



HAL
open science

Modélisation des jets subsoniques fortement chauffés

Laurent Joly, Aji Purwanto, Gilles Harran, Patrick Chassaing

► **To cite this version:**

Laurent Joly, Aji Purwanto, Gilles Harran, Patrick Chassaing. Modélisation des jets subsoniques fortement chauffés. *Revue Générale de Thermique*, 1997, 3 (2), pp.99-112. 10.1016/S0035-3159(99)80055-5 . hal-03609977

HAL Id: hal-03609977

<https://hal.science/hal-03609977v1>

Submitted on 16 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation des jets turbulents subsoniques fortement chauffés

Laurent Joly^{1*}, Aji Purwanto¹, Gilles Harran² et Patrick Chassaing²

¹ *Ensica, 1, place Émile-Blouin, 31056 Toulouse cedex 5, France*

² *Institut de mécanique des fluides de Toulouse (IMFT), allée du Professeur Camille-Soula, 31500 Toulouse, France*

Summary — The modelling of highly-heated subsonic turbulent jets. Among different approaches of the statistic treatment of the transport equations for variable-density fluid flows, a formulation is adopted which isolates the turbulent mass-fluxes contribution. It deals with centred statistical moments only. This choice enables the discussion of the transposal of constant-density closure-schemes to mass-weighted variables of heated free shear flows. The discussion focuses on first- and second-order closures for diffusion terms. The content of standard closure schemes in Favre variables is detailed. Concluding points are given concerning the relevancy of the different initial statistical treatments to set the proper formal frame for deriving closure-schemes. Parabolic numerical simulations of heated jets including first- and second-order closures are then examined. The prediction of experimentally-asserted features of density effects on the mean field of variable density jets is verified. Some effects on turbulent quantities are underlined too. Comparaisons between mass-fluxes predicted at first- and second-order reveal that a first-order closure is likely to be sufficient.

turbulence modelling / statistical treatment / jets / heated jets / turbulent mass fluxes / density effects / heat transfer / self-preservation

Résumé — Après un retour sur les différentes alternatives de traitement statistique des équations d'évolution d'un fluide à masse volumique variable, une formulation qui explicite la contribution des flux turbulents de masse est adoptée. Celle-ci ne manipule en effet que des grandeurs statistiques centrées. Dans ce cadre, on discute la transposition des modélisations à masse volumique constante aux variables pondérées de l'écoulement non isotherme. La discussion porte essentiellement sur les fermetures au premier et au second ordre pour les termes de diffusion. Le contenu des modèles usuels en variables de Favre est détaillé. On propose de conclure quant au potentiel de fermeture des alternatives de formulation initiales. On illustre ensuite l'intérêt de simulations numériques paraboliques par fermetures au premier et au second ordre de jets turbulents chauffés. La restitution de l'effet de densité sur les évolutions des grandeurs moyennes sur l'axe des jets est démontrée. La sensibilité de caractéristiques de la turbulence au rapport de densité initial est abordée. On apporte enfin quelques éléments pour juger de la qualité comparée des deux ordres de fermeture notamment pour la prédiction des flux turbulents de masse.

modélisation / turbulence / traitement statistique / jets / jets chauffés / flux turbulents de masse / effets de densité / transferts de chaleur / similitude

Nomenclature

A_1	constantes numériques des lois d'évolution en région de similitude inertielle	
d	diamètre du jet	m
D_o	débit massique dans la section d'émission du jet	kg.s ⁻¹
$\tilde{D}_{i,j}$	tenseur des déformations moyennes	s ⁻¹
$\tilde{\tilde{D}}_{i,j}$	tenseur des déformations moyennes pondérées	s ⁻¹
F	nombre de Froude du jet	

g	accélération de la pesanteur
J_o	flux de quantité de mouvement dans la section d'émission du jet
K'_{uv}	penne à l'origine du profil de la contrainte de cisaillement turbulent $\overline{u'v'}$
\bar{k}	énergie cinétique du mouvement fluctuant centré
\tilde{k}	énergie cinétique du mouvement fluctuant au sens de Favre
M_t	nombre de Mach de turbulence
Re	nombre de Reynolds
S_ρ	rapport de densité à l'émission
\bar{T}	température moyenne
\bar{U}_i	vitesse moyenne centrée $i = 1, 2, 3$
u'_i	fluctuation de vitesse relative à la moyenne centrée

* Correspondance et tirés à part

\tilde{U}_i	vitesse moyenne pondérée par la masse moyenne de Favre	$m \cdot s^{-1}$
u_i''	fluctuation de vitesse relative à la moyenne pondérée	$m \cdot s^{-1}$
U_d	échelle de vitesse basée sur les caractéristiques dynamiques du jet en section d'émission	$m \cdot s^{-1}$
x	coordonnée longitudinale du jet	m
x^*	origine fictive des lois d'évolution en région de similitude	m
y, r	coordonnées transversales du jet	m

Lettres grecques

δ_{ij}	symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$	
ε	taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence	$m^2 \cdot s^{-3}$
ν_t	viscosité cinématique de la turbulence	$m^2 \cdot s^{-1}$
ρ	masse volumique	$kg \cdot m^{-3}$
σ_ρ	nombre de Prandtl-Schmidt turbulent	
θ'	fluctuation de la température	K
\mathcal{X}_d	échelle de longueur basée sur les caractéristiques dynamiques du jet à l'émission ou diamètre équivalent	m

Indices

0	grandeurs relatives à la section d'émission du jet
jet	grandeurs données sur l'axe du jet en section d'émission
axe	grandeurs données sur l'axe du jet en section quelconque
amb	grandeurs relatives au milieu ambiant

1. INTRODUCTION

Les jets suboniques fortement chauffés relèvent des écoulements cisailés libres à masse volumique variable et à faible nombre de Mach. A ce titre ils sont représentatifs des phénomènes physiques de transferts turbulents de chaleur et de quantité de mouvement hors effets de compressibilité et en l'absence de paroi. L'intensité relative des forces de flotabilité vis-à-vis des forces d'inertie peut faire passer du régime de jet inertiel à celui de panache. Nous nous placerons dans le premier cas, soit dans la région de jet inertiel telle qu'elle a été précisée par Joly et al (1994). Le caractère simplifié de cette situation facilite l'analyse des effets de contraste massique (Thring et al, 1953 ; Pitts, 1986 ; Dahm et al, 1987 ; Stepowski et al, 1988 ; Richards et al, 1993 ; Ruffin et al, 1994) et de leur représentation par les fermetures aux moments statistiques (Chassaing, 1979 ; Shih et al, 1987 ; Panchapakesan et al, 1993). Elle est également adaptée à la conduite de campagnes expérimentales (Sforza et al, 1978 ; Chassaing, 1979 ; Zhu et al, 1989 ; Sahr, 1990 ;

Djeridane, 1994 ; Sautet et al, 1995) qui fournissent très classiquement une référence vis-à-vis de laquelle ces modélisations sont évaluées.

Le caractère succinct de la physique des jets chauffés en limite cependant la portée applicative directe à des situations de mélange telles qu'à la sortie des réacteurs double-flux, ou à la frontière libre d'un jet de paroi pour le refroidissement des aubes des turbines de turbomachines. Malgré cette restriction, la stratégie générale d'étalonnage progressif des modèles de turbulence, en référence à des configurations de complexité croissante, fait envisager le jet libre comme une première étape vers la simulation de cas industriels complets. C'est dans cette perspective que se place cette contribution, en s'attachant à l'examen d'alternatives premières dans la mise en œuvre des modélisations de la turbulence.

La communauté scientifique concernée par l'élaboration et la mise en œuvre des fermetures en un point, dans le cadre des écoulements turbulents à masse volumique variable et basse vitesse, se préoccupe depuis quelque temps de la nécessité d'une formulation pondérée par la masse volumique telle qu'initialement proposée par Favre (1965). Nous ferons le point sur la nature des autres propositions pour dégager le contenu implicite des fermetures en variables de Favre.

Nous allons donc envisager deux aspects des jets chauffés turbulents. Le premier concerne le traitement statistique des équations et certaines précisions sur l'étape de fermeture dans le cadre d'écoulements turbulents cisailés minces subsoniques, stationnaires en moyenne et à grand nombre de Reynolds de turbulence. Une deuxième partie traite des aspects analytiques du comportement des jets chauds. La réflexion s'appuie sur les résultats d'une procédure numérique de simulation des jets non isothermes par fermeture au premier ou au second ordre.

2. STRATÉGIES DE FERMETURE ET FORMULATIONS STATISTIQUES

Nous revenons, en premier lieu, sur les questions de formulation statistique des équations d'évolution du fluide à masse volumique variable pour aborder ensuite les conséquences de celles-ci en terme de potentiel de fermeture.

2.1. ALTERNATIVES DE FORMULATION DES ÉQUATIONS AUX MOMENTS

La formulation la plus couramment utilisée est celle proposée par Favre (1965). Nous allons revenir sur cette formulation en montrant qu'elle recouvre un

choix de regroupements des termes générés par les non-linéarités liées aux produits par la masse volumique. Ce point de vue permet de mieux situer deux approches récentes, (Chassaing, 1985 ; Shih et al, 1987) dont la première est celle retenue dans cet exposé.

