



**HAL**  
open science

# Hydraulique à surface libre en régime permanent

Carole Delenne

► **To cite this version:**

Carole Delenne. Hydraulique à surface libre en régime permanent. École d'ingénieur. France. 2020.  
hal-03619263

**HAL Id: hal-03619263**

**<https://hal.science/hal-03619263v1>**

Submitted on 25 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Hydraulique à surface libre

C. Delenne, Polytech Montpellier - EGC3 - 2020

24 mars 2022

# Introduction

Écoulements à surface libre<sup>1</sup>, par opposition aux écoulements en charge, 3 phases en contact : solide/liquide/gaz.

On s'intéressera aux écoulements unidimensionnels, en rivière et canaux.

On évoquera les écoulements

1. Permanents : indépendants du temps, parmi lesquels

- 1.1 uniformes (indépendants de l'espace)

- 1.2 non-uniforme (dépendants de l'espace) :

- 1.2.1 graduellement variés

- 1.2.2 rapidement variés

2. Transitoires : dépendants du temps et de l'espace

# Plan

Chapitre 1. Les écoulements à surface libre 1D : généralités

Chapitre 2. Ecoulements uniformes et lois de frottement

Chapitre 3. Régime permanent graduellement varié

Chapitre 4. Régime rapidement varié - discontinuité

Chapitre 5. Régime transitoire : équations de Saint-Venant

# Evaluation

3 Notes :

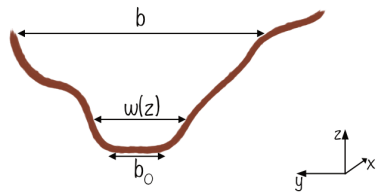
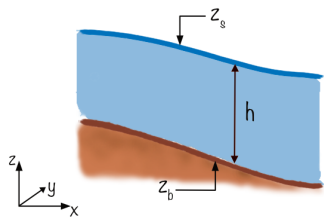
1. Quizz Wooclap à chaque cours : chaque question rapporte + ou - sur la note d'examen
  - ▶ Réponse correcte : +0.1
  - ▶ Pas de réponse : 0
  - ▶ Mauvaise réponse : -0.05
2. Compte-rendu de « TP » : 4pts
  - ▶ Comparaison lois théoriques et mesures (elles vous seront fournies)
  - ▶ 4 sujets :
    - ▶ Ecoulement uniforme et lois de frottement
    - ▶ Changement de régime et relations hauteur/débit (Venturi/Déversoir)
    - ▶ Ligne d'eau dans un canal venturi
    - ▶ Ressaut hydraulique
  - ▶ Les « TP » comptent peu mais sont là pour préparer l'examen
3. Examen final : 16pts
  - ▶ Modalités à préciser

Tous les documents sont autorisés pour toutes les épreuves.

Seul « l'appel à un ami » n'est pas autorisé : les micros devront être activés pour permettre la surveillance.

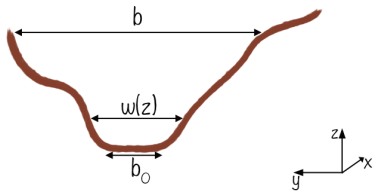
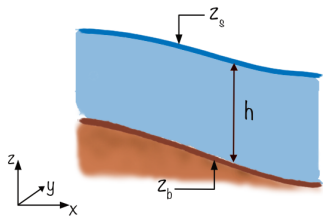
# Les écoulements à surface libre 1D : généralités

## Notations (anglo-saxone)



Gauche : profil en long ; Droite : section en travers.

## Notations (anglo-saxonne)



Gauche : profil en long ; Droite : section en travers.

- ▶  $W(z)$  largeur du chenal à une altitude  $z$  donnée,
- ▶  $b$  largeur au miroir,  $b_0$  largeur au radier
- ▶  $z_b$  cote du fond du chenal,
- ▶  $S_0$  pente du fond du chenal,
- ▶  $h$  hauteur d'eau,
- ▶  $A$  section en travers,
- ▶  $z_s$  cote de la surface libre,
- ▶  $Q$  débit volumique à travers la section  $A$ ,
- ▶  $\hat{u}$  vitesse (locale) de l'écoulement en un point de la section  $A$ ,
- ▶  $u$  vitesse moyenne de l'écoulement,
- ▶  $\chi$  périmètre mouillé (longueur de frottement sur une section),
- ▶  $R_H$  rayon hydraulique,
- ▶  $D_H$  diamètre hydraulique,
- ▶  $S_f$  pente de la ligne d'énergie (de charge).



## Définitions

Le symbole  $\stackrel{\text{def}}{=}$  indique que l'équation est une définition et ne traduit pas seulement une égalité entre deux grandeurs.

Profil en travers :

$$b \stackrel{\text{def}}{=} W(z_s) \quad (1)$$

$$A = \int_{z_b}^{z_s} W(z) dz \quad (2)$$

$$R_H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{\chi} \quad (3)$$

$$dA = W(h) dh \quad \text{pour } x = \text{Cste} \quad (4)$$

Le diamètre hydraulique (parfois appelé profondeur hydraulique) est la profondeur du rectangle d'aire et largeur au miroir équivalentes :

$$D_H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{b} \quad (5)$$

Exercice 1.1 *Canal Trapézoïdal.*

Exercice 1.2 *Conduite circulaire.*

Exercice 1.3 *Rayon hydraulique minimal.*

# Définitions

**Chenal prismatique.** Dont la forme ne change pas avec l'abscisse.

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_{h=\text{Cste}} = 0 \quad \forall h \quad (6)$$

**Profil en long.** Cote du fond du canal en fonction de l'abscisse  $x$  :  $z_b(x)$ . Ou ligne de radier : ensemble des points les plus bas de chaque section en travers.

**Pente du fond** (parfois notée  $i$ ). Inclinaison du canal dans sa direction d'écoulement (pente de la ligne de radier). Tangente de l'angle  $\alpha$  entre le fond du canal et l'horizontale ; la pente est donc positive quand la cote diminue vers l'aval.

$$S_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (7)$$

Si  $\alpha$  « petit », alors  $\tan \alpha \approx \alpha$ .

→ *Question : jusqu'à quelle valeur peut-on considérer  $\alpha$  petit ?*

## Définitions

**Ligne d'eau (ou courbe de remous).** Cote de la surface libre en fonction de l'abscisse  $x$  :  $z_s(x)$ .

**Vitesse moyenne.** Intégrale de la vitesse sur la section :

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{A} \int_A \hat{u} \, dA = \frac{Q}{A} \quad (8)$$

**Charge hydraulique.** On rappelle que la charge hydraulique a un sens uniquement pour un fluide à masse volumique constante (la même en tout point et à toute date). Sa définition est la suivante :

$$\hat{H}(z) \stackrel{\text{def}}{=} z + \frac{\rho(z)}{\rho g} + \frac{\hat{u}^2(z)}{2g} \quad (9)$$

### Remarque :

Masse volumique constante  $\neq$  fluide incompressible. Fluide incompressible si  $\rho \ll \rho$  (cas des ESL, car variation de pression de l'ordre du bar). Mais un fluide incompressible peut avoir une masse volumique non uniforme s'il est chargé de particules en suspension

# Définitions

**Charge spécifique.** Charge rapportée à la cote du fond :

$$H_s = H - z_b \quad (10)$$

**Ligne de charge.** Valeur de la charge hydraulique en fonction de l'abscisse :  $H(x)$ .

**Pente de frottement.** Pente de la ligne de charge, variation de charge par unité de longueur (inverse de la perte de charge). Par convention, la pente de frottement est positive dans le sens de l'écoulement :

$$S_f \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (11)$$

# Hypothèses

## Conservation de la masse et de la quantité de mouvement

Les principes de l'hydraulique à surface libre sont les mêmes que ceux de l'hydraulique en conduite, à savoir :

- ▶ le principe de conservation de la masse (continuité) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

- ▶ le principe de conservation de la quantité de mouvement qdm (théorème d'Euler), qui conduit au principe de conservation de l'énergie (théorème de Bernoulli) **sous certaines conditions**.

### Pour info.

Le théorème d'Euler s'écrit sous forme intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \vec{F} \quad (12)$$

Termes : 1-> variation de la qdm  $\rho \vec{u}$  dans le volume  $\Omega$ ,

2 -> débit de qdm à travers les frontières  $\Gamma$  ( $\rho \vec{u}$  est transportée à la vitesse  $\vec{u}$ )

3 -> somme des forces externes appliquées à  $\Omega$  (poids, pression, frottements)

# Hypothèses

## Hypothèses spécifiques aux écoulements à surface libre

La hauteur d'eau peut varier avec le débit et avec les conditions amont ou aval.

Dans tout ce qui suit :

- ▶ les accélérations verticales sont négligeables,
- ▶ donc le champ de pression est hydrostatique, la pression ne dépend que de la hauteur de la colonne d'eau  $h$  et croît linéairement de la surface vers le fond :

$$p(z) = p_0 + \rho g(z_s - z) \quad (\text{Pa})$$

$z_s - z$  est la colonne d'eau au-dessus de  $z$  (si  $z = z_b$  alors  $z_s - z = h$ ),  $p_0$  : pression atmosphérique,  $\rho$  : masse volumique de l'eau ( $=1000\text{kg/m}^3$ ),  $g = 9.81\text{ms}^{-2}$  : accélération de la pesanteur.

- ▶ l'eau est incompressible dans les gammes de pression considérées.

