Transport de matière et de chaleur</b>	<b>13</b>
1 Principe général de l'écriture d'un bilan . . . . .	13
1.1 Écriture d'un bilan . . . . .	13
1.2 Bilan d'énergie totale . . . . .	14
2 Transport de matière . . . . .	14
2.1 Bilan de matière . . . . .	14
2.2 Lois de Fick . . . . .	15
3 Transport de chaleur . . . . .	16
3.1 Équation de la chaleur . . . . .	16
3.2 Loi de Fourier . . . . .	16
3.3 Exemples à 1D . . . . .	16
3.3.1 Analogie électrocinétique . . . . .	17
3.3.2 État stationnaire . . . . .	17
3.3.3 Résistance thermique de contact . . . . .	18
3.3.4 Régime sinusoïdal . . . . .	19
4 Transport de charges . . . . .	19
4.1 Équations de bilan . . . . .	19
4.2 Loi d'Ohm . . . . .	20
4.3 Effet Hall . . . . .	20
4.4 Effets Peltier et Seebeck . . . . .	21
4.4.1 Effet Seebeck . . . . .	21
4.4.2 Effet Peltier . . . . .	22
<b>3 Le rayonnement thermique</b>	<b>23</b>
1 Quelques propriétés du rayonnement électromagnétique . . . . .	23
1.1 Description . . . . .	23
1.2 Éléments de radiométrie . . . . .	24
1.3 Pression de radiation . . . . .	25
2 Le rayonnement thermique . . . . .	25
2.1 Le rayonnement comme entité thermodynamique . . . . .	25
2.2 Propriétés thermodynamiques . . . . .	26
2.3 Loi de Kirchhoff . . . . .	27
3 Le corps noir . . . . .	28
3.1 Définition du corps noir . . . . .	28



3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	28
3.3	Apports de la physique statistique . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Bases de l'hydrodynamique</b>	<b>31</b>
1	Rappels d'hydrostatique . . . . .	31
1.1	Forces dans le fluide au repos . . . . .	31
1.2	Équation d'équilibre . . . . .	32
1.3	Théorème d'Archimède . . . . .	32
2	Cinématique des fluides . . . . .	33
2.1	Rappels . . . . .	33
2.2	Quelques écoulements particuliers . . . . .	33
2.2.1	Écoulement stationnaire . . . . .	33
2.2.2	Écoulement uniforme . . . . .	34
2.2.3	Vorticité et écoulement irrotationnel . . . . .	34
2.2.4	Écoulement incompressible . . . . .	34
3	Dynamique des fluides parfaits . . . . .	35
3.1	L'équation d'Euler . . . . .	35
3.2	Une application : l'équation du son . . . . .	36
3.3	Discussion du rôle de la pesanteur : le nombre de Froude . . . . .	37
4	Équation de Bernoulli . . . . .	37
4.1	Théorème de Bernoulli . . . . .	38
4.1.1	Écoulement stationnaire et incompressible . . . . .	38
4.1.2	Fluide incompressible en écoulement irrotationnel . . . . .	38
4.1.3	Fluide incompressible en écoulement stationnaire et irrotationnel . . . . .	39
4.2	Exemples d'application . . . . .	39
4.2.1	Débitmètre à tube de Venturi . . . . .	39
4.2.2	Sonde de Pitot . . . . .	39
4.2.3	Vidange d'un récipient . . . . .	40
4.3	Retour sur l'hypothèse d'incompressibilité . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Le tenseur des contraintes</b>	<b>43</b>
1	Tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .	43
1.1	Définition du tenseur des contraintes . . . . .	43
1.2	Signification du tenseur des contraintes . . . . .	44
1.2.1	Cas des fluides . . . . .	44
1.2.2	Cas des solides . . . . .	44
2	Applications des lois de la dynamique . . . . .	45
2.1	Bilan d'impulsion . . . . .	45
2.2	Bilan de moment cinétique . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Les fluides visqueux newtoniens</b>	<b>47</b>
1	L'équation de Navier-Stokes . . . . .	47
1.1	Introduction à la viscosité . . . . .	47
1.2	Fluides newtoniens . . . . .	48
1.3	Équation de Navier-Stokes . . . . .	48
2	Exemples d'écoulements réguliers . . . . .	49
2.1	Écoulements de Couette et de Poiseuille entre deux plaques . . . . .	50
2.2	Écoulement de Poiseuille dans un tuyau . . . . .	51
2.3	Écoulement de Couette entre deux cylindres . . . . .	51
3	Régimes d'écoulement et nombre de Reynolds . . . . .	52
3.1	Nombre de Reynolds . . . . .	52
3.2	Force de traînée et de force de portance . . . . .	53
3.2.1	Forces à faible nombre de Reynolds . . . . .	54
3.2.2	Forces à fort nombre de Reynolds . . . . .	54
4	Couche limite et turbulence . . . . .	54
4.1	Couche limite . . . . .	54
4.2	Turbulence . . . . .	55