Dans les équations d'évolution des moments statistiques de l'écoulement turbulent à masse volumique constante, l'apparition de corrélations d'ordre $n + 1$ dans l'équation aux moments d'ordre n est le résultat de la non-linéarité d'ordre deux du terme d'advection. En situation d'écoulement turbulent à masse volumique variable, cette non-linéarité est alors d'ordre trois et une non-linéarité d'ordre deux émerge de la seule quantité transportée. Soit $\bar{\Phi}$ cette dernière, ie, une composante de la vitesse ou un scalaire, la contribution moyenne des produits $\rho\bar{\Phi}$ et $\overline{\rho\Phi U_i}$ donne lieu à la somme de termes suivants :

$$\overline{\rho\bar{\Phi}} = \bar{\rho}\bar{\Phi} + \overline{\rho'\bar{\Phi}} \quad (1)$$

$$\overline{\rho\Phi U_i} = \bar{\rho}\bar{\Phi}\bar{U}_i + \overline{\rho\Phi'U_i} + \overline{\rho'\Phi U_i} + \overline{\rho'U_i\bar{\Phi}} + \overline{\rho'\Phi'U_i} \quad (2)$$

En suivant Chassaing (1985) et Chassaing et al (1994), on montre donc que la proposition de Favre consiste à opérer un regroupement des deux termes de l'équation (1) pour former la quantité $\bar{\rho}\tilde{\Phi}$ et à constituer deux groupes à partir des cinq termes du second membre de (2) :

$$\overline{\rho\Phi U_i} = \bar{\rho}\tilde{\Phi}\bar{U}_i + \overline{\rho\Phi''U_i} \quad (3)$$

où Φ'' et U_i'' sont des fluctuations relatives aux moyennes pondérées, $\tilde{\Phi}$ et \bar{U}_i .

L'alternative due à Chassaing (1985) va dans le sens d'une description moins synthétique des différentes corrélations issues des non-linéarités. Le seul regroupement est opéré sur les quantités $\overline{\rho\Phi'U_i}$ et $\overline{\rho'\Phi'U_i}$ pour former une corrélation d'ordre deux pondérée $\overline{\rho\Phi'U_i}$ dans laquelle les fluctuations Φ' et U_i' sont centrées. La forme (1) reste inchangée, mais la moyenne du terme d'advection (2) donne lieu à trois types de contributions :

$$\overline{\rho\Phi U_i} = \underbrace{\bar{\rho}\bar{\Phi}\bar{U}_i}_{(a)} + \underbrace{\overline{\rho\Phi'U_i}}_{(b)} + \underbrace{\overline{\rho'\Phi'U_i} + \overline{\rho'U_i\bar{\Phi}}}_{(c)} \quad (4)$$

Cette structuration des contributions du terme d'advection permet alors de parler de regroupement ternaire en contraste avec le regroupement binaire proposé antérieurement par Favre (1965). A ce stade du développement, il est admis qu'entre ces deux écritures, le degré de compacité fait la seule différence, le contenu étant le même. Notons par ailleurs que cette tendance à la conservation explicite des corrélations, avec la fluctuation de masse volumique, peut aller au-delà du regroupement ternaire. Purwanto (1994) détaille les implications d'une écriture sans le regroupement $\overline{\rho\Phi'U_i} + \overline{\rho'\Phi'U_i} = \overline{\rho\Phi'U_i}$.

L'alternative conçue par Shih et al (1987) contourne la difficulté des non-linéarités supplémentaires en posant des bilans par unité de masse,

en divisant les équations de Navier-Stokes par la masse volumique, et ce, avant traitement statistique. Ce choix permet de conserver des inconnues statistiques non pondérées :

$$\Phi U_i = \bar{\Phi}\bar{U}_i + \phi'u_i' \quad (5)$$

Cette écriture pose cependant le problème du traitement en moyenne de l'inverse de la masse volumique ($1/\rho$) que l'on trouve dans la plupart des termes du second membre des équations. Sur ce point, on notera que la solution n'est pas unique : i) Shih et al (1987) procèdent à un développement limité sous l'hypothèse restrictive : $\rho'/\bar{\rho} \ll 1$; ii) plus récemment Aurier et al Rey (1993) montrent que l'utilisation du volume massique permet de lever cette restriction.

Ces dernières solutions contrastent avec les deux premières par la nature des termes sur lesquels doit porter l'effort de modélisation. Pour cette raison, nous poursuivons la discussion de la stratégie de fermeture sur les formulations par unité de volume.

2.2. STRATÉGIES DE FERMETURE EN UN POINT

Aux deux niveaux de fermeture, la formulation d'une équation de transport du taux de dissipation mécanique ε repose sur un principe d'analogie avec les mécanismes de création-destruction d'énergie cinétique de la turbulence \bar{k} et sur un étalonnage des constantes par des résultats expérimentaux. Quel que soit le choix de formulation initiale, ce principe n'est pas renouvelé à ce jour et ne sera pas discuté.

2.2.1. Fermetures au premier ordre de type (k, ε)

Purwanto (1994) donne une revue détaillée de l'ensemble des problèmes de fermeture au premier ordre. Nous nous limiterons cependant à la modélisation des tensions de Reynolds qui fondera nos conclusions sur la question du choix de formulation. Il s'agit donc de proposer une modélisation des corrélations $\rho u_i'' u_j''$ (fluctuations relatives aux moyennes pondérées) et $\rho u_i' u_j'$ (fluctuations centrées).

Rappelons d'abord le contenu de l'hypothèse de Boussinesq en écoulement à masse volumique constante :

$$-\overline{u_i' u_j'} + \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} = \nu_t (2\bar{D}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{D} \delta_{ij}) \quad (6)$$

où $\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i})$ est le tenseur des vitesses de déformation moyennes.

Donnons ensuite la solution de fermeture adoptée généralement en formulation de Favre pour exprimer les tensions de Reynolds pondérées :

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} + \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{k} \delta_{ij} = \bar{\rho} \nu_t (2\bar{D}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{D} \delta_{ij}) \quad (7)$$

Le passage de l'une à l'autre procède, en quelque sorte, d'une analogie formelle basée sur celle des

équations de quantité de mouvement dans les deux cas. Nous allons développer maintenant le raccourci que constitue la transposition de (6) à (7). Pour cela revenons à l'expression de $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ en variables centrées :

$$\overline{\rho u_i'' u_j''} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{k} \delta_{ij} = (\overline{\rho u_i' u_j'} + \overline{\rho' u_i' u_j'} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{k} \delta_{ij}) - \bar{\rho} (\overline{u_i'' u_j''} - \frac{1}{3} \overline{u_k'' u_k''} \delta_{ij}) \quad (8)$$

Le produit de (6) par $\bar{\rho}$ fournit le modèle pour $\overline{\rho u_i' u_j'}$. Il reste à bâtir un modèle de niveau équivalent pour la corrélation triple $\overline{\rho' u_i' u_j'}$ et pour les flux turbulents de masse $\overline{\rho' u_i'}$:

$$-\overline{\rho' u_i' u_j'} + \frac{1}{3} \overline{\rho' u_k' u_k'} \delta_{ij} = \frac{\nu_t}{\sigma_{\rho u}} \left(\frac{\partial \overline{\rho u_i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho u_j'}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{\rho u_k'}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (9)$$

$$-\overline{\rho' u_j'} = \bar{\rho} \overline{u_j''} = \frac{\nu_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \quad (10)$$

En reportant (9) avec $\sigma_{\rho u} = 1$, (10) et $\bar{\rho} \times$ (6) dans (8), on obtient enfin :

$$\begin{aligned} -\overline{\rho u_i'' u_j''} + \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{k} \delta_{ij} &= \bar{\rho} \nu_t (2\bar{D}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{D} \delta_{ij}) \\ &+ \left(\frac{1}{2\sigma_\rho} - 1 \right) \nu_t (\overline{u_i''} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \\ &+ \overline{u_j''} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \overline{u_k''} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_k} \delta_{ij}) \\ &- \frac{1}{3} \frac{\nu_t}{2\sigma_\rho} \overline{u_k''} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_k} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (11)$$

En faisant le choix $\sigma_\rho = 0,5$ tel Speziale et al (1991), le seul écart au modèle transposé (7) est le terme diagonal de la dernière ligne de (11). Pour la corrélation $\overline{\rho u'' u''}$ le modèle transposé (7) est riche des modèles (6), (9) et (10) et ne souffre pas de cette dernière restriction.

L'analyse précédente révèle donc un contenu implicite du modèle transposé (7). Ce contenu est le résultat d'une fermeture standard pour $\overline{u_i' u_j'}$ et de fermetures de type gradient pour les corrélations $\overline{\rho' u_i' u_j'}$ et les flux turbulents de masse $\overline{\rho' u_i'}$.

