



HAL
open science

Quasi-groupes de Frobenius dimensionnels

Samuel Zamour

► **To cite this version:**

| Samuel Zamour. Quasi-groupes de Frobenius dimensionnels. 2022. ⟨hal-03605488v2⟩

HAL Id: hal-03605488

<https://hal.science/hal-03605488v2>

Preprint submitted on 20 Apr 2022 (v2), last revised 23 Jan 2023 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Quasi-groupes de Frobenius dimensionnels

Samuel Zamour*

20 Avril 2022

Résumé

Nous nous intéressons à une classe de groupes, les quasi-groupes de Frobenius (avec involutions), dont la structure interne généralise celle des groupes classiques $GA_1(\mathbb{C})$, $PGL_2(\mathbb{C})$ et $SO_3(\mathbb{R})$: un sous-groupe et ses conjugués, d'indice fini dans leur normalisateur et d'intersection mutuelle triviale, recouvrent "génériquement" le groupe ambiant. Dans la perspective de la théorie des modèles, nous travaillons avec l'hypothèse de l'existence d'une bonne notion dimension sur les ensembles définissables (il faut distinguer le cas o-minimal et le cas rangé). Nous accordons une attention particulière au cas rangé. En étudiant la géométrie d'incidence induite par les involutions, nous esquissons une classification des quasi-groupes de Frobenius et nous déterminons ainsi sous quelles conditions des groupes classiques peuvent être identifiés dans un cadre dimensionnel.

Abstract

We are interested in a class of groups, quasi-Frobenius groups (with involutions), whose internal structure generalizes that of the classical groups $GA_1(\mathbb{C})$, $PGL_2(\mathbb{C})$ and $SO_3(\mathbb{R})$: a subgroup and its conjugates, of finite index in their normalizer and trivial mutual intersection, cover "generically" the ambient group. From the perspective of model theory, we work with the hypothesis of the existence of a good notion of dimension on definable sets (we must distinguish between the o-minimal case and the ranked case). We pay special attention to the ranked case. By studying the geometry of incidence induced by involutions, we sketch a classification of quasi-Frobenius groups and thus determine under which conditions classical groups can be identified in a dimensional framework.

1 Introduction

Les groupes rangés (ou de rang de Morley fini) sont des groupes munis d'une certaine fonction de dimension finie (le rang de Morley) pour les ensembles interprétables (c'est-à-dire définissables modulo une relation d'équivalence définissable) qui satisfait les axiomes suivants :

*Institut Camille Jordan (ICJ), Université Claude Bernard Lyon 1, e-mail : zamour@math.univ-lyon1.fr

1. Axiome A (monotonie) : Soit A un ensemble interprétable. Alors $RM(A) \geq n + 1$ si et seulement si A contient une infinité d'ensembles interprétables deux à deux disjoints de rang supérieur ou égal à n .
2. Axiome B (définissabilité) : Si $f : A \rightarrow B$ est une fonction interprétable entre deux ensembles interprétables A et B , alors pour tout n , le sous-ensemble $\{b \in B : RM(f^{-1}(b)) = n\}$ est interprétable.
3. Axiome C (additivité) : Si $f : A \rightarrow B$ est un fonction interprétable, et si $RM(f^{-1}(b)) = n$, pour tout $b \in B$ alors $RM(A) = n + RM(B)$.
4. Axiome D (élimination du quantificateur infini) : Pour toute fonction interprétable $f : A \rightarrow B$, il existe un entier m tel que pour tout $b \in B$, la fibre $f^{-1}(b)$ est infini dès qu'elle contient au moins m éléments.

Les groupes algébriques sur un corps algébriquement clos sont des exemples typiques de groupes rangés. Du point de vue du comportement de leur dimension, il est possible d'établir une analogie avec les groupes de Lie réels et plus généralement avec les groupes définissables dans les structures o-minimales. Ces derniers peuvent être également caractérisés par une fonction de dimension qui présente de nombreux points communs avec le rang de Morley (elle satisfait les axiomes B et C mais pas l'axiome A). Dans les deux cas, nous disposons d'une notion appropriée de généricité qui s'applique aux parties définissables de dimension maximale.

Du point de vue de la théorie des modèles, il semble donc possible de décrire dans un cadre commun - celui des groupes dimensionnels - les groupes de Lie (réels) et les groupes algébriques (sur un corps algébriquement clos).

On peut illustrer ce principe méthodologique en considérant les groupes $SO_3(\mathbb{R})$ et $PGL_2(\mathbb{C})$. Ce sont des groupes dimensionnels qui présentent une structure interne très proche, se reflétant dans la géométrie d'incidence induite par les involutions. Comme le font remarquer J. Wiscons et A. Deloro dans [DW20], les involutions forment un plan projectif dans $SO_3(\mathbb{R})$; les axiomes sont satisfaits seulement génériquement dans $PGL_2(\mathbb{C})$. Il s'agira de déterminer dans quelle mesure cette géométrie des involutions permet de caractériser ces groupes classiques parmi les groupes dimensionnels.

Pour établir cette théorie commune, nous sommes conduits à introduire la définition suivante.

Une paire $C < G$ de groupes dimensionnels (o-minimaux ou rangés) connexes, *i.e.*, sans sous-groupe définissable d'indice fini, est un *quasi-groupe de Frobenius* (QF) si C est connexe, d'indice fini dans son normalisation et $TI(C^g \cap C) = \{1\}$ pour tout $g \notin N_G(C)$.

Si l'indice de C dans son normalisateur est pair (respectivement impair, trivial), on parlera de quasi-groupe de Frobenius pair (QFP) (respectivement, de quasi-groupe de Frobenius impair (QFI), de groupe de Frobenius connexe).

Remarquons que $GA_1(\mathbb{C})$, le groupe des transformations affines complexes, est un exemple de groupe de Frobenius connexe rangé. Si les involutions induisent

également une géométrie d'incidence, cette dernière se distingue assez nettement de la géométrie observée précédemment.

Nous cherchons à classifier les quasi-groupes de Frobenius dimensionnels, en distinguant d'une part, les (QFP) et d'autre part, les groupes de Frobenius connexes. En général, nous supposons que les groupes en question sont U_2^\perp : il n'y a pas de 2-groupe abélien élémentaire infini. Du point de vue des (QFP), nous pouvons formuler les deux conjectures suivantes :

1. (Conjecture A_1 de [DW20]) Soit $C < G$ un (QFP) rangé, contenant des involutions et U_2^\perp . Alors G est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(K)$ pour un corps algébriquement clos K .
2. Soit $C < G$ un (QFP) définissable dans une structure o-minimale. Si $\bigcup_G C^g$ contient toutes les translations, *i.e.*, les produits de deux involutions, alors G est isomorphe à $\mathrm{SO}_3(R)$ pour un corps réel clos R .

L'étude de ce type de configurations trouve son origine dans les articles [Nes89] et [NPR91]. Les groupes $\mathrm{PGL}_2(K)$ et $\mathrm{SO}_3(R)$ y sont identifiés parmi les groupes dimensionnels de petite dimension (inférieure ou égale à trois).

Pour ce qui est des groupes de Frobenius connexes, nous restreignons notre attention au cas rangé. La conjecture suivante guidera notre étude :

Un groupe de Frobenius rangé $C < G$ est scindé, *i.e.*, s'écrit $U \rtimes C$ pour un sous-groupe définissable U .

Remarquons que la classification des groupes de Frobenius et en particulier des groupes strictement 2-transitifs définissables dans une structure o-minimale est largement clarifiée par les articles [Tent00] et [MMT99]. En particulier, dans [Tent00], il est établi que les groupes strictement 2-transitifs définissables dans une structure o-minimale sont isomorphes aux groupes des transformations affines d'un corps gauche (interprétable); ce sont en particulier des groupes de Frobenius scindés.

Dans cette article, nous introduisons d'abord le cadre approprié pour définir la notion de groupe dimensionnel et nous montrons sous quelles conditions il est possible d'exploiter la structure de (QFP) pour interpréter $\mathrm{SO}_3(K)$ pour un corps K interprétable (nous suivons les méthodes de l'école de Bachmann).

Nous étudions ensuite plus précisément le cas o-minimal et nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 1.0.1. *Soit $C < G$ un (QFP) définissable dans une structure o-minimale. On suppose que $\bigcup_G C^g$ contient tous les 2-éléments et toutes les translations (produits de deux involutions). Alors*

1. C est un groupe semi-simple, *i.e.*, ne contient pas de sous-groupe abélien normal infini.
2. Si on suppose de plus que $Z(G)$ trivial et que C nilpotent, alors $G \simeq \mathrm{SO}_3(R)$ pour un corps réel clos R interprétable.

Nous développons ensuite notre analyse dans le contexte rangé. Nous formulons d’abord une esquisse d’une théorie générale des quasi-groupes de Frobenius (générosité des sous-groupes, structure de la 2-torsion et étude du groupe de Weyl). Une attention particulière est ensuite portée à l’étude des translations. Nous montrons sous l’hypothèse de générosité des sous-groupes de Borel (l’ensemble des éléments formé par un groupe définissable connexe résoluble maximal et ses conjugués est générique dans le groupe ambiant) les deux théorèmes suivants :

Théorème 1.0.2. *Soit $C < G$ un (QFP) rangé de type impair, U_2^\perp , tel que les sous-groupes de Borel sont généreux. Alors $G \simeq PGL_2(K)$ pour un corps K algébriquement clos.*

Théorème 1.0.3. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé connexe de type impair, U_2^\perp , tel que C est abélien et tel que les sous-groupes de Borel sont généreux. Alors $G = U \rtimes C$, où U est un groupe définissable abélien.*

Cet article se base sur les travaux de l’auteur menés durant sa thèse sous la direction de Frank Wagner. Nous souhaiterions le remercier chaleureusement pour ses relectures attentives et ses nombreuses remarques qui se sont avérées essentielles en bien des points.