Dans la suite, nous ferons également l'hypothèse de répartition uniforme des vitesses.

→ *Question : donner des exemples de profils de vitesses non uniformes (schémas).*

Remarque :

L'hypothèse de répartition hydrostatique des pression n'est pas valide au passage d'un seuil.

# Hypothèses

## Conséquences

D'après l'hypothèse hydrostatique, (9) devient :

$$\hat{H}(z) \stackrel{\text{def}}{=} z + (z_s - z) + \frac{\hat{u}^2(z)}{2g} = z_s + \frac{\hat{u}^2(z)}{2g} \quad (13)$$

Si  $u$  est uniforme sur la section ( $\Pi z$ ), alors  $H$  est défini pour toute la section par :

$$H = z_s + \frac{u^2}{2g} = z_b + h + \frac{u^2}{2g} \quad (14)$$

### Remarque :

Pour prendre en compte la non uniformité des vitesses, on peut appliquer un coefficient « de Boussinesq »  $\beta$  :

$$H = z_s + \beta \frac{u^2}{2g}$$

que l'on peut en théorie calculer si on connaît l'expression de  $\hat{u}$  en tout point de la section en travers  
Dans ce cours, on prendra toujours  $\beta = 1$

2 variables décrivent un écoulement à surface libre 1D :  $h$  et  $u$  (ou  $A$  et  $Q$ ).

→ *Quelques exercices sur les calculs de pression (à faire seuls si besoin) :*

Exercice 1.4 *Pression hydrostatique.*

Exercice 1.6 *Pression sur une vanne de barrage.*

Exercice 1.5 *Calcul de pression.*

Exercice 1.7 *Stabilité d'un barrage.*

# Classification des régimes d'écoulement à surface libre

Écoulement laminaire/turbulent : nombre de Reynolds

## Rappel

Nombre de Reynolds = effet des frottements internes au fluide/ effet de l'inertie

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu} \quad (15)$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\nu$  la viscosité cinématique ( $=10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ ). Voir classification des écoulements en charge, diagramme de Moody, avec  $\lambda$  le coefficient de pertes de charge linéaire.

En surface libre le nombre de Reynolds est défini par :

$$Re = \frac{\rho u R_H}{\mu} = \frac{u R_H}{\nu} \quad (16)$$

Limite laminaire/turbulent environ  $Re=500$ . Remarque, dans certains livres, on rencontre la formule avec  $4R_H$  à la place de  $R_H \Rightarrow$  limite à 2000.

Exercice 1.8 *Laminaire/turbulent.*

Exercice 1.9 *Laminaire/turbulent.*

*→ Ces exercices montrent que les écoulements en rivière/canaux que l'on considère sont toujours turbulents. Seuls les écoulements en nappes souterraines peuvent être laminaires.*



# Classification des régimes d'écoulement à surface libre

Écoulement fluvial/torrentiel : nombre de Froude

Effet de l'inertie / effet de la gravité.

$$Fr = \frac{u}{c} \quad (17)$$

où  $c$  est la célérité des ondes de pression. Par définition en surface libre,

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{gA}{b}} \quad (18)$$

On peut également écrire que

$$Fr^2 = \frac{Q^2 b}{gA^3} \quad (19)$$

**Fluvial** : écoulement dont la vitesse  $u$  est inférieure à la célérité des ondes de pression :  $Fr < 1$ .

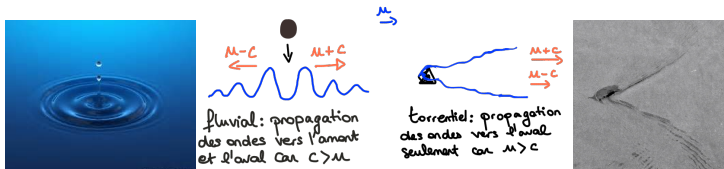
**Torrentiel** : écoulement dont la vitesse  $u$  est supérieure à la célérité des ondes de pression  $Fr > 1$ .

**Critique** : écoulement pour lequel  $Fr = 1$ .

On parle aussi d'écoulement sous-critique et hyper-critique.

# Ecoulement fluvial/torrentiel

Une perturbation de l'écoulement fluvial peut se propager vers l'aval et l'amont (cf images de « goutte eau » sur internet). Une perturbation de l'écoulement torrentiel ne peut pas « remonter le courant » et se propage uniquement vers l'aval



La profondeur critique est la profondeur pour laquelle le régime critique est rencontré pour un débit donné.

Exercice 1.10  $c$  indépendante de  $h$  ?.

Exercice 1.11 Fluvial/torrentiel.

Exercice 1.12 Rétrécissement brusque et changement de régime.

## Charge spécifique en fonction de l'écoulement

La charge spécifique (charge rapportée à la cote du fond) dépend des deux variables de l'écoulement à SL1D : le débit et la hauteur d'eau :

$$H_S = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Il est intéressant d'étudier l'évolution de la charge en fonction de  $h$  pour un débit  $Q$  fixé et la relation entre la hauteur et le débit pour une charge donnée.

## Charge spécifique en fonction de l'écoulement

La charge spécifique (charge rapportée à la cote du fond) dépend des deux variables de l'écoulement à SL1D : le débit et la hauteur d'eau :

$$H_S = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Il est intéressant d'étudier l'évolution de la charge en fonction de  $h$  pour un débit  $Q$  fixé et la relation entre la hauteur et le débit pour une charge donnée.

Etude de la charge en fonction de la profondeur pour  $Q$  fixé.

On étudie la dérivée de  $H_S(h)$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_S}{\partial h} &= 1 + \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{Q^2}{2g} \frac{1}{A^2} \right) \\ &= 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{A^2} \right) \\ &= 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial h} \\ &= 1 - Fr^2\end{aligned}$$

puisque  $\partial A = b \partial h$ .

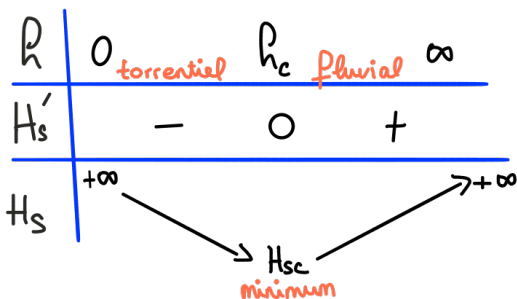
# Charge spécifique en fonction de l'écoulement

Tableau de variation :

## Charge spécifique en fonction de l'écoulement

Tableau de variation :

$$H_s = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$
$$\frac{dH_s}{dh} = 1 - Fr^2$$



$h_c$  est la hauteur critique, qui correspond à la valeur minimale de l'énergie de l'écoulement pour un débit donné.

$$Fr^2 = 1 \Rightarrow \frac{Q^2}{gh_c^3 b^2} = 1$$

$$h_c = \left( \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3}$$

## Charge spécifique en fonction de la hauteur d'eau

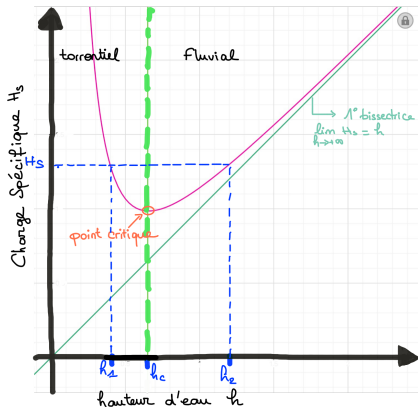
Pour un débit fixé, si  $h$  devient très grand, alors  $Fr \rightarrow 0$  et  $H_S \rightarrow h$  (cf TP venturi).  
On peut alors tracer l'allure de  $H_S$  en fonction de  $h$  :

Exercice 1.13 *Charge Spécifique.*

# Charge spécifique en fonction de la hauteur d'eau

Pour un débit fixé, si  $h$  devient très grand, alors  $Fr \rightarrow 0$  et  $H_S \rightarrow h$  (cf TP venturi).  
On peut alors tracer l'allure de  $H_S$  en fonction de  $h$  :

Exercice 1.13 Charge Spécifique.



Pour une même valeur de la charge spécifique au delà du point critique, il existe deux hauteurs possibles (en théorie 3 mais dont une est négative) appelées **hauteurs conjuguées**. Ces deux hauteurs appartiennent aux deux régimes d'écoulements, fluvial et torrentiel. Le fait qu'un écoulement dans une section en travers prenne l'une ou l'autre de ces deux hauteurs est déterminé par les caractéristiques de l'écoulement hors de cette section.

Exercice 1.14 Profondeur des 2 régimes.

Exercice 1.15 Discontinuité de topographie.

Exercice 1.16 Calcul numérique de la profondeur connaissant la charge.



# Écoulements uniformes et lois de frottement

# Hypothèses

## Hypothèses

- ▶ répartition hydrostatique des pressions et vitesses quasi uniformes.
- ▶ régime permanent (indépendant du temps)
- ▶ régime uniforme (indépendant de l'espace)

→ *Question : un régime uniforme peut-il être transitoire ?*

→ *Question : un écoulement uniforme est-il possible pour un canal non prismatique ?*

# Hypothèses

## Hypothèses

- ▶ répartition hydrostatique des pressions et vitesses quasi uniformes.
- ▶ régime permanent (indépendant du temps)
- ▶ régime uniforme (indépendant de l'espace)

→ *Question : un régime uniforme peut-il être transitoire ?*

→ *Question : un écoulement uniforme est-il possible pour un canal non prismatique ?*

En régime uniforme

Le débit et la hauteur d'eau sont identiques quels que soient le temps et la position dans le canal.

