



HAL
open science

LES TRANSFORMATIONS AGREABLES ET UNE NOUVELLE CLASSE DE NOMBRES NARCISSIQUES PARFAITS

Rene-Louis Clerc

► **To cite this version:**

Rene-Louis Clerc. LES TRANSFORMATIONS AGREABLES ET UNE NOUVELLE CLASSE DE NOMBRES NARCISSIQUES PARFAITS. 2022. hal-03619147v2

HAL Id: hal-03619147

<https://hal.science/hal-03619147v2>

Preprint submitted on 1 Apr 2022 (v2), last revised 12 Jul 2023 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES TRANSFORMATIONS AGREABLES ET UNE NOUVELLE CLASSE DE NOMBRES NARCISSIQUES PARFAITS

René-Louis Clerc (24/03/2022) ([*](#))

ABSTRACT

Number theory (discrete iteration)

PLEASANT TRANSFORMATIONS AND A NEW CLASS OF NARCISSISTIC PERFECT NUMBERS.

This paper is situated between recreational mathematics on integers and iteration in \mathbb{N} of discrete dynamical systems. We resume and specify here the notion of pleasant transformation that we had initially defined in ([9], [11]); the simplest of these applications are easily attached to the classic happy ([6]), unhappy and narcissistic perfect numbers or PPDI ([3]).

We will first give some theoretical and practical properties on the pleasant transformations as well as a calculation technique to improve downwards the calculation times of the fixed points and other attractors of the associated iterations. We will define by composition with a power function a class of pleasant transformations of which a large number will have only one fixed point which will ensure a unique and remarkable property to the integer which represents it; we will show that there are a finite number of such remarkable integers.

Various properties will express some of these representatives and their specific peculiarity; such as 754, the only number strictly greater than 1, which is equal to the sum of the squares of the digits of its power of 8, or the prime number 3877, the only integer strictly greater than 1 which is equal to the sum of the powers 38 of the digits of its square...but there is no integer greater than 1 that is equal to the sum of the digits of its power of 105.

By a mixed method, theoretical and numerical, we will establish that there is no perfect narcissistic number of order > 56 , which improves the classical bound which is 60.

We will then define a new class of perfect narcissistic numbers, named r-PPDI or perfect r-narcissistic numbers and we will show that they are finite in number; we will exhibit the 10 smallest perfect r-narcissistic numbers.

After some remarks in connection with prime numbers and constellations of prime numbers ([10], [12], [13]), we will give some examples of other pleasant transformations.

Some [transformations used](#) here can be simulated online.

INTRODUCTION

Ce papier se situe entre mathématiques récréatives sur les entiers et itération dans \mathbb{N} de systèmes dynamiques discrets. Nous reprenons et précisons ici la notion de transformation agréable que nous avons initialement définie dans ([9], [11]); les plus simples de ces applications sont facilement attachées aux classiques nombres heureux ([6]), malheureux et narcissiques parfaits ou PPDI ([3]). Nous donnerons d'abord quelques propriétés théoriques et pratiques sur les transformations agréables ainsi qu'une technique de calcul pour améliorer à la baisse les temps de calcul des points fixes et autres attracteurs des itérations associées. Nous définirons par composition avec une fonction puissance une classe de transformations agréables dont un grand nombre n'aura qu'un seul point fixe ce qui assurera une propriété unique et remarquable à l'entier qui le représente; nous montrerons qu'il existe un nombre fini de tels entiers remarquables.

Diverses propriétés exprimeront quelques-uns de ces représentants et leur particularité spécifique; comme par exemple 754, seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 8, ou le nombre premier 3877 seul entier strictement plus grand que 1 qui soit égal à la somme des puissances 38 des chiffres de son carré...mais il n'existe aucun entier strictement plus grand que 1 qui soit égal à la somme des chiffres de sa puissance 105.

Par une méthode mixte, théorique et numérique, nous établirons qu'il n'existe pas de nombre narcissique parfait d'ordre > 56 , ce qui améliore la borne classique qui est 60.

Nous définirons ensuite une nouvelle classe de nombres narcissiques parfaits, nommés r-PPDI ou

nombre r-narcissiques parfaits et nous montrerons qu'ils sont en nombre fini; on exhibera les 10 plus petits nombres r-narcissiques parfaits.

Après quelques remarques en liaison avec les nombres premiers et les constellations de nombres premiers ([10], [12], [13]), nous donnerons quelques exemples d'autres transformations agréables. On pourra simuler en ligne certaines [transformations utilisées](#) ici.

1- TRANSFORMATIONS AGREABLES dans N

En théorie des nombres on appelle narcissique, pluperfect digital invariant (PPDI) ou encore nombre de Armstrong de première espèce ou nombre plus que parfait ([1], [2], [3], [4], [4'], [4'']), un nombre non nul qui dans une base donnée, est égal à la somme de tous ses propres chiffres à la puissance du nombre total p de ces chiffres (par exemple en base 10: $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$).

C'est cette expression d'un nombre par des opérations sur ses seuls propres chiffres constitutifs qui a fait choisir le qualificatif de narcissique (en référence au mythe de Narcisse dans la mythologie grecque) à Joseph S. Madachy dans son livre ([3]), où il a, en particulier, introduit ces nombres. Par ailleurs, souvent à titre de récréations sur les entiers, de nombreux autres nombres ont été qualifiés de narcissiques comme par exemple:

$3025 = (30 + 25)^2$, $4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3$, $4150 = 4^5 + 1^5 + 5^5$, mais aussi $145 = 1! + 4! + 5!$, et de façon générale tous les entiers qui peuvent s'exprimer par des opérations (quelconques et pas seulement des puissances) utilisant uniquement l'ensemble de ses chiffres comme encore: $456 = 4(5! - 6)$ ou $3972 = 3 + (9 \times 7)^2$ ou $6455 = 5(6^4 - 5)$ ou $24739 = 2^4 + 7! + 3^9$ ou ...

L'origine de la recherche systématique de ces divers nombres semble se trouver dans le livre de M. Gardner ([2]) où diverses questions ouvertes sont présentées et ont inspiré de nombreux autres auteurs ([4], [4'], [5]).

Nous préférons parler ici de nombres narcissiques parfaits pour les entiers tels que 371, et de nombres narcissiques lorsque la puissance p n'est pas égale au nombre de chiffres de l'entier, comme pour 4150 par exemple, en oubliant les autres nombres un peu exotiques cités plus haut. Les nombres narcissiques parfaits sont encore des points fixes de certaines transformations que nous avons appelées agréables dans ([9]).

- DEFINITION 1.

Soit n un nombre (entier strictement positif) à p chiffres notés c_i et considérons les transformations T_k ($k \geq 1$ et fini), de N dans N telles que

$$(1) \quad n \rightarrow n_1 = T_k(n) = \sum_{i=1}^p c_i^k$$

Une telle transformation définit encore un système dynamique sur les entiers dont nous chercherons les attracteurs: il suffit pour cela d'envisager l'itération associée en construisant la suite $n, n_1 = T_k(n), n_2 = T_k(n_1), n_3 = T_k(n_2), \dots$

Si, trivialement, $T_0(n) = p$ et $T_1(n) = \sum_i c_i$, nous verrons que pour $k = p$ les transformations T_p permettent de déterminer les nombres narcissiques parfaits.

- REMARQUE 1.

On fait immédiatement deux remarques triviales qui seront utiles plus loin: le (ou les) chiffre(s) 0 dans n ne contribue(nt) pas dans n_1 et surtout, le transformé n_1 est indépendant de l'ordre des chiffres c_i dans l'expression de n.

Les transformations T_k ont été dites agréables ([9]) parce que quel que soit l'entier initial n choisi, sa trajectoire dans l'itération (n, n_1, n_2, n_3, \dots) converge toujours vers un point fixe ou vers un cycle d'ordre fini de T_k (comme nous le démontrerons plus bas). Abusivement nous parlerons de convergence de T_k au lieu de convergence de son itération associée et attracteur de T_k pour attracteur du système dynamique discret associé à son itération.

On verra facilement qu'il n'y a pas de nombres narcissiques parfaits pour $p = 2$, mais qu'en revanche la transformation agréable correspondante n'a que deux attracteurs (en dehors du point fixe trivial 0 commun à toutes nos transformations), le point fixe 1 et un cycle d'ordre 8, ce qui permet de distinguer dans N, les nombres heureux ([6], [9]) dont les itérés convergent vers 1 et les

nombre malheureux dont les itérés convergent vers le cycle d'ordre 8, $C_8(4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20)$.