Ce constat permet de proposer un modèle à contenu équivalent pour la corrélation $\overline{\rho u_i' u_j'}$ de la formulation en regroupements ternaires :

$$\begin{aligned} -\left(\overline{\rho u_i' u_j'} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \bar{k} \delta_{ij} \right) &= \bar{\rho} \nu_t (2\bar{D}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{D} \delta_{ij}) \\ &+ \frac{\nu_t}{\sigma_{\rho u}} \left(\frac{\partial \overline{\rho u_i'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho u_j'}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{\rho u_k'}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

La démarche proposée fait donc le point sur le contenu des modèles usuels pour la fermeture au premier ordre des contraintes de Reynolds. Outre le terme principal exprimé par l'hypothèse de Boussinesq, deux autres termes, spécifiques de la situation à densité variable, sont modélisés par des

schémas de niveau équivalent. L'utilisation de relations de passage entre les deux formulations permet de conserver, au-delà de l'étape de modélisation, un contenu identique des systèmes d'équation sous les deux formes. Ce résultat montre que les deux écritures ont le même *potentiel* de fermeture et qu'un parallèle rigoureux permet d'assurer leur équivalence jusqu'avant la résolution.

2.2:2. Fermetures au second ordre

Pour les fermetures au second ordre, il est reconnu que la modélisation de la corrélation pression-déformation est la difficulté principale. Joly (1994) montre que les nuances de formulation des modèles en variables pondérées ou centrées n'avaient que peu d'effet. Cette remarque vient en complément d'un constat antérieur par Shih et al (1987) selon lequel les mécanismes de redistribution d'énergie ne sont pas altérés par la variation de masse volumique dans un champ moyen «isovolume» ($\bar{D} \rightarrow 0$).

Nous allons plutôt revenir sur l'intérêt de la démarche du paragraphe 2.2.1., mais en l'appliquant à la fermeture des diffusions turbulentes dans les équations aux moments d'ordre deux. Considérons la diffusion turbulente d'énergie cinétique de la turbulence, soit la divergence du tenseur d'ordre trois pondéré $\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''}$ en fluctuations décentrées et $\overline{\rho u_i' u_j' u_k'}$ en fluctuations centrées.

La relation de correspondance entre ces deux quantités est la suivante :

$$\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} = \overline{\rho u_i' u_j' u_k'} - (2\overline{\rho' u_i' u_j' u_k'} + \overline{\rho' u_j' u_k'}) + 2\overline{\rho' u_i' \rho' u_j' \rho' u_k'} / \bar{\rho}^2 \quad (13)$$

En négligeant le dernier terme qui est toujours plus petit que le second et en décomposant le premier, il vient :

$$\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} = \bar{\rho} \overline{u_i' u_j' u_k'} + \underbrace{\overline{\rho' u_i' u_j' u_k'}}_{QG} - (2\overline{\rho' u_i' u_j' u_k'} + \overline{\rho' u_j' u_k' u_i'}) \quad (14)$$

Comme ce fut le cas pour les tensions de Reynolds, considérons le modèle de type gradient pour la corrélation triple de vitesse $\overline{u_i' u_j' u_k'}$, soit :

$$-\overline{u_i' u_j' u_k'} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k} \quad (15)$$

Dans l'écoulement turbulent cisailé mince, On montre par ailleurs que la différence entre $\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{\rho u_i'' u_i''} / \bar{\rho}$ et $\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{\rho u_i' u_i'}$ est faible et que ces deux quantités sont essentiellement égales à $\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}$. En suivant cette voie, le modèle pour la corrélation $\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''}$ en est au stade suivant :

$$\overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} = -2\bar{\rho} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} + \underbrace{QG}_{=0} \quad (16)$$

Le modèle usuel est de type gradient (première contribution) et admet donc implicitement que la

somme QG est nulle. Cette hypothèse stipule donc la quasi-normalité des fonctions densité de probabilité (*fdp*) conjointes des fluctuations de vitesse et de masse volumique. Or les résultats expérimentaux de Birch et al, 1978 ; Chefer et al, 1983, So et al, 1991) montrent un comportement bimodal de la *fdp* simple de la masse volumique et des lois conjointes. La pratique de la simulation des jets chauffés montre cependant que cette hypothèse va dans le sens de la restitution de l'effet de densité sur l'évolution axiale de l'énergie cinétique de la turbulence (§ 3.1). Nous admettons donc qu'elle soit mise en œuvre, en l'absence d'autre proposition.

La modélisation de la diffusion turbulente en regroupement ternaire doit donc intégrer explicitement l'hypothèse quasi normale pour contenir la même information que son homologue en variables de Favre :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\bar{\rho} \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} - (\overline{\rho' u'_j} 2\bar{k} + 2\overline{\rho' u'_i} \overline{u'_i u'_j}) \quad (17)$$

En conclusion de cette partie, dévolue aux questions de fermeture et à leur relation à la formulation initiale, il ressort que les deux écritures donnent lieu aux mêmes difficultés. Celles-ci peuvent être traitées en conservant l'identité de contenu physique des systèmes fermés d'équations aux moments statistiques dans les deux cas. Cette identité de contenu n'est pas cependant garante de la « qualité » de la modélisation. Ce résultat permet cependant de décider sans regret de l'écriture la plus favorable à un objectif donné. Pour notre part, nous voulons mettre l'accent sur le rôle des flux turbulents de masse dans la modification de l'écoulement soumis à gradient de densité. C'est donc très naturellement que nous retiendrons la formulation qui les explicite, ie, celle qui procède par regroupements ternaires.

2.2.3. Modélisation des flux turbulents de masse

Nous nous attacherons, par la suite, à donner la différence de qualité de prédiction des flux turbulents de masse par les fermetures au premier et au second ordre. Les deux modèles qui seront comparés sont les suivants :

– premier ordre → type gradient :

$$-\overline{\rho u'_j} = \bar{\rho} \overline{u''_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (18)$$

– second ordre (deux étapes) :

1) résolution d'une équation de transport pour les flux turbulents de chaleur pondérés

$$(\overline{\rho \theta' u'_i} \bar{U}_j)_{,j} = -P_i + \Pi_{\theta i} - T_{i,j,j} - V_i \quad (19)$$

avec

$$P_i = \overline{\rho u'_i u'_j} \bar{T}_{,j} + \overline{\rho \theta' u'_j} \bar{U}_{i,j} + \overline{\rho u'_i} \bar{U}_j \bar{T}_{,j} + \overline{\rho \theta'} \bar{U}_j \bar{U}_{i,j}$$

$$\Pi_{\theta i} = \overline{p' \theta'_i} \quad \bar{T}_{i,j} = \overline{\rho \theta' u'_i u'_j} \quad V_i = \overline{\rho \theta'} g_i$$

Les termes $\Pi_{\theta i}$ et $\bar{T}_{i,j}$ sont modélisés comme suit :

$$\Pi_{\theta i} = b_0 \overline{\rho \theta' u'_j} \bar{U}_{i,j} + b_1 \overline{\rho \theta' u'_j} \bar{U}_{j,i} + b_2 \overline{\rho \theta' u'_i} \varepsilon / \bar{k}$$

$$\bar{T}_{i,j} = d_s \frac{\bar{k}}{\varepsilon} \overline{\rho u'_j u'_k} (\overline{\rho \theta' u'_i} / \bar{\rho})_{,k} - (\overline{\rho \theta' u'_i u'_j} + \overline{\rho u'_j} \overline{\theta' u'_i} + \overline{\rho u'_i} \overline{\theta' u'_j})$$

2) déduction par une conséquence de la loi d'état dégénérée sous la condition de faible nombre de Mach de turbulence :

$$\overline{\rho u'_i} \approx -\frac{\overline{\rho \theta' u'_i}}{T} \quad (20)$$

La justification de (20) est détaillée dans les références Joly et al (1993) et Joly (1994). Elle repose sur l'examen de l'ordre de grandeur relatif des fluctuations de pression et de masse volumique dans l'écoulement subsonique. En effet la différenciation logarithmique de l'équation d'état du gaz parfait donne :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (21)$$

Cette relation en indique une autre, approchée celle-là, sur l'ordre de grandeur des fluctuations relatives des variables d'état :

$$\frac{p'}{P} \approx \frac{\rho'}{\rho} + \frac{\theta'}{T} \quad (22)$$

Soit $M_t = u/c$ le nombre de Mach de turbulence ou le rapport d'une échelle de fluctuation de vitesse à la célérité du son, on montre aisément que la fluctuation relative de pression dans un écoulement turbulent croît avec le carré du nombre de Mach de turbulence. Dans la limite de l'écoulement subsonique, cette variation relative est négligeable vis-à-vis de celle de la masse volumique et de la température. Ces deux scalaires sont donc asymptotiquement anticorrélés dans la limite $M_t \rightarrow 0$ soit :

$$\frac{\rho'}{\rho} \approx -\frac{\theta'}{T} \quad (23)$$

3. SIMULATIONS NUMÉRIQUES PARABOLIQUES DE JETS CHAUFFÉS

L'ensemble des résultats de calcul est issu d'une procédure numérique de type parabolique qui constitue une généralisation de la méthode de Patankar et Spalding aux écoulements à masse volumique variable. Harran (1994) et Purwanto (1994) sont à l'origine des modifications récentes qui font, de la version actuellement utilisée dans l'équipe, un outil adapté aux tests des options de modélisation. La nature auto adaptative du maillage est un facteur de réduction du temps de calcul et la description du demi-jet par une quarantaine de points est suffisante pour assurer l'indépendance au maillage.