# Mise en équations

On définit un volume de contrôle (petit) de longueur  $dx$ .

Principe de conservation de la masse (équation de continuité) :

si le régime est permanent, alors pendant le laps de temps  $dt$  la masse de liquide sortant en  $x + dx$  est la même que celle entrant en  $x$ .

$$M(t, x + dx) = M(t, x)$$

$$\rho V(t, x + dx) = \rho V(t, x)$$

Et puisque le liquide est incompressible, le volume est également conservé. Or par définition du débit  $V = Qdt$

$$Q(t, x + dx) = Q(t, x)$$

**=> à retenir pour tout ce cours :**

**le débit sera identique dans tous le canal et quelque soit le temps.**

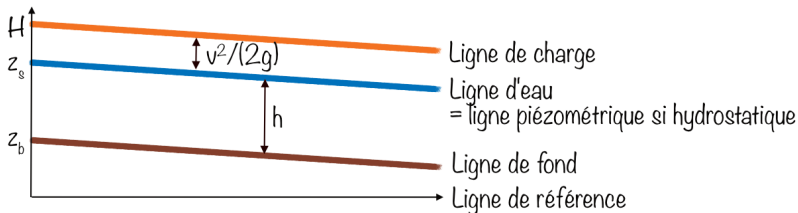
# Mise en équations

Principe de conservation de l'énergie (équation de quantité de mouvement)

Le théorème de Bernoulli généralisé pour un fluide réel s'applique ici simplement : entre les sections  $x$  et  $x + dx$ , la charge a varié de  $H(x) - H(x + dx)$ .

Reste à estimer la perte de charge  $S_f = -\partial H/\partial x$ !

Comme la hauteur est constante le long du canal par définition de l'écoulement uniforme, la section mouillée et la vitesse moyenne sont également constantes. La ligne d'eau est parallèle à la ligne de fond et puisque la vitesse est constante, la ligne de charge aussi. L'écoulement ne peut donc se faire que dans le sens de la pente.



# Lois de frottement

Hypothèses :

1. les pertes de charge régulières sont de type turbulent (donc proportionnelles au carré de la vitesse).
2. Les pertes de charge sont dues principalement au frottement sur les parois du chenal, donc proportionnelles au périmètre mouillé.

Par analogie avec l'hydraulique en charge on peut dire que  $S_f$  s'écrit

$$S_f = \frac{\lambda}{R_H} \frac{u^2}{2g} \quad (20)$$

Les deux lois les plus fréquemment utilisées sont les lois de Chezy et de Manning-Strickler. De même que pour l'hydraulique en charge, les lois de frottement en HSL sont des lois empiriques.

## Remarque

dans le cas du régime uniforme, l'écoulement ne peut se faire que dans le sens de la pente, donc on peut prendre ce sens comme convention, de manière à ce que la vitesse soit positive, sinon, il faut utiliser  $u |u|$  au lieu de  $u^2$

# Loi de frottement

Loi de Chezy :

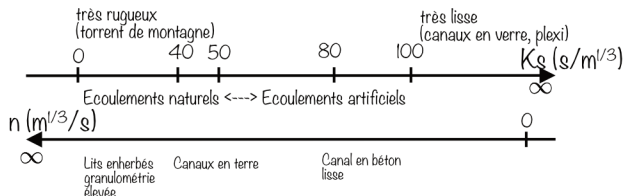
$$S_f = \frac{u^2}{C^2 R_H} = \frac{Q^2}{C^2 A^2 R_H} \quad (21)$$

où  $C$  est le coefficient de Chezy en  $m^{1/2}/s$

Loi de Manning-Strickler :

$$S_f = \frac{1}{K^2} \frac{Q^2}{A^2 R_H^{4/3}} = n_M^2 \frac{Q^2}{A^2 R_H^{4/3}} \quad (22)$$

où  $K$  est le coefficient de Strickler en  $s/m^{1/3}$  et  $n_M$  le coefficient de Manning en  $m^{1/3}/s$ .  $K$  et  $n_M$  dépendent de la rugosité du lit de la rivière/canal :



Exercice 2.1 *Pente de frottement.*

## Estimation des débits, profondeur normale

La **profondeur (ou hauteur) normale** : hauteur d'eau de l'écoulement uniforme. Les pertes de charge spécifiques par frottement compensent exactement le gain de charge spécifique par perte d'altitude. **La profondeur normale s'établit loin de toute perturbation.**

Un écoulement uniforme n'est quasiment jamais rencontré en pratique mais il est utilisé pour estimer des débits. Puisque la ligne de charge est parallèle à la celle du fond,  $S_0 = S_f$  et on peut estimer le débit simplement en remplaçant  $S_f$  par  $S_0$  dans les formules de Chézy et Manning-Strickler.

### Estimation du débit

La loi de Manning-Strickler permet d'estimer le débit en fonction de la **hauteur normale** par :

$$Q = KAR_H^{2/3} S_f^{1/2} = \frac{1}{n_M} AR_H^{2/3} S_f^{1/2} \quad (23)$$

La pente hydraulique :

- ▶ Si  $h_N > h_C$  alors l'écoulement uniforme est fluvial ;  
l'écoulement est en « **pente faible** »
- ▶ Si  $h_N < h_C$  alors l'écoulement uniforme est torrentiel et il est en « **pente rapide** »



# Débitance

La **débitance** est la quantité

$$C_v \equiv KAR_H^{2/3} = n_M^{-1}AR_H^{2/3} = CAR_H^{1/2}$$

Elle représente la capacité d'écoulement d'une section de forme et rugosité données.

## Remarque

Pour les sections voutées (qui se referme dans la partie supérieure) une augmentation de la hauteur d'écoulement peut se traduire par une réduction du rayon hydraulique (par l'intermédiaire du périmètre mouillé) et donc du débit.

Exercice 2.2 *Débitance conduite rectangulaire.*

Exercice 2.3 *Débitance conduite circulaire.*

Exercice 2.4 *Relation hauteur-débit avec Manning-Strickler.*

Exercice 2.5 *Débit de pointe en lit simple.*

## Calcul de la profondeur normale

La profondeur normale se calcule en résolvant l'équation (en supposant  $S_f = S_0$ ) :

$$Q = KAR_H^{2/3} S_0^{1/2}$$

**Cas d'un canal rectangulaire**, où  $R_H = bh/(2h + b)$ , on a donc

$$Q = Kbh_N \left( \frac{bh_N}{2h_N + b} \right)^{2/3} S_0^{1/2} \quad (24)$$

Pour résoudre, on peut utiliser un solveur ou la méthode du point fixe. On pose

$$h_N = f(h_N) = \frac{Q}{KbS_0^{1/2}} \left( \frac{2h_N + b}{bh_N} \right)^{2/3}$$

On choisit une première valeur  $h_N^{(0)}$  et on calcule la suivante par  $h_N^{(1)} = f(h_N^{(0)})$ .

**Cas d'un canal large :**

## Calcul de la profondeur normale

La profondeur normale se calcule en résolvant l'équation (en supposant  $S_f = S_0$ ) :

$$Q = KAR_H^{2/3} S_0^{1/2}$$

**Cas d'un canal rectangulaire**, où  $R_H = bh/(2h + b)$ , on a donc

$$Q = Kbh_N \left( \frac{bh_N}{2h_N + b} \right)^{2/3} S_0^{1/2} \quad (24)$$

Pour résoudre, on peut utiliser un solveur ou la méthode du point fixe. On pose

$$h_N = f(h_N) = \frac{Q}{KbS_0^{1/2}} \left( \frac{2h_N + b}{bh_N} \right)^{2/3}$$

On choisit une première valeur  $h_N^{(0)}$  et on calcule la suivante par  $h_N^{(1)} = f(h_N^{(0)})$ .

**Cas d'un canal large** : on utilise l'approximation  $R_H \simeq h$  et donc

$$Q = Kbh_N^{5/3} S_0^{1/2}$$

On en déduit explicitement  $h_N$  :

$$h_N = \left( \frac{Q}{KbS_0^{1/2}} \right)^{3/5}$$

## Sections composées

Si la section a une géométrie complexe et/ou des matériaux différents, il est difficile d'estimer un coefficient unique de rugosité.

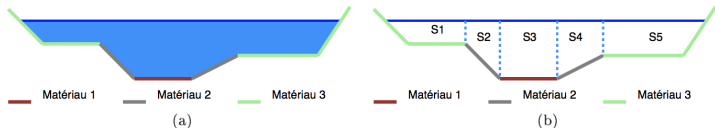
=> sous-sections  $i$  associées aux différents matériaux rencontrés de coefficient  $K_i$

+ hypothèse d'Einstein : vitesses d'écoulement identiques ( $u = u_i, \forall i$ ),

Coefficient de Strickler équivalent pour toute la section :

$$\sum_i \frac{\chi_i}{K_i^{3/2}} = \frac{\chi}{K_{eq}^{3/2}}$$

$$K_{eq}^{3/2} = \frac{\chi}{\sum_i \frac{\chi_i}{K_i^{3/2}}}$$



Exercice 2.6 *Lit composé.*

Exercice 2.7 *Grandeurs hydrauliques - chenal rectangulaire.*

Exercice 2.8 *Grandeurs hydrauliques - chenal triangulaire.*

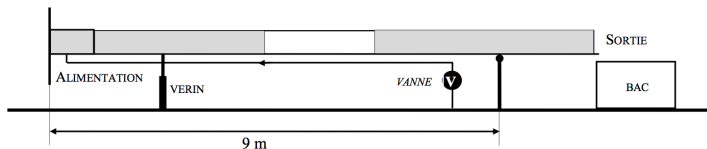
Exercice 2.9 *Programmation du calcul de  $h_N$ .*

# TP Lois de frottement

**Objectifs :** Estimer le coefficients de frottement de Manning/Strickler.

**Dispositif :** Canal de 12 cm de largeur sur une longueur de 10,5 m alimenté par un château d'eau. Inclinaison réglable par le biais d'un vérin (la règle graduée en amont du canal indique la dénivellation totale entre l'extrémité amont du canal et l'axe du pivot situé à 9 m).