2 Groupes dimensionnels et théorème de Bachmann

Étant donné une structure M , on dira qu’un groupe G définissable dans M est *dimensionnel* si on peut munir les ensembles définissables de G et de ses puissances cartésiennes d’une dimension finie dim satisfaisant les axiomes suivants (voir [EJO12] et [EJO14]) :

- (A₁) Si f est une fonction définissable entre deux sous-ensembles définissables A et B , alors $\{b \in B : dim(f^{-1}(b)) = n\}$ est définissable.
- (A₂) Si f est une fonction définissable entre deux sous-ensembles définissables A et B , telle que les fibres sont de dimension constante égale à m alors $dim(A) = dim(Im(f)) + m$.
- (A₃) A est fini si et seulement si $dim(A) = 0$.
- (A₄) $dim(A \cup B) = max\{dim(A), dim(B)\}$.

Les groupes de rang de Morley fini, les groupes définissables dans une structure o-minimale, dans le corps des nombres p-adiques, dans un corps P-minimal sont des exemples de groupes dimensionnels.

On parlera de groupe *dimensionnel*^o si de plus le groupe satisfait la condition de chaîne descendante pour les sous-groupes définissables et si la dimension peut être étendue aux sous-ensembles interprétables du groupe (l’existence d’un choix définissable fort ou l’élimination des imaginaires rendent possible une telle extension). En particulier, on peut attacher une dimension aux sections définissables.

Les groupes définissables dans une structure o-minimale [Ed03, Théorème 7.2] et les groupes rangés (par définition) sont des exemples de groupes *dimensionnels*^o (mais ce n'est plus le cas des groupes définissables dans le corps des nombres p-adiques, par exemple).

Un groupe *dimensionnel*^o G admet une composante connexe G° , *i.e.*, un plus petit sous-groupe définissable d'indice fini : il suffit de considérer l'intersection de tous les sous-groupes définissables d'indice fini. On dira qu'il est *connexe* si $G^\circ = G$. De plus, chaque sous-ensemble $X \subseteq G$ est contenu dans un plus petit sous-groupe définissable (noté $d(X)$). Remarquons que, comme dans le cas rangé, certaines propriétés sont préservées lorsque l'on passe à la clôture définissable d'un sous-groupe (non-définissable) H [EJO14, Lemmes 3.3 et 3.4] :

- Soit $K \subseteq G$. Si H est K -invariant alors $d(H)$ est K -invariant.
- Si H est nilpotent de classe n , alors $d(H)$ est nilpotent de classe n .

La condition de chaîne descendante pour les sous-groupes définissables rend également possible le relèvement de la torsion :

Soit H un sous-groupe définissable normal tel que xH soit un p -élément dans G/H alors il existe un p -élément dans xH [EJO12, Fait 3.9].

L'existence d'une dimension finie permet de caractériser facilement les parties qui sont, en un certain sens, "larges". On dira qu'une partie Y est *générique* si elle contient une partie définissable X tel que $\dim(X) = \dim(G)$. On dira que X est *large* si $\dim(G \setminus X) < \dim(G)$. De plus, étant donné un sous-groupe définissable H , l'équation $\dim(G) = \dim(G/H) + \dim(H)$ montre qu'un sous-groupe définissable H est d'indice fini dans G ssi H est générique dans G .

Par ailleurs, l'additivité de la dimension et l'élimination des imaginaires permettent d'effectuer des calculs de dimension analogues à ceux conduits dans [Jal06].

Définissons donc précisément ce qu'on entend par un quasi-groupe de Frobenius *dimensionnel*^o :

Définition 2.0.1. *Soit G un groupe dimensionnel^o connexe et C un sous-groupe propre définissable connexe. Alors $C < G$ est un quasi-groupe de Frobenius si C est d'indice fini dans son normalisateur et s'il est TI, *i.e.*, $C^g \cap C = \{1\}$ pour tout $g \notin N_G(C)$. On dira que C est un quasi-complément de Frobenius.*

On remarque que $N_G(C)^\circ = C$ et que $C_G(g)^\circ \leq C$, pour tout $1 \neq g \in C$: $C_G(g) \leq N_G(C)$ par la propriété TI et $C_G(g)^\circ \leq N_G(C)^\circ = C$.

Avant de mener à bien l'analyse des quasi-groupes de Frobenius *dimensionnels*^o, il nous faut souligner une différence essentielle entre le contexte rangé et le contexte o-minimal. Pour un groupe connexe rangé G , la notion de largeur et celle de généricité coïncident alors que ce n'est pas forcément le cas pour un groupe connexe définissable dans une structure o-minimale. En particulier, deux parties génériques ne s'intersectent pas forcément.

De plus, l'action des automorphismes définissables involutifs peut être caractérisée de façon commode dans le contexte rangé (mais pas forcément dans le cas o-minimal) : si un automorphisme involutif d'un groupe rangé connexe a un nombre fini de points fixes, alors l'action se fait par inversion et le groupe est abélien. Or, la compréhension de l'action des involutions se révèle indispensable à notre étude des quasi-groupes de Frobenius *dimensionnels*^o. Nous sommes donc conduits à proposer un nouvel axiome pour identifier une sous-classe des groupes *dimensionnels*^o :

(A₅) Pour tout sous-groupe interprétable H et tout automorphisme involutif interprétable i de H , si $C_H(i)$ est fini, alors H est abélien inversé par i .

Nous ne savons pas si un tel axiome (vérifié par les groupes rangés) reste valable pour une sous-classe naturelle de groupes définissables dans une structure o-minimale (par exemple, pour les groupes définissablement simples et/ou définissablement compacts). Dans la suite, nous indiquerons à quel moment (A₅) semble requis.

Notation : Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius *dimensionnel*^o. Pour $x \in \bigcup_G C^g$, on note C_x le conjugué de C contenant x .

Nous allons poursuivre l'étude des translations menée dans [DW20] et nous utiliserons les méthodes de l'école de Bachmann pour interpréter $SO_3(K)$ dans un cadre dimensionnel.

Jusqu'à la fin de la section, soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius *dimensionnel*^o qui contient des involutions, U_2^\perp , tel que $\bigcup_G C^g$ contient tous les 2-éléments (dans le cas rangé, l'hypothèse U_2^\perp suffit).

Nous supposons que toutes les translations (les produits de deux involutions) sont contenues dans $\bigcup_G C^g$.

Lemme 2.0.2. *Le sous-groupe C est d'indice pair dans son normalisateur. De plus, il existe une involution $1 \neq k \in N_G(C) \setminus C$.*

Démonstration. Soit i une involution contenue dans C et $j \neq i$ une autre involution contenue dans un conjugué C_j distinct de C . Par hypothèse, la translation $x = ij$ est contenue dans un conjugué C_x de C . On a donc $C_G(x)^\circ \leq C_x$; de plus i et j appartiennent à $N_G(C_G(x)^\circ) \leq N_G(C_x)$. Si i et j étaient contenues dans C_x , alors on aurait d'une part $C_x \cap C \neq \{1\}$ et d'autre part $C_x \cap C_j \neq \{1\}$ et finalement $C = C_x = C_j$, contradiction.

Par conséquent, i et j appartiennent à $N_G(C_x) \setminus C_x$. □

On dit qu'un groupe est *semi-simple* s'il n'y a pas de sous-groupe abélien normal infini.

Les quasi-groupes de Frobenius *dimensionnels*^o ont un centre fini : soit $x \in Z(G)$, et supposons que $Z(G)$ est infini, alors $Z(G) \leq N_G(C)$ et donc $Z(G)^\circ \leq C$, contradiction.

Lemme 2.0.3. *Le groupe $C < G$ est semi-simple.*

Démonstration. Soit A un sous-groupe abélien normal infini. Quitte à considérer la composante connexe de son enveloppe définissable, on peut supposer que A est définissable et connexe. Si $A \cap C \neq \{1\}$, soit $1 \neq x \in A \cap C$ alors $A \leq C_G(x)^\circ \leq C$ et donc $C = G$, contradiction.

On a donc $A \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$. Le groupe A est en particulier 2-divisible car il ne contient pas d'involutions. Soit i une involution, le sous-groupe $C_A(i)$ est fini et il existe donc un élément $a \in A$ tel que $a^i a^{-1} = b \in A$ est non-trivial et inversé par i . Mais alors $1 \neq b^2 \in A$ et $b^2 = bib^{-1}i = i^{b^{-1}}i \in \bigcup_{g \in G} C^g$, contradiction.

Par conséquent, il n'y a pas de sous-groupe abélien normal infini. \square

On suppose désormais que $C < G$ satisfait également (A_5) .

Lemme 2.0.4. *Soit k une involution telle que $k \in N_G(C) \setminus C$, alors $C_C(k)$ est fini. De plus, C est abélien 2-divisible inversé par k (et donc $C \subseteq I \cdot I$).*

Démonstration. Supposons que $C_C(k)$ est infini, on a donc $C_C(k)^\circ \leq C_k \cap C$ et finalement $C_k = C$, contradiction. Par (A_5) , l'action de k est donc bien par inversion et C est abélien. C'est un groupe 2-divisible car il contient un nombre fini d'involutions : l'élevation au carré définit un homomorphisme de groupe définissable de noyau fini, puisque le groupe est connexe, c'est un homomorphisme surjectif. \square

Remarque 2.0.5. *Si on suppose que C est abélien, alors (A_5) n'est plus nécessaire pour montrer que l'action est par inversion.*

On pose $X = \{a^k a^{-1} : a \in A\}$ (c'est un ensemble définissable inversé par k). Les fibres de l'application définissable $\phi : A \rightarrow X$, définie par $\phi(a) = a^k a^{-1}$, ont même dimension que $C_k(A)$, qui est un groupe fini. Par conséquent, l'additivité de la dimension nous donne que $\dim(X) = \dim(A)$. Le sous-groupe formé par les éléments inversés par k est générique et donc il est égal à A par connexité.

