



HAL
open science

Étude de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale fluide

Kassem Ghorayeb, Abdelkader Mojtabi

► **To cite this version:**

Kassem Ghorayeb, Abdelkader Mojtabi. Étude de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale fluide. Comptes Rendus de l'Académie des sciences. Série II. Mécanique, physique, chimie, astronomie, 1997, 324 (1), pp.19-27. 10.1016/S1251-8069(99)80003-7 . hal-03607904

HAL Id: hal-03607904

<https://hal.science/hal-03607904>

Submitted on 14 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/20648>

Official URL:

[https://doi.org/10.1016/S1251-8069\(99\)80003-7](https://doi.org/10.1016/S1251-8069(99)80003-7)

To cite this version:

Ghorayeb, Kassem and Mojtabi, Abdelkader
Étude de la convection thermosolutale dans une cavité
rectangulaire verticale fluide. (1997) Comptes Rendus de
l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-
Chemistry-Astronomy, 324 (1). 19-27. ISSN 1251-8069

Any correspondence concerning this service should be sent
to the repository administrator: tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Étude de la convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire verticale fluide

Kassem GHORAYEB et Abdelkader MOJTABI

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, UMR INPT& UPS, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France.

Résumé. L'étude des écoulements, dans une cavité rectangulaire de parois horizontales isolées et verticales soumises à des gradients horizontaux de température et de concentration différents, révèle l'existence de diagrammes de bifurcation complexes. Dans cette étude, on s'intéresse à la situation où le rapport des forces de volume solutale et thermique est égal à -1 . On étudie la stabilité linéaire de la solution d'équilibre pour une cellule rectangulaire jusqu'au cas limite de la cellule d'extension infinie. On met en évidence numériquement, en fonction du rapport d'aspect, A , de la cellule, l'existence d'une bifurcation transcritique.

Study of double-diffusive natural convection in a vertical rectangular cavity

Abstract. *A vertical enclosure, submitted to horizontal temperature and concentration gradients, is characterized by complex bifurcation phenomena. We are concerned by the situation where the opposing buoyancy forces due to horizontal thermal and concentration gradients are equal. In this work, the linear stability of equilibrium solution is studied in the case of infinite and rectangular cell. The structure of subcritical steady solutions has been studied numerically for several values of the aspect ratio of the enclosure.*

Abridged English Version

Recently, double-diffusive convection in fluid enclosures has received much attention. The interest in this class of flows has been motivated by such diverse engineering problems as crystal growth (Wilcox, 1993) and oceanography (Schmidt, 1994). We study the same problem previously investigated numerically by Krishnan (1989) and theoretically and numerically by Gobin *et al.* (1994).

The problem of thermosolutal convection in a rectangular fluid cavity depends on five nondimensional numbers (the thermal and solutal Grashof or Rayleigh numbers, Gr_T , Ra_T and Gr_S , Ra_S respectively, the Prandtl number Pr and the Lewis number Le , and the aspect ratio of the cell A). The problem is formulated using the Boussinesq approximation. The dimensionless equations for mass, momentum, energy and chemical species, where Soret effect is neglected, are given by (2)-(5) and the corresponding boundary conditions by (6)-(9).

We consider the stability analysis of the equilibrium solution when $Gr_S/Gr_T = -1$. We assume that the perturbation quantities (ψ, θ, c) are small and the principle of exchange of stability is valid, so we obtain the linearized equations (10)-(12). We have solved the equations (10)-(12) by the Galerkin method using the perturbation functions (18)-(19). The equations (10)-(12) were solved exactly for the case of an infinite vertical fluid layer, by the compound matrix method (Drazin *et al.*, 1981). This approach gives the values of the critical wavenumber $k_c = 2.53$ and the critical Rayleigh number $Ra_c(Le - 1) = 6\,509$ which are in good agreement with the results obtained by the Galerkin method, given in *table 1*. We can deduce from these results that, when $Le \rightarrow 1$, the purely diffusive solution is infinitely linearly stable. For $A = 1$, we found theoretically and numerically $Ra_c(Le - 1) = 17\,298$ while Krishnan (1989) gives numerically $Ra_c(Le - 1) = 6\,486$ and Gobin *et al.* (1994) $Ra_c(Le - 1) = 6\,269$. The numerical critical Rayleigh number obtained by Gobin *et al.* (1994) corresponds not to the linear critical Rayleigh number, but to the onset of the subcritical solution.