<b>7</b>	<b>Transport convectif</b>	<b>57</b>
1	Principes généraux du transfert thermique . . . . .	57
1.1	Position du problème . . . . .	57
1.2	Nombre de Prandtl . . . . .	58
1.3	Couche limite en température et loi de Newton . . . . .	58
2	Analyse de quelques situations . . . . .	59
2.1	Convection forcée . . . . .	59
2.2	Convection naturelle . . . . .	60
2.3	Nombre de Biot . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Phénomènes de surface</b>	<b>63</b>
1	La tension superficielle $\sigma$ . . . . .	63
1.1	Présentation en termes de forces . . . . .	63
1.2	Présentation thermodynamique . . . . .	63
1.3	Le principe de la surface minimale . . . . .	64
1.4	Longueur capillaire nombre de Bond . . . . .	64
2	La loi de Laplace . . . . .	65
2.1	Bilan des forces . . . . .	65
2.2	Équilibre d'une bulle . . . . .	66
3	Le mouillage . . . . .	66
3.1	Étalement d'un liquide . . . . .	66
3.2	Angle de raccordement : loi de Young-Dupré . . . . .	67
3.3	Forme d'un ménisque . . . . .	68
3.4	Ascension capillaire : loi de Jurin . . . . .	68
4	Ondes superficielles . . . . .	69
4.1	Position du problème . . . . .	69
4.2	Mise en équation . . . . .	70
4.2.1	Lois de bilan . . . . .	70
4.2.2	Conditions aux limites en déplacement . . . . .	70
4.2.3	Condition aux limites en pression . . . . .	71
4.2.4	Équation d'onde et relation de dispersion . . . . .	71
4.2.5	Discussion . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Élasticité dans les solides</b>	<b>73</b>
1	Théorie de l'élasticité . . . . .	73
1.1	Le tenseur des déformations . . . . .	73
1.2	Thermodynamique de la déformation . . . . .	75
1.3	Lois de Hooke . . . . .	76
2	Le solide isotrope . . . . .	76
2.1	Première écriture . . . . .	76
2.2	Autres écritures . . . . .	77
3	Premières applications . . . . .	78
3.1	Équation du mouvement . . . . .	78
3.2	Ondes élastiques . . . . .	79
<b>10</b>	<b>Éléments de rhéologie</b>	<b>81</b>
1	Solides : au-delà de l'élasticité . . . . .	82
1.1	Viscoélasticité . . . . .	82
1.2	Plasticité et rupture . . . . .	84
2	Liquides non newtoniens . . . . .	84
2.1	Liquides à viscosité effective . . . . .	85
2.2	Viscoélasticité . . . . .	85
2.3	Autres propriétés . . . . .	86
<b>II</b>	<b>Annexes</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Quelques méthodes mathématiques</b>	<b>89</b>
1	Tenseurs et calcul tensoriel . . . . .	89
1.1	Symboles et règle de somme . . . . .	89
1.1.1	Symbole de Kronecker . . . . .	89
1.1.2	Symbole de Levi-Civita . . . . .	89

---

1.1.3	Convention sommatoire d'Einstein . . . . .	89
1.2	Exemples d'utilisation . . . . .	90
1.3	Notion de tenseur (euclidien) . . . . .	90
1.3.1	Tenseur d'ordre zéro : scalaire . . . . .	90
1.3.2	Tenseur d'ordre un : vecteur . . . . .	91
1.3.3	Tenseur d'ordre deux : opérateur linéaire . . . . .	91
<b>Bibliographie</b>		<b>93</b>
<b>Table des matières</b>		<b>98</b>