L'axiome (A_5) n'est plus utilisé par la suite.

Lemme 2.0.6. *Le sous-groupe (abélien) C contient une unique involution et toutes les involutions de $N_G(C) \setminus C$ appartiennent au même translaté.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $i \neq j$ sont deux involutions distinctes appartenant à C . Soit $\alpha \in N_G(C) \setminus C$ une involution. Puisque l'involution α agit par inversion, elle commute avec l'involution $x = ij$ mais x appartient à $C_G(C_\alpha)$ (car i et j agissent par inversion sur C_α) donc $x \in C_\alpha$ (puisque C_α ne contient qu'un nombre fini d'involutions), contradiction.

Soient $j, k \in N_G(C) \setminus C$, alors puisque l'action est par inversion, $jk \in C_G(C)$. Mais alors $C \leq C_G(jk)^\circ \leq C_{jk}$ et donc $C_{jk} = C$ et $jk \in C$. Finalement, $k \in jC$ et donc toutes les involutions de $N_G(C) \setminus C$ sont égales modulo C . \square

En procédant comme dans la démonstration du Théorème 3.31 de [Poi87], on peut munir l'ensemble des involutions d'une structure de plan projectif : à chaque involution (point), on lui associe la ligne $D_i = \{k \in I : ki = ik\} = \{k \in I : k \in N_G(C_i) \setminus C_i\} = kC_i$ pour $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$.

Dans ce cas, par deux points distincts $i \neq j$ passe une unique ligne à savoir D_k où k est l'unique involution de C_{ij} . En effet, i et j inversent C_{ij} (mais n'appartiennent pas à C_{ij}). De plus si $i, j \in D_l \neq D_k$, alors $i, j \in N_G(C_l) \setminus C_l$ et donc $x = ij \in C_l$, finalement $C_l = C_x = C_k$, contradiction.

De plus, deux lignes D_i et D_j s'intersectent en un seul point k , *i.e.*, l'unique involution contenue dans C_{ij} . En effet, pour une telle involution k , on a bien $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$ et $k \in N_G(C_j) \setminus C_j$ car $k \in C_G(i) \cap C_G(j)$. Soit $l \neq k \in D_j \cap D_i$, alors $lk \in C_i \cap C_j$, et $C_i = C_j$, contradiction. En particulier, pour deux involutions distinctes $i \neq j$, il existe une unique involution k (distincte de i et de j) qui commute avec les deux.

Finalement, on remarque que trois involutions (distinctes) i, j, k sont collinéaires ssi ijk est une involution : ijk est une involution ssi ij est inversé par k (et ij n'est pas une involution) ssi $k, i, j \in D(l)$ où l est l'involution contenue dans C_{ij} . On peut dès lors appliquer une forme du théorème de Bachmann :

Fait 2.0.7. [BN94, Fait 8.15],[Schr82] *Soit G un groupe contenant des involutions. Si on peut munir l'ensemble des involutions I d'une structure de plan projectif tel que trois involutions i, j et k sont collinéaires ssi ijk est une involution, alors le sous-groupe $\langle I \rangle = I \cdot I$ est isomorphe à $SO_3(K, f)$ pour un corps K interprétable dans G et une forme quadratique anisotrope f définie sur K^3 .*

Il suffit de remarquer que $I \cdot I = \bigcup_G C^g$ est un sous-groupe définissable de même dimension que G et donc lui est égal par connexité.

Dans un univers rangé, un corps interprétable K est algébriquement clos et toute forme quadratique définie sur un K -espace vectoriel est alors forcément isotrope. Par conséquent, comme corollaire, on obtient le Théorème A de [DW20] :

Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé, U_2^\perp , alors $\bigcup_G C^g$ ne contient pas toutes les translations.

3 Le cas o-minimal

Même si l'axiome (A_5) pourrait ne pas être vrai en général pour les groupes définissables dans une structure o-minimale, il est possible de démontrer un résultat analogue en supposant que le quasi-complément de Frobenius est nilpotent (et donc en affaiblissant l'hypothèse de commutativité de la Remarque 2.0.5).

Nous mobilisons la théorie des sous-groupes de Carter et de Cartan développée dans [EJO14]. Un sous-groupe de Cartan Q est un sous-groupe nilpotent maximal tel que pour tout sous-groupe $X \leq Q$ normal d'indice fini, X est un

sous-groupe d'indice fini dans $N_G(X)$. D'après [EJO14], on sait que les sous-groupes de Cartan d'un groupe définissable dans une structure o-minimal sont définissables. De plus, les sous-groupes de Carter, *i.e.*, les sous-groupes définissables connexes nilpotents d'indice fini dans leur normalisateur correspondent aux composantes connexes des sous-groupes de Cartan. Il est possible de caractériser précisément la structure de sous-groupes de Cartan des groupes définissablement simples définissables dans une structure o-minimale (et plus généralement des sous-groupes définissables semi-simples).

Fait 3.0.1. [EJO14, Théorème 57] *Soit G un groupe définissablement simple définissable dans une structure o-minimale. Alors les propriétés suivantes sont vraies :*

1. *Il y a un nombre fini (supérieur ou égal à un) de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan.*
2. *Si Q_1 et Q_2 sont des sous-groupes de Cartan et $Q_1^\circ = Q_2^\circ$, alors $Q_1 = Q_2$.*
3. *Les sous-groupes de Cartan de G sont abéliens et ont tous la même dimension.*

Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius (avec involutions) définissable dans une structure o-minimale tel que $\bigcup_G C^g$ contient les 2-éléments et les translations. Nous savons déjà que $C < G$ est semi-simple. Les deux faits suivants nous donnent beaucoup d'informations sur la structure des groupes semi-simples.

Fait 3.0.2. [PPS00a, Théorème 4.1] *Soit G un groupe semi-simple (définissable dans une structure o-minimale). Alors $G/Z(G)$ est le produit direct de sous-groupes définissables (dans la pure structure de groupe G) H_1, \dots, H_k tel pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, il existe un corps réel clos R_i et un isomorphisme définissable entre H_i et un groupe semi-algébrique de $GL_{n_i}(R_i)$. Chaque H_i est définissablement simple (pour la pure structure de groupe H_i) et sa composante connexe H_i° est définissablement simple.*

Fait 3.0.3. [Fre17, Proposition 2.11] *Soit G un groupe définissable dans une structure o-minimale M . Alors G° , sa composante connexe au sens de M , est définissable dans la pure structure de groupe.*

Nous supposons désormais que le centre de G est trivial et que C est nilpotent (c'est donc un sous-groupe de Carter).

Remarque 3.0.4. *Comme le centre est fini, $G/Z(G)$ est de centre trivial mais ce n'est plus forcément un quasi-groupe de Frobenius.*

Comme G a des involutions, on peut supposer que H_1 contient des involutions. Soit $i \in H_1 \cap C_i$, alors $H_2 \leq C_G(i)^\circ \leq C_i$, contradiction. Le groupe G est donc bien définissablement simple. D'après le Fait 3.0.1, ses sous-groupes de Carter sont abéliens (et de même dimension). Or, C est un sous-groupe de Carter, c'est donc un groupe abélien. On peut désormais appliquer les résultats de la section précédente.

Montrons désormais que le corps K interprétable est réel clos et que la forme quadratique anisotrope correspond à un produit scalaire. Nous avons besoin du fait suivant :

Fait 3.0.5. [Pill88, Théorème 3.9] *Un corps infini K définissable dans une structure o-minimale est soit réel clos (et $\dim(K) = 1$) soit algébriquement clos.*

Puisque la forme quadratique est anisotrope, le corps K est réel clos. Finalement, le théorème d'inertie de Sylvester nous permet de conclure que $G \simeq \mathrm{SO}_3(K)$ où K est réel clos.

Remarque 3.0.6. *Il pourrait s'avérer fructueux d'analyser dans la perspective de la classification des quasi-groupes de Frobenius dimensionnels les similitudes entre $\mathrm{SO}_3(R)$ et $\mathrm{PSL}_2(R)$ (ce groupe est identifié dans [Tent00] comme groupe strictement 3-transitif).*

4 Le cas rangé

4.1 Préliminaires généraux

Nous rappelons désormais plusieurs faits plus ou moins spécialisés sur les groupes rangés qui seront utilisés dans cet article. Nos principales sources sont [BN94] et [ABC08]. Comme pour les structures o-minimales, nous dirons qu'une partie définissable X d'un groupe rangé G est générique si $RM(X) = RM(G)$. Lorsqu'on parlera de groupe algébrique, on entend groupe algébrique linéaire défini sur un corps algébriquement clos.

Rappelons que dans un groupe connexe rangé, deux parties génériques s'intersectent toujours non-trivialement. Introduisons un peu de terminologie. On dira qu'un sous-groupe définissable H est *généreux* si $\bigcup_{g \in G} H^g$ est générique. On dira également qu'un sous-groupe définissable H est *presque-autonormalisant* si H est d'indice fini dans son normalisateur. Enfin, un sous-groupe définissable H est *génériquement disjoint de ses conjugués* dans G si $H \setminus \bigcup_{g \in G \setminus N(H)} (H \cap H^g)$ est générique dans H . On rappelle plusieurs résultats concernant la générosité et la généralité (voir [Jal06]).