Nous ne nous intéressons ici qu'à la représentation des entiers en base 10. Les transformations sous-jacentes aux nombres heureux et malheureux ($k = 2$) ainsi qu'aux nombres narcissiques parfaits ($k = p \geq 1$) se définissent facilement et possèdent des propriétés extrêmement agréables comme on pourra le voir facilement plus bas.

Notons $s = T_k(n)$; comme $n \geq 10^{p-1}$ et donc $s \leq p \cdot 9^k$, dès que l'on assure $10^{p-1} > p \cdot 9^k$ il vient $s < n$. Nous allons montrer que pour $p \geq k+2$ la précédente inégalité est assurée.

-PROPRIETE 1.

Pour tout $p \geq 1$ et tout $k \geq 1$, on a

(2) $p \geq k+2$ entraîne $p \cdot 9^k < 10^{p-1}$.

Démonstration

- 1) Pour $p = k+2$ l'inégalité s'écrit:

(3) $(k+2) \cdot 9^k < 10^{k+1}$.

Elle est manifestement vraie pour $k=1$ ($27 < 100$) ou pour $k=2$ ($324 < 1000$), supposons qu'elle le soit pour une valeur k quelconque et montrons qu'elle l'est alors pour $k+1$:

$(k+2) \cdot 9^k < 10^{k+1}$ entraîne $(k+2) \cdot 9^{k+1} + 9^{k+1} < 9 \cdot 10^{k+1} + 9^{k+1} < 9 \cdot 10^{k+1} + 10^{k+1}$

soit $(k+3) \cdot 9^{k+1} < 10^{k+2}$ et, par récurrence, l'inégalité (3) est donc vraie pour tout k .

- REMARQUE 2.

On déduit de (3) que tout n d'au plus $k+1$ chiffres a tous ses itérés (par T_k) d'au plus $k+1$ chiffres, puisque:

à $n < 10^{k+1}$ correspond $T(n) \leq (k+1) \cdot 9^k < (k+2) \cdot 9^k < 10^{k+1}$.

- 2) Pour $p > k+2$ il vient, puisque la suite $10^{p-1}/p$ est croissante, $10^{p-1}/p > 10^{k+1}/(k+2) > 9^k$. Le résultat (2) est donc assuré.

Ainsi, dès que $p \geq k+2$ le transformé de n est tel que $s < 10^{p-1} \leq n$, c'est-à-dire qu'il est strictement inférieur à n et qu'il a au plus $p-1$ chiffres. Par conséquent un nombre d'au moins $k+2$ chiffres ne peut pas être un point fixe de la transformation ou encore, tout point fixe de T_k a au plus $k+1$ chiffres.

Par ailleurs on peut aussi en déduire que tout point de cycle de T_k a au plus $k+1$ chiffres. Supposons en effet qu'un entier n de p chiffres, avec $p \geq k+2$, soit un point de cycle; il faudrait donc que par un certain nombre d'itérations par T_k on revienne sur n . Or $s_1 = T_k(n) \leq p \cdot 9^k < 10^{p-1} \leq n$ et s_1 a au plus $p-1$ chiffres; de même $s_2 = T_k(s_1) \leq (p-1) \cdot 9^k < 10^{p-1} - 9^k < n$ et il a lui aussi au plus $p-1$ chiffres; tous les itérés successifs de n sont donc strictement inférieurs à n , qui ne peut donc être un point de cycle.

En outre avec la remarque 2 précédente, si un cycle possède un point de $k+1$ chiffres, tous ses itérés ont au plus $k+1$ chiffres. (On peut aussi considérer les diverses compositions de m transformations T_k et montrer qu'aucune n'a de point fixe de plus de $k+1$ chiffres quel que soit m).

Comme par ailleurs on vient de montrer que tout entier de plus de $k+1$ chiffres se transforme successivement par itération, en entiers strictement inférieurs à n et qui perdent au moins un chiffre à chaque étape de l'itération d'éléments de plus de $k+1$ chiffres, on a encore montré que toute itération par T_k converge dans l'ensemble fini $A_k = [0, 10^{k+1}[$ et qu'il existe dans cet ensemble au moins un point fixe ou un cycle d'ordre fini.

Si l'on note n_i , $i \geq 1$, les itérés de n par la transformation T_k , on peut dire que pour tout n dans \mathbb{N} , tous les n_i sauf au plus un nombre fini sont dans A_k , puisque dès qu'un de ces itérés a la plus petite valeur de plus de $k+1$ chiffres, tous les suivants sont dans A_k (et y restent).

Si l'on nomme $n(k+r)$ un nombre n d'au plus $k+r$ chiffres et $n[k+r]$ un nombre n d'exactement $k+r$ chiffres, dans l'itération par T_k toutes les trajectoires seront de la forme: $n[k+r]$, $n(k+r-1)$, $n(k+r-2)$, ..., $n(k+2)$, $n(k+1)$, $n(k+1)$, ..., $n(k+1)$.

-PROPRIETE 2.

Tous les systèmes dynamiques discrets ainsi construits ont un moins un attracteur et tous leurs attracteurs sont dans le sous-ensemble fini $A_k = [0, 10^{k+1}[$ de \mathbb{N} correspondant. Dans ces itérations par tout T_k , toutes les trajectoires de tous les entiers ont au plus un nombre fini d'éléments dans $[10^{k+1}, \infty[$. Il n'y a donc pas de point fixe, ni de point de cycle de (strictement) plus de $k+1$ chiffres pour toute transformation T_k .

Pour tout k , il suffit donc de considérer la convergence des entiers de $[0, 10^{k+1}[$ pour trouver tous les attracteurs de la transformation agréable choisie. Les autres entiers convergeront tous vers les attracteurs précédents.

Toutes nos transformations (avec k fini) sont donc partout convergentes dans \mathbb{N} et possèdent chacune un nombre fini d'attracteurs (points fixes finis ou cycles d'ordre fini) ce qui justifie le qualificatif d'agréable...

- DEFINITION 2.

Nombres narcissiques parfaits ou PPD numbers ou nombre d'Armstrong ([1], [2], [3], [4]): on appelle ainsi les points fixes de T_k qui ont exactement k chiffres. On pourra éventuellement préciser nombre narcissique parfait d'ordre k pour caractériser son nombre de chiffres. On rappelle qu'il existe 88 nombres narcissiques parfaits connus et répertoriés ([4]).

Pour T_1 il y a, comme seuls attracteurs, les 10 points fixes (0, 1,..., 9) qui sont les nombres narcissiques parfaits d'ordre un (avec une éventuelle restriction pour 0 ...suivant les auteurs) et aucun cycle.

-REMARQUE 3.

Utilisons la transformation T_1 , pour définir la transformation S :

$$S: n \rightarrow S(n) = T_1(n^3),$$

S possède 6 points fixes (1, 8, 17, 18, 26, 27): ce sont les seuls nombres égaux à la somme des chiffres de leur cube et parmi eux il y a en particulier le fameux nombre 26 (il est le seul nombre encadré par un carré et un cube, voir aussi la conjecture de Catalan [7] démontrée en 2002).

On peut noter que S possède aussi un cycle d'ordre deux C_2 (19, 28) et que les 6 points fixes précédents et ce cycle sont les seuls attracteurs de S qui est partout convergente dans \mathbb{N} et qui peut donc être qualifiée aussi de transformation agréable comme nos T_k .

Pour T_2 , il y a, comme seuls attracteurs, les points fixes 0, 1 et le cycle d'ordre 8, $C_8(4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20)$: il n'existe donc pas de nombre narcissique parfait d'ordre deux.

Pour T_3 , il y a, comme seuls attracteurs, les 6 points fixes 0, 1, 153, 370, 371, 407, 2 cycles d'ordre deux (136, 244) et (919, 1459) et 2 cycles d'ordre trois (55, 250, 133) et (160, 217, 352). Les seuls nombres narcissiques parfaits d'ordre trois sont 370, 371, 407.

Pour T_4 , il y a, comme seuls attracteurs, 5 points fixes (0, 1, 1634, 8208, 9474) et deux cycles C_2 (2178, 6514) et C_7 (13139, ..., 1138, ..., 9219). Les seuls nombres narcissiques parfaits d'ordre quatre sont 1634, 8208, 9474.