La nature parabolique de la simulation ne permet pas la prise en compte d'éventuelles régions de recirculation où la vitesse moyenne longitudinale serait négative. Il est par exemple exclu de tenter la simulation de jets à flottabilité négative où l'effet dit de «fontaine» génère, à terme, des recirculations latérales. Le système des équations résolues, détaillé en annexes A et B pour les deux niveaux de fermeture, subit conjointement des simplifications liées aux hypothèses de type couche limite. Ces hypothèses reposent sur la distorsion géométrique entre les échelles de longueur caractéristiques de l'advection longitudinale et de la diffusion transversale, $\ell \ll L$. Cette distorsion géométrique s'accompagne d'une distorsion cinématique de même rapport entre les composantes longitudinale et transversale de la vitesse moyenne, $\bar{V}/\bar{U} \approx \ell/L$, et ce en vertu de la nature solénoïdale du champ de vitesse moyenne aux faibles nombres de Mach (Joly, 1994), soit $\partial_x \bar{U} + \partial_y \bar{V} = 0$. Ces relations d'ordre de grandeur permettent de négliger les termes exprimant une diffusion longitudinale en comparaison à ceux de la diffusion transversale. Cette approximation est opérée sur les équations résolues, et donc adoptée pour l'ensemble du domaine de calcul. L'axe du jet et les régions de frontière, surtout près de la section de sortie, sont pourtant des lieux de relative faiblesse des hypothèses de couche limite. A la frontière la distorsion cinématique moyenne $\bar{V} \ll \bar{U}$ n'est pas vérifiée et l'axe de symétrie est un lieu de diffusion transversale nulle.

La conséquence de ces objections aux hypothèses de couche limite pour la prédétermination des jets libres est souvent abordée, comme ici, d'un point de vue heuristique. Ce point de vue est fondé sur le constat que la simulation parabolique offre un niveau de représentativité compatible avec l'examen «comparatif» des différents modèles sur les caractéristiques de la zone «lointaine» des jets libres. Les régimes d'évolution en zone lointaine des grandeurs moyennes sur l'axe ont, en vertu de la propriété de similitude, un caractère universel que reproduisent les campagnes expérimentales et les simulations numériques. En revanche, le positionnement longitudinal de ces régimes de similitude, spécifié par les origines fictives, n'est cependant pas universel. Ces origines fictives concentrent en quelque sorte les particularités des conditions d'expérience pour les résultats expérimentaux d'une part, et dépendent d'autre part de la spécification du profil initial de dissipation et de la faiblesse des hypothèses de couche limite en zone proche dans le cas de la simulation numérique. Pour ces raisons, la comparaison expérience-calcul des taux d'évolution des grandeurs moyennes est fondée, celle des origines fictives ne peut être menée sur des bases solides. Les procédures numériques elliptiques, telles que celle mise en œuvre par Ruffin (1994) et Ruffin et al (1994), sont exemptes des restrictions discutées (cf supra), mais ne lèvent pas l'ambiguïté d'une comparaison «pied-à-pied» expérience-calcul.

La difficulté essentielle de la question précédente vient de ce que le taux de dissipation mécanique n'est pas une grandeur directement mesurable. Il doit être initialisé sur la base d'arguments physiques dont la validité n'est pas vérifiée expérimentalement à ce jour. Ruffin (1994) discute par exemple trois conditions de prescription du profil initial de la dissipation. Nous retenons ici la proposition de Harran (1994), l'incidence de ce choix n'étant pas le sujet central de la présente discussion. Cette proposition repose sur une condition de compatibilité du profil de dissipation avec un schéma de fermeture (k, ε) pour la contrainte de cisaillement turbulent :

$$\varepsilon = -C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\overline{u'v'}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \quad (C_\mu = 0,09) \quad (24)$$

3.1. PRÉDICTION DE CARACTÉRISTIQUES GLOBALES D'UN JET DE TUBE CHAUFFÉ

Les résultats qui suivent sont ceux de la procédure au second ordre. Ils concernent un jet isotherme de référence, désigné par la lettre i , et trois jets chauds de rapport de densité croissant, désignés par c_1 , c_2 et c_3 . Les caractéristiques de ces cas test sont précisées dans les *tableaux V* et *VI*. Elles correspondent aux conditions en section d'émission d'écoulements dont le schéma est donné en *figure 1*. Les conditions aux frontières du domaine sont celles d'une atmosphère au repos, ie, les moments statistiques y sont maintenus à la valeur nulle exceptés la densité et la température moyenne.

On donne en *figure 2* l'évolution longitudinale de la vitesse et de la température moyenne sur l'axe pour ces conditions. L'analyse va en

	i	c_1	c_2	c_3
$S_\rho = \rho_{\text{jet}}/\rho_{\text{amb}}$	1,00	0,63	0,3	0,14
$T_{\text{ext}} (^\circ\text{C})$	288	181	86	40
$F = U_{\text{jet}}^2/(gd 1 - S_\rho^{-1})$	/	1750	440	170

Vitesse sur l'axe	$U_{\text{jet}} = 20$ m/s
Diamètre	$d = 0,04$ m
Température uniforme du jet	$T_{\text{jet}} = 288$ °C
Nombre de Reynolds	$Re = U_{\text{jet}}d/\nu = 54\,000$
Ratio de la vitesse débitante à la vitesse sur l'axe	0,827

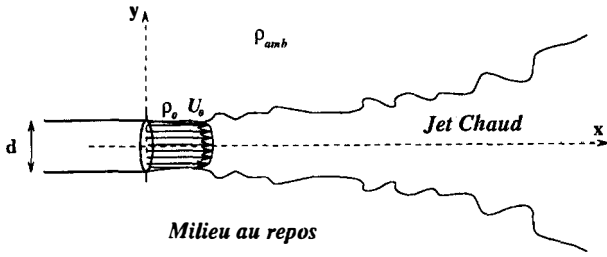


Fig 1. Configuration d'écoulement de jet chauffé.
Fig 1. The heated jet.

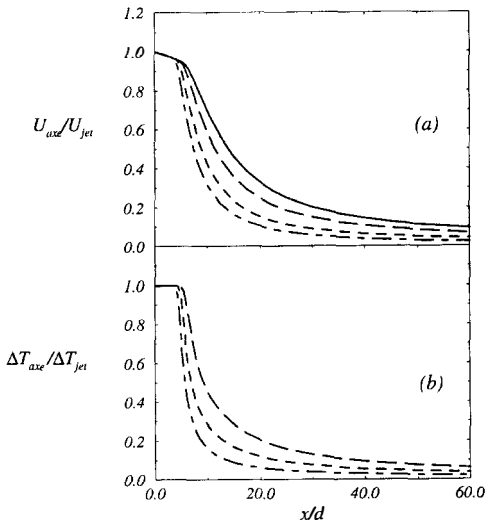


Fig 2. Décroissance de vitesse moyenne (a) et de température moyenne (b) sur l'axe des jets : (—) $S_\rho = 1.$, (---) $S_\rho = 0,63$, (- · -) $S_\rho = 0,3$, (· · ·) $S_\rho = 0,14$.

Fig 2. Mean velocity decrease (a) and mean temperature decrease (b) on the axis of heated round-jets.

être donnée relativement au régime de similitude approchée en zone lointaine. Il est admis en effet que pour des nombres de Froude suffisamment importants, on puisse considérer qu'une région intermédiaire présente un comportement conforme aux lois d'évolution du régime inertiel du jet. Une révision de la condition portant sur le nombre de Froude minimal figure dans les références Joly et al (1994) et Joly (1994). Le critère s'énonce alors de la manière suivante :

$$F > F_o(S_\rho - 1)^2 S_\rho^{-\frac{3}{2}} \quad (25)$$

où $F_o = 95\,000$ est une valeur issue de la synthèse (Chen et al, 1980) de données expérimentales sur les jets à densité variable. Comme l'ensemble des cas tests reportés au *tableau V* ne vérifient pas le critère (25), les régimes de similitude sont qualifiés pour une série de simulations effectuées en «apesanteur numérique», ie, pour un nombre de Froude infini.