Two numerical models, one with a finite volume method and the second with spectral collocation Chebychev method, have been performed. The time scheme used to solve the equations (2)-(5) with (6)-(9) in the two procedures is a second order Adams-Bashforth-Euler backward scheme. Direct simulation shows that, depending on the value of the aspect ratio, there exists a transcritical bifurcation and many subcritical flows. For $A \in [1, 2.5]$, we have an equilibrium solution with only one centro-symmetrical subcritical steady convective solution. We find for $Ra > Ra_c$ a symmetric convective supercritical solution, and near the bifurcation point, ψ_{\max} depends linearly on Ra_T while Nu and Sh parabolically. For $A > 2.5$, we find multiple subcritical solutions and for $A = 4$ we obtain three subcritical solutions. Two of them are centro-symmetrical and the third is non-symmetrical with respect to the centre of the cavity. For $A = 7$ we observe four subcritical solutions, two symmetrical and two non-symmetrical.

1. Introduction

Les écoulements de convection thermosolutale en milieu fluide ont été largement étudiés ces dix dernières années comme en témoigne l'abondance des résultats publiés [Wilcox (1993), Schmidt (1994)]. On s'intéresse, dans cette étude, aux écoulements prenant naissance dans une cavité rectangulaire dans le cas où les forces de gravité thermique et solutale sont égales et opposées. Cette situation physique en milieu fluide a été analysée par Krishnan (1989) qui a étudié numériquement la transition entre le régime diffusif pur et le régime convectif, ainsi que la transition entre le régime stationnaire unicellulaire et des régimes oscillants dans le cas d'une cavité carrée, pour un nombre de Prandtl égal à 1 et un nombre de Lewis égal à 3,161. Gobin *et al.* (1994) ont analysé pour la première fois la stabilité linéaire de cette solution d'équilibre en considérant le cas de la cellule verticale infinie avec des conditions aux limites correspondant à un fluide parfait.

On se propose dans ce travail de faire, d'une part, une étude de stabilité linéaire complète de ce problème et, d'autre part, de compléter les études numériques dues à Krishnan (1989) et à Gobin *et al.* (1994). On analysera l'influence du rapport d'aspect de la cellule et du nombre de Lewis sur les

structures d'écoulement. On se restreindra à l'étude numérique des différents régimes sous-critiques et au régime convectif qui se substitue à la solution d'équilibre quand celle-ci perd sa stabilité.

2. Formulation mathématique

Il s'agit de l'étude des écoulements de convection thermosolutale dans une cavité rectangulaire remplie d'un mélange de deux fluides newtoniens homogènes. Les parois verticales de la cellule de rapport d'aspect A ($A = \text{hauteur/largeur} = H/L$) sont maintenues à des températures (T_1 et T_2) et des concentrations (C_1 et C_2) constantes. Les parois horizontales sont parfaitement isolées (fig. 1).

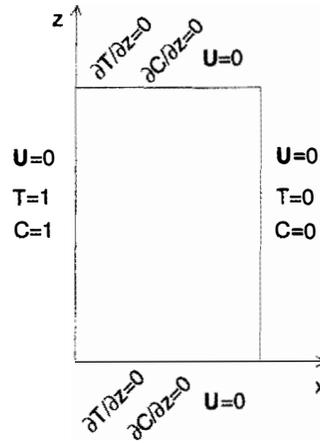


Fig. 1. - Schéma de définition.

Fig. 1. - Definition sketch.

Le modèle mathématique régissant ces écoulements est basé sur les équations de bilan et l'hypothèse de Boussinesq. La masse volumique $\rho(T, C)$ est prise, dans le terme générateur de convection, sous la forme :

$$\rho(T, C) = \rho_0[1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)] \quad (1)$$

avec $\rho_0 = \rho(T_0, C_0)$, $\beta_T = - (1/\rho_0)(\partial\rho/\partial T)_C$ et $\beta_C = - (1/\rho_0)(\partial\rho/\partial C)_T$ désignant respectivement la masse volumique à T_0 et à C_0 , le coefficient d'expansion thermique et le coefficient d'expansion solutal du fluide. Les équations adimensionnelles de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de la conservation des espèces et de l'énergie, en l'absence d'effet Soret, s'écrivent respectivement :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \Delta \mathbf{U} + (Gr_T \mathbf{T} + Gr_S \mathbf{C}) \mathbf{k} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \Delta T \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \cdot \nabla C = \frac{1}{Sc} \Delta C \quad (5)$$