Pour T_5 , il y a 8 points fixes (0, 1, 4150, 4151, 54748, 92927, 93084, 194979) et des cycles C_{10} , C_{12} , C_{22} , ... Les seuls nombres narcissiques parfaits d'ordre cinq sont 54748, 92927, 93084.

Pour T_6 , il y a 3 points fixes (0, 1, 54 34) et des cycles C_3 C_{10} C_{30} , ... Le seul nombre narcissique parfait d'ordre 6 est 54 34.

On pourrait naturellement continuer et déterminer, comme indiqué plus haut, pour chaque T_k l'ensemble (fini) de tous ses attracteurs, mais ici l'objectif est essentiellement les points fixes et plus particulièrement encore les points fixes d'ordre k .

Pour T_{39} , il y a (en plus des points fixes triviaux 0 et 1), 2 points fixes qui sont les plus grands nombres narcissiques parfaits connus et qui sont donc d'ordre 39 : $m = 115132219018763992565095597973971522400$ et $m+1$.

-PROPRIETE 3.

Il n'existe pas de nombre narcissique parfait d'ordre $k > 60$.

Démonstration

On peut en effet facilement montrer que $k 9^k < 10^{k-1}$ dès que $k \geq 61$ puisque le plus grand nombre de 61 chiffres (représenté donc par 61 chiffres 9) a pour transformé par T_{61} l'entier $61 \cdot 9^{61}$ qui est un nombre de 60 chiffres seulement....alors que $60 \cdot 9^{60}$ possède aussi 60 chiffres et pourrait donc postuler comme point fixe de T_{60} .

Le plus grand connu actuellement possède $k = 39$ chiffres, et le plus grand possible serait donc associé à $k = 60$. On peut donc affirmer qu'il y a nécessairement un nombre fini de nombres narcissiques parfaits (ce qui était déjà assuré par le caractère fini du nombre d'attracteurs pour tous les T_k , $k \leq k_0$, tous ces attracteurs étant situés dans l'ensemble fini réunion des A_k).

-QUELQUES GRANDS CYCLES.

Ils ont été obtenus avec un programme en VB traitant les entiers en tant que chaînes de caractères et utilisant ses propres fonctions de calcul pour avoir la précision dite 'infinie' (un peu abusivement et en fait arbitraire seulement) pour les diverses opérations sur les grands entiers.

Nous avons par exemple les quelques cycles d'ordre assez grands croissants suivants (dont nous donnons l'ordre, le nombre maximum de chiffres pour un élément et un de ses points qui permettra de trouver tous les autres).

T_{40} : un cycle d'ordre 1093 avec un maximum de 39 chiffres:

597906965016410043142439528769450434806

un cycle d'ordre 1221 avec un maximum de 40 chiffres:

892189029043556064885874066145854390233

un cycle d'ordre 1319 avec un maximum de 39 chiffres:

444768880862193970322435479916281370454

T_{38} : un cycle d'ordre 1593 avec un maximum de 38 chiffres:

2015640159857257313802444394278188080

T_{43} : un cycle d'ordre 1914 avec un maximum de 43 chiffres:

6871277287597990881338126653551157995

T_{36} : un cycle d'ordre 2815 avec un maximum de 36 chiffres:

136149277064831001357487927287441220

T_{75} : un cycle d'ordre 3163 avec un maximum de 73 chiffres:

5920408891448171920411382227490128800775690698979466584468959461678489401

T_{81} : un cycle d'ordre 3466 avec un maximum de 79 chiffres:

3932668224486001168854064159311997639126922255214204489333849323548901658824153

T_{39} : un cycle d'ordre 4356 avec un maximum de 39 chiffres:

33515581627585524471656464024510931370

T_{57} : un cycle d'ordre 7340 avec un maximum de 56 chiffres:

36987497640029013033972548743322215456512268389441924387

- Le cas $k = 2$, nombres heureux et nombres malheureux.

La transformation T_2 est celle qui permet de distinguer les nombres heureux et les nombres malheureux. En appliquant les propriétés du cas général, on sait ici que tous les attracteurs sont dans $A_2 = [0, 10^3]$. Il suffit donc de considérer les trajectoires de tous les points de A_2 pour montrer facilement que dans ce cas, mis à part le point fixe trivial 0, il y a seulement deux attracteurs, le point fixe 1 et le cycle d'ordre 8, $C_8(42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145)$. Tous les entiers strictement positifs convergent donc sous l'itération par T_2 vers l'un des ces deux attracteurs: les nombres heureux sont ceux qui convergent vers 1, tous les autres sont des nombres malheureux qui convergent vers le cycle C_8 .

- Le cas $k = 3$.

Pour le cas de T_3 , les seuls attracteurs sont les 6 points fixes (0, 1, 153, 370, 371, 407), les 2 cycles d'ordre deux (136, 244) et (919, 1459) et les 2 cycles d'ordre trois (55, 250, 133) et (160, 217, 52). Les quatre nombres narcissiques parfaits d'ordre trois sont 153, 370, 371, 407.

-QUESTIONS

Pour $k < 61$, toute transformation T_k a-t-elle toujours au moins un point fixe, et combien de tels

points fixes ont exactement k chiffres (nombres narcissiques parfaits) ? Les plus grands de ces nombres actuellement connus, semble-t-il, sont les deux points fixes de T_{39} , m et $m+1$ fournis plus haut. Y-a-t-il une démonstration pour affirmer qu'il n'y a pas de nombre narcissique au-delà de $k = 39$?

-AMELIORATION TECHNIQUE pour l'étude des éventuels points fixes des T_k pour $k > 39$.
 Pour T_{40} , on peut montrer qu'un nombre narcissique parfait d'ordre 40 devrait se représenter avec au moins 7 chiffres 9 puisque l'on peut vérifier que 9999999 est le plus petit nombre dont le transformé par T_{40} possède 40 chiffres alors que le plus grand nombre de 40 chiffres avec seulement 6 chiffres 9 a un transformé de 39 chiffres... mais il reste encore 33 chiffres à déterminer pour compléter le puzzle de l'éventuel nouveau nombre narcissique parfait ! Pour T_{41} une remarque analogue permet d'affirmer qu'il faudrait au moins 8 chiffres 9 dans la représentation de l'éventuel candidat. On peut utiliser ce type de remarque associé à une autre propriété des transformations agréables pour considérablement diminuer les temps de calcul d'éventuels points fixes au-delà de $k = 39$ et en particulier pour améliorer légèrement la propriété 3 en ce qui concerne les nombres narcissiques parfaits.

D'après la définition 1, le transformé $T_k(n)$ a pour antécédent non seulement n mais aussi tous les entiers qui ont les mêmes nombres de chiffres 9, 8, ..., 1 que n , leur nombre de zéros éventuels étant en outre indifférent (par exemple 172, 271, 721, 7012, 10207, ... ont le même transformé). Ceci permet de représenter l'ensemble (ou la classe d'équivalence) de tous ces antécédents par la silhouette de n , $Sil(n) = (s_9, s_8, \dots, s_1)$, les s_i étant le nombre de chiffres i ($i = 1, 2, \dots, 9$) dans l'expression de n ; on écrira ainsi:

$$n_1 = T_k Sil(n) \text{ (pour } \sum_{i=1}^9 s_i i^k \text{).}$$

Par exemple le nombre narcissique parfait m a pour silhouette $Sil(m) = (7, 1, 4, 2, 6, 1, 3, 5, 6)$, et en tant que point fixe il vérifie $m = T_{39}Sil(m)$. Ainsi tous les nombres narcissiques parfaits peuvent être définis par une suite ordonnée de 9 nombres sous la forme condensée $n = T_k(s_9, s_8, \dots, s_1)$, s_i étant le nombre de chiffres i ($i = 1, 2, \dots, 9$) dans l'expression de n . On peut facilement calculer le s_9 minimum de toutes les transformations de $k = 40$ jusqu' à $k = 60$; on observe que s_9 est strictement croissant pour $k \geq 40$. Si s_9 joue bien sûr un grand rôle, il n'empêche qu'il faut aussi considérer les autres s_i . Cependant, le nombre de silhouettes différentes des nombres à p chiffres étant très largement inférieur à 10^p (par exemple il y a 6435 silhouettes différentes à 7 chiffres sans zéro, 12870 pour 8 chiffres, ...), la connaissance du minimum de s_9 et l'utilisation de cette notion de silhouette permettent de diminuer très notablement le nombre de cas différents à tester numériquement pour chercher des points fixes. Par exemple la liste de toutes les silhouettes différentes de 1 à 4 chiffres contient seulement 714 éléments parmi les 10000 premiers entiers ([9]). Pour le cas $k = 60$, on peut ainsi montrer que $s_9 = 56$ (sinon le transformé aurait au mieux 59 chiffres et il ne reste que quatre chiffres à déterminer, ce que l'on peut facilement faire numériquement: en épuisant toutes les possibilités, qui se réduisent en fait à moins de 500. Nous avons pu ainsi conclure qu'il n'existe pas de nombre narcissique d'ordre 60 (ni d'ailleurs de point fixe pour T_{60}).

