

Filtre de Kalman

Jules Guillot

- Le filtre de Kalman est utilisé pour l'**assimilation de données**, météorologiques ou océanographiques par exemple.
- Il combine de façon optimale:
 - un **modèle** d'évolution du système
 - des **données** d'observations bruitées

C'est une approche **couplage modèle-données**.

Assimilation de données

ASSIMILATION DE DONNÉES

- Reconstruire les **états vraisemblables** de la réalité à partir des **données d'observations**

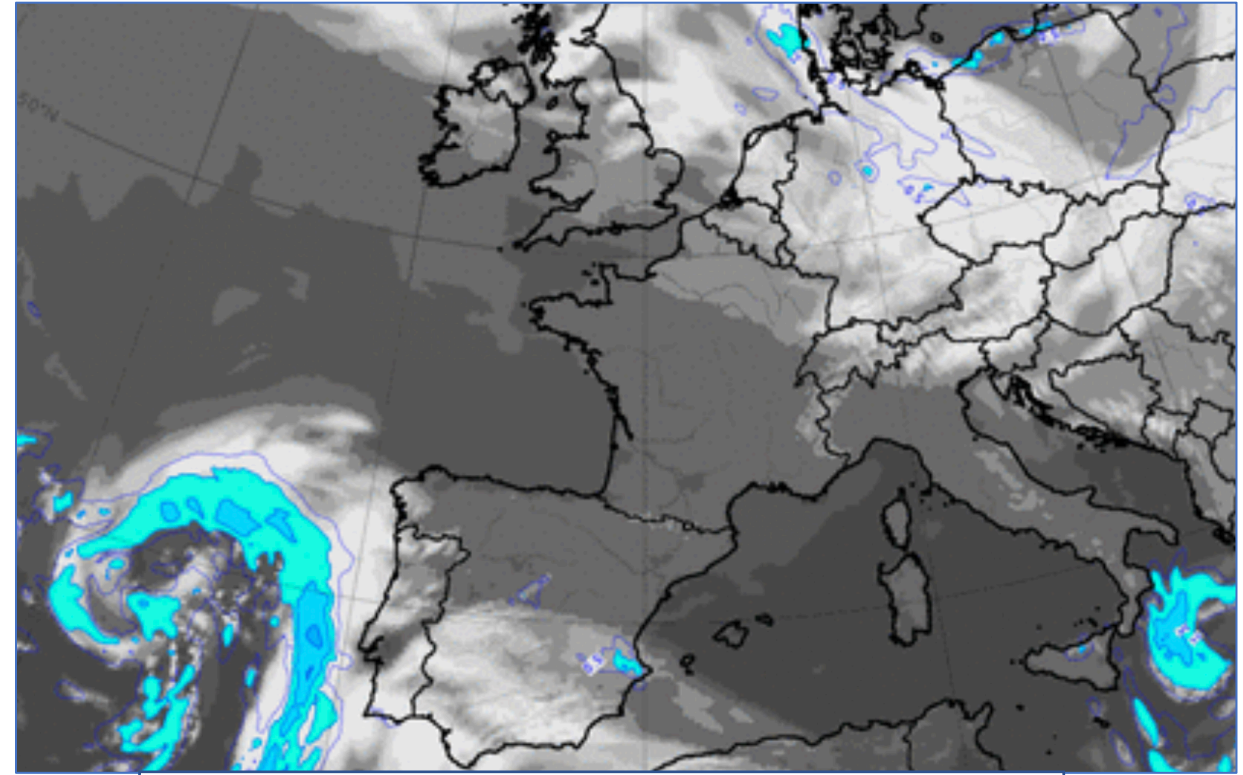
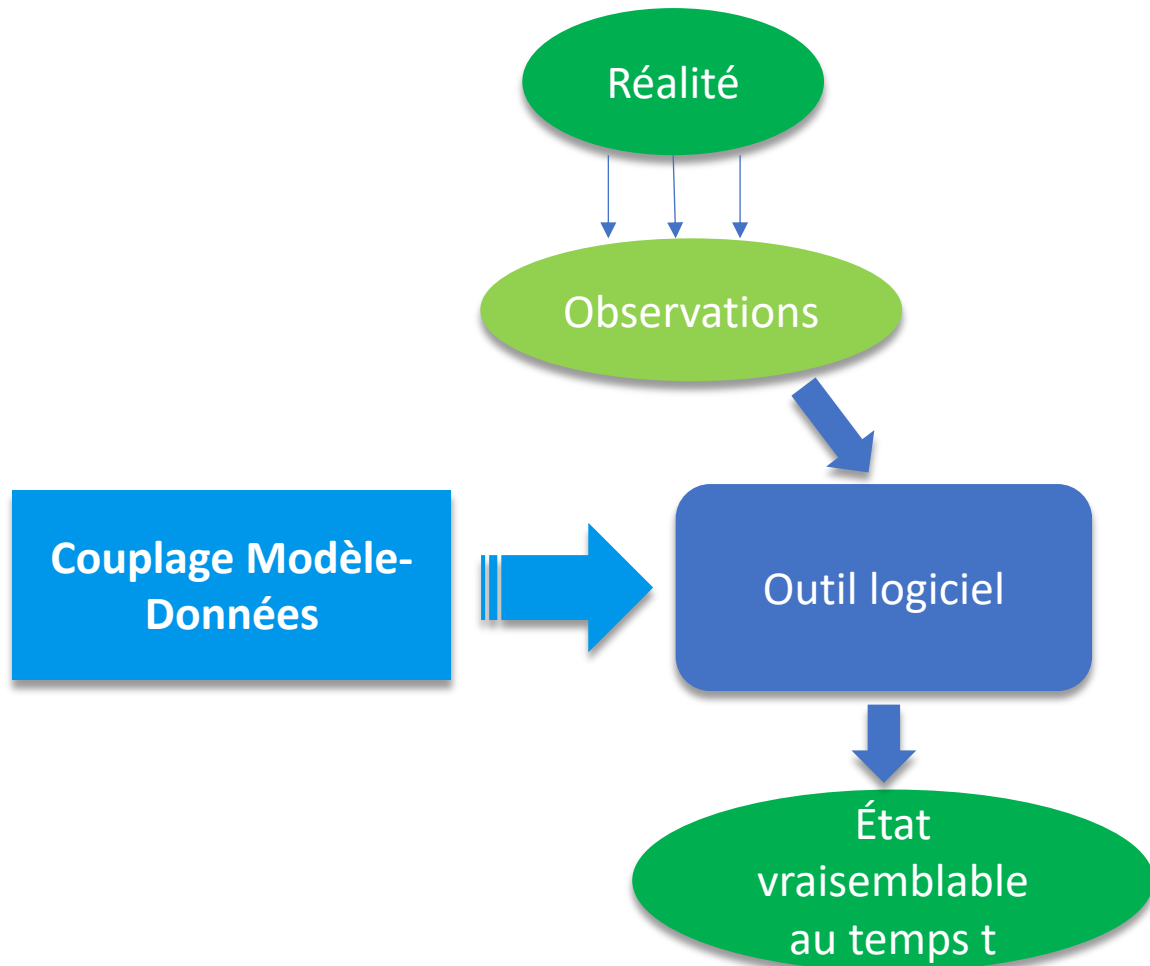