avec $Gr_T = (g \beta_T \delta T L^3) / \nu^2$ désignant le nombre de Grashof thermique, $Gr_S = (g \beta_C \delta C L^3) / \nu^2$ le nombre de Grashof solutal, $Pr = \nu / \chi$ le nombre de Prandtl et $Sc = \nu / D$ le nombre de Schmidt. On introduit également le nombre de Lewis $Le = Sc / Pr = \chi / D$ où χ désigne la diffusivité thermique, D le coefficient de la diffusion moléculaire et ν la viscosité cinématique. Les conditions aux limites sont données par :

$$U = 0 \quad (x = 0, x = 1, \forall z \quad \text{et} \quad z = 0, z = A, \forall x) \quad (6)$$

$$T = C = 1 \quad (x = 0, \forall z) \quad (7)$$

$$T = C = 0 \quad (x = 1, \forall z) \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, z = A, \forall x) \quad (9)$$

Ce problème dépend de cinq paramètres adimensionnels. On se place dans l'hypothèse où $Gr_S / Gr_T = -1$. Dans ces conditions, $T = C = 1 - x$ et $U = 0$ constitue une solution exacte des équations (2)-(5) avec les conditions aux limites associées (6)-(9). On se propose, dans un premier temps, d'étudier la stabilité de cette solution d'équilibre correspondant à la double diffusion pure.

3. Analyse de la stabilité

En désignant par ψ , θ et c respectivement les perturbations de la fonction de courant, de la température et de la concentration, on obtient, en supposant le principe d'échange de stabilité vérifié pour le problème, les équations de la stabilité à l'état marginal sous la forme :

$$\Delta^2 \psi + Gr_T \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\Delta \theta}{Pr} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\Delta c}{Sc} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

auxquelles sont associées les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, z = A, \forall x) \quad (13)$$

$$c = \theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (x = 0, x = 1, \forall z) \quad (14)$$

A partir du système (11)-(12), on en déduit :

$$\Delta \left(\frac{c}{Sc} - \frac{\theta}{Pr} \right) = 0 \quad (15)$$

Et, compte tenu des conditions aux limites (13)-(14), on déduit qu'au voisinage de la transition diffusion pure-convection la perturbation de concentration est reliée à la perturbation de température par la relation simple : $c = \frac{Sc}{Pr} \theta = Le \theta$, résultat que l'on retrouve parfaitement, au voisinage du point de bifurcation, à partir de notre simulation numérique.

En éliminant une des inconnues du système (10)-(12), on obtient un système du quatrième ordre en ψ et θ ou ψ et c , soit :

$$\Delta^2 \psi + Gr_T(Le - 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\Delta \theta}{Pr} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

On peut remarquer, en remplaçant ψ par $Pr \psi$ dans les équations de stabilité (16)-(17), que le paramètre de stabilité de ce problème est le groupement $Ra_T(Le - 1)$. En écrivant les perturbations, vérifiant l'ensemble des conditions aux limites, sous la forme :

$$\psi = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{nm} \sin(\pi x) \sin(n\pi x) \sin\left(\pi \frac{z}{A}\right) \sin\left(m\pi \frac{z}{A}\right) \quad (18)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{nm} \sin(n\pi x) \cos\left(m\pi \frac{z}{A}\right) \quad (19)$$

nous avons résolu le système (16)-(17) dans le cas d'une cellule rectangulaire par la méthode de Galerkin jusqu'à l'ordre ($N = 8, M = 8$), ce qui revient à annuler des déterminants (128, 128). Dans le cas de la cellule infinie, les perturbations sont écrites sous la forme :

$$\psi = \sum_{n=1}^N a_n \sin(\pi x) \sin(n\pi x) e^{ikz} \quad (20)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\pi x) e^{ikz} \quad (21)$$

où k désigne le nombre d'onde dans la direction z et i l'imaginaire pur.