- Fait 4.1.1.**
1. [ABC08, Lemme IV.1.2] *Soient G un groupe rangé connexe et H un sous-groupe définissable presque-autonormalisant et généralité disjoint de ses conjugués. Alors H est généreux dans G .*
 2. [ABC08, Lemme V.1.25] *Soient G un groupe rangé connexe et H un sous-groupe définissable connexe et F la famille des conjugués de H . Alors H est généreux si et seulement si l'ensemble définissable $H_0 = \{h \in H : \{X \in F : h \in X\} \text{ est fini}\}$ est générique dans H .*
 3. [Jal06, Lemme 3.3] *Soit G un groupe rangé, H un sous-groupe définissable et Y le sous-ensemble définissable de H qui consiste des éléments contenus dans un nombre fini de conjugués de H . Alors pour*

tout sous-ensemble définissable U de H tel que $U \cap Y \neq \emptyset$, on a :
 $N_G(U)^\circ \leq N_G(H)^\circ$.

De façon analogue aux groupes algébriques, les groupes rangés satisfont un théorème de génération (le théorème des indécomposables de Zilber) qui garantit l'existence de groupes définissables engendrés par des parties indécomposables. On dit qu'une partie définissable X d'un groupe G est *indécomposable* si pour tout sous-groupe définissable H , l'ensemble X est contenu dans un unique translaté ou bien est partitionné par une infinité de translatés de H . On utilisera les deux faits suivants :

Fait 4.1.2. [BN94, Théorème 5.26] Soit G un groupe rangé et soit $(A_i : i \in I)$ une famille d'ensembles définissables indécomposables contenant 1. Alors $\langle A_i : i \in I \rangle$ est un groupe définissable et connexe.

Fait 4.1.3. [BN94, Corollaires 5.29 et 5.32]

1. Soit $H \leq G$ un sous-groupe définissable connexe et X une partie arbitraire. Alors le sous-groupe $[H, X]$ est définissable et connexe.
2. Soit $H \leq G$ un sous-groupe définissable. Les sous-groupes $(H)^n$ et $(H)^{(n)}$ de la série dérivée et de la série centrale descendante sont définissables. Si H est connexe, ces groupes sont connexes également.

Un aspect important de la théorie des groupes rangés renvoie à la question de la linéarisation : à quelles conditions est-il possible d'interpréter un corps et plus généralement des actions linéaires? On mentionnera le fait suivant :

Fait 4.1.4. [BN94, Théorème 9.1] Soit $G = A \rtimes H$ un groupe rangé où A et H sont des groupes abéliens infinis définissables. Si A est H -minimal et $C_H(A) = \{1\}$ alors :

1. Le sous-anneau $K = \mathbb{Z}[H]/\text{ann}_{\mathbb{Z}[H]}(A)$ de $\text{End}(A)$ est un corps algébriquement clos interprétable; il existe un entier m tel que tout élément de K peut être représenté comme un endomorphisme $\sum_{i=1}^m h_i$ (avec $h_i \in H$).
2. $A \simeq K^+$, H est isomorphe à un sous-groupe T de K^\times et agit sur A par multiplication.
3. En particulier, H agit de façon régulière sur A et $K = T + \dots + T$ (m fois).

Les groupes rangés peuvent être analysés via leurs éléments de torsion. Il existe une théorie des p -Sylow (p -groupes maximaux) mais elle n'est pleinement développée que pour $p = 2$ ou dans le contexte des groupes (connexes) résolubles rangés.

Tout d'abord, remarquons qu'il est possible de relever la torsion des sections définissables.

On rappelle le fait suivant pour les p -groupes localement finis (pour $p = 2$, cette condition est équivalente à celle d'être un 2-groupe).

Fait 4.1.5. [BN94, Proposition 6.18-6.19, Corollaire 6.20]

1. Pour tout p premier, un p -groupe localement fini d'un groupe rangé est nilpotent-par-fini.
2. Soit P un p -groupe nilpotent-par-fini d'un groupe rangé. Alors $P^\circ = T * B$ où T est un p -groupe abélien divisible et B un groupe d'exposant borné définissable connexe.
3. Pour $p = 2$, les 2-Sylow sont conjugués.

Dans cette perspective, un p -groupe unipotent est un p -groupe (nilpotent) définissable connexe d'exposant borné. On dira qu'un groupe rangé est U_p^\perp s'il ne contient pas de p -groupe unipotent. Un p -tore est *a contrario* un p -groupe abélien divisible isomorphe à une somme finie de p -groupes de Prüfer. Le p -rang de Prüfer d'un groupe rangé désigne alors le p -rang d'un p -tore maximal. Le cas $p = 2$ revêt une importance particulière en raison du résultat de conjugaison évoqué précédemment. De plus, bien qu'on ne dispose pas d'un analogue du théorème de Feit-Thompson qui éliminerait le cas dégénéré, les involutions, comme dans le cas des groupes simples finis, sont souvent au coeur de l'analyse.

Fait 4.1.6. [BN94, Lemme 10.1, Proposition 10.2, Théorème 10.5]

1. Soient $i \neq j$ deux involutions. Alors i et j inversent leur produit ij .
2. Soit G un groupe rangé et $i \neq j$ deux involutions. Alors i et j sont soit $d(ij)$ -conjugués soit commutent avec une autre involution de $d(ij)$.
3. Soit i une involution tel que $C_G(i)$ est fini. Alors G° est un groupe abélien inversé par i et $[G^\circ, i] = G^\circ$.

Dans le cas d'un groupe connexe, la structure de la p -torsion satisfait la propriété additionnelle suivante :

Fait 4.1.7. [BBC07] Soit G un groupe rangé connexe dont les p -Sylow sont finis. Alors G ne contient pas de p -éléments.

On cite une autre conséquence de l'analyse de la torsion dans les groupes connexes :

Fait 4.1.8. [BBC07], [ABC08, IV. Corollaire 4.18] Soit G un groupe rangé connexe. Alors $C_G(g)^\circ$ est infini pour tout $g \in G$.

L'étude d'un groupe rangé passe en général par une compréhension de ses sous-groupes de Borel, *i.e.*, ses sous-groupes définissables connexes résolubles maximaux. Plus généralement, nous allons nous intéresser aux propriétés des sous-groupes définissables (connexes) résolubles.

On définit le *sous-groupe de Fitting* $F(G)$ comme le sous-groupe engendré par les sous-groupes normaux nilpotents. On a le fait suivant :

Fait 4.1.9. [BN94, Théorème 7.3] Soit G un groupe rangé. $F(G)$ est définissable et nilpotent (en particulier c'est le sous-groupe normal nilpotent maximal).

On a aussi :

Fait 4.1.10. [BN94, Corollaire 9.9] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors G' est un groupe définissable connexe nilpotent.

En exploitant l'analogie avec les groupes algébriques affines, on peut introduire pour les groupes rangés une notion de tore (éléments semi-simples) et de radical unipotent. Idéalement un groupe connexe rangé résoluble devrait pouvoir s'écrire comme un produit semi-direct d'un radical unipotent et d'un tore.

On commence par caractériser la semi-simplicité dans le contexte des groupes rangés. Nous pourrions également mieux comprendre la nature des éléments génériques. Un sous-groupe abélien divisible est un *tore décent* si c'est la clôture définissable de sa torsion; c'est un *bon tore* si cette propriété est héréditaire pour les sous-groupes définissables infinis. Un *pseudo-tore* est un groupe abélien divisible rangé tel qu'aucune section définissable n'est isomorphe à K^+ pour un corps interprétable K .

Le groupe multiplicatif d'un corps de caractéristique positive est un exemple typique de bon tore comme le prouve le fait suivant qui se base sur des travaux de F.Wagner :

Fait 4.1.11. [Wag01] Si (K, T) est une structure rangé avec K un corps de caractéristique $p > 0$ et $T \leq K^\times$. Alors $(F_p^{alg}, T \cap F_p^{alg})$ est une sous-structure élémentaire.

Fait 4.1.12. [ABC08, Proposition 4.20] Soit K un corps rangé de caractéristique positive. Alors K^\times est un bon tore.

Remarquons également que le résultat suivant de F. O. Wagner nous permet de conjecturer la non-existence des mauvais corps, *i.e.*, des corps rangés tel que le groupe multiplicatif contient un sous-groupe définissable propre, en caractéristique positive :

Fait 4.1.13. [Wag03] S'il existe une infinité de p -nombres premiers de Mersenne, *i.e.*, de la forme $(p^n - 1)/(p - 1)$, alors il n'existe pas de mauvais corps de caractéristique positive $p > 0$.

En caractéristique nulle, des mauvais corps ont été construits. Néanmoins, il semble raisonnable de conjecturer qu'un sous-groupe multiplicatif définissable propre est un pseudo-tore (on renvoie à [Fre09] pour plus de détails). On dira que le groupe satisfait l'hypothèse (PT).

Grâce aux travaux de G. Cherlin et T. Altinel puis d'O. Frécon notamment, on sait que le comportement des tores décents (et des pseudo-tores) présente des similitudes avec celui des tores algébriques.

- Fait 4.1.14.**
1. [Che05] Les tores décents maximaux sont conjugués.
 2. [Fre09, Théorème 1.7] Les pseudo-tores maximaux sont conjugués.
 3. [Fre06b, Lemme 3.1] Soit G un groupe rangé et N un sous-groupe normal définissable. Soit T un tore décent maximal alors TN/N est un tore décent maximal de G/N et tous les tores décents ont cette forme.