Image Satellite et pluie prévue
(Arpege model) © Météo-France

Assimilation de données

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \end{cases}$$

- t temps discret
- \mathbf{x}_t état réel, vecteur de \mathbb{R}^n
- \mathbf{y}_t observation associée, vecteur de \mathbb{R}^p
- \mathbf{M} modèle basé sur des EDPs ou EDOs
- \mathbf{H} opérateur d'observation, généralement linéaire
- $\boldsymbol{\eta}_t$ erreur du modèle
- $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ erreur d'observation

Les incertitudes sont iid:

- $\boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_t)$
- $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_t)$

Les matrices de variance-covariance des erreurs:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_t &= \text{Cov}(\boldsymbol{\eta}_t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t^T] \\ \mathbf{R}_t &= \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T] \end{aligned}$$

Filtre de Kalman

- 1°) **Prédiction**
- 2°) **Filtrage** (analyse)

Approche Bayésienne

1°) Prédiction

On s'intéresse uniquement au cas gaussien, en supposant que:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{t-1}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}_t^f, \mathbf{P}_t^f)$$

- \mathbf{x}_t^f le prédicteur de \mathbf{x}_t , avec $\mathbf{E}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^f) = \mathbf{0}$
- $\mathbf{P}_t^f = \mathbf{Cov}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^f)$ la matrice de variance-covariance des erreurs de prédiction

Approche Bayésienne

2°) Filtrage

On s'intéresse uniquement au cas gaussien, en supposant que:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}_t^a, \mathbf{P}_t^a)$$

- \mathbf{x}_t^a l'état filtré (analysé) de \mathbf{x}_t , avec $\mathbf{E}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a) = \mathbf{0}$
- $\mathbf{P}_t^a = \mathbf{Cov}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)$ la matrice de variance-covariance des erreurs de filtrage

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

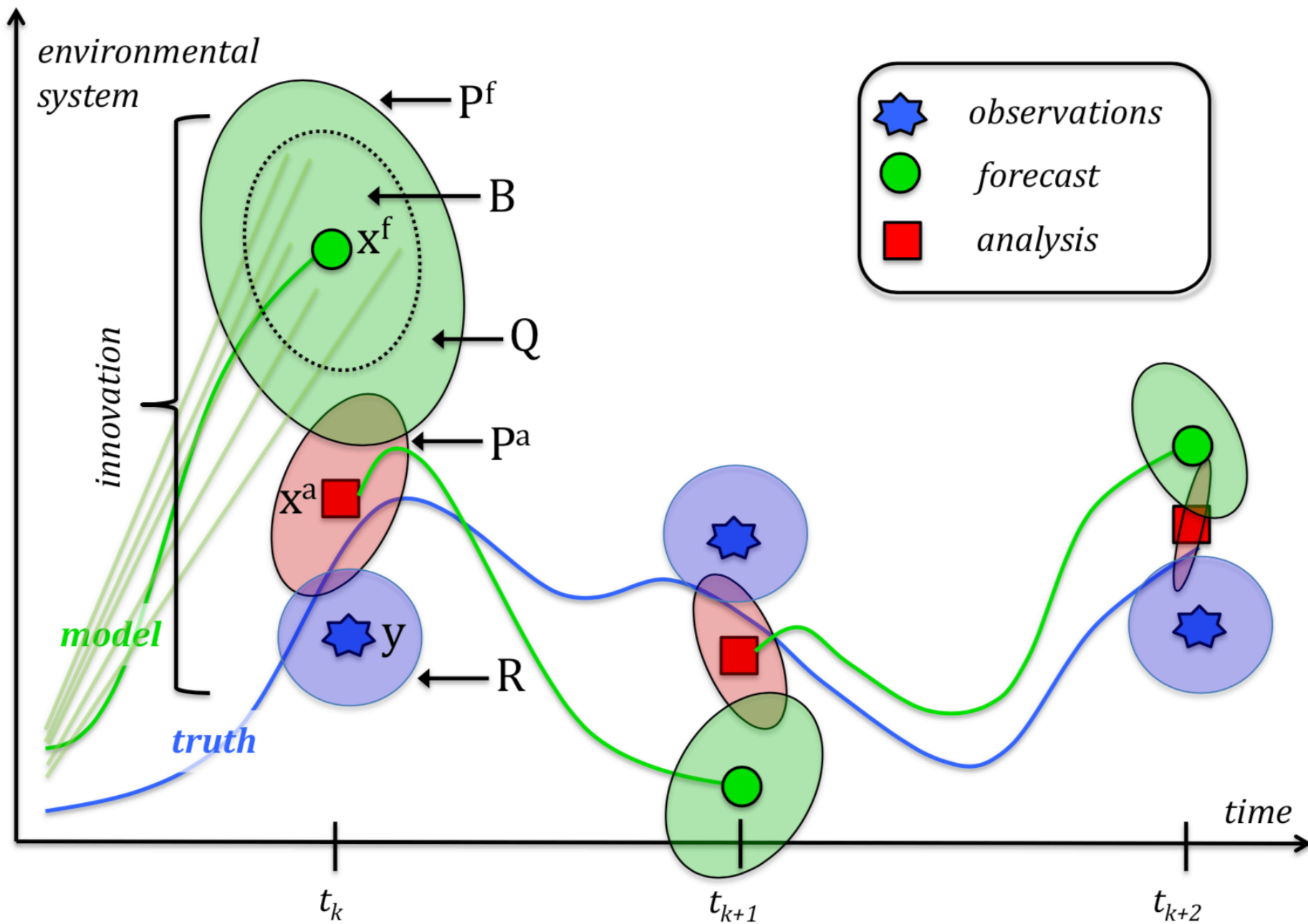
2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$