*LECTURE de l'INCLINAISON*



- Protocole :**
1. Choisir une pente
  2. Pour différentes ouvertures de vanne (au moins 6) mesurer : la profondeur d'eau dans la partie transparente et le débit par mesure volumétrique au bac.
  3. Pour la même pente, répéter l'opération en mettant de la moquette au fond du canal (les débits peuvent être différents)

# TP Lois de frottement

Préparation de la feuille Excel :

1. Calculer le débit pour un canal rectangulaire en fonction du coefficient de Strickler, de la hauteur normale et des paramètres géométriques du canal (pente, largeur). *NB : fixer les différents paramètres en haut de la feuille et appliquer la formule pour des hauteurs entre 0 et 10cm.*
2. Tracer la courbe hauteur débit théorique et les points de mesures avec leurs incertitudes. Déterminer le coefficient de Strickler qui s'ajuste le mieux aux mesures.
3. Comparer les valeurs des coefficients pour les mesures réalisées avec ou sans moquette.
4. Commenter sur l'adéquation théorie/mesure en vérifiant le respect des hypothèses de la loi théorique.
5. Optionnel : Mêmes questions avec la loi de Chezy.

# Exercices

Quelques indications : n'hésitez pas à me poser des questions !

**Exercice 2.1** Pente de frottement : voir feuille excel fournie

**Exercice 2.2** Débitance conduite rectangulaire : dans la même feuille Excel que le 2.1

**Exercice 2.3** Débitance conduite circulaire : retrouver le rayon hydraulique pour une conduite circulaire (voir exercice 1.2). Dans Excel, on peut faire des colonnes  $h$ ,  $\alpha = \arccos(1 - h/R)$ ,  $A = \dots$ ,  $\chi = \dots$ ,  $R_H = A/\chi$  et enfin  $C_v$ . Tracer  $C_v(h)$  pour  $h \in [0, 2R]$ .

**Exercice 2.4** C'est ce qu'on a fait en cours : il suffit de remplacer  $S_f$  et  $R_H$  par leurs approximations selon les cas. Pour le trapézoïdal, voir exercice 1.1

**Exercice 2.5** On trouve  $Q=3.97\text{m}^3/\text{s}$  pour  $h = 1\text{m}$  et  $Q=27.8\text{m}^3/\text{s}$  pour  $h = 3\text{m}$

**Exercice 2.6** On verra après

**Exercice 2.7** Cf cours => formule à copier sur le formulaire !!

**Exercice 2.8** remplacer  $A$  et  $R_h$  par leur expression pour un triangle dans les formules

**Exercice 2.9** voir les TD d'informatique : programmer la méthode du point fixe  $h = f(h)$ .

# Régime permanent graduellement varié

Écoulement permanent.

Variations progressives dans l'espace.



## Equation de la courbe de remous (backwater curve)

S'obtient en dérivant l'équation de la charge par rapport à  $x$

$$H = z_b + h + \frac{u^2}{2g}$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx} \left( z_b + h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) \quad (25)$$

## Equation de la courbe de remous (backwater curve)

S'obtient en dérivant l'équation de la charge par rapport à  $x$

$$H = z_b + h + \frac{u^2}{2g}$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx} \left( z_b + h + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) \quad (25)$$

$$-S_f = -S_0 + \frac{dh}{dx} + \frac{Q^2}{2g} \frac{dA^{-2}}{dx} \quad (26)$$

or

$$\frac{dA^{-2}}{dx} = -2A^{-3} \frac{dA}{dx} \quad (27)$$

La section dépend, a priori, à la fois de la hauteur d'eau et de la largeur du canal.

Donc

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\partial A}{\partial b} \frac{db}{dx} + \frac{\partial A}{\partial h} \frac{dh}{dx} \quad (28)$$

## Cas d'un canal prismatique

Si le canal est prismatique, par définition

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_{h=\text{Cste}} = 0 \quad \forall h$$

et comme  $dA = b dh$ , on a  $\frac{dA}{dx} = b \frac{dh}{dx}$  ce qui donne finalement dans (25)

$$-S_f = -S_0 + \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{g} A^{-3} b \frac{dh}{dx} \quad (29)$$

On factorise par  $dh/dx$  :

$$\frac{dh}{dx} \left(1 - \frac{Q^2}{g} A^{-3} b\right) = S_0 - S_f \quad (30)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \text{Fr}^2} \quad (31)$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, mais non linéaire, puisque  $h$  intervient à la fois dans  $S_f$  et dans  $\text{Fr}$ .

*Exercice 3.1 Hauteur normale et pente nulle.*

## Cas d'un canal non prismatique

Exercice 3.2 *Ligne d'eau dans un canal venturi.*

## Cas d'un canal non prismatique

Exercice 3.2 *Ligne d'eau dans un canal venturi.*

Dans le cas d'un canal non prismatique, l'équation fait intervenir un terme supplémentaire de variation de largeur par rapport à  $x$ , par exemple pour un canal rectangulaire (tel que le canal venturi) on a :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S_f + Fr^2 \frac{h}{b} \frac{db}{dx}}{1 - Fr^2} \quad (32)$$

## Allure des lignes d'eau

Etude de la fonction  $f(h) = \frac{dh}{dx}$

- ▶ Si  $h = h_N$  alors  $S_0 = S_f$  et

$$\frac{dh}{dx} = 0$$

la hauteur ne varie plus, la surface libre est parallèle au fond (valide pour un canal prismatique seulement).

- ▶ Si  $h = h_c$  alors  $Fr = 1$  et

$$\frac{dh}{dx} = \pm\infty$$

la surface libre est verticale.

## En pente faible ( $h_c < h_N$ )

On étudie le signe de la dérivée  $dh/dx$  pour connaître l'allure de  $h$  en fonction de  $x$ .  
 Si  $h = h_N$  alors  $S_f = S_0$ . Si  $h$  augmente, alors  $S_f$  diminue (voir l'exercice  $S_f(h)$ )  $\Rightarrow$   
 $S_f < S_0$  et inversement.

$h$	0	$h_c$	$h_N$	$H_S$
$S_0 - S_f$	-	-	0	+
$1 - Fr^2$	-	0	+	+
$\frac{dh}{dx}$	+	-	0	+

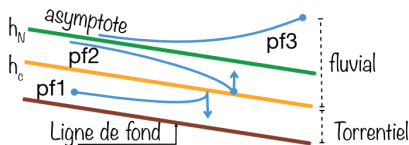
On peut étudier l'évolution de  $x$  en fonction de  $h$ , pour savoir si  $h$  augmente ou diminue lorsque l'on va vers l'amont ou l'aval. On obtiendra alors l'allure des lignes d'eau.

$h$	0	$h_c$	$h_N$	$H_S$
$\frac{dh}{dx}$	+	-	0	+
$\frac{dx}{dh}$	+	0	-	+
$x$	AM	AV	AV	AM

Diagram illustrating the evolution of  $x$  in function of  $h$ . The diagram shows the flow direction (AM for Amont, AV for Aval) relative to the critical depth  $h_c$  and normal depth  $h_N$ . Arrows indicate that  $x$  increases (AM) as  $h$  increases from 0 to  $h_c$ , and decreases (AV) as  $h$  increases from  $h_c$  to  $h_N$ . From  $h_N$  to  $H_S$ ,  $x$  increases (AM).

## En pente faible ( $hc < h_N$ )

$h$	0	$h_c$	$h_N$	$H_S$
$\frac{dh}{dx}$	+	-	0	+
$\frac{dx}{dh}$	+	0	-	+
$x$	AM	AV	AV	AM



On obtient donc 3 courbes possibles ; certains auteurs les appellent pf pour pente faible :

- ▶ pf1 : en régime torrentiel, la ligne d'eau est sous  $h_c$
- ▶ pf2 : en régime fluvial, la ligne d'eau est sous  $h_N$
- ▶ pf3 : en régime fluvial, la ligne d'eau est supérieure à  $h_N$

L'obtention d'une ou l'autre de ces 3 courbes dépend des conditions de l'écoulement. En régime fluvial, c'est la condition aval qui impose la valeur de  $h$  (au-dessous ou au-dessus de  $h_N$ ).

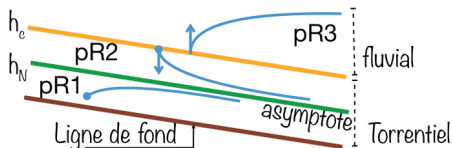
**Attention** : au voisinage d'un point d'arrêt, les équations ne sont plus valables car l'hypothèse de répartition hydrostatique des pressions n'est plus valable.