Soit U^* et C^* la vitesse moyenne adimensionnelle sur l'axe et la masse volumique adimensionnelle définies comme suit :

$$U^* = \frac{\bar{U}_{axe}}{U_d} \quad ; \quad C^* = \frac{\bar{\rho}_{axe} - \rho_{ext}}{\rho_{jet} - \rho_{ext}} \quad (26)$$

U_d est une échelle de vitesse caractéristique des grandeurs intégrales dynamiques de la section d'émission : $U_d = J_o/D_o$. Il s'agit d'une échelle dont la définition est compatible avec celle due à Dahm et Dimotakis (1987) d'un diamètre équivalent $\chi_d = 2D_o(\pi\rho_o J_o)^{-\frac{1}{2}}$. L'hypothèse de similitude des profils moyens impose les lois d'évolution de U^* et de C^* définies par :

$$U^* = A_{u1} \chi_d / (x - x_U^*) \quad \text{et} \quad C^* = A_{\rho1} \chi_d / (x - x_C^*) \quad (27)$$

Les valeurs calculées des paramètres A_{u1} et $A_{\rho1}$ sont reportées sur la *figure 3*. Elle sont extraites d'une régression linéaire de type moindres carrés, appliquée à la région de similitude sur les inverses de U^* et de C^* . Le coefficient de corrélation de la régression est toujours très proche de l'unité, ce qui atteste effectivement du comportement linéaire de ces grandeurs. Par ailleurs la constance à 5% près des paramètres A_{u1} et $A_{\rho1}$ indique à la fois le succès de l'analyse dimensionnelle conduisant à la définition des échelles caractéristiques U_d et χ_d et l'intérêt du choix de l'apesanteur numérique pour dégager le régime de similitude inertielle. Mais elle atteste également de la fidélité de la simulation avec l'analyse physique des effets de densité sur la similitude des jets à densité variable. La dispersion des résultats expérimentaux rassemblés par Joly et al (1993) vient, pour une part, de la simplification courante $U_d = U_{jet}$ qui ne permet pas la comparaison des jets de tube et des jets de buse et, d'autre part, de valeurs expérimentales du nombre de Froude bien en-deça du niveau minimal donné par (25). Compte tenu de l'argumentation précédente, il est donc acceptable que le niveau calculé de

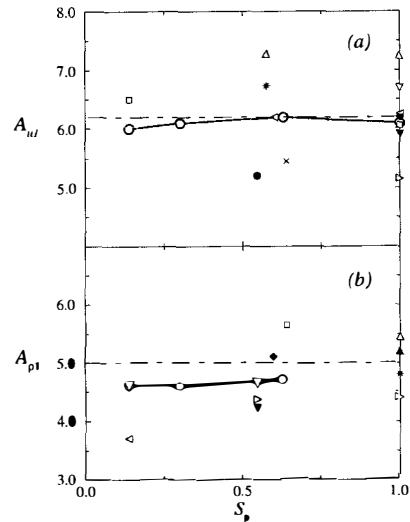


Fig 3. Constantes normalisées de décroissance de (a) la vitesse sur l'axe A_{u1} et de (b) la masse volumique adimensionnelle sur l'axe $A_{\rho1}$: comparaison des résultats de calcul (o—o) avec les données expérimentales (symboles) et leur moyenne selon Chen et Rodi (Zhu, 1989) (---).

Fig 3. Normalized constants appearing in the self-preserving laws for the decrease of (a) the on-axis mean velocity, A_{u1} , and (b) the on-axis non-dimensional density, $A_{\rho1}$: comparisons of predicted values (o—o) with the experimental ones (symbols) and their mean value established by Chen and Rodi (Zhu, 1989) (---).

A_{u1} et $A_{\rho1}$ se situe au centre du nuage des points expérimentaux.

La figure 4 montre l'influence du rapport de densité sur la position et la valeur du maximum d'énergie sur l'axe des jets chauffés. La tendance à l'augmentation de ce maximum et à son décalage vers l'amont avec la diminution du rapport de densité est restituée. La valeur du pic est comparée aux résultats expérimentaux de Sautet (1992) et de Djeridane (1994). Le calcul se situe à l'intérieur de la plage délimitée par ces deux références expérimentales. Ce point positif ne doit pas occulter la restriction formulée (cf supra) quant à la validité de telles comparaisons au regard du manque d'information sur le profil de dissipation dans la section d'émission.

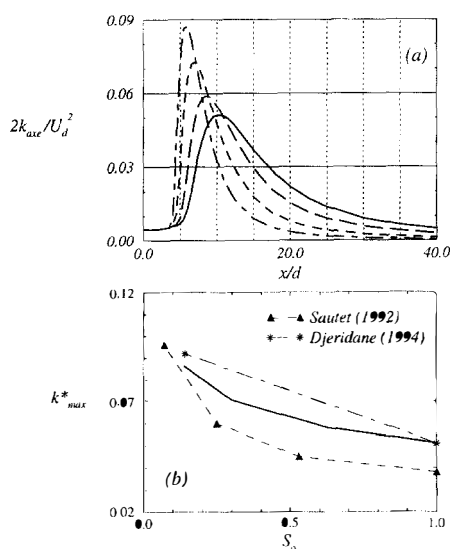


Fig 4. (a) Évolution de l'énergie sur l'axe des jets chauffés (même légende que fig 2 ; (b) Sensibilité du maximum d'énergie sur l'axe au rapport des masses volumiques à l'émission.

Fig 4. (a) On-axis turbulent kinetic energy of heated round-jets (same as in fig 2. (b) Predicted and experimental level of the maximum of turbulent-kinetic-energy versus the exit density-ratio.

L'ensemble de ces résultats montre la fiabilité de la simulation numérique, et de l'ensemble de la modélisation au second ordre adoptée pour la restitution des effets du contraste thermique entre le jet et l'atmosphère au repos. Pour revenir sur le détail de la discussion du contenu des modèles de diffusion, l'effet de densité sur la position et la valeur du pic d'énergie cinétique sur l'axe ne serait pas correctement rendu sans l'hypothèse quasi normale, explicitée en regroupement ternaire.

3.2. EFFET DE DENSITÉ SUR LE CHAMP PROCHE

Nous allons donner maintenant les premiers éléments d'une analyse de l'effet de densité sur la modification de la dynamique du jet dans la région

proche. Cette région, dont l'étendue a été précisée par Joly (1994), voit le taux de décroissance de la vitesse moyenne sur l'axe, modifié par l'action des flux turbulents de masse. Nous proposons de lire cette modification sur l'évolution longitudinale de deux paramètres : le taux de décroissance «local» de la vitesse sur l'axe, $A_{u1}(x)$, et la pente à l'origine «locale» du profil de la contrainte de cisaillement turbulent, $K_{uv}(x)$. Ces paramètres sont définis comme suit :

$$A_{u1}(x) = \frac{U_{axe}(x)}{U_d} \frac{(x - x_u^*)}{\mathcal{X}_d} \quad (28)$$

$$K_{uv}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{(x - x_u^*)}{r} \frac{\overline{u'v'}(x, r)}{U_d^2(x)} \right] \quad (29)$$

Nous allons nous limiter au jet isotherme (i) et au jet le plus chauffé, cas (c₃). Ce dernier est également conduit en supprimant l'action de la pesanteur pour mettre en évidence le contraste par effet des forces de flottabilité. La figure 5 donne l'évolution longitudinale de ces deux paramètres pour les trois cas. La figure 6 montre la «trajectoire» de ces trois jets dans le repère (A_{u1} , K_{uv}).

Ces figures illustrent le lien de causalité entre l'augmentation de la pente à l'origine du profil de $\overline{u'v'}$ et la décroissance de vitesse sur l'axe. La figure 6 met l'accent sur l'évolution conjointe des paramètres locaux du jet. On constate la convergence des trajectoires des jets purement inertiels vers le point de coordonnées (6, 2; 0, 5), caractéristique de ce régime de similitude. Pour ces jets inertiels, l'analyse du comportement en zone proche revient donc à celle de la trajectoire

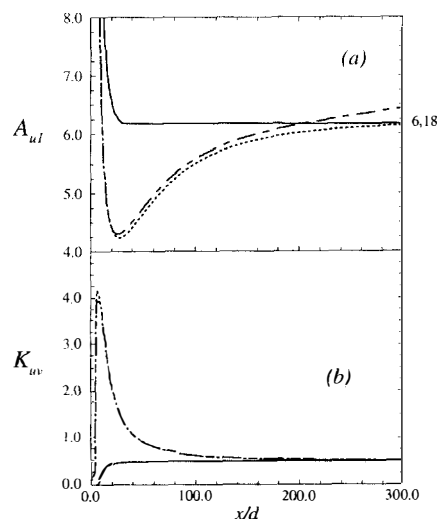


Fig 5. (a) Évolution du paramètre local de décroissance de la vitesse sur l'axe $A_{u1}(x)$ et (b) de la pente à l'origine du profil de la contrainte de cisaillement turbulent $K_{uv}(x)$: (—) $S_\rho = 1.$, (- - -) $S_\rho = 0,14$ et $g = 0$, (-·-·) $S_\rho = 0,14$ et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Fig 5. (a) Streamwise evolution of the local velocity decrease parameter $A_{u1}(x)$ and (b) the on-axis non-dimensional slope of the turbulent shear-stress profile $K_{uv}(x)$: (—) $S_\rho = 1.$, (- - -) $S_\rho = 0,14$ et $g = 0$, (-·-·) $S_\rho = 0,14$ et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

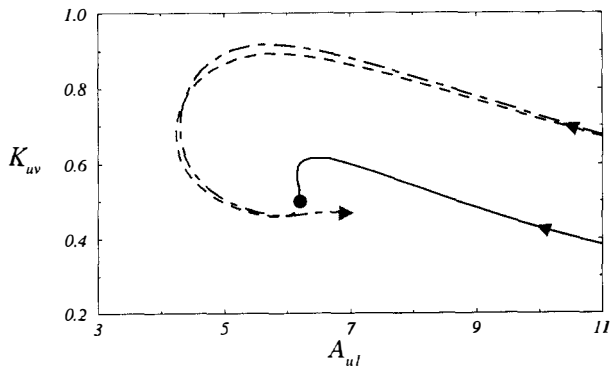


Fig 6. Trajectoire des trois jets dans le repère (A_{u1}, K_{uv}) (même légende qu'en fig 5).