Pour le cas $k = 59$, on montre que $s_9 = 51$ ce qui laisse 8 chiffres à balayer pour épuiser toutes les possibilités de point fixe. Il suffira d'envisager les nombres $n = T_{59}(51, 0, \dots, 0) + T_{59} Sil_8()$ où $Sil_8()$ représente toutes les silhouettes de nombres (sans zéro) de 1 à 8 chiffres (dans un ordre indifférent) ce qui fait moins de 25000 cas (exactement 24309 et par exemple on peut calculer qu'il y a seulement 12870 silhouettes différentes à 8 chiffres sans zéro [9]). Nous avons pu ainsi conclure qu'il n'existe pas de nombre narcissique d'ordre 59 (ni d'ailleurs de point fixe pour T_{59}).

Pour le cas $k = 58$, on obtient $s_9 = 46$ ce qui laisse 12 chiffres à balayer, ce qui correspond à moins de 300000 (exactement 293929) silhouettes différentes à envisager. Après un temps de calcul raisonnable, nous avons pu ainsi conclure qu'il n'existe pas de nombre narcissique d'ordre 58 (ni d'ailleurs de point fixe pour T_{58}).

Le cas $k = 57$, avec $s_9 = 41$, laisse 16 chiffres à balayer et correspond à un peu moins de 2100000 silhouettes différentes à envisager. Après un temps de calcul un peu plus long, nous avons pu encore conclure qu'il n'existe pas de nombre narcissique d'ordre 57 (ni d'ailleurs de point fixe pour T_{57}). On a donc légèrement amélioré la propriété 3 en:

-PROPRIETE 4.

Il n'existe pas de nombre narcissique parfait d'ordre $k > 56$.

Avec cette technique on peut peut-être améliorer encore cette propriété sans utiliser un temps de calcul trop rédhibitoire, et ainsi espérer trouver un nouveau nombre narcissique parfait ou confirmer que $m+1$ est bien le plus grand

2-NOMBRES REMARQUABLES

A partir de la définition 1 des T_k , précisons la définition générale de ce que nous appellerons maintenant transformations agréables.

- DEFINITION 3.

Une transformation dans N partout convergente et possédant un nombre fini d'attracteurs (points fixes finis ou cycles d'ordre fini) sera dite agréable.

Considérons une nouvelle classe de transformations agréables composées d'une puissance et d'un T_k :

$$(4) \quad S_k^r: n \rightarrow n_1 = T_k(n^r) \text{ pour } r \geq 1, k \geq 1, n \text{ entier positif quelconque (k et r finis)}$$

Tout nombre n à p chiffres étant strictement inférieur à 10^p , il vient $n^r < 10^{rp}$, ce qui entraîne:

$$S_k^r(n) \leq 9^k r p.$$

Pour tout couple (k, r) d'entiers strictement positifs, il existe donc un majorant $M = M(k, r) = 9^k r$ tel que pour tout entier n à p chiffres on ait la majoration: $S_k^r(n) \leq pM$.

Par conséquent, dès que le nombre pM a strictement moins de p chiffres, la transformation S_k^r ne peut pas posséder de point fixe à p ou plus de p chiffres (puisque l'on ne peut pas assurer $S_k^r(f) = f$); elle ne peut pas non plus alors posséder de cycle avec des éléments à p ou plus de p chiffres (l'itération par S_k^r ne permettrait pas de retrouver un élément de strictement plus de p chiffres).

Ceci est assuré dès que p vérifie l'inégalité $10^{p-1} / p > M$ et il existe manifestement toujours un plus petit p ayant cette propriété pour tout couple (k, r) .

- DEFINITION 4.

On appellera $p^* = p^*(k, r)$ le plus petit p tel que $10^{p-1} / p > M(k, r)$.

Par conséquent, la fonction $10^{p-1} / p$ étant croissante pour tout $p \geq p^*$, on a toujours $pM < 10^{p-1}$ et l'itération par S_k^r d'un nombre à de tels p chiffres fournit toujours un nombre avec au plus $p-1$ chiffres (chaque itération fait perdre au moins un chiffre au transformé).

Notons que pour tout k et tout r strictement positifs, on aura toujours $p^* \geq 3$.

Il en résulte que tous les attracteurs de S_k^r sont nécessairement constitués de nombres contenus dans l'intervalle fini $[0, 10^{p^*-1}]$, puisque ce p^* est encore le plus petit p tel que le majorant pM soit strictement inférieur à 10^{p-1} (soit encore, possède au plus $(p-1)$ chiffres). Les transformations S_k^r sont partout convergentes dans N (vers un nombre fini d'attracteurs; on notera $na(k, r)$ ou simplement na ce nombre) et sont donc toutes des transformations agréables comme les T_k . (on pourra simuler en ligne les [transformations \$S_k^r\$](#)).

L'ensemble des nombres de $[0, 10^{p^*-1}]$ est l'intervalle de convergence de la transformation S_k^r : tout nombre qu'il contient a tous ses itérés dedans et tout nombre extérieur y aboutit après un nombre fini d'itérations.

Il en résulte donc qu'il suffit de chercher la convergence de tous les entiers (***) de l'intervalle $[0, 10^{p^*-1}]$ pour déterminer tous les attracteurs (constitués d'entiers strictement positifs, le point fixe sans grand intérêt 0 ne sera plus pris en compte dans la suite) d'une transformation S_k^r donnée. En particulier, lorsqu'une telle transformation possèdera un unique point fixe strictement plus grand que 1 (1 étant le point fixe trivial commun à toutes nos transformations), ce nombre aura une propriété unique et remarquable (voir les diverses propriétés suivantes pour 9, 108, 203, 205,...). Dans les exemples proposés les cycles seront caractérisés par leur ordre et leurs éléments extrêmes (on observera en particulier le plus grand qui sera conforme aux résultats précédents).

Du cas $r = 1$, où S_k^r s'identifie bien sûr à T_k , nous retiendrons la transformation S_2^1 (ou T_2) qui possède le point fixe trivial 1 et le cycle $C_8(4, \dots, 145)$, c'est-à-dire seulement 2 attracteurs, $na(2, 1) = 2$; nous dirons plus loin que C_8 , seul attracteur non trivial, est un cycle s-remarquable; rappelons que les nombres qui convergent, par itération de S_2^1 , vers 1 sont les nombres heureux, cependant que ceux qui convergent vers C_8 . Pour $k = 3$, $r = 2$ on a $M = 1458$ et donc $S_3^2(n) \leq 1458 p$; il en résulte que $p^*(k, r) = 5$ et donc, dès que $p = 5$, tous les transformés d'un quelconque entier n à p chiffres ont strictement moins de 5 chiffres. Par conséquent, tous les attracteurs de l'itération par S_3^2 sont dans l'intervalle $[0, 10^4]$, ce qui assure le caractère agréable de la transformation. Ces attracteurs sont en nombre fini, ici $na(3, 2) = 7$ et il s'agit de deux points fixes (1, 205), un cycle $C_2(928, 1306)$, un cycle $C_3(753, 1413, 2745)$, un cycle $C_9(253, \dots, 1270)$, un cycle $C_{12}(151, \dots, 2419)$ et un cycle $C_{20}(27, \dots, 1740)$. On peut donc en particulier affirmer le résultat (remarquable) suivant:

-PROPRIETE 5.

205 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des puissances 3 des chiffres de son carré.

Pour $k = 3$, $r = 6$, on a $M = 4374$ et $p^* = 6$; il y a ici comme seuls attracteurs ($na(3, 6) = 7$), 3 points fixes (1, 180, 3172), un cycle $C_8(3109, \dots, 6607)$, un cycle $C_{12}(1264, \dots, 6799)$, un cycle $C_{19}(2176, \dots, 6919)$ et un cycle $C_{89}(1947, \dots, 7002)$.