## En pente rapide ( $hc > h_N$ )

Le principe est le même sauf que  $h_c$  et  $h_N$  sont inversés dans le tableau de variation.

$h$	0	$h_N$	$h_c$	$H_S$		
$\frac{dh}{dx}$		+	0	-	+	
$\frac{d^2h}{dx^2}$		+	-	0	+	
$x$	AM	AV	AV	AM	AM	AV



On obtient donc 3 courbes possibles ; certains auteurs les appellent pR pour pente Rapide :

- ▶ pR1 : en régime torrentiel, avec  $h < h_N$
- ▶ pR2 : en régime torrentiel avec  $h > h_N$  mais toujours  $< h_c$
- ▶ pR3 : en régime fluvial donc  $h > h_c$

Exercice 3.3 Tracés de lignes d'eau.

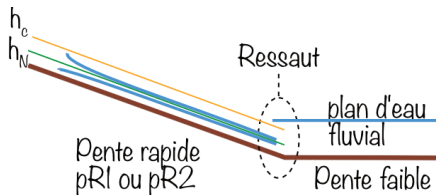
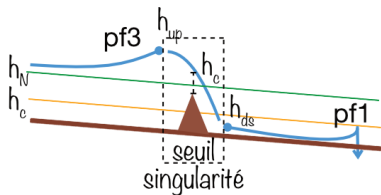
# Section de contrôle

**Section de contrôle** : Sections où une condition à la limite peut être exprimée.

**Bief** : Partie de la rivière/du canal sur laquelle les caractéristiques sont uniformes (pente, rugosité, géométrie)

## Exemple : seuil

un seuil est une triple section de contrôle car il impose une condition fluviatile avant le seuil, torrentielle après et avec un passage en critique au-dessus. Sachant que  $h_c$  est au-dessus du seuil et en faisant des hypothèses sur la perte de charge au passage du seuil, on peut calculer : la hauteur en amont du seuil (upstream) :  $h_{up} > h_c + P$  où  $P$  est la hauteur de pelle (hauteur du seuil) et en aval du seuil (downstream) :  $h_{ds} < h_c$ .



$h_N$  à l'infini (ou  $h$  imposé par un seuil)  $\Rightarrow$  ressaut.

Une ligne d'eau doit être tracée par biefs. Pour chaque bief, il faut pouvoir identifier si on est en pf ou pR, donc pouvoir calculer  $h_c$  et  $h_N$ .

## Résolution de la courbe de remous

On a

$$\frac{dh}{dx} = f(h) = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \quad (33)$$

Pour intégrer il faut utiliser la séparation des variables

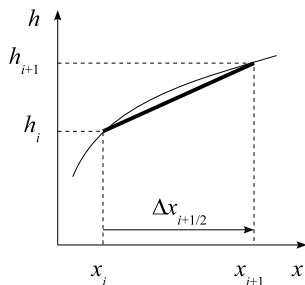
$$dx = \frac{1}{f(h)} dh = \frac{1 - Fr^2}{S_0 - S_f} dh \quad (34)$$

qui n'est pas plus facile à intégrer... On utilise donc une approximation numérique.

## Rappel : définition de la dérivée

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

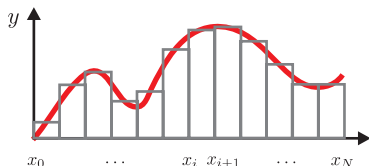
on utilise cette définition mais sans la limite. On appelle cette approximation, différences finies.



$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

## Rappel : intégrale de Riemann

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta x_i f(\xi_i) \quad (35)$$



où  $(x_0, \dots, x_i, \dots, x_N)$  est une subdivision de l'intervalle  $[a; b]$  avec  $a = x_0$ ,  $b = x_N$ ,  $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i)$  et  $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ . L'intégrale est approchée en utilisant des valeurs finies de  $\Delta x_i$  et en choisissant  $\xi_i$  généralement à gauche de l'intervalle  $[x_i; x_{i+1}]$ . On utilise cette définition, mais sans la limite.

**Méthode des rectangles à gauche :**  $\xi_i = x_i$  donc

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq (x_{i+1} - x_i)f(x_i)$$

## Résolution numérique de la courbe de remous

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{1}{f(h)} dh \quad (36)$$

$$(x_{i+1} - x_i) \simeq \frac{1}{f(h_i)} (h_{i+1} - h_i) \quad (37)$$

On peut donc écrire :

$$h_{i+1} = h_i + (x_{i+1} - x_i) f(h_i) \quad (38)$$

Pour calculer tous les  $h(x)$  il faut connaître la condition à la limite  $(x_0, y_0)$ .

On peut également vouloir fixer le  $\Delta h$  et calculer les  $x$  correspondants, on aura donc :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{f(x_i)} \Delta h_i \quad (39)$$

La formule (38) est conseillée pour des faibles valeurs de  $\frac{dh}{dx}$ , la formule (39) est plutôt conseillée au voisinage de  $h_c$ .

# Résolution numérique de la courbe de remous

## Remarque

Il existe d'autres méthodes numériques plus précises pour approcher l'intégrale mais qui peuvent faire appel au point  $h_{i+1}$ , donc plus complexes à résoudre.

**Attention :** pour des raisons de convergence numérique, la formule (38) doit toujours être appliquée :

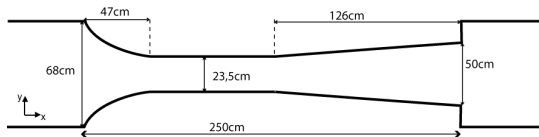
1. de l'aval vers l'amont lorsque le régime est fluvial
2. de l'amont vers l'aval lorsque le régime est torrentiel

Exercice 3.4 *Courbe de remous sur Excel.*

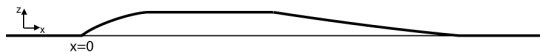
# TP Ligne d'eau dans un canal venturi

**Objectif :** Tracé de la ligne d'eau dans un canal venturi.

**Dispositif :** Le Venturi (voir dimensions ci-dessous) est dans le canal de régulation extérieur qui permet d'imposer un débit grâce à un module à masques (de 5l/s à 60l/s par pas de 5l/s  $\pm$  5%).



vue de dessus :



vue de profil :

Les variations de cote et largeur sont considérées linéaires (on pourra modéliser largeur à l'amont par une équation de degré 2). Les cotes du fond à l'amont et à l'aval sont identiques et la différence de cote au niveau du col du venturi est d'environ 6cm.

**Protocole :** Pour un débit choisi, calculer la ligne d'eau théorique et la comparer aux valeurs mesurées tous les 10 cm.



# Exercices

Quelques indications : n'hésitez pas à me poser des questions !

**Exercice 3.1** la hauteur normale tend vers l'infini si  $S_0 \rightarrow 0$ . Pour s'en convaincre, on peut faire un calcul sur Excel et faire diminuer  $S_0$  pour voir  $h_N$  augmenter.

**Exercice 3.2**

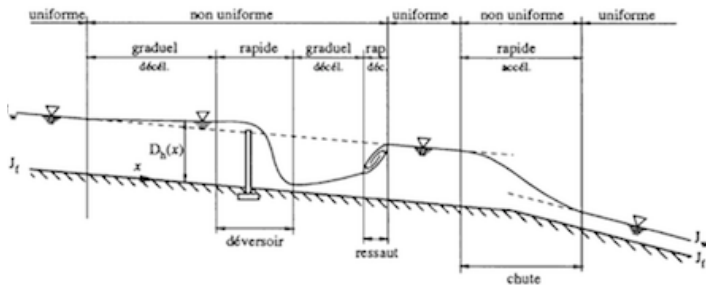
1. c'est la dérivée d'une fonction produit :  $A = h \cdot b$ . La courbe de remous est dans le cours (equation 32)
2. prendre  $S_0 = 0$  et  $S_f = 0$  et regarder l'influence d'une augmentation de  $b$  sur la valeur de  $h$  si on est en fluvial
3. idem en torrentiel
4. le passage par le point critique se fait pour  $Fr=1 \Rightarrow$  division par 0, donc si on veut pas que ça "explose" il faut...

**Exercice 3.3** voir les cas traités en cours et s'aider des deux graphiques des lignes d'eau en pentes forte et faible

**Exercice 3.4** fait ensemble.

# Régime rapidement varié / discontinuité

# Différents régimes d'écoulement



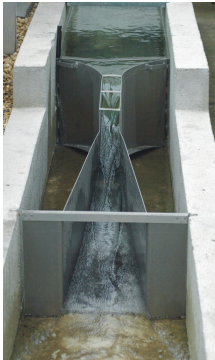
d'après [http://engees.unistra.fr/fileadmin/user\\_upload/pdf/shu/cours\\_HSL\\_FI\\_2006.pdf](http://engees.unistra.fr/fileadmin/user_upload/pdf/shu/cours_HSL_FI_2006.pdf)

On considère toujours un régime permanent ( $Q$  constant).

**Régime rapidement varié** zones où le régime graduellement varié ne s'applique pas. Il y a une forte courbure de la surface libre. Variation rapide d'une ou plusieurs variables en fonction de  $x$  ( $S_0, h, b, \chi \dots$ ). Dans ces zones, les hypothèses de vitesses uniforme et pressions hydrostatiques ne sont plus valables.