Assimilation de données séquentielle de Tandeo et al.(2019)

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$

1°) Prédiction: calcul de x_t^f

On a : $\mathbf{x}_t = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t$

Et \mathbf{x}_{t-1}^a est le dernier estimateur de \mathbf{x}_{t-1}

D'où : $\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$

1°) Prédiction: calcul de P_t^f

$$\begin{aligned}P_t^f &= \text{Cov}(x_t - x_t^f) \\&= \text{Cov}(Mx_{t-1} + \eta_t - Mx_{t-1}^a) \\&= \text{Cov}(M(x_{t-1} - x_{t-1}^a) + \eta_t) \\&= E[(M(x_{t-1} - x_{t-1}^a) + \eta_t)(M(x_{t-1} - x_{t-1}^a) + \eta_t)^T] \\&= E[(M(x_{t-1} - x_{t-1}^a) + \eta_t)((x_{t-1} - x_{t-1}^a)^T M^T + \eta_t^T)] \\&= E[M(x_{t-1} - x_{t-1}^a)(x_{t-1} - x_{t-1}^a)^T M^T + M(x_{t-1} - x_{t-1}^a)\eta_t^T + \eta_t(x_{t-1} - x_{t-1}^a)^T M^T + \eta_t \eta_t^T] \\&= E[M(x_{t-1} - x_{t-1}^a)(x_{t-1} - x_{t-1}^a)^T M^T] + E[M(x_{t-1} - x_{t-1}^a)\eta_t^T] + E[\eta_t(x_{t-1} - x_{t-1}^a)^T M^T] + E[\eta_t \eta_t^T] \\&= ME[(x_{t-1} - x_{t-1}^a)(x_{t-1} - x_{t-1}^a)^T] M^T + \underbrace{ME[x_{t-1} - x_{t-1}^a]}_0 E[\eta_t^T] + E[\eta_t] \underbrace{E[(x_{t-1} - x_{t-1}^a)^T M^T]}_0 + Q_t \\&= MP_{t-1}^a M^T + Q_t\end{aligned}$$

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f \rightarrow \text{Innovation}$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$

2°) Filtrage: l'innovation

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f \quad \text{avec } \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f = \mathbf{y}_t^f : \text{le pr\u00e9dicteur de } \mathbf{y}_t$$

➤ Possibilit\u00e9 de g\u00e9n\u00e9rer de nouvelles observations \mathbf{y}_t^f

$$\text{Cov}(\mathbf{d}_t) = \mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t$$

2°) Filtrage: calcul de Cov(d_t)

$$\begin{aligned}\text{Cov}(d_t) &= \text{Cov}(y_t - Hx_t^f) \\ &= \text{Cov}(Hx_t + \varepsilon_t - Hx_t^f) \\ &= \text{Cov}(H(x_t - x_t^f) + \varepsilon_t) \\ &= E[(H(x_t - x_t^f) + \varepsilon_t)(H(x_t - x_t^f) + \varepsilon_t)^T] \\ &= E[(H(x_t - x_t^f) + \varepsilon_t)((x_t - x_t^f)^T H^T + \varepsilon_t^T)] \\ &= E[H(x_t - x_t^f)(x_t - x_t^f)^T H^T + H(x_t - x_t^f)\varepsilon_t^T + \varepsilon_t(x_t - x_t^f)^T H^T + \varepsilon_t \varepsilon_t^T] \\ &= E[H(x_t - x_t^f)(x_t - x_t^f)^T H^T] + E[H(x_t - x_t^f)\varepsilon_t^T] + E[\varepsilon_t(x_t - x_t^f)^T H^T] + E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] \\ &= HE[(x_t - x_t^f)(x_t - x_t^f)^T]H^T + \underbrace{HE[x_t - x_t^f]}_0 E[\varepsilon_t^T] + \underbrace{E[\varepsilon_t]}_0 E[(x_t - x_t^f)^T H^T] + R_t \\ &= HP_t^f H^T + R_t\end{aligned}$$