Fig 6. Trajectories of three heated jets in the (A_{u1}, K_{uv}) -coordinates (same as in fig 5).

qui mène à ce point fixe. Le jet isotherme atteint rapidement l'équilibre par un ajustement final de K_{uv} après l'évolution monotone de A_{u1} jusqu'à 6,2 (branche verticale qui termine la trajectoire en trait continu). Le comportement du jet léger est plus complexe et la figure ne permet pas de trancher entre une inversion (peu probable) de la causalité qui lie K_{uv} et A_{u1} et le simple retard. Cette représentation à néanmoins le mérite d'offrir une description synthétique de ce phénomène de relaxation encore mal compris.

Dans ce plan la trajectoire d'un jet chauffé, maintenant soumis à l'action de la pesanteur, subit l'attraction du point fixe associé au régime de similitude inertielle avant de se prolonger vers un équilibre de type panache que cette figure n'est pas à même de représenter.

4. FLUX TURBULENTS DE MASSE

4.1. ORDRE DE GRANDEUR ET SIGNE

La figure 7 montre une comparaison synthétique des champs de vitesse moyenne transversale et du flux turbulent de masse transversal sur $\bar{\rho}$ soit \bar{v}'' . Le cas du jet chauffé correspond à la situation où les gradients transverses de \bar{U} et de $\bar{\rho}$ sont de signes opposés (situation «contregradient»). Le signe des flux turbulents de masse est alors négatif (Chassaing et al, 1994) dans le premier quadrant du repère. Le flux turbulent de masse transversal change de signe sur l'axe. Dans la région proche de la section d'émission, les deux composantes de la quantité de mouvement transversale sont du même ordre de grandeur mais de signes opposés. Les flux turbulents de masse ont donc une action de transport vers l'axe qui va à l'encontre de l'advection moyenne transversale. Cette remarque constitue une première justification de l'effet de densité

sur le champ d'énergie cinétique de la turbulence. Sous l'action des flux turbulents de masse, l'énergie cinétique, dont le centre de production se situe hors axe, subit un transport vers l'axe qui rapproche le point de convergence des couches de mélanges initiales de la section d'émission. Cet effet s'intensifie avec le contraste thermique jet-atmosphère. Il s'agit là d'une première identification du rôle du flux de masse transversal $\bar{\rho}'v'$ dans la modification des caractéristiques du jet isotherme par les effets de densité. La formulation en regroupement ternaire, par sa capacité à isoler les termes de flux de masse, offre de bonnes perspectives d'analyse sur ce point particulier.

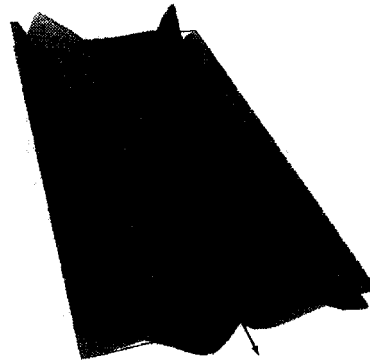


Fig 7. Jet chaud $S_\rho = 0,3$: champs de vitesse moyenne \bar{V} (nappe bleue) et du flux de masse transversal $\bar{\rho}'v'/\bar{\rho}$ (nappe orange) sur le domaine de calcul de la zone proche : $x/d \in [0, 20]$, $r/r_{max} \in [-1, 1]$. L'échelle verticale des vitesses, commune aux deux nappes, est choisie arbitrairement pour la bonne lisibilité des niveaux relatifs de \bar{V} et de $\bar{\rho}'v'/\bar{\rho}$.

Fig 7. Fields of the mean spanwise velocity \bar{V} (blue surface) and the turbulent mass-flux $\bar{\rho}'v'/\bar{\rho}$ (orange surface) in a heated round-jet of density-ratio $S_\rho = 0,3$. The base grid is the non-dimensionnal domain $x/d \in [0, 20]$, $r/r_{max} \in [-1, 1]$. The velocity scale (relief direction) is the same for both variables and is prescribed for sake of clarity.

4.2. COMPARAISON DE MODÉLISATIONS

La figure 8 compare la prédiction des flux turbulents de masse aux deux ordres de fermeture. La qualité est équivalente pour le flux transversal. Pour le flux de masse longitudinal, dont les références expérimentales non représentées, montrent qu'il présente un pic hors axe, la fermeture au premier ordre est moins satisfaisante. Des arguments développés, par Purwanto (1994) et Joly (1994), montrent cependant que le couplage des champs thermiques et cinématiques passe par l'action du flux de masse transversal. La difficulté, du premier ordre, à prédire le flux de masse longitudinal n'enlève donc pas l'intérêt d'une simulation par fermeture à cet ordre. L'ensemble des résultats de Purwanto (1994) affirme le caractère suffisant de ce niveau de fermeture pour la restitution de l'effet de densité sur les jets libres chauffés. Ce constat ne concerne vraisemblablement pas des configurations plus complexes, où les déficiences de (k, ε) sont déjà connues à masse volumique constante.

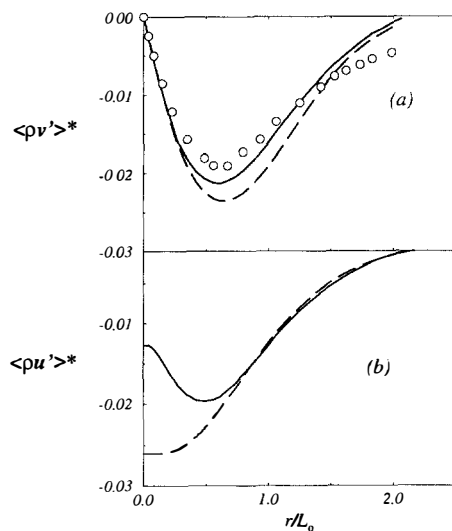


Fig 8. Jet chauffés $S_p = 0,3$ à la section $x/d = 12$: (a) Profil du flux turbulent de masse transversal $\overline{\rho v'}/\rho_S U_S$; (b) Profil du flux turbulent de masse longitudinal $\overline{\rho u'}/\rho_S U_S$. (—) : Calcul second ordre, (- -) : Modèle au premier ordre [5], (o) : Exp (Djeridane, 1994).

Fig 8. Turbulent mass fluxes in a heated round jet with $S_p = 0,3$ at section $x/d = 12$: (a) $\overline{\rho v'}/\rho_S U_S$; (b) $\overline{\rho u'}/\rho_S U_S$. (—) : Second-order closure, (- -) : First-order closure from (Stepowski, 1988), (o) : Exp (Djeridane, 1994).

5. CONCLUSIONS

La somme d'éléments présentés donne lieu à deux conclusions essentielles :

1) le choix d'une formulation en regroupement binaire ou ternaire, si elle entraîne certaines différences de contenu dans le cadre de transpositions directes des schémas de fermeture, n'empêche pas d'en assurer l'identité, nous avons développé ce point concernant la fermeture des termes de diffusion ;

2) l'usage de la formulation en moyennes centrées donne un outil adapté à l'analyse de l'effet de densité sur les jets libres chauffés, et particulièrement à celle de l'action des flux turbulents de masse.

Pour ce qui concerne la modélisation, nous n'avons pas envisagé d'autres possibilité de fermeture de la corrélation d'ordre quatre avec la fluctuation de densité. La solution contenue dans les fermetures développées en moyennes pondérées par la masse volumique est la seule retenue. La remise en question de ce dernier point et la poursuite de la réflexion entreprise sur le rôle des corrélations avec la fluctuation de densité font l'essentiel des perspectives de ces travaux. Rappelons enfin que l'objectif de ces efforts conjoints d'analyse et de modélisation est d'atteindre un degré élevé de performance pour

la prédiction des écoulements complexes à forts contrastes thermiques.