4. [Fre09, Corollaire 2.9] Soit G un groupe rangé connexe. Le pseudo-tore maximal de $F(G)$ est central dans G .
5. [AB09, Théorème 1] Soit T un tore décent d'un groupe rangé connexe G . Alors $C_G(T)$ est connexe, généreux dans G et $N_G(C_G(T))^\circ = C_G(T)$.
6. [Fre09, Corollaire 2.12] Soit T un pseudo-tore d'un groupe rangé connexe G . Alors $C_G(T)$ est connexe, généreux dans G et $N_G(C_G(T))^\circ = C_G(T)$.

On cite également un fait qui décrit la p -torsion lorsque le groupe U_p^\perp .

- Fait 4.1.15.**
1. [BC09, Théorème 3] Soit G un groupe rangé connexe, g un p -élément tel que $C_G(g)^\circ$ est U_p^\perp . Alors g appartient à un p -tore.
 2. [BC09, Théorème 5] Soit G un groupe rangé connexe tel que $N_G(T)/C_G(T) = W(G)$ est d'ordre impair pour un tore décent maximal T . Soit r le plus petit nombre premier (impair) divisant l'ordre de $W(G)$ alors ou bien un r -élément x représentant un élément d'ordre r dans $W(G)$ centralise un r -groupe unipotent ou bien un r -élément toral centralise un r -groupe unipotent.

Il s'agit d'un principe de *toralité*

Une autre façon d'approcher la semi-simplicité consiste à s'intéresser aux sous-groupes de Carter, *i. e.*, aux sous-groupes définissables connexes nilpotents presque-autonormalisants. Remarquons que dans les groupes algébriques réductifs, les sous-groupes de Cartan maximaux sont exactement les tores maximaux. En revanche, dans les groupes de Lie réels les sous-groupes de Cartan ne sont pas forcément connexes. Par conséquent, la théorie des sous-groupes de Carter devrait présenter des contours différents lorsque l'on passe d'un univers rangé à un contexte o -minimal. Voici les principales propriétés des sous-groupes de Carter.

- Fait 4.1.16.**
1. [FJ08, Théorème 3.11] Soit G un groupe rangé. Alors G contient un sous-groupe de Carter.
 2. [Jal06, Théorème 3.1] Soit G un groupe rangé connexe. Alors les sous-groupes de Carter généreux sont conjugués.
 3. [Wag94, Théorème 29] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors ses sous-groupes de Carter sont conjugués.
 4. [Fre09, Corollaire 2.10] Soit G un groupe rangé. Tout pseudo-tore de G est contenu dans un sous-groupe de Carter.
 5. [Fre06b, Théorèmes 1.1 et 1.2] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors tout sous-groupe H contenant un sous-groupe de Carter est définissable, connexe et autonormalisant.
 6. [FJ08, Théorème 3.11] Soit G un groupe rangé résoluble. Alors ses sous-groupes de Carter sont généreux et génériquement disjoints de leurs conjugués.
 7. [ABC08, I. Corollaire 8.30] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors $G = G'Q$ où Q est un sous-groupe de Carter.

Nous passons maintenant à l'analyse de l'unipotence. En caractéristique $p > 0$, un p -groupe unipotent est simplement un p -groupe définissable connexe nilpotent d'exposant borné. On a le fait suivant :

Fait 4.1.17. [Bur06, Fait 1.1] Soit G un groupe rangé résoluble connexe. Alors il existe un unique p -groupe unipotent maximal $U_p(G)$ et $U_p(G) \leq F(G)^\circ$

En caractéristique 0, une théorie robuste de l'unipotence a été élaborée par J. Burdges (voir [Bur04] et [Bur06]).

On dira qu'un groupe abélien définissable connexe A est *indécomposable* s'il ne peut pas s'écrire comme la somme de sous-groupes propres définissables. Son *radical* $J(A)$ désigne l'unique sous-groupe propre définissable connexe maximal.

Pour un groupe rangé G , on définit :

$$U_{0,r}(G) = \langle A \leq G \text{ abélien indécomposable tq } RM(A/J(A)) = r \rangle$$

et on note $U_0(G)$ pour r maximal. On appelle un $U_{0,r}$ -groupe, un groupe G tel que $G = U_{0,r}(G)$. Les $\{0, r\}$ -Sylow sont les $U_{0,r}$ -groupes nilpotents définissables connexes maximaux. Voici quelques faits qui caractérisent l'unipotence en caractéristique 0 pour les groupes rangés.

- Fait 4.1.18.**
1. [Bur04, Lemme 2.11] Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme définissable entre des groupes rangés. Alors $f(U_{0,r}(G)) \leq U_{0,r}(H)$ est un $U_{0,r}$ -groupe. Si $U_{0,r}(H) \leq f(G)$ alors $f(U_{0,r}(G)) = U_{0,r}(H)$.
 2. [Bur04, Théorème 2.15] Soit G un groupe rangé connexe résoluble tel que $U_p(G) = \{1\}$ pour tout nombre premier p et $U_0(G) = \{1\}$. Alors G est un bon tore.
 3. [Bur04, Théorème 2.16] Soit G un groupe rangé connexe résoluble. Alors $U_0(G) \leq F(G)^\circ$.
 4. [Bur06, Corollaire 3.6] Soit G un groupe nilpotent. Alors $G = d(T) * [U_{0,1}(G) * \dots * U_0(G)] * [U_2(G) \times \dots \times U_{p_{\max}}(G)]$, où T désigne la torsion divisible.
 5. [Bur06, Théorème 5.7] Soit G un groupe rangé connexe résoluble et Q un sous-groupe de Carter. Alors $U_{0,r}(G)U_{0,r}(Q)$ est un $U_{0,r}$ -Sylow. De plus, tous les $U_{0,r}$ -Sylow sont de cette forme pour un sous-groupe de Carter Q .

On peut définir donc un ordre sur l'unipotence. Les tores décents sont les moins unipotents, puis viennent les $U_{0,r}$ -groupes (classés selon r) et enfin les p -groupes unipotents (classés de manière décroissante selon p). On notera ρ un paramètre d'unipotence arbitraire.

4.2 Esquisse d'une théorie générale

Nous commençons à élaborer une théorie générale des quasi-groupes de Frobenius rangés. Un certain nombre de résultats valables pour les groupes de Frobenius rangés (étudiés dans [BN94]) se généralisent à ce cadre plus général.

Remarquons que nous faisons usage de manière cruciale d'arguments impliquant l'étude de la généricité et de la générosité dans les groupes connexes (ce qui les rend difficilement généralisables au cas o-minimal).

Lemme 4.2.1. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé et $H < G$ un sous-groupe définissable connexe tel que $H \cap C \neq \{1\}$. Alors $H \cap C < H$ est TI et d'indice fini dans son normalisateur. De plus, $H \cap C$ est infini et connexe. Finalement, pour tout conjugué C_1 de C tel que $(H \cap C_1) \neq \{1\}$, il existe $1 \neq h \in H$, tel que $H \cap C_1 = (H \cap C)^h$.*

Démonstration. Montrons que $H \cap C$ est TI. Supposons que $(H \cap C)^h \cap (H \cap C) \neq \{1\}$, on a donc $C^h \cap C \neq \{1\}$ et par conséquent $C^h = C$. Le même raisonnement montre que $N_H(H \cap C) \leq N_G(C)$ et donc $N_H(H \cap C)^\circ \leq N_G(C)^\circ = C$, i.e., $N_H(H \cap C)^\circ \leq H \cap C$. Le groupe $H \cap C$ est donc TI et d'indice fini dans son normalisateur.

On remarque que pour $1 \neq c \in H \cap C$, $C_H(c) \leq N_H(H \cap C)$ et donc $C_H(c)^\circ \leq N_H(H \cap C)^\circ$. Or, d'après le Fait 4.1.8, $C_H(c)$ est infini donc $H \cap C$ est infini.

Si $H \cap C$ n'était pas connexe alors $(H \cap C)^\circ$ et $(H \cap C) \setminus (H \cap C)^\circ = X$ seraient généreux. En effet, $(H \cap C)^\circ$ et X sont invariants sous l'action de $N_H(H \cap C)$; de plus, si X^h ou $(H \cap C)^{\circ^h}$ intersecte $(H \cap C)$ non-trivialement alors $(H \cap C) \cap (H \cap C)^h$ est non-trivial et donc $h \in N_H(H \cap C)$. Par conséquent, les ensembles $\bigcup_H X^h$ et $\bigcup_H (H \cap C)^{\circ^h}$ sont génériques, contradiction.

Soit $(H \cap C_1) \neq \{1\}$. Par ce qui précède, c'est un sous-groupe généreux (dans H), tout comme $(H \cap C)$. Par connexité de H , il existe $1 \neq h \in H$, tel que $(H \cap C) \cap (H \cap C_1)^h \neq \{1\}$. Par conséquent, $C_1^h = C$ et finalement $(H \cap C) = (H \cap C_1)^h$. \square

Lemme 4.2.2. *(voir [DW20, Proposition 1]) Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé. Alors C est généreux et pour tout $1 \neq c \in C$, $C_G(c)^\circ \leq C$. Si de plus, G est U_2^\perp , alors les 2-éléments appartiennent à des tores décents et sont contenus dans $\bigcup_G C^g$.*

Démonstration. On a $RM(\bigcup_G C^g) = RM(G) - RM(N_G(C)) + RM(C) = RM(G)$.