# Passage fluvial → torrentiel : mesure de débit

Par venturi :



Par déversoir :



Exercice 4.1 *Variation de topographie.*

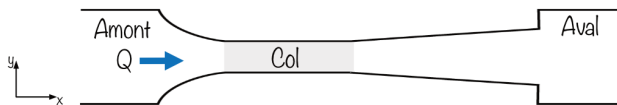
Exercice 4.2 *Passage d'un seuil.*

## Mesure de débit par venturi



**Hypothèse :** pertes de charge négligeables entre l'amont et le col  $H_{\text{am}} = H_{\text{col}}$ .

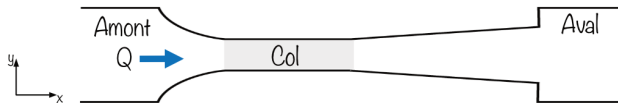
## Mesure de débit par venturi



**Hypothèse :** pertes de charge négligeables entre l'amont et le col  $H_{\text{am}} = H_{\text{col}}$ .

$$h_{\text{am}} + z_{\text{bam}} + \frac{Q^2}{2gb_{\text{am}}^2 h_{\text{am}}^2} = h_{\text{col}} + z_{\text{bcol}} + \frac{Q^2}{2gb_{\text{col}}^2 h_{\text{col}}^2} \quad (40)$$

## Mesure de débit par venturi



**Hypothèse :** pertes de charge négligeables entre l'amont et le col  $H_{\text{am}} = H_{\text{col}}$ .

$$h_{\text{am}} + z_{\text{bam}} + \frac{Q^2}{2gb_{\text{am}}^2 h_{\text{am}}^2} = h_{\text{col}} + z_{\text{bcol}} + \frac{Q^2}{2gb_{\text{col}}^2 h_{\text{col}}^2} \quad (40)$$

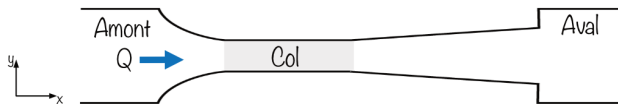
or le passage en critique est dans le col ( $h_{\text{col}} = h_c$ ) et

$$\text{Fr}^2 = 1 \Rightarrow Q^2 = gb_{\text{col}}^2 h_c^3 \quad (41)$$

donc :

$$H_{\text{col}} = z_{\text{bcol}} + \frac{3h_c}{2} \quad (42)$$

## Mesure de débit par venturi



**Hypothèse :** pertes de charge négligeables entre l'amont et le col  $H_{\text{am}} = H_{\text{col}}$ .

$$h_{\text{am}} + z_{\text{bam}} + \frac{Q^2}{2gb_{\text{am}}^2 h_{\text{am}}^2} = h_{\text{col}} + z_{\text{bcol}} + \frac{Q^2}{2gb_{\text{col}}^2 h_{\text{col}}^2} \quad (40)$$

or le passage en critique est dans le col ( $h_{\text{col}} = h_c$ ) et

$$\text{Fr}^2 = 1 \Rightarrow Q^2 = gb_{\text{col}}^2 h_c^3 \quad (41)$$

donc :

$$H_{\text{col}} = z_{\text{bcol}} + \frac{3h_c}{2} \quad (42)$$

Terme cinétique amont négligeable par rapport à celui aval. On a finalement :

$$Q = \left( \frac{2}{3} (h_{\text{am}} + z_{\text{bam}} - z_{\text{bcol}}) \right)^{3/2} g^{1/2} b_{\text{col}} \quad (43)$$

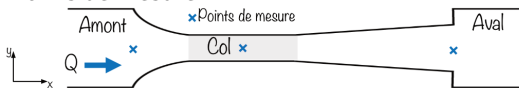


# TP Mesure de débit par venturi

**Objectif :** Déterminer la relation entre le débit et la hauteur d'eau à l'amont du venturi.

**Dispositif :** Le Venturi est positionné dans le canal de régulation extérieur qui permet d'imposer un débit grâce à un module à masques (de 5l/s à 60l/s par pas de 5l/s  $\pm$  5%).

**vue de dessus :** Points de mesure



**Protocole :** pour chaque débit, mesurer la hauteur d'eau à l'amont, au col et à l'aval du venturi.

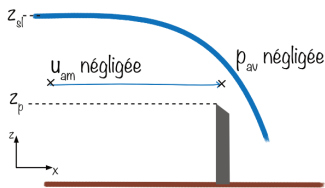
**Analyse :** Tracer les charges à l'amont au col et à l'aval avec leurs incertitudes  
Comparer la relation théorique démontrée précédemment aux valeurs mesurées en justifiant les hypothèses simplificatrices utilisées.

# Mesure de débit par déversoir

**Principe :** Bernoulli (égalité des charges) entre l'amont et le déversoir

**Hypothèses :** vitesse à l'amont et pression au niveau du déversoir négligeables.  
Courbure de la ligne d'eau négligeable.

Entre 2 points de même altitude  $z$  :



$$H_{\text{am}} = H_{\text{av}} \Rightarrow \frac{p_{\text{am}}(z)}{\rho g} = \frac{u_{\text{av}}^2(z)}{2g}$$

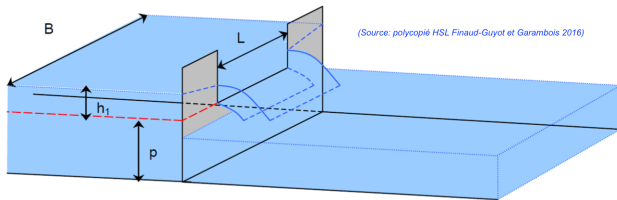
avec  $p(z) = \rho g(z_{\text{sl}} - z)$ . Soit

$$u_{\text{av}}(z) = \sqrt{2g(z_{\text{sl}} - z)} \quad (44)$$

On en déduit le débit par intégration entre la hauteur de pelle du déversoir  $z_p$  et la cote de surface libre (un coefficient de débit  $m$  est utilisé pour tenir compte des approximations) :

$$Q = m \int_{z_p}^{z_{\text{sl}}} u(z)b(z)dz = m \int_{z_p}^{z_{\text{sl}}} \sqrt{2g(z_{\text{sl}} - z)}b(z)dz \quad (45)$$

## Cas du déversoir rectangulaire



Dans ce cas,  $b(z)$  est constant, et l'équation

$$Q = m \int_{z_p}^{z_{s1}} \sqrt{2g(z_{s1} - z)} b(z) dz \quad (46)$$

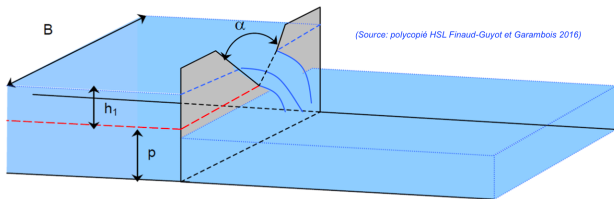
devient

$$Q = mb\sqrt{2g} \int_{z_p}^{z_{s1}} (z_{s1} - z)^{1/2} dz \quad (47)$$

$$Q = -mb\sqrt{2g} \left[ \frac{2}{3} (z_{s1} - z)^{3/2} \right]_{z_p}^{z_{s1}} = mb\sqrt{2g} \frac{2}{3} (z_{s1} - z_p)^{3/2} \quad (48)$$

$$Q = \alpha h^{3/2} \quad (49)$$

## Cas du déversoir triangulaire



Dans ce cas,  $b(z)$  est linéaire en fonction de  $z$  :  $b(z) = a(z - z_p)$  et l'équation (45) devient

$$Q = m\sqrt{2g} \int_{z_p}^{z_{sl}} (z_{sl} - z)^{1/2} a(z - z_p) dz \quad (50)$$

Une intégration par partie avec  $u' = (z_{sl} - z)^{1/2}$  et  $v = (z - z_p)$  donne :

$$Q = ma\sqrt{2g} \frac{5}{3} (z_{sl} - z_p)^{5/2} \quad (51)$$

$$Q = \alpha h^{5/2} \quad (52)$$

## Cas du déversoir linéaire ou proportionnel



La forme du déversoir est déterminée en puissance  $^{-1/2}$  de façon à ce que la relation  $Q(h)$  soit linéaire.

$$Q = \alpha h \quad (53)$$

Exercice 4.4 *Lois de déversoir.*

### Remarque

Les puissances des lois de déversoir peuvent être démontrées lors de l'intégration du champ des vitesses, ou déterminées par une analyse aux dimensions.

## TP Mesure de débit par déversoir

- Objectif :** Etablir les lois de débit des déversoirs classiquement utilisés en hydrométrie (déversoirs rectangulaires, triangulaires, proportionnels) et évaluer la validité de ces formules.
- Dispositif :** Le déversoir étudié se place à l'aval du bief d'essais dans le canal extérieur (voir photo précédente)
- Protocole :**
- régler un débit à l'aide des modules à masque (attendre quelques minutes le régime permanent)
  - Relever la hauteur d'eau en amont du déversoir
  - Répéter l'opération pour au moins 6 débits
- Analyse :** Vérifier la validité des lois de déversoir classiques, démontrées en exercice et qui sont du type

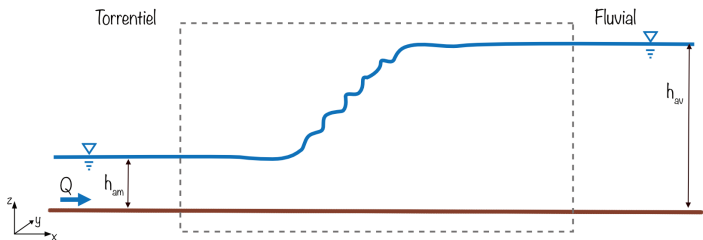
$$Q = ah^b$$

où  $h$  est la hauteur d'eau au-dessus de la hauteur de pelle du déversoir,  $a$  est une constante de proportionnalité à déterminer et  $b$  est l'exposant de la loi de déversoir qui prend les valeurs : 1 (proportionnel), 3/2 (rectangulaire), 5/2 (triangulaire).