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$x_t^f = Mx_{t-1}^a$$

$$P_t^f = MP_{t-1}^a M^T + Q_t$$

2°) Filtrage

$$d_t = y_t - Hx_t^f$$

$$K_t = P_t^f H^T (H P_t^f H^T + R_t)^{-1} \rightarrow \text{Gain de Kalman}$$

$$x_t^a = x_t^f + K_t d_t$$

$$P_t^a = (I - K_t H) P_t^f$$

2°) Filtrage: calcul du gain de Kalman

- On pose: $\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t \mathbf{d}_t$ avec \mathbf{K}_t matrice de taille (n,p)
- Le but est de trouver le gain optimal \mathbf{K}_t , minimisant l'erreur en moyenne quadratique suivante: $\mathbf{E}[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)^T (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)]$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)^T (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)] &= \text{tr} \mathbf{E}[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)^T] \quad (\text{car la trace d'un scalaire reste un scalaire}) \\ &= \text{tr} \mathbf{E}[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)^T] \rightarrow \text{voir Preuve 1} \\ &= \text{tr} \mathbf{P}_t^a \end{aligned}$$

Preuve 1

Montrer que : $\text{tr } E[x^T x] = \text{tr } E[xx^T]$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{et} \quad \text{tr } E[x^T x] = E[x^T x] = E\left[\sum_{i=1}^n x_i^2\right] = \sum_{i=1}^n E[x_i^2]$$

$$E[xx^T] = \begin{pmatrix} E[x_1^2] & \cdots & E[x_1 x_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[x_n x_1] & \cdots & E[x_n^2] \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{tr } E[xx^T] = \sum_{i=1}^n E[x_i^2]$$

Donc : $\text{tr } E[x^T x] = \text{tr } E[xx^T]$

2°) Filtrage: calcul du gain de Kalman

On calcule ensuite P_t^a :

$$\begin{aligned}P_t^a &= \text{Cov}(x_t - x_t^a) \\&= \text{Cov}(x_t - (x_t^f + K_t d_t)) \\&= \text{Cov}(x_t - (x_t^f + K_t (y_t - Hx_t^f))) \\&= \text{Cov}(x_t - (x_t^f + K_t (Hx_t + \varepsilon_t - Hx_t^f))) \\&= \text{Cov}(x_t - x_t^f - K_t (H(x_t - x_t^f) + \varepsilon_t)) \\&= \text{Cov}((I - K_t H)(x_t - x_t^f) - K_t \varepsilon_t)\end{aligned}$$

2°) Filtrage: calcul du gain de Kalman

Suite du calcul :

$$\begin{aligned} P_t^a &= \text{Cov}((I-K_t H)(x_t - x_t^f) - K_t \varepsilon_t) \\ &= E[((I-K_t H)(x_t - x_t^f) - K_t \varepsilon_t)((I-K_t H)(x_t - x_t^f) - K_t \varepsilon_t)^T] \\ &= E[((I-K_t H)(x_t - x_t^f) - K_t \varepsilon_t)((x_t - x_t^f)^T (I-K_t H)^T - (K_t \varepsilon_t)^T)] \\ &= E[(I-K_t H)(x_t - x_t^f)(x_t - x_t^f)^T (I-K_t H)^T - (I-K_t H)(x_t - x_t^f)(K_t \varepsilon_t)^T - K_t \varepsilon_t (x_t - x_t^f)^T (I-K_t H)^T + (K_t \varepsilon_t)(K_t \varepsilon_t)^T] \\ &= E[(I-K_t H)(x_t - x_t^f)(x_t - x_t^f)^T (I-K_t H)^T] - E[(I-K_t H)(x_t - x_t^f)(K_t \varepsilon_t)^T] - E[K_t \varepsilon_t (x_t - x_t^f)^T (I-K_t H)^T] + E[K_t \varepsilon_t \varepsilon_t^T K_t^T] \\ &= (I-K_t H)P_t^f (I-K_t H)^T - (I-K_t H)E[x_t - x_t^f]E[(K_t \varepsilon_t)^T] - K_t E[\varepsilon_t]E[(x_t - x_t^f)^T (I-K_t H)^T] + K_t E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] K_t^T \\ &= \mathbf{(I-K_t H)P_t^f (I-K_t H)^T + K_t R_t K_t^T} \end{aligned}$$