Soit $1 \neq c \in C$, alors $C_G(c) \leq N_G(C)$ puisque C est TI et donc $C_G(c)^\circ \leq N_G(C)^\circ = C$.

Puisque G ne contient pas de 2-groupe unipotent, par toralité, les involutions appartiennent à des tores décents (Fait 4.1.15).

Soit T un tore décent maximal. Puisque $C_G(T)^\circ = C_G(T)$ est généreux (Fait 4.1.14), quitte à conjuguer, il existe $1 \neq x \in C \cap C_G(T)$ et donc $T \leq C_G(x)^\circ \leq C$. \square

Lemme 4.2.3. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé résoluble. Alors $G = G' \rtimes C$ avec C abélien. De plus, on peut interpréter un corps K tel que $C \hookrightarrow K^\times$.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe définissable connexe nilpotent normal alors $H \cap C = \{1\}$. En effet, soit $1 \neq c \in H \cap C$ alors $Z(H)^\circ$ (infini car H est infini connexe nilpotent) commute avec c et donc $Z(H)^\circ \leq C$. Mais alors $H \leq C_G(Z(H)^\circ)^\circ \leq C$ et donc $C = G$, contradiction.

Le groupe G' est un groupe définissable connexe nilpotent normal et donc $G' \cap C = \{1\}$. Par conséquent, C est abélien et c'est un sous-groupe de Carter (il est en particulier autonormalisant, Fait 4.1.16). On remarque que $C = C_G(c)$ pour tout $c \in C$. D'après le Fait 4.1.16, on a donc $G = G' \rtimes C$.

Soit $B \leq G'$ un sous-groupe définissable abélien C -minimal (on peut supposer qu'il est connexe). On a bien $C_C(B) = \{1\}$: soit $1 \neq c \in C_G(B)$, alors $B \leq C_G(c)^\circ \leq C$, contradiction. On peut donc appliquer le Fait 4.1.4 pour conclure. \square

Corollaire 4.2.4. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé résoluble. Alors G est un groupe de Frobenius connexe.*

Lemme 4.2.5. *Soit $G = U \rtimes C$ un groupe rangé où U est définissable connexe nilpotent et C agit sur U en fixant un nombre fini de points. Alors $U^* = G \setminus \bigcup_G C^g$.*

Démonstration. Par l'exercice 10.a p.98 de [BN94], on a : $U = [U, c]$ pour $c \in C$. Soit $g = uc \in G \setminus U$ avec $u \in U$ et $c \in C$. Soit $u_1 \in U$ tel que $u = [u_1^{-1}, c^{-1}]$. Alors $g^{u_1} \in C$. \square

Corollaire 4.2.6. *Soit $G = G' \rtimes C$ un quasi-groupe de Frobenius rangé résoluble. Alors $G' = F(G)^\circ$*

Il nous est également possible de caractériser la structure de l'unipotence.

Lemme 4.2.7. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé résoluble et soit ρ un paramètre d'unipotence. Alors tout ρ -Sylow de G est soit contenu dans G' , soit contenu dans un conjugué de C .*

Démonstration. On sait que $G = G' \rtimes C$. Pour un p -groupe unipotent, on applique le Fait 4.1.17.

Soit maintenant un $U_{0,r}$ -Sylow S de G . D'après le Fait 4.1.18, on a $S = U_{0,r}(G')U_{0,r}(Q)$ pour Q un sous-groupe de Carter de G . Mais C est un sous-groupe de Carter (c'est un quasi-complément de Frobenius) et d'après le Fait 4.1.16, les sous-groupes de Carter sont conjugués, par conséquent Q est un quasi-complément de Frobenius.

Comme le groupe S est nilpotent, on a $Z(S)^\circ \neq \{1\}$; soit $1 \neq c \in U_{0,r}(Q)$, on a $Z(S)^\circ \leq C_G(c)^\circ \leq Q$ et donc $U_{0,r}(G') \leq C_G(Z(S)^\circ)^\circ \leq Q$. On a donc soit $S = U_{0,r}(G')$, soit $S = U_{0,r}(Q)$ \square

4.3 Une caractérisation de la 2-torsion

Ce sont les quasi-groupes de Frobenius contenant des involutions qui nous intéressent principalement. Nous montrons un certain nombre de résultats qui clarifient la situation de la 2-torsion dans ce contexte.

Fait 4.3.1. [BN94, Lemme 11.20] *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé. Alors les involutions de G sont conjuguées, C en contient un nombre fini (elles sont C -conjuguées) et elles sont centralisées par C .*

Pour les groupes de Frobenius connexes, nous avons la situation suivante :

Proposition 4.3.2. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé connexe avec involutions. Alors G est U_2^\perp ssi C contient des involutions.*

Démonstration. Supposons que G contient un 2-groupe abélien élémentaire infini A . Supposons par l'absurde que C contient des involutions. Puisque par le Fait 4.3.1 les involutions forment une classe de conjugaison, on aurait $I \subseteq \bigcup_G C^g$. En particulier, il existe $1 \neq x \in A \cap C$ (quitte à conjuguer); par malnormalité, $A \leq C_G(x) \leq C$. Mais C ne contient qu'un nombre fini d'involutions par le Fait 4.3.1, contradiction. Donc C ne contient pas d'involutions.

Réciproquement, supposons que C ne contient pas d'involutions. Alors les 2-Sylow $^\circ$ de G sont d'exposant borné (et en particulier contiennent des 2-groupes abéliens élémentaires infinis). En effet, soit S un 2-Sylow $^\circ$ et supposons qu'il contient un 2-tore; on peut l'étendre en un tore décent maximal T . Mais $C_G(T)$ est généreux et il existe donc $1 \neq y \in C_G(T) \cap C^g$. Par malnormalité, $T \leq C_G(y) \leq C^g$, contradiction. \square

Corollaire 4.3.3. *Soit G un groupe de Frobenius rangé connexe. Alors G ne peut pas être de type mixte.*

Remarque 4.3.4. *$K.Tent$ et $T.Clausen$ aboutissent à un résultat similaire (voir Proposition 6.2 de [CT21])*

Pour les quasi-groupes de Frobenius en général, la démonstration précédente ne fonctionne que si on suppose que C contient un nombre fini d'involutions. Pour cette raison, nous nous limiterons aux quasi-groupes de Frobenius U_2^\perp , i.e., de type impair. A. Deloro et J. Wiscons dans [DW20] étudient de façon détaillée les (QFP) rangés de type impair.

Nous rappelons maintenant quelques faits concernant les groupes de type impair dont le rang de Prüfer est égal à un.

Fait 4.3.5. [DJ10, Proposition 1] Soit G un groupe rangé connexe de type impair, de rang de Prüfer égal à un. Alors il y a trois possibilités pour le type d'isomorphisme des 2-Sylow (S° est un 2-tore de rang 1) :

1. $S = S^\circ \rtimes \langle i \rangle$ pour i une involution agissant sur S° par inversion (type $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$).
2. $S = S^\circ \cdot \langle w \rangle$ pour w un élément d'ordre 4 agissant sur S° par inversion. On a de plus que w^2 est l'involution de S° (type $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$).
3. $S = S^\circ$.

Fait 4.3.6. [Del09] Soit G un groupe rangé, U_p^\perp , et $x \in G$ un p -élément tel que $x^{p^n} \in Z(G)$. Alors l'exposant du groupe $C_G(x)/C_G(x)^\circ$ divise p^n .

La proposition suivante caractérise complètement la structure de la 2-torsion :

Fait 4.3.7. [DW20, Proposition 1] Soit $C < G$ un (QFP) rangé de type impair. Alors G a les mêmes 2-Sylow que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ (en particulier le rang de Prüfer est égal à un). De plus, on a $N_G(C) = C \rtimes \langle k \rangle$ avec k une involution agissant par inversion. En particulier, C est un groupe abélien.

Démonstration. On reproduit la démonstration donnée dans [DW20]. Puisque $N_G(C)/C$ est d'ordre pair, il existe un 2-élément $x \in N_G(C) \setminus C$ (relèvement de la torsion) que l'on prend d'ordre minimal de sorte que $x^2 \in C$. Mais $C_x \neq C$, donc $x^2 \in C \cap C_x = \{1\}$ et x est une involution. Comme $C_x \neq C$, le groupe $C_C(x)$ est fini et donc x agit sur C par inversion.

Par conséquent, pour tout involution i dans C , on a $C_G(i)^\circ = C$; de plus, i normalise $C_x \neq C$ et agit par inversion. Le groupe C contient une unique involution et donc par le Fait 4.3.5, G a les mêmes 2-Sylow que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

On remarque que $N_G(C) = C_G(i)$. Mais par le Fait 4.3.6, le groupe $C_G(i)/C_G(i)^\circ$ est d'exposant 2. Par la structure des 2-Sylow, $N_G(C) = C \rtimes \langle k \rangle$. \square

On remarque que dans ce cas $N_G(C) \setminus C$ est composé d'involutions agissant par inversion. En effet, $ckck = cc^{-1} = 1$; soit j une telle involution, on a $C^j = C$ et l'action est par inversion car $C_j \neq C$ (sinon, $C_C(j)^\circ \leq C_j$ et $C_j = C$ contiendrait deux involutions distinctes).

On peut déterminer de la même manière la structure des 2-Sylow pour les groupes de Frobenius connexes de type impair. En effet, le rang de Prüfer est égal à un (Proposition 4.3.2 et Fait 4.3.1).

Proposition 4.3.8. Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé connexe de type impair. Alors les 2-Sylow de G sont soit connexes, soit du type $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Démonstration. Soit S un 2-Sylow et S° sa composante connexe; on peut l'étendre à un tore décent maximal T . Il existe donc un conjugué C^g tel que $T \leq C^g$. On note i l'involution contenue dans C^g .