RÉFÉRENCES

- Aurier T, Rey C (1993) Sur la modélisation des écoulements compressibles subsoniques. In : *XI^e Congrès français de mécanique*, Lille, vol 2, 169-172
- Birch AD, Brown DR, Dodson MC, Thomas JR (1978) The turbulent concentration field of a methane jet. *J Fluid Mech* 88, 431
- Chassaing P (1979) Mélange turbulent de gaz inertes dans un jet de tube libre. Thèse d'État, INPT n° 42
- Chassaing P (1985) Une alternative à la formulation des équations du mouvement d'un fluide à masse volumique variable. *J Méc Théor Appl* 4(3), 375-389
- Chassaing P, Harran G, Joly L (1994) Density fluctuation correlations in free turbulent binary mixing. *J Fluid Mech* 279, 239-278
- Chen CJ, Rodi W (1980) *Vertical turbulent buoyant jets - a review of experimental data*. HMT-4, Pergamon
- Daly BJ, Harlow FH (1970) Transport equations in turbulence. *Phys Fluids A* 13(11), 2634-2649
- Dahm WJA, Dimotakis PE (1987) Measurements of entrainment and mixing in turbulent jets, *AIAA J* 25, 1216
- Djeridane T (1994) Contribution à l'étude expérimentale de jets turbulents axisymétriques à densité variable, Thèse, Univ d'Aix-Marseille II, Réf 207-94-57
- Favre A (1965) Equations des gaz turbulents compressibles. *J Méc Théor et Appl* 4, 361
- Harran G (1994) Analyse physique, modélisation et simulation numérique des mécanismes de mélange dans les jets coaxiaux turbulents. Thèse, INPT n° 841
- Hérard JM (1986) Modélisation et calcul d'écoulements turbulents isothermes de gaz à densité variable. Thèse, INPT n° 400
- Joly L, Chassaing P (1993) Aspects physiques et calcul des jets turbulents non-isothermes, In : *XI^e Congrès français de mécanique*, Lille, vol 2, 189
- Joly L, Chassaing P (1994) Analyse de l'écoulement cisailé mince soumis à des gradients de masse volumique. In : *Conference on Low-speed Variable-density Turbulent Flows*, LEGI Grenoble
- Joly L (1994) Écoulements turbulents cisailés libres à masse volumique variable : analyse physique et modélisation. Thèse, INPT n° 944
- Lumley JL (1978) Computational modeling of turbulent flows. *Adv Appl Mech* 18
- Panchapakesan NR, Lumley JL (1993) Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium i) and ii). *J Fluid Mech* 246, 197
- Pitts WM (1986) *Effects of global density and reynolds number variations on mixing in turbulent, axisymmetric jets*. NBSIR 86-3340, Nat Bur Stanb, US Depart Commerce
- Purwanto A (1994) Modélisation d'écoulements turbulents basse-vitesse à forte variation de masse volumique : Application aux schémas de fermeture k, ϵ . Thèse, INPT n° 936

Richards CD, Pitts WM (1993) Global density effects on the self-preservation behaviour of turbulent free jets. *J Fluid Mech* 254, 417

Ruffin E, Schiestel R, Anselmet F, Amielh M, Fulachier L (1994) Investigation of characteristic scales in variable density jets using a second-order model. *Phys Fluids A* 6(8), 2785

Ruffin E (1994) Étude de jets turbulents à densité variable à l'aide de modèles de transport au second ordre. Thèse, Univ d'Aix-Marseille II, Réf 207-94-59.

Sahr B (1990) Contribution à l'étude des jets turbulents à masse volumique variable et des flammes turbulentes de diffusion. Thèse d'État, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris

Sautet JC (1992) Effets de densité sur le développement scalaire et dynamique des jets turbulents. Thèse, Université de Rouen

Sautet JC, Stepowski D (1995) Dynamic behavior of variable-density, turbulent jets in their near development field. *Phys Fluids A* 7, 2796-2805

Schefer RW, Dibble RW (1983) Simultaneous measurements of velocity and density in a turbulent non-premixed flame. In : 21st *Aerosp Sci Meet*, Reno, Nev, Paper 83-0401

Sforza PM et Mons RF (1978) Mass, momentum and energy transport in turbulent free jets. *Int J Heat Mass Trans* 21, 371-384

Shih TH, Lumley JL, Janicka J (1987) Second-order modelling of a variable-density mixing layer. *J Fluid Mech* 180, 93-116

So RMC, Zhu JY, Ötügen MV, Hwang BC (1990) Some measurements in a binary gas jet. *Exp in Fluid* 9, 273

So RMC, Zhu JY, Ötügen MV, Hwang BC (1991) Behavior of probability density functions in a binary gas jet. *Exp in Fluid* 11, 227

Speziale CG, Sarkar S (1991) Second order closure models for supersonic turbulent flows. In : 29th *Aero Sci Meet*, Reno, Nev, Paper 91-0217

Stepowski D, Labbaci K, Cabot G, Trinite M (1988) Pseudo-self-similarity in the development of low density turbulent jets issuing in a coflow air. In : *Euromech* 237, IMST Marseille

Thring M, Newby MP (1953) Combustion length of enclosed turbulent jet flames. In : *Int Symp Combustion*, 789, The Williams and Wilkins Co, Baltimore, MD

Zhu JY, So RMC, Ötügen MV (1989) Mass transfer in a binary gas jet. *AIAA J* 27, 1132

ANNEXES

A. Équations résolues dans le cadre d'une fermeture au premier ordre

Aux deux niveaux de fermeture, la résolution parabolique tire partie du caractère solénoïdal du champ de vitesse moyenne. Soit $r = y^n$ où $n = 0$ dans le cas des jets plans et $n = 1$ dans les simulations de jets ronds, cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial r \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

La forme générique des équations de transport résolues est alors :

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\rho} \Phi}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\rho} \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[r \bar{\rho} \frac{\nu_t}{\sigma_\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + P_\Phi + R_\Phi \quad (31)$$

où P_Φ et R_Φ regroupent respectivement les termes sources en situation homogène ou isotherme, et ceux spécifiques de la variation de masse volumique. Leur contenu est détaillé au *tableau I*. La forme particulière du terme de diffusion dans l'équation de continuité empêche de la mettre sous cette forme générique, elle s'écrit en effet :

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[r \frac{\nu_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \right] \quad (32)$$

Les termes sources tels que donnés dans le *tableau I* nécessitent encore l'utilisation des relations ou modèles suivants :

$$\nu_t = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \overline{\rho v'} = - \frac{\nu_t}{\sigma_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \approx - \frac{\partial r \overline{\rho v'^2}}{\partial y} \approx - \frac{2}{3} \frac{\partial r \bar{\rho} \bar{k}}{\partial y} \quad (34)$$

Le *tableau II* donne la valeur des constantes de modélisation retenues.

TABLEAU I / TABLE I		
Termes sources des équations résolues dans le cadre d'une fermeture au premier ordre		
The production-destruction terms involved in first-order turbulence models		
Φ	P_Φ	R_Φ
\bar{U}	/	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} [r \overline{\rho v' \bar{U}}] + (\bar{\rho} - \rho_{\text{amb}})g$
\bar{k}	$\bar{\rho} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 - \bar{\rho} \varepsilon$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} [r \overline{\rho v' \bar{k}}] + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho v'} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y}$
ε	$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\bar{k}} \bar{\rho} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{\bar{k}}$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} [r \overline{\rho v' \varepsilon}] + C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{\bar{k}} \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho v'} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y}$

TABLEAU II / TABLE II Constantes des modèles au premier ordre The constants of the first-order turbulence models						
C_μ	σ_k	σ_ε	σ_ρ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$
0,09	1,0	1,3	0,7	1,92	1,44	0,95

B. Équations résolues dans le cadre d'une fermeture au second ordre

La condition de champ de vitesse moyenne solénoïdal est maintenue et l'équation de continuité s'écrit maintenant conformément à (20) :

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{T}} \overline{\theta' v'} \right) \quad (35)$$

La forme générique des équations résolues dans le cadre d'une fermeture à l'ordre deux est la suivante :

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\rho} \Phi}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{\rho} \Phi}{\partial y} = D_\Phi + P_\Phi + R_\Phi \quad (36)$$

P_Φ et R_Φ ont la même signification que dans l'Annexe A, D_Φ représente alors le terme de diffusion. Le détail des trois premiers groupes de termes est récapitulé dans le *tableau III*. Il s'accompagne des définitions suivantes :

$$P_{ij} = \overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \quad (37)$$

$$P_{\theta i} = \overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \overline{\rho \theta' u'_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \quad (38)$$

$$P_{\theta^2} = \overline{\rho \theta' u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (39)$$

$$G_{ij} = \frac{\overline{\rho u'_i}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j}, \quad G_{\theta i} = \frac{\overline{\rho \theta'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \quad (40)$$

$$Q_{ij} = \overline{\rho u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j} + \overline{\rho u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad Q = P_{ii}/2 = Q_{ii}/2 \quad (41)$$

$$b_{ij} = \overline{\rho u'_i u'_j} / \bar{\rho} \bar{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (42)$$

Le modèle pour la corrélation pression-déformation est celui dû à Lumley (1978) :

$$\Pi_{ij} = a_0 \bar{\rho} \bar{k} \bar{D}_{ij} + a_1 (P_{ij} - \frac{2}{3} Q \delta_{ij}) + a_2 (Q_{ij} - \frac{2}{3} Q \delta_{ij}) + \beta \bar{\rho} \varepsilon b_{ij} \quad (43)$$

$$\text{et} \quad \beta = 1 + \frac{1}{2} (1/9 + 2 III + II) \exp \left(- \frac{7,77}{R_t^{0,5}} \right) \left[\frac{72}{R_t^{0,5}} + 80,1 \lg (1 + 62,4 (2,3 III - II)) \right]$$