## Passage torrentiel → fluvial : ressaut hydraulique

**Ressaut hydraulique** : apparaît lorsqu'il y a un passage du régime torrentiel au régime fluvial.

La longueur du ressaut est de l'ordre de quelques fois la profondeur seulement (transition rapide).



## Ressaut hydraulique : Mise en équation

Le principe de conservation de l'énergie ne peut pas être utilisé car la perte de charge dans le ressaut n'est pas connue.

→ Théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement), pour un volume de fluide  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \Sigma (F_{\Omega}^{\vec{}} + F_{\Gamma}^{\vec{}}) \quad (54)$$

**Terme 1 :** variation de quantité de mouvement  $\rho \vec{u}$  dans le volume de contrôle

**Terme 2 :** débit de quantité de mouvement à travers la frontière  $\Gamma$  avec  $\vec{n}$  le vecteur unitaire orienté à l'extérieur de  $\Gamma$  (la QdM  $\rho \vec{u}$  est transportée à la vitesse  $\vec{u}$ )

**Terme 3 :**  $F_{\Omega}^{\vec{}}$  et  $F_{\Gamma}^{\vec{}}$  sont les forces volumiques et surfaciques appliquées au volume considéré :



## Ressaut hydraulique : Mise en équation

Le principe de conservation de l'énergie ne peut pas être utilisé car la perte de charge dans le ressaut n'est pas connue.

→ Théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement), pour un volume de fluide  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \Sigma (F_{\Omega}^{\vec{}} + F_{\Gamma}^{\vec{}}) \quad (54)$$

**Terme 1 :** variation de quantité de mouvement  $\rho \vec{u}$  dans le volume de contrôle

**Terme 2 :** débit de quantité de mouvement à travers la frontière  $\Gamma$  avec  $\vec{n}$  le vecteur unitaire orienté à l'extérieur de  $\Gamma$  (la QdM  $\rho \vec{u}$  est transportée à la vitesse  $\vec{u}$ )

**Terme 3 :**  $F_{\Omega}^{\vec{}}$  et  $F_{\Gamma}^{\vec{}}$  sont les forces volumiques et surfaciques appliquées au volume considéré :

- ▶ 1 force de volume : le poids de  $\Omega$  ( $\rho \vec{g} \Omega$ )
- ▶ 2 forces de surface : la pression (perpendiculaire à la surface), le frottement (parallèle à la surface)

## Hypothèses et simplifications

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \Sigma \vec{F}_{\Omega} + \vec{F}_{\Gamma} \quad (54)$$

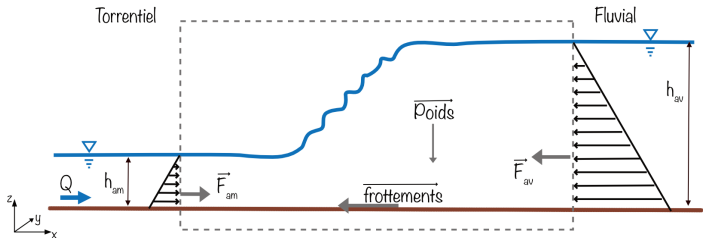
## Hypothèses et simplifications

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \Sigma \vec{F}_{\Omega} + \vec{F}_{\Gamma} \quad (54)$$

- ▶ La dérivée par rapport au temps est nulle car on est en régime permanent.
- ▶ En 1D, la frontière  $\Gamma$  est constituée des deux sections  $S_1$  et  $S_2$ .
- ▶ Si on considère un régime rapidement varié, on s'intéresse à de faibles longueurs, donc on peut négliger les forces de frottements (et donc les PdC linaires)
- ▶ L'effet de la pente est faible et la différence de cote entre l'amont et l'aval du ressaut peut être négligé ( $z_{fam} \simeq z_{fav}$ )
- ▶ Si l'effet de la pente est négligé, on suppose que les vitesses sont colinéaires et horizontales  $\Rightarrow \vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  selon l'axe  $Ox$  et que le poids est selon  $Oz$ .
- ▶ La pression à la surface est nulle (pression relative). Les forces de pressions s'appliquent au fond, sur les parois (résultante sur  $Oz$ ) et sur les sections amont et aval.

## Projection sur l'axe des abscisses

$$\int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \Sigma (F_{\Omega}^{\vec{}} + F_{\Gamma}^{\vec{}}) \quad (55)$$



L'intégrale sur  $\Gamma$  devient :

$$\int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \rho \int_{\Gamma} \vec{u} (u_{av} - u_{am}) d\Gamma = \rho (u_{av} - u_{am}) \int_{\Gamma} \vec{u} d\Gamma = \rho (u_{av} - u_{am}) Q \vec{e}_x \quad (56)$$

Le poids disparaît et il ne reste que la pression sur la frontière.

$$\Sigma F_{\Gamma}^{\vec{}} = (F_{am} - F_{av}) \vec{e}_x \quad (57)$$

## Relation de conjugaison

En remettant (57) et (56) dans (55) on obtient :

$$\rho Q(u_2 - u_1) = (F_{\text{am}} - F_{\text{av}}) \quad (58)$$

$$\rho Q \left( \frac{Q}{A_{\text{av}}} - \frac{Q}{A_{\text{am}}} \right) = \rho g h_{G_{\text{am}}} A_{\text{am}} - \rho g h_{G_{\text{av}}} A_{\text{av}} \quad (59)$$

**Relation de conjugaison** : au passage du ressaut, entre un point à l'amont et un point à l'aval, la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{Q^2}{A_{\text{av}}} + g h_{G_{\text{av}}} A_{\text{av}} = \frac{Q^2}{A_{\text{am}}} + g h_{\text{am}} A_{\text{am}}$$

**Impulsion** : quantité conservée au passage du ressaut

$$\mathcal{M} = \frac{Q^2}{A} + g h_G A$$

### Attention

Cette relation est une approximation : effets de la pente et des frottements négligés, répartition des pressions hydrostatique.

Le ressaut créé une perte de charge singulière (cf TP : difficile à mesurer à cause des remous et incertitudes de mesures). On peut l'estimer graphiquement à partir des courbes d'impulsion et de charge spécifique.

## Cas d'un canal rectangulaire

Dans le cas d'un canal rectangulaire, la section s'écrit  $A = bh$ . L'impulsion devient donc :

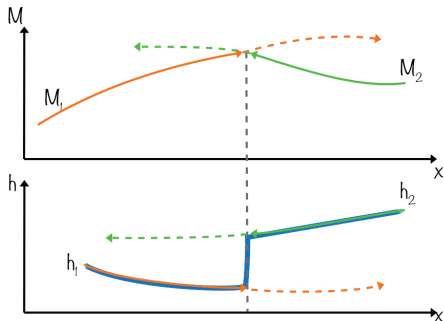
$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{Q^2}{bh} + g\frac{h}{2}bh \\ &= \frac{Q^2}{b} \frac{1}{h} + \frac{gb}{2}h^2\end{aligned}$$

Pour une valeur d'impulsion, il existe donc 2 valeurs de profondeur,  $h_{am}$  et  $h_{av}$  du ressaut. Si on en connaît une, on peut calculer l'impulsion et en déduire l'autre, puisque l'impulsion est conservée au passage du ressaut. Ces profondeurs sont appelées conjuguées.

## Localisation d'un ressaut hydraulique

Une méthode possible pour trouver la localisation d'un ressaut est la suivante

1. Résoudre la partie torrentielle du profil en partant de l'amont. Tracer  $h_1(x)$  sur un premier graphique et  $\mathcal{M}_1(x)$  sur un deuxième.
2. Résoudre la partie fluviale du profil en partant de l'aval. Tracer  $h_2(x)$  sur le premier graphique et  $\mathcal{M}_2(x)$  sur le deuxième.
3. La position  $x_R$  du ressaut est le point où les courbes  $\mathcal{M}_1(x)$  et  $\mathcal{M}_2(x)$  se croisent.
4. La courbe de remous finale est donnée par  $h_1(x)$  si  $x < x_R$  et  $h_2(x)$  si  $x > x_R$ .



# Longueur du ressaut

Il existe plusieurs évaluations de la longueur du ressaut dans la littérature

$$5h_{av} < L < 6h_{av}$$

Les ressauts sont classés en

- ▶ ondulé :  $Fr_{am} < 1.3$ ,
- ▶ faible :  $Fr_{am} < 2$ ,
- ▶ calme :  $2 < Fr_{am} < 3$ ,
- ▶ violent :  $Fr_{am} > 3$ .