Soit $j \neq i$ une involution et C_j le conjugué de C qui la contient. Si j agissait par inversion sur S° alors j commuterait avec i . Par conséquent, $1 \neq i \in C_j$, contradiction. Donc les 2-Sylow ne sont pas du type $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, et on conclut par le Fait 4.3.5. \square

Pour les (QFI) de type impair, nous n'avons pas de contrôle sur le rang de Prüfer. Néanmoins, nous disposons d'un critère de scission valable pour tous les quasi-groupes de Frobenius de type impair.

Proposition 4.3.9. (*à comparer avec le Lemme 11.21 de [BN94]*) *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair tel qu'il existe un groupe A définissable connexe normal (infini) d'intersection triviale avec C . Alors il existe un groupe définissable connexe abélien A_1 tel que $G = A_1 \rtimes C$.*

Démonstration. Soit $i \in C$, l'involution i agit par inversion sur A ; sinon, $C_A(i)^\circ \leq C$, contradiction. Le groupe A est donc abélien uniquement 2-divisible; si A contenait une involution j alors on aurait $A \leq C_j$ et donc $C_j = G$, contradiction.

On considère maintenant $C_G(A)^\circ$. On a bien $C_G(A)^\circ \cap C_i = \{1\}$; sinon, soit $1 \neq x \in C_G(A)^\circ \cap C_i$, alors $A \leq C_G(x)^\circ \leq C_i$, contradiction. L'involution i agit aussi par inversion sur $C_G(A)^\circ$, qui est donc abélien. On a de plus $C_G(C_G(A)^\circ)^\circ = C_G(A)^\circ$, quitte à remplacer A par $C_G(A)^\circ$, on peut supposer que $C_G(A)^\circ = A$.

Soit $g \in G$, alors $[i, g] \leq C_G(A)$. En effet, i et i^g agissent par inversion et $[i, g] = ii^g$. Par conséquent, $[i, G] \leq C_G(A)^\circ = A$. Soit $g \in G$, on considère $a = [i, g]$; puisque A est 2-divisible, il existe $a' \in A$ tel que $a = a'^2 = [i, a']$. Par conséquent, on a :

$$[i, ga'^{-1}] = ia'g^{-1}iga'^{-1} = a'^i[i, g]a'^{-1} = a'^{-1}a'^2a'^{-1} = 1.$$

On a donc $G = AC_G(i) = C_G(i)A$, mais $C_G(i) \cap A = \{1\}$ (sinon, A contiendrait un élément a tel que $a^i = a = a^{-1}$, *i.e.*, une involution, contradiction), par conséquent, $G = A \rtimes C_G(i)$. Finalement, on déduit que $C_G(i) = C_G(i)^\circ = C$ et donc $G = A \rtimes C$. \square

4.4 Le groupe de Weyl

Les quasi-groupes de Frobenius de type impair se distinguent en partie selon la structure de leur 2-torsion. Une autre façon de les analyser consiste à s'intéresser à $N_G(C)/C$, une forme de *groupe de Weyl*. En effet, pour un groupe algébrique réductif, le groupe de Weyl désigne $N_G(T)/C_G(T)$ où T est un tore (algébrique) maximal. Or, pour les groupes de Frobenius algébriques connexes, le complément de Frobenius est précisément un tore maximal. De même dans $\mathrm{PGL}_2(K)$ qui est l'exemple paradigmatique de groupe algébrique (QFP), le quasi-complément de Frobenius est un tore (algébrique) maximal.

En général dans le contexte rangé, plusieurs notions de groupes de Weyl peuvent être envisagées. Nous montrons que sous l'hypothèse supplémentaire que le

quasi-complément de Frobenius est résoluble, elles coïncident toutes pour les quasi-groupes de Frobenius de type impair. Nos résultats s'inspirent largement de [ABF13] qui étudie les groupes de Weyl des groupes simples minimaux connexes rangés, *i.e.*, des groupes simples rangés tels que les sous-groupes définissables connexes propres sont résolubles.

Il nous faut d'abord décrire la structure des sous-groupes de Carter dans les quasi-groupes de Frobenius.

Lemme 4.4.1. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé avec C résoluble. Alors C contient un sous-groupe de Carter généreux (pour G). De plus, un sous-groupe de Carter est soit généreux contenu dans un conjugué de C , soit il n'est pas généreux, intersecte trivialement C et ses conjugués, et il est produit de ρ -groupes unipotents.*

Démonstration. D'après le Fait 4.1.16, le groupe C contient un sous-groupe de Carter Q . Or d'après le Fait 4.1.16, les sous-groupes de Carter d'un groupe connexe résoluble sont auto-normalisants, conjugués et généreux. Puisque C est généreux (et connexe), le groupe Q est un sous-groupe de Carter généreux de G (car $N_G(Q)^\circ = N_C(Q)^\circ = Q$). En particulier, tous les sous-groupes de Carter de C sont des sous-groupes de Carter généreux de G .

Si Q_1 est un sous-groupe de Carter généreux de G , alors $Q_1 \cap C$ (quitte à conjuguer C) est non-trivial. On a donc $Q_1 \leq C$. Inversement, si Q_1 est un sous-groupe de Carter qui intersecte C non-trivialement, alors $Q_1 \leq C$ et c'est un sous-groupe de Carter généreux.

Si Q_1 intersecte trivialement C et ses conjugués, il ne contient pas de torsion divisible. Par le Fait 4.1.18, on peut donc supposer que $Q_1 = U_{0,1}(Q_1) * \dots * U_{0,RM(Q_1)}(Q_1) * U_3(Q_1) \times \dots \times U_{pmax}(Q_1)$. \square

Proposition 4.4.2. *(à comparer avec [ABF13, Proposition 3.2]) Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Alors on a $N_G(C) = CN_G(T)$ où T est un tore décent maximal de C .*

Si de plus, C est résoluble alors $W(G) = N_G(T)/C_G(T) \simeq N_G(Q)/Q \simeq N_G(C)/C$ où Q est un sous-groupe de Carter généreux.

Démonstration. Soit T un tore décent maximal de C . On remarque que les tores décents maximaux sont conjugués (dans C). On applique un argument de Frattini au groupe $N_G(C)$: soit $n \in N_G(C)$, on a $T^n \leq C$ et par conjugaison des tores décents maximaux, il existe $c \in C$ tel que $c^{-1}n \in N_G(T)$, par conséquent $N_G(C) = CN_{N_G(C)}(T)$. Mais $N_G(T) \leq N_G(C)$, par conséquent $N_G(C) = CN_G(T)$

Supposons maintenant que C est résoluble. Soit Q un sous-groupe de Carter généreux, quitte à conjuguer, on peut supposer que $T \leq Q \leq C$. On rappelle que les sous-groupes de Carter de C sont conjugués et autonormalisants. Un argument de Frattini appliqué à $N_G(C)$ nous donne : $N_G(C) = CN_G(Q)$ (car

$N_{N_G(C)}(Q) = N_G(Q)$). Par conséquent, $N_G(C)/C \simeq N_G(Q)/(C \cap N_G(Q)) = N_G(Q)/Q$. De plus, $Q \leq C_G(T)$. Cette fois-ci un argument de Frattini appliqué à $N_G(T)$ nous donne $N_G(T) = C_G(T)N_G(Q)$ (car $N_G(Q) \leq N_G(T)$ puisque T est caractéristique dans Q). Puisque Q est autonormalisant dans $C_G(T)$, on a $N_G(T)/C_G(T) \simeq N_G(Q)/Q$. Finalement, $W(G) \simeq N_G(Q)/Q \simeq N_G(C)/C$ \square

Proposition 4.4.3. *(à comparer avec [ABF13, Corollaire 3.4]) Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé avec C résoluble. Alors pour un p -tore maximal non-trivial S , on a $N_G(S)/C_G(S) \simeq W(G)$.*

Démonstration. Le groupe S est contenu dans tore décent maximal $T \leq Q$ où Q est un sous-groupe de Carter généreux (contenu dans C quitte à conjuguer). On a : $Q \leq C_G(S)^\circ = C_G(S) \leq C$. On applique un argument de Frattini à $N_G(S)$ pour obtenir $N_G(S) = C_G(S)N_{N_G(S)}(Q)$. Mais S est caractéristique dans Q , et donc $N_{N_G(S)}(Q) = N_G(Q)$. Par conséquent, $N_G(S)/C_G(S) \simeq N_G(Q)/N_G(Q) \cap C_G(S) \simeq N_G(Q)/Q$ (car Q est autonormalisant dans $C_G(S)$). \square

Corollaire 4.4.4. *(à comparer avec [BC09, Corollaire 5.2]) Soit $C < G$ un (QFI) rangé de type impair avec C résoluble. Alors $W(G)$ n'est pas trivial. Soit p le plus petit diviseur premier (impair) de l'ordre de $W(G)$. Alors il existe $x \in N_G(T) \setminus C_G(T)$ un p -élément représentant un élément d'ordre p dans $W(G)$ tel que $C_G(x)^\circ$ contient un p -groupe unipotent.*