Nous verrons au paragraphe suivant que 205 est un nombre 2-narcissique d'ordre 3 et que 180 est un nombre 6-narcissique d'ordre 3.

Pour $k = 4$, $r = 2$, on a $M = 13122$ et $p^* = 6$; il y a dans ce cas, comme seuls attracteurs ($na(4, 2) = 6$), deux points fixes (1, 12277), un cycle $C_3(14917, \dots, 23973)$, un cycle $C_{12}(8292, \dots, 21908)$, un cycle $C_{15}(3941, \dots, 22693)$ et un cycle $C_{43}(822, \dots, 27589)$. On peut en déduire:

-PROPRIETE 6.

Le nombre premier 1277 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des puissances 4 des chiffres de son carré.

Pour $k = 2$, $r = 2$, on a $M = 162$ et $p^* = 4$; il y a ici, comme seuls attracteurs ($na(2, 2) = 3$), le point fixe 1, le cycle $C_3(74, 126, 175)$ et le cycle $C_5(33, \dots, 146)$, d'où la propriété suivante:

-PROPRIETE 7.

Il n'existe aucun nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de son carré.

On remarquera bien que ceci n'a rien à voir avec le théorème des deux carrés de Fermat (un entier naturel est la somme de deux carrés si, et seulement si, chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k + 3$ intervient à une puissance paire).

Pour $k = 2$, $r = 3$, on a $M = 243$ et $p^* = 4$; il y a ici, comme seuls attracteurs ($na = 5$), les points fixes (1, 203), un cycle $C_3(157, \dots, 344)$, un cycle $C_5(59, \dots, 170)$ et un cycle $C_7(86, \dots, 351)$. Il vient donc:

-PROPRIETE 8.

203 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de son cube.

Pour $k = 2$, $r = 6$, on a $p^* = 5$; il y a ici exactement 3 attracteurs dont le point fixe 1 et 2 cycles $C_{12}(133, \dots, 639)$, $C_{14}(203, \dots, 752)$. On peut donc affirmer la propriété suivante:

-PROPRIETE 9.

Il n'existe aucun nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 6.

Pour $k = 2$, $r = 8$, on a $p^* = 5$; il y a ici exactement 6 attracteurs dont les points fixes (1, 754), et 4 cycles $C_4(533, \dots, 608)$, $C_4(557, \dots, 873)$, $C_5(494, \dots, 904)$, $C_6(378, \dots, 703)$. On peut donc affirmer:

-PROPRIETE 10.

754 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 8.

Pour $k = 2$, $r = 10$, on a $p^* = 5$; il y a ici exactement 5 attracteurs dont les points fixes (1, 853), et 3 cycles $C_6(735, \dots, 991)$, $C_7(572, \dots, 938)$, $C_{43}(139, \dots, 1227)$ et on en déduit:

-PROPRIETE 11.

Le nombre premier 853 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 10.

Citons quelques exemples d'autres nombres remarquables associés à $k = 2$, qui font partie, comme 203, 754, 853, de l'ensemble des nombres qui sont égaux à la somme des carrés des chiffres d'une certaine et unique de leurs puissances (voir [liste jusqu'à 10248](#)).

-PROPRIETE 12.

1882 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 16.

760 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 19.

Le nombre premier 3877 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des puissances 38 des chiffres de son carré.

7249 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 62.

7978 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des carrés des chiffres de sa puissance 81.

-REMARQUE 4.

Pour $k = 2$, $r = 205$, on a $p^* = 6$; on détermine assez facilement le point fixe 1 et le cycle $C_{40}(15421, \dots, 27044)$; ce cycle est probablement le seul attracteur non trivial (il serait alors un cycle s-remarquable) mais la démonstration n'est pas encore obtenue.

Pour $k = 5$ et $r = 2$, on a $p^* = 7$ et il y a en particulier les points fixes (38998, 45994, 89080) qui, nous le verrons plus loin, sont des nombres 2-narcissiques d'ordre 5; il y a aussi le point fixe 128230 et des cycles C_5 , C_6 , C_{31} , C_{48} , C_{119} .

Pour $k = 7$ et $r = 3$, on a $p^* = 10$ et en particulier les points fixes (5540343, 8690141) qui seront appelés plus bas des nombres 3-narcissiques d'ordre 7.

-CAS PARTICULIER: $k = 1$ (on notera S_1^r par S_r).

Cette sous-classe de la précédente a en réalité était envisagée avant le cas plus général des S_k^r , à propos en particulier des propriétés du nombre 26 en liaison avec la conjecture de Catalan [7] (voir le cas de S_3).

Pour $r = 1$, la transformation S_1 se réduit à T_1 ; pour $r = 2$ ou 3, il vient $p^* = 3$ et l'intervalle de convergence est $[0, 100[$.

S_2 possède deux points fixes (1, 9) et un cycle d'ordre deux $C_2(13, 16)$ comme seuls attracteurs ($n_a = 3$). On peut donc affirmer:

-PROPRIETE 13.

9 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des chiffres de son carré.

S_3 possède six points fixes (1, 8, 17, 18, 26, 27): ce sont les seuls nombres égaux à la somme des chiffres de leur cube et parmi eux il y a en particulier le fameux nombre 26 (il est le seul nombre encadré par un carré et un cube [8], voir la conjecture de Catalan [7]). S_3 possède aussi un cycle d'ordre deux $C_2(19, 28)$; les 6 points fixes précédents et ce cycle sont les seuls attracteurs de S_3 ($n_a = 7$).

Pour $r = 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, 27$, il vient $p^* = 4$ et l'intervalle de convergence est contenu dans $[0, 1000[$.

S_4 possède six points fixes (1, 7, 22, 25, 28, 36) et un cycle $C_2(18, 27)$ ($n_a = 7$).

Nous verrons plus bas que 7, 8 et 9 sont r -narcissiques d'ordre 1 (avec respectivement $r = 4, r = 3, r = 2$).

S_5 possède cinq points fixes (1, 28, 35, 36, 46) et trois cycles $C_2(23, 29)$, $C_2(31, 34)$, $C_4(25, 40, 7, 22)$ ($n_a = 8$).

S_6 possède seulement cinq points fixes (1, 18, 45, 54, 64) ($n_a = 5$).

S_7 possède neuf points fixes (1, 18, 27, 31, 34, 43, 53, 58, 68) et cinq cycles $C_2(38, 47)$, $C_2(44, 62)$, $C_2(46, 55)$, $C_2(56, 65)$, $C_4(72, 36, 54, 63)$.

S_8 possède quatre points fixes (1, 46, 54, 63) et deux cycles $C_2(64, 73)$ et $C_4(70, 31, 52, 67)$.

S_9 possède quatre points fixes (1, 54, 71, 81) et trois cycles $C_4(99, 90, 45, 72)$, $C_3(82, 73, 91)$, $C_2(80, 35)$.

-REMARQUE 5.

54 est égal à la somme des chiffres de sa puissance 6, à la somme des chiffres de sa puissance 8 ainsi qu'à celle des chiffres de sa puissance 9.

S_{10} possède 7 points fixes (1, 82, 85, 94, 97, 106, 117) et deux cycles $C_3(43, \dots, 70)$, $C_6(45, \dots, 99)$.

S_{12} possède 2 points fixes (1, 108) et un cycle $C_2(109, 127)$. On peut donc affirmer le résultat suivant:

-PROPRIETE 14.

108 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des chiffres de sa puissance 12.

S_{14} possède 6 points fixes (1, 91, 118, 127, 135, 154) et deux cycles $C_2(97, 130)$, $C_2(108, 117)$.

S_{15} possède 8 points fixes (1, 107, 134, 136, 152, 154, 172, 199) et un cycle $C_2(144, 153)$.

-REMARQUE 6.

154 est égal à la somme des chiffres de sa puissance 14 ainsi qu'à la somme des chiffres de sa puissance 15.

S_{19} possède 10 points fixes (1, 80, 90, 155, 157, 171, 173, 181, 189, 207) et 7 cycles $C_2(199, 235)$, $C_2(172, 208)$, $C_2(203, 221)$, $C_3(164, \dots, 236)$, $C_4(98, \dots, 224)$, $C_5(112, \dots, 220)$, $C_6(178, \dots, 223)$.

S_{20} possède 4 points fixes (1, 90, 181, 207) et 4 cycles $C_2(187, 193)$, $C_2(234, 252)$, $C_3(99, \dots, 270)$, $C_3(199, \dots, 226)$.