Ce problème a été résolu par la méthode des matrices composées (Drazin *et al.*, 1981). On trouve, dans ce cas, un nombre d'onde critique $k_c = 2,53$ et une valeur du groupement $Ra_c(Le - 1) = 6\,509$ qui sont en parfait accord avec les résultats obtenus par la méthode de Galerkin (tableau I). Pour $A = 1$ nous avons trouvé $Ra_c(Le - 1) = 17\,298$ [alors que Krishnan (1989) et Gobin *et al.* (1994) ont obtenu respectivement de bien plus faibles valeurs : $Ra_c(Le - 1) = 6\,486$ et $Ra_c(Le - 1) = 6\,269$]. Ces valeurs sont associées, à notre avis, à l'apparition de la solution sous-critique, résultat que l'on a retrouvé numériquement. Ainsi, plus on astreint l'écoulement, plus la solution d'équilibre est stable. La solution d'équilibre devient linéairement infiniment stable quand $Le \rightarrow 1$.

TABLEAU I

Nombre de Rayleigh critique en fonction du rapport de cellule, pour plusieurs approximations.

Critical Rayleigh number as a function of the aspect ratio for different orders of approximations.

A	N	M	$Ra_c(Le - 1)$	A	N	M	$Ra_c(Le - 1)$
1	5	5	17 806	3	3	9	7 878
1	6	6	17 426	3	4	10	7 518
1	7	7	17 435	4	3	8	7 437
1	8	8	17 298	4	3	10	7 424
2	2	4	9 882	A	N	k_c	$Ra_c(Le - 1)$
2	3	4	9 364	∞	3	2,52	6 892
2	4	6	8 906	∞	4	2,53	6 622
2	4	8	8 880	∞	5	2,53	6 620

4. Approche numérique

Les équations (2)-(5) et (6)-(9) ont été résolues en utilisant un code aux volumes finis basé sur la méthode des projections avec des maillages (40, 40) pour les cellules carrées et un maillage de (40, 200) pour les grands rapports d'aspect. Ce code a été validé en utilisant une méthode spectrale du type collocation, avec des polynômes de Tchebycheff. Pour les deux approches, l'intégration temporelle utilise un schéma aux différences finies d'ordre 2 du type Adams-Bashforth-Euler retardé. Les résultats obtenus par ces deux codes sont en parfait accord entre eux et avec ceux trouvés par Gobin *et al.* (1994) pour l'écoulement monocellulaire dans la cellule carrée.

On peut remarquer d'une part que si $[\Psi(x, z, t), T(x, z, t), C(x, z, t)]$ est solution du formalisme (2)-(9), alors $[\Psi(1-x, A-z, t), 1-T(1-x, A-z, t), 1-C(1-x, A-z, t)]$ est aussi solution de ce problème. On ne tiendra compte par la suite que de l'une ou de l'autre de ces deux variantes de solutions non centro-symétriques.

Nous avons procédé, dans une première partie, à la détermination du nombre de Rayleigh critique linéaire en fonction du rapport d'aspect et pour plusieurs valeurs du nombre de Lewis (fig. 2). On confirme numériquement que le groupement $Ra_T(Le - 1)$ est le paramètre de stabilité effectif du problème.

Nous avons ensuite mis en évidence, en se restreignant à l'étude des solutions de double diffusion sous-critiques ou celles obtenues juste après la perte de stabilité de la solution d'équilibre, les résultats suivants.

Pour $A \in [1, 2,5]$, on observe une seule solution stationnaire convective monocellulaire sous-critique à symétrie centrale et une solution convective tricellulaire centro-symétrique qui se substitue à la solution d'équilibre pour Ra_T légèrement supérieur à Ra_c . Au voisinage du point de bifurcation, les nombres de Nusselt et de Sherwood croissent de façon parabolique en fonction de Ra_T (fig. 3) alors que ψ_{\max} croît linéairement.

Pour $A > 2,5$, nous avons obtenu, pour Ra_T et Le fixés, une multiplicité de solutions convectives sous-critiques selon les conditions initiales utilisées.

Pour $A = 4$, on observe trois solutions stationnaires sous-critiques dont deux à symétrie centrale (types 1 et 3) et une non centro-symétrique (type 2). Cette dernière solution possède un bassin d'attraction plus important que les deux premières qui ne sont obtenues que pour une variété de conditions initiales particulières.