2°) Filtrage: calcul du gain de Kalman

On développe la formule précédente de P_t^a :

$$\begin{aligned} P_t^a &= (I - K_t H) P_t^f (I - K_t H)^T + K_t R_t K_t^T \\ &= (P_t^f - K_t H P_t^f) (I - K_t H)^T + K_t R_t K_t^T \\ &= (P_t^f - K_t H P_t^f) (I - H^T K_t^T) + K_t R_t K_t^T \\ &= P_t^f - P_t^f H^T K_t^T - K_t H P_t^f + K_t H P_t^f H^T K_t^T + K_t R_t K_t^T \\ &= \mathbf{P_t^f - P_t^f (K_t H)^T - K_t H P_t^f + K_t (H P_t^f H^T + R_t) K_t^T} \end{aligned}$$

2°) Filtrage: calcul du gain de Kalman

➤ On cherche \mathbf{K}_t minimisant : $\mathbf{E}[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)^T (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^a)] = \text{tr } \mathbf{P}_t^a$

➤ Ce qui revient à étudier : $\frac{d \text{tr } \mathbf{P}_t^a}{d \mathbf{K}_t} = \mathbf{0}$ (car l'erreur est quadratique)

(C'est une notation désignant les dérivées partielles du scalaire $\text{tr } \mathbf{P}_t^a$ par rapport aux éléments de \mathbf{K}_t , rangées dans une matrice de même taille que \mathbf{K}_t)

Avec la formule de \mathbf{P}_t^a de la slide précédente on a :

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{P}_t^a &= \text{tr} (\mathbf{P}_t^f - \mathbf{P}_t^f (\mathbf{K}_t \mathbf{H})^T - \mathbf{K}_t \mathbf{H} \mathbf{P}_t^f + \mathbf{K}_t (\mathbf{H} \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t) \mathbf{K}_t^T) \\ &= \text{tr } \mathbf{P}_t^f - 2 \text{tr} (\mathbf{K}_t \mathbf{H} \mathbf{P}_t^f) + \text{tr} (\mathbf{K}_t (\mathbf{H} \mathbf{P}_t^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t) \mathbf{K}_t^T) \end{aligned}$$

$$\text{car } \text{tr} (\mathbf{P}_t^f (\mathbf{K}_t \mathbf{H})^T) = \text{tr} ((\mathbf{K}_t \mathbf{H} \mathbf{P}_t^f)^T) = \text{tr} (\mathbf{K}_t \mathbf{H} \mathbf{P}_t^f)$$

2°) Filtrage: calcul du gain de Kalman

$$\begin{aligned}\frac{d \operatorname{tr} P_t^a}{d K_t} &= \frac{d \operatorname{tr} P_t^f}{d K_t} - 2 \frac{d \operatorname{tr} (K_t H P_t^f)}{d K_t} + \frac{d \operatorname{tr} (K_t (H P_t^f H^T + R_t) K_t^T)}{d K_t} \\ &= -2 \frac{d \operatorname{tr} (K_t H P_t^f)}{d K_t} + \frac{d \operatorname{tr} (K_t (H P_t^f H^T + R_t) K_t^T)}{d K_t} \quad \text{car } P_t^f \text{ ne dépend pas de } K_t \\ &= -2 (H P_t^f)^T + \frac{d \operatorname{tr} (K_t (H P_t^f H^T + R_t) K_t^T)}{d K_t} \quad \rightarrow \text{voir Preuve 2} \\ &= -2 (H P_t^f)^T + 2 K_t (H P_t^f H^T + R_t) \quad \rightarrow \text{voir Preuve 3}\end{aligned}$$

Preuve 2

Montrer que $\frac{d\text{tr}(AB)}{dA} = B^T$

A de taille (n,p) et B (p,n)

On pose $Z = AB$ avec $z_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr} Z = \sum_{i=1}^n z_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki}$$

$$\frac{d\text{tr}(AB)}{da_{ij}} = b_{ji} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p$$

$$\text{Donc : } \frac{d\text{tr}(AB)}{dA} = B^T$$

Preuve 3

Montrer que $\frac{d\text{tr}(ABA^T)}{dA} = 2AB$ si B symétrique

A matrice de taille (n,p) et B (p,p)