S_{21} possède 4 points fixes (1, 90, 199, 225) et 3 cycles $C_2(188, 233)$, $C_2(127, 190)$, $C_3(181, \dots, 235)$.

S_{22} possède 8 points fixes (1, 90, 169, 193, 217, 225, 234, 256) et 3 cycles $C_2(148, 220)$, $C_2(238, 247)$, $C_4(214, \dots, 268)$.

Pour $r = 28$ jusqu'à 127 on a $p^* = 5$.

S_{28} possède 7 points fixes (1, 90, 160, 265, 292, 301, 328) et 6 cycles d'ordre 2, un cycle d'ordre 3 et un d'ordre 5.

On peut donc en déduire le résultat suivant:

-PROPRIETE 15.

90 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des chiffres de sa puissance 19, à la somme des chiffres de sa puissance 20, à la somme des chiffres de sa puissance 21, ainsi qu'à la somme des chiffres de sa puissance 22 et à celle des chiffres de sa puissance 28.

S_{50} possède les points fixes (1, 685) et des cycles C_2, C_3, C_4, C_6, C_7 et l'on a:

-PROPRIETE 16.

685 est le seul nombre strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des chiffres de sa puissance 50.

S₉₅ possède 5 points fixes (1, 820, 1323, 1351, 1385) et un cycle d'ordre 3, deux d'ordre 4, deux d'ordre 5 et un d'ordre 12 ...

-REMARQUE 7.

S₁₀₃ possède plusieurs points fixes et cycles mais, en particulier, 2 paires de points fixes consécutifs (1476, 1477) et (1495, 1496).

S₁₀₅ possède le point fixe 1 et les 4 cycles C₃(1476, ..., 1566), C₅(989, ..., 1520), C₇(1459, ..., 1567), C₁₁(926, ..., 1610) (na = 5, p* = 5).

-PROPRIETE 17.

Il n'existe aucun nombre entier strictement plus grand que 1, qui soit égal à la somme des chiffres de sa puissance 105.

-PROBLEMES OUVERTS pour des r > 3000.

-1) S₃₀₁₇ (on a ici p* = 7) possède comme attracteurs le point fixe 1 et le cycle C₃(65871, 64854, 65367) (notons que 65871³⁰¹⁷ possède 14539 chiffres) et on sait donc que na >= 2..., mais na=2 n'est pas assuré...

-2) S₃₇₀₅ (on a ici p* = 7) possède comme attracteurs le point fixe 1 et le cycle C₁₁(48393, ..., 82800) (82800³⁷⁰⁵ possède 18222 chiffres) et on sait donc que na >= 2..., mais na=2 n'est pas assuré...

-3) Les cycles précédents C₃ et C₁₁ seraient des candidats raisonnables pour le titre de cycle remarquable...

-REMARQUE 8.

Il existe de nombreux autres entiers qui (comme 54 et 154) sont points fixes d'au moins deux transformations S_r distinctes: 18 (pour r = 3, 6, 7), 28 (4, 5), 36 (4, 5), 80 (17, 19), 106 (10, 13), 107 (11, 13), 108 (11, 12), 170 (31, 33), 181 (16, 18), 207 (19, 20), 305 (27, 29), 307 (26, 27), 360 (45, 49), 468 (38, 40), 495 (37, 40),

La transformation T₀: elle associe à tout entier n > 0 le nombre de ses chiffres (en étendant naturellement la définition des T_k à k = 0) et on appellera quelquefois T₀(n), l'ordre (ou même la 'longueur') de n.

A ce propos pour r = 1, si T₀(n) = k, il en résulte T_k(n) < k 9^k;

pour r > 1, si T₀(n) = k, il en résulte r k - r + 1 <= T₀(n r) < r k et T_k(n r) <= T₀(n^r) 9^{T₀(n r)}}.

-POINTS FIXES à k chiffres pour r > 1 et k < 8.

Pour tout r <= 50 et pour k = 2 et k = 4, on peut vérifier qu'il n'existe pas de point fixe à k chiffres; toujours pour r <= 50 et pour k = 1, k = 3 et k = 5, on peut vérifier qu'il n'y a pas d'autres points fixes à k chiffres que respectivement (7, 8, 9), (180, 205), (38998, 45994, 89080).

Pour k = 6, on peut vérifier qu'il n'existe pas de point fixe à k chiffres pour r <= 10; pour k = 7 avec r <= 10, il n'y a pas de point fixe à k chiffres en dehors de (5540343, 8690141) (associés à r = 3).

- REMARQUE RECREATIVE 8'.

Les propriétés 8 (pour la 203) et 14 (pour la 108) nous ont inspiré quelques observations amusantes sur les [Noms de baptême de quelques Peugeot...](#)

3- NOMBRES NARCISSIQUES PARFAITS et R-PPDI

La définition 2 exprimait les nombres narcissiques parfaits ([3], [4], [5]) comme les points fixes à k (>= 1) chiffres des T_k (qui associent à tout entier positif la somme des puissances k de tous ses chiffres).

Les transformations agréables S_k^r permettent de définir une nouvelle classe de nombres narcissiques pour r > 1.

- DEFINITION 5.

Un point fixe à k chiffres d'une transformation S_k^r sera appelé nombre r-narcissique parfait d'ordre k (ou encore r-PPDI d'ordre k).

Un nombre r-narcissique parfait d'ordre k est donc un entier n, à k chiffres, dont la puissance r est

telle que la somme des puissances k de tous ses chiffres est égale à ce nombre n .

Un nombre 1-narcissique parfait d'ordre k s'identifie à un PPDI d'ordre k . Comme dans le cas $r = 1$, pour tout $r > 1$ on ne considèrera que les cas non triviaux des entiers strictement supérieurs à 1. Les propriétés et les résultats précédents permettent d'exhiber 10 nombres r -narcissiques d'ordres $k = 1$ à 7. On comparera avec la liste correspondante des 23 classiques PPDI d'ordres $k = 1$ à 7. Pour $k=1$, tous les entiers de 2 à 9 sont des PPDI, mais seuls 7, 8 et 9 sont r -narcissiques ($r > 1$): 7 est 4-narcissique, 8 est 3-narcissique et 9 est 2-narcissique (observer que $n + r = 11$ dans les 3 cas). Pour $k = 2$, il n'y a pas de nombre r -narcissique quel que soit r . Pour $k = 3$, on sait qu'il existe 4 entiers 1-narcissiques (153, 370, 371, 407); il existe seulement 2 entiers r -narcissiques: 180 est 6-narcissique d'ordre 3 et 205 est 2-narcissique d'ordre 3. Pour $k = 4$, on sait qu'il existe 3 entiers 1-narcissiques (1634, 8208, 9474); il n'y a pas de nombre r -narcissique quel que soit r . Pour $k = 5$, on sait qu'il existe 3 entiers 1-narcissiques (54748, 92727, 93084); il existe aussi trois entiers 38998, 45994 et 89080 qui sont 2-narcissiques d'ordre 5. Pour $k = 7$, on sait qu'il existe 4 entiers 1-narcissiques (1741725, 4210818, 9800817, 9926315); il existe aussi 2 entiers 5540343, 8690141 qui sont 3-narcissiques d'ordre 7. On pourra noter $n(r)$ un nombre r -narcissique (par exemple 7(4) signifie que le nombre 7 est un nombre 4-narcissique). On observera que si les transformations S_k^r , $k \geq 1$, $r \geq 2$, ont de nombreux points fixes à strictement plus de k chiffres, elles en ont assez peu d'exactly k chiffres...

-PROPRIETE 18.

Les 10 plus petits nombres r -narcissiques parfaits ($r \geq 2$) plus grands que 1 sont
7(4), 8(3), 9(2),
180(6), 205(2),
38998(2), 45994(2), 89080(2),
5540343(3), 8690141(3).

Les résultats précédents permettent d'affirmer:

-PROPRIETE 19.

Les 10 entiers de la propriété 18 sont les seuls r -PPDI d'ordres strictement inférieurs à 8 (et en particulier il n'existe donc pas de r -PPDI d'ordre $k = 2$, $k = 4$ et $k = 6$).