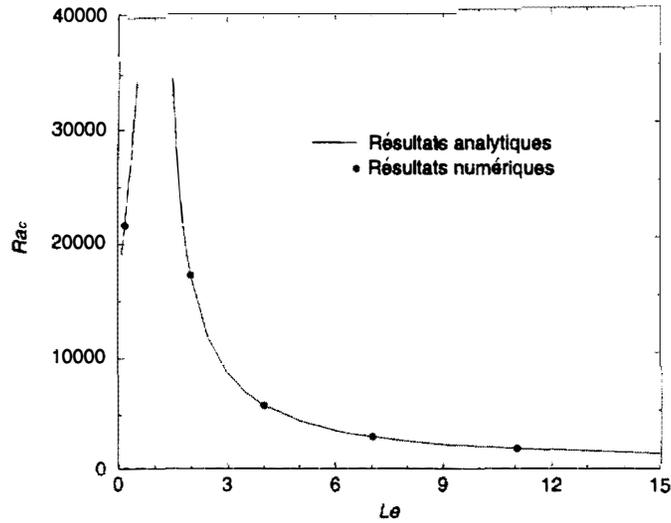


Fig. 2. - Courbes de stabilité marginale en fonction du nombre de Lewis, $A = 1$.

Fig. 2. - Marginal stability curves as function of the Lewis number, $A = 1$.

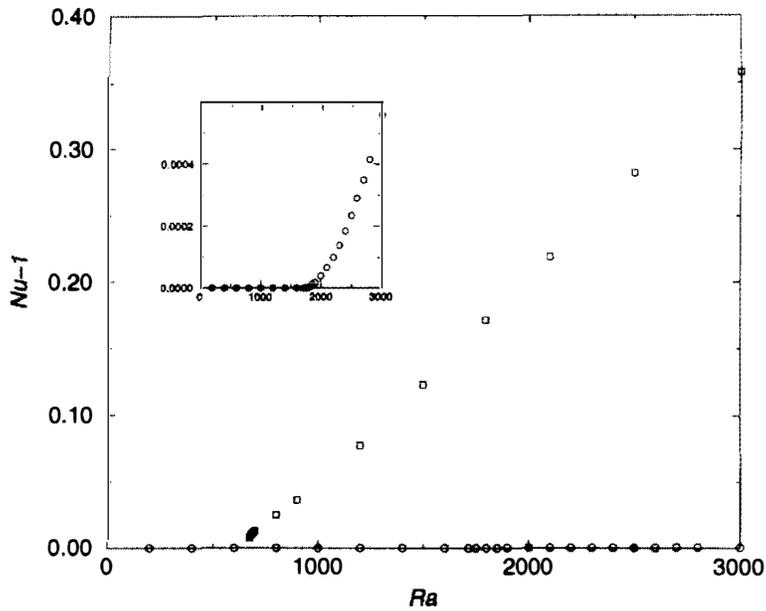


Fig. 3. - Diagramme de bifurcation : nombre de Nusselt en fonction de Ra_T pour $Le = 11$, $A = 1$.

Fig. 3. - Bifurcation diagram : Nusselt number of Ra_T for $Le = 11$, $A = 1$.

Pour $A = 7$, on retrouve cette fois-ci quatre solutions dont deux à symétrie centrale (types 1 et 3) et deux non centro-symétriques (types 2 et 4) (fig. 4 et 5). La quatrième solution (type 4) correspond à la superposition de la solution de type 1 et de la solution de type 2. La valeur du nombre de Nusselt (Sherwood) associé se déduit, sans autre calcul, des solutions précédentes.