On pose $Z = BA^T$ avec $z_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ik} a_{jk}$ et $X = AB$ avec $x_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$

On pose $Y = AZ$ avec $y_{ij} = \sum_{t=1}^p a_{it} z_{tj} = \sum_{t=1}^p a_{it} \sum_{k=1}^p b_{tk} a_{jk} = \sum_{t=1}^p \sum_{k=1}^p a_{it} b_{tk} a_{jk}$

$\text{tr}(ABA^T) = \text{tr} Y = \sum_{i=1}^n y_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^p \sum_{k=1}^p a_{it} b_{tk} a_{ik}$

Preuve 3: suite

Montrer que $\frac{d\text{tr}(ABA^T)}{dA} = 2AB$ si B symétrique

$$\begin{aligned}\frac{d\text{tr}(ABA^T)}{da_{ij}} &= \sum_{k=1}^p b_{jk} a_{ik} + \sum_{t=1}^p a_{it} b_{tj} \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + \sum_{t=1}^p a_{it} b_{tj} \quad \text{car B est symétrique} \\ &= 2x_{ij}\end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \frac{d\text{tr}(ABA^T)}{dA} = 2X = 2AB$$

2°) Filtrage: calcul du gain de Kalman

On a donc : $\frac{d \operatorname{tr} P_t^a}{d K_t} = -2(HP_t^f)^T + 2K_t(HP_t^f H^T + R_t) = 0$

D'où : $K_t(HP_t^f H^T + R_t) = (HP_t^f)^T = P_t^f H^T$

Donc : $K_t = P_t^f H^T \underbrace{(HP_t^f H^T + R_t)^{-1}}_{\operatorname{Cov}(d_t)}$

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$

2°) Filtrage: l'état filtré

$$\begin{aligned}x_t^a &= x_t^f + K_t d_t \\ &= x_t^f + K_t (y_t - Hx_t^f) \\ &= (\mathbf{I} - K_t \mathbf{H})x_t^f + K_t y_t\end{aligned}$$

- On remarque que le gain donne un certain poids à l'observation.
- L'état filtré est une combinaison optimale entre l'information fournie par le modèle (x_t^f) et celle fournie par l'observation (y_t): c'est un **couplage modèle-données**.

2°) Filtrage: l'état filtré

$$x_t^a = (I - K_t H)x_t^f + K_t y_t \quad \text{avec } K_t = P_t^f H^T (H P_t^f H^T + R_t)^{-1}$$

- On remarque que lorsque les observations sont très bruitées, la valeur de R_t augmente, faisant diminuer K_t . Ce qui donne moins d'importance aux observations.

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$

2°) Filtrage: calcul de P_t^a

On a :
$$K_t = P_t^f H^T (H P_t^f H^T + R_t)^{-1}$$

D'où :
$$K_t (H P_t^f H^T + R_t) = P_t^f H^T$$

$$K_t (H P_t^f H^T + R_t) K_t^T = P_t^f H^T K_t^T$$

$$K_t (H P_t^f H^T + R_t) K_t^T - P_t^f (K_t H)^T = 0$$

Or :
$$P_t^a = P_t^f - P_t^f (K_t H)^T - K_t H P_t^f + K_t (H P_t^f H^T + R_t) K_t^T \rightarrow \text{voir slide 23}$$

Donc :
$$\begin{aligned} P_t^a &= P_t^f - K_t H P_t^f \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}) \mathbf{P}_t^f \end{aligned}$$

Filtre de Kalman

1°) Prédiction

$$\mathbf{x}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{x}_{t-1}^a$$

$$\mathbf{P}_t^f = \mathbf{M}\mathbf{P}_{t-1}^a\mathbf{M}^T + \mathbf{Q}_t$$

2°) Filtrage

$$\mathbf{d}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^f$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_t^f\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$$

$$\mathbf{x}_t^a = \mathbf{x}_t^f + \mathbf{K}_t\mathbf{d}_t$$

$$\mathbf{P}_t^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H})\mathbf{P}_t^f$$