Parmi ces nombres seuls 9 et 205 représentent l'unique point fixe plus grand que 1 de la transformation correspondante, d'où le caractère remarquable de 9 (propriété 13) et de 205 (propriété 5); pour les autres, la transformation correspondante a au moins un autre point fixe (plus grand que 1) de strictement plus de k chiffres (par exemple S_5^2 a aussi le point fixe 128230 et S_3^6 a aussi le point fixe 3172). On notera aussi que seuls 7 (qui est en outre le seul nombre premier de la liste), 8 et 9 sont à la fois PPDI et r -PPDI. Comme pour les PPDI, le caractère fini de l'ensemble des r -PPDI est assuré par les propriétés des transformations agréables.

-PROPRIETE 20.

Il y a un nombre fini de nombres r -narcissiques parfaits.

(puisque toutes les transformations S_k^r ont un nombre fini d'attracteurs).

Le transformé par S_k^r du plus grand nombre à k chiffres étant majoré par $(r k 9^k)$, pour tout r_0 donné (> 1), on peut toujours calculer un $k_0 = k_0(r_0)$ tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $r \leq r_0$ il n'existe pas de nombre r -narcissique parfait d'ordre k . Par exemple il n'existe pas de r -PPDI d'ordre k pour ($r = 2$, $k \geq 69$), pour ($r \leq 5$, $k \geq 80$), pour ($r \leq 14$, $k \geq 90$),...

Pour $k = 6$, on peut affirmer qu'il n'existe pas de r -PPDI pour $1 < r \leq 10$ et pour $k = 7$ on a le même résultat négatif pour $r = 2$ et $3 < r \leq 10$.

-PROBLEMES OUVERTS.

-1) Existe-il des couples (k, r) tels que pour l'itération correspondante on ait $n_a = 1$, soit uniquement le point fixe 1 comme seul attracteur (nous conjecturons qu'il n'en est rien) ou peut-on affirmer que pour tout couple (k, r) on a $n_a(k, r) > 1$?

-2) De la même façon qu'il existe des points fixes communs à plusieurs applications S_k^r (par exemple 54, 90, 154), existe-t-il des nombres n plusieurs fois (ou multiples) r -narcissiques, c'est-à-dire points fixes pour deux valeurs de r différentes et le même $k = T_0(n)$?

-NOMBRES S-REMARQUABLES ET CYCLES S-REMARQUABLES.

Existe-t-il des cas $n_a = 2$ pour $r > 1$?

Si (pour tout $k \geq 1$ et tout $r \geq 1$) l'on note $npf(k, r)$ le nombre de points fixes de l'itération correspondante, on a toujours $npf > 0$; les nombres que nous avons qualifiés de remarquables sont (mis à part les nombres comme 54, 90, 154 qui sont remarquables en tant que points fixes communs à plusieurs transformation S_k^r) des entiers strictement plus grand que 1 associés aux cas $npf(k, r) = 2$ (un seul point fixe autre que 1, plus éventuellement un ou des cycles et donc $n_a \geq 2$) comme par exemple 9, 108, 203, 205, ...; si en outre on a $n_a = npf (= 2 \text{ donc})$, alors ce point fixe est doublement remarquable car il est le seul attracteur de la transformation autre que 1 (pas de cas exhibé encore !). On peut aussi essayer d'exhiber des cas où $npf = 1$ et $n_a = 2$ (comme pour $k = 2, r = 1$ avec le cycle $C_8(4, \dots, 145)$), c'est-à-dire des situations où le seul attracteur, autre que 1, est un cycle d'ordre au moins deux; cet unique cycle pourra lui aussi être qualifié de doublement remarquable. Donnons une formulation un peu plus systématique à ces définitions et propriétés.

- DEFINITION 6.

On appellera $n_a(k, r)$ le nombre d'attracteurs de S_k^r et $npf(k, r)$ son nombre de points fixes.

Pour tout (k, r) , on a $npf \geq 1$ et $n_a \geq 1$, puisque 1 est toujours point fixe (et sans doute devrait-on pouvoir montrer que l'on a toujours $n_a \geq 2$...?). Les cas $n_a = 2$ semblent rares (nous pouvons simplement citer S_2^1 avec un cycle C_8 et probablement S_2^{205} avec un cycle C_{40}) et la règle majoritaire doit être $n_a \geq 3$ (S_1^2 , S_2^2 et S_2^6 pour $n_a = 3$) ...

-Cas $n_a \geq 2, npf = 2$:

-PROPRIETE 21.

Pour un couple (k, r) tel que $n_a \geq 2, npf = 2$, le point fixe $f (> 1)$ correspondant sera appelé nombre remarquable: il est le seul entier strictement supérieur à 1 qui soit égal à la somme des puissances k de sa puissance r (par ailleurs, la transformation peut posséder divers cycles).

-PROPRIETE 22.

Toutes les transformations S_k^r (k et r finis) possédant un nombre fini d'attracteurs, il existe un nombre fini d'entiers remarquables; citons (9, 108, 203, 205, 754, 760, 853, 900, 1330, 1752, 1882, 2057, 3068, 3572, 3582, 3622, 3877, 6746, 7249, 7978, 12277, ...).

-REMARQUE 9.

Il existe des nombres premiers qui sont aussi des nombres remarquables.

Observons que dans la liste partielle précédente, seuls 853, 3877 et 12277 sont des nombres premiers et ils sont en outre des nombres premiers cousins, chacun étant le plus petit élément d'une paire de nombres premiers différents de 4: 853 et 857, 3877 et 3881, 12277 et 12281).

-REMARQUE 10: en liaison avec les constellations de nombres premiers ([10], [12], [13]).

On peut exhiber un 10-uplet libre ([13]) de premiers issu de 853: (853, 857, 859, 863, 877, 881, 907, 911). Avec les notations de [13], les écarts a_i sont (4, 6, 10, 24, 28, 30, 34, 54, 58) c'est-à-dire uniquement 0(6) ou 4(6) conformément à la propriété 6) de [13] pour les n -uplets libres.

On peut de même construire un 6-uplet issu de 3877 et un 7-uplet issu de 12277, tous les deux aussi avec des écarts uniquement 0(6) ou 4(6) conformément à la même propriété.

Issu de 3877 on peut avoir un triplet arithmétique ([12]) avec $e = 12$, en revanche il semble ne pas y avoir de 10-uplet arithmétique issu de 853 ou 3877 ou 1277 ...; cependant, on sait d'après le théorème de Green-Tao [10] qu'il existe de tels n -uplets pour tout n . Pour les exhiber, il faut,

conformément au théorème 4 de [12], avoir une raison $e = 0(7\#)$; effectivement par exemple pour $e = 210$ on aura le représentant (199, 409, ..., 2089) et pour $e = 630$ on aura le représentant (964417, 965047, ..., 970087)...

La différence entre les deux situations est normale en ce sens que la liaison sur les écarts dans le cas arithmétique limite le nombre de représentants par rapport aux n-uplets libres ([13]).

-Cas $na = 2$, $npf = 2$:

-PROPRIETE 23.

Pour un couple (k, r) tel que $na = npf = 2$, le point fixe $f (> 1)$ sera appelé nombre s-remarquable: il est le seul entier strictement supérieur à 1 qui soit égal à la somme des puissances k de sa puissance r ; il est par ailleurs, le seul attracteur autre que 1, de la transformation.

Toutes les transformations S_k^r possédant un nombre fini d'attracteurs, il existe un nombre fini d'entiers s-remarquables (ce sont bien sûr aussi, a fortiori, des nombres remarquables). Mais, pas d'exemple à citer pour le moment !

-Cas $na = 2$, $npf = 1$:

-PROPRIETE 24.

Pour un couple (k, r) tel que $na = 2$, $npf = 1$, le cycle correspondant $C_m(f_1, \dots, f_m)$, $m > 1$, sera appelé cycle s-remarquable: les $\{f_i, (1 \leq i \leq m)\}$ constituent le seul ensemble d'entiers qui se déduisent les uns des autres en faisant la somme des puissances k des chiffres du prédécesseur à la puissance r ; il est par ailleurs, le seul attracteur autre que 1, de la transformation.

Toutes les transformations S_k^r possédant un nombre fini d'attracteurs, il existe un nombre fini de cycles (d'ordre $m > 1$) s-remarquables; citons le cycle $C_8(4, \dots, 145)$ du cas $(k = 2, r = 1)$ associé aux nombres malheureux et probablement le cycle $C_{40}(15421, \dots, 27044)$ du cas $(k = 2, r = 205)$.

-Cas $npf > 1$, $na \geq 2$:

Dès que $npf > 1$, (na quelconque ≥ 2), s'il existe un point fixe f tel que $T_0(f) = k$, alors f est un nombre r -narcissique parfait (ou r -PPDI) d'ordre k .