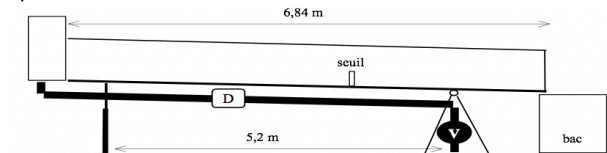
Exercice 4.5 *Position du ressaut.*



## TP écoulement rapidement varié

**Objectif :** Etude des écoulements rapidement variés : présence de singularité (seuil) et de discontinuité hydraulique (ressaut)

**Dispositif :** canal de section rectangulaire, de longueur 6,84 m, largeur de 28 cm et profondeur 50 cm. Le vérin hydraulique permet de faire varier la pente  $S_0$  du canal. La distance échelle de lecture – axe de rotation est de 5,2 m. Un seuil d'une hauteur de 17 cm et d'une épaisseur de 6,5 cm environ est installé à 4,08 m.



Le canal est alimenté par un groupe de pompage ; le débit  $Q$  se règle en agissant sur la vanne d'alimentation V. A l'extrémité aval, un bac récupère l'eau et l'évacue. Trente-quatre prises de pression permettent de relever la ligne piézométrique dans le canal.

## TP écoulement rapidement varié

**Protocole :** Placer le seuil, choisir une pente (plutôt faible) et une ouverture de vanne (plutôt importante).  
Fermer partiellement les clapets à l'aval du canal de manière à obtenir un ressaut hydraulique dont la position reste stable le temps des mesures.  
Pour chacune des abscisses des prises de pression, relever la hauteur d'eau, et la hauteur dans le piézomètre correspondant.

### Analyses :

1. Comparer la ligne d'eau et la ligne piézométrique mesurées. Vérifier l'hypothèse de régime hydrostatique le long du canal.
2. Calculer la perte de charge au passage du ressaut à partir des mesures.
3. Calculer la ligne d'eau théorique et déterminer la position théorique du ressaut. Commenter sur l'influence relative des différents paramètres sur la position du ressaut (pente, débit, coefficient de frottement...).

## Chapitre 5

d'après V. Guinot, Polytech'Montpellier - STE/EGC - 2016

# Régime transitoire : équations de Saint-Venant

# Hypothèses

Les équations de Saint-Venant utilisent les mêmes hypothèses fondamentales que celles du régime graduellement varié :

- ▶ fluide (eau) incompressible dans la gamme de pressions considérée,
- ▶ accélérations verticales négligeables, entraînant une distribution de pression hydrostatique,
- ▶ uniformité des vitesses sur la section droite,
- ▶ pente du fond faible,
- ▶ lois de perte de charge de type turbulent (Chezy/Manning/Strickler).

## Forme conservative

Cette forme des équations est basée sur les principes de conservation de la masse (première équation) et de conservation de la quantité de mouvement (2ième équation).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{s} \quad (60)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} Q \\ \mathcal{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A + gh_G A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ Q^2/A + P/\rho \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ (S_0 - S_f) g A \end{bmatrix}$$

$h$  hauteur d'eau,  $u$  est la vitesse,  $S_0$  pente du fond,  $S_f$  pente de frottement.

## Conservation de la masse

Entre les temps  $t$  et  $t + dt$ , le volume d'eau  $Q(x, t)dt$  entre dans le volume de contrôle en  $x$  avec la vitesse  $u$  et le volume  $Q(x + dx, t)dt$  quitte le volume de contrôle en  $(x + dx)$ . Si aucune entrée (pluie) ou sortie (infiltration) n'est prise en compte, le volume d'eau au temps  $t + dt$  est donc :

$$A(x, t + dt)dx = A(x, t)dx + Q(x, t)dt - Q(x + dx, t)dt$$

en divisant par  $dxdt$  et en appliquant la limite pour des petites valeurs de  $dx$  et  $dt$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

## Conservation de la quantité de mouvement

L'équation d'Euler a été utilisée au chapitre précédent pour l'étude d'un ressaut en régime permanent. Elle reste inchangée sauf que l'intégrale en temps n'est plus nulle :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\Gamma = \Sigma \vec{F}_{\Omega} + \vec{F}_{\Gamma}$$

Sur le volume de contrôle  $\Omega = A dx$ , si la vitesse est uniforme sur la section

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \rho \int_x u A dx = \rho \frac{\partial}{\partial t} Q$$

d'où le terme en  $\frac{\partial}{\partial t} Q$  dans l'équation. De même, on ne néglige plus la pente du fond et les frottements, d'où le  $(S_0 - S_f) g A$  en second membre.

## Forme non-conservative

On élimine le flux  $\mathbf{f}$  de l'équation en faisant apparaître sa matrice Jacobienne par rapport à  $\mathbf{u}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{s} \quad (61a)$$

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (61b)$$

avec

$$c^2 \equiv \frac{\partial \left( \frac{p}{\rho} \right)}{\partial A} = \frac{gA}{b} \quad (61c)$$

Dans le cas particulier du chenal rectangulaire, on retrouve :

$$c = (gh)^{1/2} \quad (62)$$



## Forme caractéristique

Elle s'obtient en diagonalisant le système d'équations de manière à obtenir un système d'EDO indépendantes :

$$\frac{dW_p}{dt} = s_p'' \text{ pour } \frac{dx}{dt} = \lambda_p \quad (63a)$$

$$d\mathbf{W} \equiv \mathbf{K}^{-1} d\mathbf{u} \quad (63b)$$

$$\mathbf{s}'' \equiv \mathbf{K}^{-1} \mathbf{s} \quad (63c)$$

où les  $\lambda_p$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  et où  $\mathbf{K}$  est la matrice des vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ .

Les  $W_p$  ( $p = 1, 2$ ) sont les invariants de Riemann.

Dans le cas particulier du chenal rectangulaire, on a :

$$\lambda_1 = u - c, \lambda_2 = u + c, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} u - 2c \\ u + 2c \end{bmatrix}, \mathbf{s}'' = \begin{bmatrix} (S_0 - S_f)g \\ (S_0 - S_f)g \end{bmatrix} \quad (64)$$

## Solutions discontinues

Les relations de saut (dites aussi de Rankine-Hugoniot) s'appliquent de part et d'autre d'une discontinuité (ressaut hydraulique) se déplaçant à une vitesse  $c_s$  :

$$\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) c_s \quad (65)$$

où les indices 1 et 2 désignent respectivement les valeurs à gauche et à droite de la discontinuité. Pour les équations de Saint-Venant, on obtient :

$$Q_2 - Q_1 = (A_2 - A_1) c_s \quad (66a)$$

$$M_2 - M_1 = (Q_2 - Q_1) c_s = (A_2 - A_1) c_s^2 \quad (66b)$$

### Remarque

On retrouve comme cas particulier de ces formules l'égalité des impulsions au travers d'un ressaut immobile.

## Forme simplifiée 1 : équation de l'onde diffusive

On considère que les termes d'inertie  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  et  $u \frac{\partial Q}{\partial x}$  peuvent être négligés dans l'équation de quantité de mouvement. L'équation de continuité est inchangée.

### Important

Cette simplification n'est légitime que pour des écoulements variant lentement dans le temps, avec des vitesses d'écoulement faibles ( $Fr < 1$ ).

En reportant les simplifications ci-dessus dans la forme non-conservative de l'équation de quantité de mouvement, on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial x} = S_0 - S_f \quad (67a)$$

Il s'agit de l'équation de la courbe de remous sous l'approximation d'un nombre de Froude très petit. En la combinant avec l'équation de continuité, on obtient une équation du type :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + V \frac{\partial Q}{\partial x} - D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (68)$$

l'hydrogramme se déplace vers l'aval à la vitesse  $V$  et s'étale en s'aplatissant sous l'effet du coefficient de diffusion  $D$ .

## Forme simplifiée 2 : onde cinématique

Cette simplification est encore plus forte que celle de l'onde diffusive : en plus de l'hypothèse de termes  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  et  $u \frac{\partial Q}{\partial x}$  négligeables dans l'équation de quantité de mouvement, on considère que la pente du fond est très importante et/ou que les profondeurs d'écoulement sont très faibles. Alors  $\frac{\partial h}{\partial x} \ll S_0$  et le régime est uniforme car  $S_0 = S_f$ . On a donc

$$Q = K S_0^{1/2} A R_H^{2/3} = Q(K, S_0, A) \quad (69)$$

Et l'équation de continuité devient

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q(A)}{\partial x} = 0 \quad (70)$$

Cette équation admet la forme non conservative suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \lambda \frac{\partial A}{\partial x} = S; \quad \lambda \equiv \frac{\partial Q}{\partial A}; \quad S \equiv - \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{A=Const} \quad (71)$$

Exercice 5.1 *Onde cinématique.*

# Résolution numérique : ce qui est fait dans les logiciels du commerce

La plupart des logiciels utilisent :

- ▶ une résolution implicite : les termes au temps  $t + dt$  sont calculés à partir des variables au même temps  $t + dt$  (donc inconnues). Ce qui conduit à des solutions plus stables (parfois au dépend de la précision).
- ▶ la forme non conservative des équations, car elle est plus simple à résoudre avec des méthodes implicites.
- ▶ des « techniques » consistant à supprimer certains termes de l'équation de QdM qui tendent à introduire des instabilités surtout proche des conditions critiques.
- ▶ d'autres « techniques » pour gérer les instabilités dues aux font secs (fente d'Abott) ou sections pleines (fente de Preissman) quand  $b = 0$  (et donc  $c = \sqrt{\frac{gA}{b}}$  devient infinie)