Celui pour la corrélation fluctuation de température-gradient de pression fluctuante est un modèle développé à l'ordre un en anisotropie, déduit de celui plus général proposé par Hérard (1986) :

$$\Pi_{\theta i} = - \overline{\theta' \partial p' / x_i} = b_0 \overline{\rho \theta' u'_j} \partial \bar{U}_j x_i + b_1 \overline{\rho \theta' u'_j} \partial \bar{U}_j x_i + b_2 \frac{\varepsilon}{\bar{k}} \overline{\rho \theta' u'_i} \quad (44)$$

Les modèles pour les diffusions turbulentes dans les équations aux moments pondérés d'ordre deux sont quand à eux calqué sur le schéma dû à Daly et Harlow [34] adapté aux contextes de la variation de masse volumique :

$$- \bar{\rho} \overline{u'_i u'_j u'_k} = d_0 \frac{\bar{k}}{\varepsilon} \overline{\rho u'_k u'_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\overline{\rho u'_i u'_j} / \bar{\rho} \right) \quad (45)$$

$$- \bar{\rho} \overline{u'_i \theta' u'_k} = d_1 \frac{\bar{k}}{\varepsilon} \overline{\rho u'_k u'_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\overline{\rho \theta' u'_i} / \bar{\rho} \right) \quad (46)$$

$$- \bar{\rho} \overline{\theta'^2 u'_k} = d_2 \frac{\bar{k}}{\varepsilon} \overline{\rho u'_k u'_\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\overline{\rho \theta'^2} / \bar{\rho} \right) \quad (47)$$

$$- \bar{\rho} \overline{\varepsilon u'_k} = d_\varepsilon \frac{\bar{k}}{\varepsilon} \overline{\rho u'_k u'_\ell} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\ell} \quad (48)$$

La valeur des constantes de modélisation est donnée dans le *tableau IV*.

TABLEAU III / TABLE III Termes sources et de diffusion des équations résolues, modèles au second ordre inclus The production-destruction plus diffusion terms involved in second-order turbulence models			
Φ	D_Φ	P_Φ	R_Φ
\bar{U}	$-\frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{\rho u' v'}}{\partial y}$	/	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} [r \overline{\rho v' U}] + (\bar{\rho} - \rho_{\text{amb}}) g$
$\overline{\rho u'_i u'_j} / \bar{\rho}$	$-\frac{\partial \overline{\rho u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k}$	$P_{ij} + \Pi_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \varepsilon \delta_{ij}$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} [r \overline{\rho v' \overline{\rho u'_i u'_j} / \bar{\rho}}] + G_{ij}$
$\overline{\rho u'_i \theta'} / \bar{\rho}$	$-\frac{\partial \overline{\rho u'_i \theta' u'_k}}{\partial x_k}$	$P_{\theta i} + \Pi_{\theta i}$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} [r \overline{\rho v' \overline{\rho u'_i \theta'} / \bar{\rho}}] + G_{\theta i}$
$\overline{\rho \theta'^2} / \bar{\rho}$	$-\frac{\partial \overline{\rho \theta'^2 u'_k}}{\partial x_k}$	$P_{\theta^2} - \bar{\rho} \varepsilon \theta^2$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} [r \overline{\rho v' \overline{\rho \theta'^2} / \bar{\rho}}]$
ε	$-\frac{1}{r} \frac{\partial r \overline{\rho \varepsilon v'}}{\partial y}$	$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{\bar{k}} Q - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{\bar{k}}$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} [r \overline{\rho v' \varepsilon}] + C_{\varepsilon 3} \frac{G_{ii}}{2}$

TABLEAU IV / TABLE IV												
Constantes des modèles au second ordre												
The constants of the second-order turbulence models												
d_0	d_1	d_2	d_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}$	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
0, 22	0, 15	0, 2	0, 19	1, 44	1, 92	0, 95	0	-0, 73	0, 13	0, 8	-0, 2	-3, 5

ABRIDGED ENGLISH VERSION

The modelling of highly-heated subsonic turbulent jets

This paper deals with two different aspects of issues encountered when modelling the behaviour of non-isothermal turbulent shear flows. The first step raises the alternative to use or not to use the mass-weighted statistics proposed by Favre [1]. The widespread response is positive and the satisfactory results obtained by closures-schemes developed using mass-weighted variables are supporting such a choice. The second point is relative to the understanding of the way density variations are acting to modify the behaviour of non-isothermal flows.

As is developed in the first part, a centred treatment (Reynolds average) of the Navier-Stokes equations, proposed by Chassaing [2], enables us to examine the contents of closure schemes derived in Favre statistics. Dealing with centred statistical moments only, this formulation isolates the turbulent mass-flux contribution otherwise buried in mass-weighted mean velocities. Since it is always possible to turn Favre variables into centred ones, standard gradient-type closure schemes for diffusion terms, expressed in Favre variables, are 'uncompressed' into their centred form.

Concerning the first-order closure of diffusion terms, such as the turbulent shear-stresses, the transposal of the Boussinesq hypothesis of an eddy viscosity to mass-weighted quantities requires three closures assumptions : the first is the Boussinesq assumption itself relating stresses $\overline{u'_i u'_j}$ (centred fluctuations) to the mean shear $\overline{U}_{i,j}$, the second and third ones are gradient type models for the two following moments $\overline{\rho' u'_i}$ and $\overline{\rho' u'_i u'_j}$, specific of variable-density situations.

Among the numerous problems encountered when deriving second-order closures, we focus on the modelling of diffusion terms in the transport equation for second-order moments. With the same method as before the contents of the gradient-type closure scheme expressed in Favre variable are analysed. It is demonstrated that such models rely on a quasi-normal approximation for the joint pdf of density and velocity fluctuations. Though experimental data do not support such a statement,

as in the close-to-exit region of binary jets, such jet characteristics as the sensitivity of the position of the on-axis peak of turbulent-kinetic-energy to the density ratio are not predicted by models simply neglecting fourth-order correlations like $\overline{\rho' u'_i u'_j u'_k}$.

The overall conclusion is that transposed closure-schemes from constant-density formulations to the mass-weighted quantities of variable-density flows are making additional hidden assumptions. These assumptions, though partially not consistent with experimental data, are as questionable as usual closure assumptions and sometimes useful to the performance of prediction of the heated jet features.

The closed equations in the Favre variable are then transformed to their equivalent in centred statistics. A parabolic numerical simulation of heated jets based on second-order closure, including the hidden above-debated assumptions, is performed. The interest of such a 'come-back' to centered statistics is to give an opportunity to focus on the role of turbulent mass-fluxes and to be able to criticize the short cuts imbedded in direct transpositions of standard models to mass-weighted variables.

The prediction of experimentally-asserted features of density effects on the mean field of variable density jets is verified. The self-preserving behaviour for the mean axial velocity and the mean scalar are checked under condition of no-gravity. The predicted sensitivity of the streamwise self-preserving evolutions is found to be well characterized by the concept of equivalent diameter supplemented with a new equivalent velocity. Due mainly to buoyancy effects, measured decay rate coefficients are spread over a wide range. This allowed Chen and Rodi [15] to define average values only. The predicted coefficients are constants and close to this mean values.

The density effects on the streamwise evolution of the turbulent-kinetic-energy is numerically explored. The experimental data point out a backward shift and increase of the maximum turbulent-kinetic-energy with higher exit temperatures. It is shown that the model is within the range of experimental data collected for binary-mixing light jets. However it is stressed that a better knowledge

of initial conditions in the exit section, especially the dissipation rate profile, would be necessary to calibrate the model constants. Till now predictions have relied on ad hoc assumptions to deduce the dissipation-rate in the exit-section from measured quantities. This is a weakness of constant-density model calibrations and is a more stringent problem in the variable-density jet since intense density-effects are simultaneous to the transformation of a channel/pipe-flow into a free-shear-flow.

Despite the remaining frustration as for a fine tuning of variable-density closure schemes, the prediction is considered reasonable enough to perform a physical analysis of the way density-effects are acting on the centreline velocity decrease and a qualitative description of turbulent-mass-fluxes. The centreline velocity decay rate is directly related to the

on-axis gradient of the turbulent-shear-stress profile. A simultaneous plotting of non-dimensional parameters relative to those two features gives a new insight into the dynamics of heated jets. Finally, comparisons between mass-fluxes predicted at first- and second-order reveal that a first-order closure is likely to be sufficient. The first reason is that the spanwise mass-flux is the one that can play a significant role in the momentum and energy balance while terms including the streamwise mass-flux can be neglected. The second one is that the gradient-type closure for the spanwise mass-flux performs as well as a two-step prediction through i) a second-order prediction of the spanwise turbulent heat-flux and ii) the proportional relation between of the turbulent-heat-flux and the turbulent-mass-flux under condition of low turbulent-Mach-number.