Les entiers 9 et 205 sont à la fois 2-PPDI et remarquables; ces remarquables 2-PPDI sont les seuls points fixes, strictement plus grand que 1, de leur transformation S_k^r associée, ayant en outre exactement k chiffres. (Par ailleurs pour 9, la transformation correspondante est telle que $na = 3$, et pour 205, elle est telle que $na = 7$).

-PROBLEMES OUVERTS.

-1)Existe-t-il de tels nombres s-remarquables ?

-2)Existe-t-il des entiers r -PPDI qui soient aussi s-remarquables ?

-REMARQUE 11: sur les antécédents.

Pour toutes les transformations S_k^r , tous les nombres appartenant à un attracteur (un cycle ou un point fixe) ont nécessairement au moins un antécédent; en revanche, dans l'intervalle de convergence $[0, 10^{p^*-1}]$, il existe beaucoup de nombres qui n'ont aucun antécédent dans cet intervalle. Par exemple pour $k = 2$, $r = 2$, on a $p^* = 4$ et dans l'intervalle de convergence $[0, 999]$, il y a seulement 247 nombres avec au moins un antécédent (le plus grand de ces nombres étant 362). Le nombre d'antécédent(s) peut être très supérieur à 1, en particulier pour les éléments d'un attracteur; pour notre cas particulier précédent, on a par exemple les éléments du cycle $C_3(126, 175, 74)$ qui ont respectivement 14, 18 et 8 antécédents cependant que les nombres 29 et 49 (qui n'appartiennent à aucun attracteur) en possèdent 7.

4- QUELQUES AUTRES TRANSFORMATIONS AGREABLES.

-La définition 3 des transformations agréables peut recouvrir beaucoup d'autres exemples que nos T_k et autres S_k^r (et pourrait concerner aussi des applications dans $Z, R, C, R^2 \dots$).

Un exemple trivial dans N avec:

$$(5) \quad F_1^{3r}: n \rightarrow n/2 \text{ si } n \text{ pair, } (n + 3^r)/2 \text{ si } n \text{ impair, } r \text{ quelconque positif ou nul.}$$

On montrera facilement que, pour tout r , ces transformations possèdent exactement $r+1$

singularités: un point fixe 3^r et r cycles d'éléments tous inclus dans $[1, 3^r]$ d'ordres 2, 2.3, $2.3^2, \dots, 2.3^{r-1}$. Ces cycles sont $C_2(3^{r-1}, 2.3^{r-1}), C_6(3^{r-2}.(7, 8, 4, 2, 1, 5)), \dots$

Toutes ces $F_1^{3^r}$ sont entièrement déterminées et sont des transformations agréables.

dir /od -Un autre exemple, toujours inspiré du classique problème de Syracuse-Collatz. Considérons la transformation associée à la conjecture de Syracuse ([14]), définie sous sa forme compressée:

$$(6) \quad \text{Syr: } n \rightarrow n/2 \text{ si } n \text{ pair, } (3*n + 1)/2 \text{ si } n \text{ impair.}$$

On sait qu'elle possède le cycle $C_2(1, 2)$; si la conjecture était démontrée, la transformation $\text{Syr}(n)$ serait agréable et le cycle C_2 serait s-remarquable...

On peut considérer la transformation composée $T_1 \circ \text{Syr}$:

$$(7) \quad n \rightarrow T_1(\text{Syr}(n)).$$

Pour n tel que $T_0(n) = p$, on a $\text{Syr}(n) < 3.10^p$ et donc (ce transformé étant au plus un nombre à $p+1$ chiffres): $T_1(\text{Syr}(n)) \leq 9(p + 1)$ et comme il y a convergence dans $[0, 10^2[$ (cf. propriété 2), le seul attracteur est le cycle C_2 .

La transformation $(T_1 \circ \text{Syr})$ est donc agréable, que Syr le soit ou pas.

- **Persistance multiplicative d'un entier.**

Etant donné un nombre entier strictement positif n à p chiffres notés c_i , considérons:

$$(8) \quad n \rightarrow M(n) = \prod 1^{p c_i}.$$

L'itération associée converge toujours vers un point fixe $\text{pers}(n)$ (qui peut être 0 si l'un des chiffres de n est un 0) et il est généralement conjecturé que l'on a toujours $\text{pers}(n) \leq 11$.

Il existe une variante due à Erdős, $M^*(n)$ où l'on ne tient pas compte des 0 de n ; même si dans ce cas on ne sait pas trouver la borne, il y a certainement convergence vers un maximum strictement supérieur à 11.

Les deux transformations $M(n)$ ou $M^*(n)$ associées à la persistance multiplicative sont agréables.

CONCLUSION

Après avoir développé les définitions et propriétés générales concernant les transformations agréables et rappelé leur utilisation pour les classiques nombres heureux ([6]), malheureux et narcissiques parfaits ([3]), nous développons une technique de calcul pour améliorer à la baisse les temps de calcul des points fixes et autres attracteurs des itérations associées.

Grâce à cela, en définissant une nouvelle classe de transformations agréables, nous avons pu montrer qu'il existe un nombre fini d'entiers remarquables, qui ont une propriété unique et spécifique; nous en fournissons une large représentation.

Nous avons défini enfin une nouvelle classe de nombres narcissiques parfaits, nommés r -PPDI ou nombres r -narcissiques parfaits et nous avons montré qu'ils sont en nombre fini; les 10 plus petits nombres r -narcissiques parfaits ont été calculés.

Pour finir, nous avons donné quelques remarques en liaison avec les nombres premiers et les constellations de premiers ([10], [12], [13]), ainsi que quelques exemples (non exhaustifs) d'autres transformations agréables possibles.

(*)Professeur honoraire Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Webmaster du site SAYRAC.

(**) En fait, pour déterminer tous les attracteurs autres que le point fixe trivial 1, il suffira de chercher la convergence de tous les entiers de $[2, 10^{p^*-1} - 1]$ qui ont au moins un antécédent (un élément d'un attracteur devant avoir nécessairement au moins un antécédent); on pourra aussi exclure (avec quelque précaution) les multiples de 10, puisque l'itéré de tout nombre de la forme $\{n10^m, \text{ pour tout } m \geq 1\}$ est le même que celui de n , pour tout couple donné de valeurs (k, r) .

REFERENCES

- [1] M. Rumney, Digital Invariants, *Recr. Math. Mag.* No. 12, 6-8, Dec. 1962.
- [2] M. Gardner, *The incredible Dr. Matrix*, New York, Charles Scribner's Sons, 1976.
- [3] J.S. Madachy, Narcissistic Numbers, *Madachy's Mathematical Recreations*. New York: Dover, pp. 163-173, 1979.
- [4] L.E. Deimel, M. T. Jones, Finding Pluperfect Digital Invariants: Techniques, Results and Observations, *J. Recr. Math.* 14, 97-108, 1981.
- [4'] L.E.Deimel, *Journal of Recreational Mathematics*, [Selected papers](#) .
- [4''] L.E.Deimel, [liste des 88 PPDJ](#) .
- [5] J.Roberts, *The Lure of the Integers*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., p. 35, 1992.
- [6] H.G. Grundman, E.A.Teeple, Generalized Happy Numbers, *Fibonacci Quarterly*, Vol. 39, Part 5, pp. 462-466, 2001.
- [7] Mihailescu P, Bernoulli numbers and the proof of Catalan's conjecture, *European Congress of Mathematics*, Zürich, EMS, p. 325-340, 2005.
- [8] A.Gougam, J.Baglio, The number 26, between 25 and 27, résolution of the diophantine equation y^3-x^2 , [The number 26 ...](#), 2006.
- [9] R.L.Clerc, Transformations agréables ([agreable.php](#)), communication privée, 2007.
- [10] Ben J. Green, Terence Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Annals of Mathematics*, vol. 167, p. 481-547,([arXiv math.NT/0404188](#)), 2008.
- [11] R.L.Clerc, Quelques nombres remarquables et une nouvelle classe de nombres r-narcissiques parfaits ([rppdi.php](#)), communication privée, 2008.
- [12] R.L.Clerc, Sous-ensembles et constellations arithmétiques de nombres premiers, p.1-10, (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03589472>), 2022.
- [13] R.L.Clerc, Constellations quelconques de nombres premiers, p.1-11, (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03606289>), 2022.
- [14] Terence Tao, Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values, p.1-58, [arXiv:1909.03562](#), 2022.
-