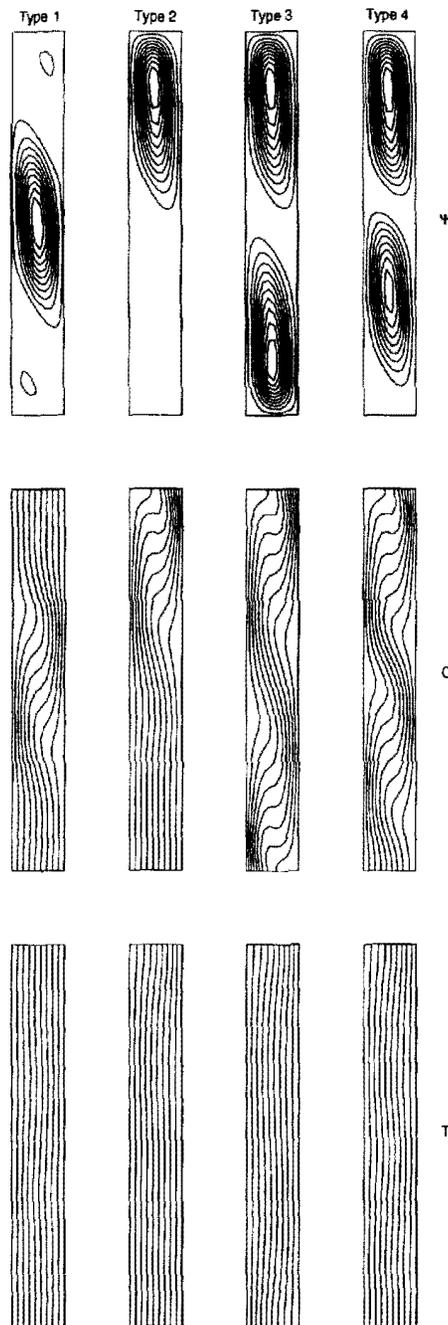


Fig. 4. - Lignes de courant, isoconcentrations et isothermes pour plusieurs écoulements sous-critiques pour $A = 7$, $Le = 11$, $Ra = 550$.

Fig. 4. - Streamlines, concentration lines and isotherms for multiple subcritical flows for $A = 7$, $Le = 11$, $Ra_T = 550$.

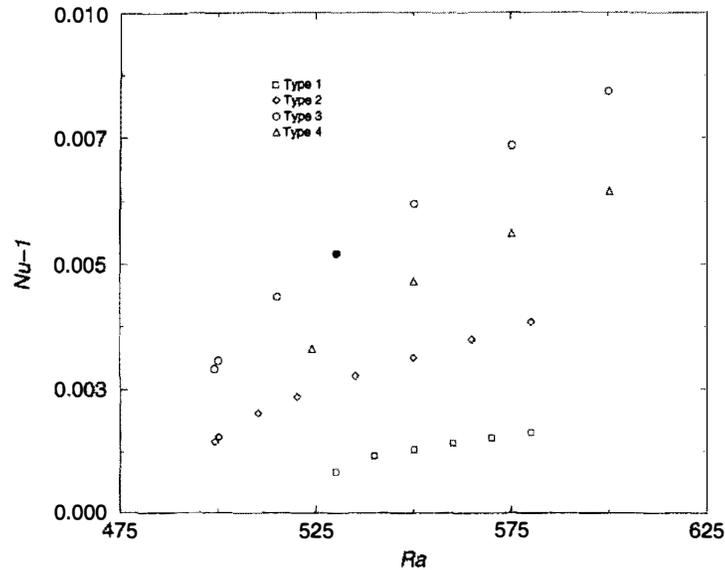


Fig. 5. - Comportement du nombre de Nusselt en fonction de Ra_T pour $A = 7$, $Le = 11$.

Fig. 5. - Behaviour of the Nusselt number for the supercritical regimes for $A = 7$, $Fe = 11$.

5. Conclusion

Nous avons ainsi déterminé le point de bifurcation, double diffusion pure - convection stationnaire par voie théorique de deux façons différentes dans le cas de la cellule rectangulaire ou verticale infinie. De plus, nous avons montré que le confinement stabilise la solution de double diffusion pure puisque c'est pour la cellule d'extension verticale infinie que l'on obtient la plus petite valeur du paramètre $Ra_c(Le - 1)$. Ces résultats ont été de plus confirmés numériquement. D'autres calculs restent encore à développer pour analyser de manière plus approfondie ces différentes transitions transcritiques.

Note remise le 12 mars 1996, acceptée après révision le 10 octobre 1996.

Références bibliographiques

- Drazin R. G. and Reid W. H., 1981.** *Hydrodynamic Stability* Cambridge University Press.
- Gobin D. and Bennacer R., 1994.** Double diffusion in a vertical fluid layer: onset of the convective regime, *Phys. Fluids*, 6, No. 1, p. 59-67.
- Krishnan R., 1989.** A numerical study of the instability of double diffusive convection in a square enclosure with a horizontal temperature and concentration gradients, *Proc. of ASME National Heat Transfer Conference*, Philadelphia 1989, ASME, New York, p. 357-368.
- Schmidt R. W., 1994.** Double diffusion in oceanography, *Annual Rev. Fluid. Mech.*, 26, p. 255-285.
- Wilcox W. R., 1993.** Transport phenomena in crystal growth from solution, *Prog. Crystal Growth and Charact.*, 26, p. 153-194.