Démonstration. On suit la démonstration de [BC09, Corollaire 5.2]. Supposons que pour tout p -élément x représentant un élément d'ordre p dans $W(G)$, le groupe $C_G(x)^\circ$ ne contient pas de p -groupe unipotent. Alors d'après le Fait 4.1.15, x appartient à un p -tore T . De plus, par le Fait 4.1.15, il existe un p -élément toral y tel que $C_G(y)^\circ$ contient un p -groupe unipotent. Or, y est dans un conjugué de C et $C_G(y)^\circ \leq C$ est résoluble. En particulier, $U_p(C_G(y)^\circ) \neq \{1\}$. Par conjugaison des tores décents maximaux, on peut supposer que x et y appartiennent au même p -tore T . Par conséquent, $x \in T \leq C_G(y)$ et puisque les p -Sylow du groupe résoluble $C_G(y)^\circ$ s'écrivent comme produit central d'un p -tore et d'un p -groupe unipotent, on a $U_p(C_G(y)) \leq C_G(T) \leq C_G(x)^\circ$, contradiction. \square

Corollaire 4.4.5. *Soit $C < G$ un (QFI) rangé de type impair avec C résoluble. Alors le 2-rang de Prüfer est supérieur ou égal à 2.*

Démonstration. Supposons que le sous-groupe C contient un 2-tore maximal T_2 de rang de Prüfer égal à un. D'après la proposition 4.4.3, $N_G(T_2)/C_G(T_2) \simeq N_G(C)/C \neq \{1\}$. Or, d'après le Fait 29 de [DJ10], $Aut(T_2) \simeq Z_2^\times$ et le seul automorphisme d'ordre fini non-trivial est l'inversion. Le groupe $N_G(C)/C$ serait d'ordre 2, contradiction. \square

4.5 A la recherche d'un sous-groupe de Borel fortement standard

L'étude des involutions et des translations constitue un pan essentiel de l'analyse des groupes de type impair. A. Deloro et J. Wiscons montrent un résultat très important sur la situation des translations dans notre contexte :

Fait 4.5.1. [DW20, Théorème A] *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius de type impair. Alors $\bigcup_{g \in G} C^g$ ne contient pas toutes les translations.*

Remarque 4.5.2. *Si $C < G$ est un groupe de Frobenius connexe de type impair, aucune translation n'est contenue dans $\bigcup_{g \in G} C^g$: soit $x = ij \in C^g$, alors $i, j \in N_G(C^g) = C^g$, et donc $i = j$ (car le complément de Frobenius contient une unique involution).*

Sur la base de ce théorème, nous allons montrer l'existence d'un sous-groupe de Borel non-nilpotent qui intersecte C (quitte à conjuguer) dans une partie infinie. Idéalement, on conjecture qu'un tel borel devrait contenir tout C .

Définition 4.5.3. *Soit B un sous-groupe de Borel d'un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair $C < G$. On dira que B est faiblement standard si B est non-nilpotent d'intersection infinie avec C , standard si de plus $B \cap C$ contient une involution, et enfin fortement standard si B contient C .*

Autrement dit, nous allons montrer que G contient un borel faiblement standard. On utilise le terme "standard" car dans le cas d'un (QFP), nous cherchons à identifier un borel dont la structure est similaire à celle des sous-groupes de Borel de $\mathrm{PGL}_2(K)$ à savoir isomorphes au groupe strictement 2-transitif $K^+ \rtimes K^\times$. Remarquons que dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ un sous-groupe de Borel est généreux mais il n'est pas génériquement disjoint de ces conjugués. En effet, soient $B \neq B^g$ deux borels, ils s'intersectent dans un tore maximal T qui est auto-centralisant dans G (groupe réductif). Or, $C_B(T) = T$ est généreux dans B , par conséquent $RM(B \setminus \bigcup_{G/N_G(B)} B^g) < RM(B)$.

Pour les groupes de Frobenius connexes, nous cherchons plutôt à montrer qu'ils sont égaux à un de leur borel (standard) et donc qu'ils sont résolubles.

Tout d'abord, voici un lemme extrait de la démonstration du Théorème B de [DW20].

Lemme 4.5.4. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Soient x une translation et i une involution qui l'inverse. Si C est (x, i) -invariant alors $x \in \bigcup_G C^g$.*

Démonstration. On distingue deux cas :

a) Supposons que i inverse C . Soit $t \in T \leq C$ où T est un tore décent maximal, en calculant on obtient :

$$t^x = t^{-xi} = t^{-ix^{-1}} = t^{x^{-1}}$$

Par conséquent, x^2 centralise t et $x^2 \in C_G(T) \leq C$.

b) Supposons que i n'inverse pas C . Alors $C_C(i)^\circ \leq C_G(i)^\circ$ est infini. Mais $C_G(i)^\circ \leq C_i$. On a donc que $C \cap C_i \neq 1$ et puisque C est TI, $C = C_i$. Par conséquent, $i \in T \leq C$, en calculant on obtient (on remarque que x normalise C) :

$$x^{-1} = x^i = xi^xi \in xC$$

Par conséquent, $x^2 \in C$. On a donc montré qu'il existe un conjugué de C contenant x^2 .

Montrons maintenant que x appartient à $\bigcup_G C^g$. Si x est une involution, alors $x \in C_x$ et on conclut. On peut donc supposer que $1 \neq x^2 \in C$. Comme C est TI, on a donc $x \in N_G(C)$ (car $(x^2)^x = x^2$).

Si $N_G(C)/C$ est d'ordre impair alors $x \in C$. Sinon, par le Fait 4.3.7, $N_G(C) = C \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où l'involution agit par inversion et $N_G(C) \setminus C$ est composé d'involutions. Par conséquent, ou bien $x \in C$ ou bien x est une involution contenue dans un conjugué de C . \square

Le résultat suivant permet de caractériser les groupes abéliens inversés par des involutions.

Lemme 4.5.5. *Soit A un groupe définissable abélien 2-divisible inversé par deux involutions $i \neq j$. Soit $a \in A$, alors $a \in iI \cap jI$*

Démonstration. : Soit $a' \in A$. On obtient :

$$a'^2 = (a'^{-1})^i a' = ii^{a'} \in iI$$

Par 2-divisibilité de A , pour tout $a \in A$, il existe $a' \in A$ tel que $a = (a')^2 \in iI$. On raisonne de la même façon pour obtenir que $a \in jI$. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème :

Théorème 4.5.6. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Alors il existe un groupe A définissable connexe abélien inversé par (au moins) deux involutions $i \neq j$ tel que $A \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$, et maximal pour ces propriétés. De plus, on a les propriétés suivantes :*

1. A est soit TI, soit normal.
2. $C_G(A)^\circ = A$.
3. A n'est pas presque-autonormalisant et $N_G(A)^\circ = N^\circ = A \rtimes (N^\circ \cap C)$.

Démonstration. Par le Fait 4.5.1, on trouve une translation $x = ij$ qui n'est pas contenue dans $\bigcup_G C^g$, pour deux involutions $i \neq j$. On considère $A = C_G(x)^\circ$ (qui est infini par le Fait 4.1.8). Remarquons qu'il s'agit d'un groupe (x, i, j) -invariant.

Supposons que le groupe (x, i) -invariant $C_A(i)^\circ$ est infini. On a donc $C_A(i)^\circ \leq C_G(i)^\circ \leq C_i$. Puisque C_i est TI, il est aussi (x, i) -invariant et on aurait $x \in \bigcup_G C^g$ (Lemme 4.5.4), contradiction.

Par conséquent, les groupes $C_A(i)$ et $C_A(j)$ sont finis et donc A est un groupe définissable connexe abélien inversé par i et j . De plus, $A \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$.; le groupe A est en particulier uniquement 2-divisible.

Il existe donc un groupe définissable connexe abélien inversé par au moins deux involutions et d'intersection triviale avec les conjugués de C . On prend A maximal pour ces propriétés et on note $i \neq j$ deux involutions l'inversant. Si A n'est pas normal, supposons par l'absurde qu'il existe un conjugué $A' \neq A$ et soit $1 \neq x' \in A' \cap A$.

On a donc $x' \in iI \cap jI$ (Lemme 4.5.5). De plus, $A, A' \leq C_G(x')^\circ = A_1$. En raisonnant comme précédemment, on obtient que le groupe A_1 est abélien inversé par i et j (sinon, x' appartiendrait à $\bigcup_G C^g$). Par ailleurs, $A_1 \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$ et donc par maximalité de A , on obtient que $A = A_1 = A'$ contradiction.

On considère $C_G(A)^\circ$, c'est un groupe (i, j) -invariant, inversé par i, j . De plus, $C_G(A)^\circ \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$. Par maximalité de A (et puisque A est abélien), on a $C_G(A)^\circ = A$.

Si $N_G(A)^\circ = A$, alors le groupe A serait généreux et donc intersecterait un conjugué de C , contradiction. Le groupe A n'est donc pas presque-autonormalisant.

On note $N_G(A) = N$. Remarquons que $i, j, x \in N$. Si les groupes $C_N(i)$ et $C_N(j)$ étaient finis alors i, j inverseraient le groupe abélien N° . En particulier, $N^\circ = C_G(A)^\circ = A$, contradiction. On peut donc supposer que $C_N^\circ(i) \leq N \cap C_i$ est infini.

On raisonne comme dans la Proposition 4.3.9 pour obtenir que $N_G(A)^\circ = A \rtimes (C_i \cap N_G(A)^\circ)$. \square

Si C est résoluble, pour obtenir un borel faiblement standard, il suffit de considérer un borel B contenant le groupe connexe résoluble N° . Le Lemme 4.2.3 nous permet de conclure que B est non-nilpotent et $B = B' \rtimes (B \cap C)$ (c'est un groupe de Frobenius scindé). Remarquons que pour un groupe strictement 2-transitif $N_G(C_G(ij)) = C_G(ij) \rtimes N_C(C_G(ij)) = K^+ \rtimes K^\times$ (voir [ABW19]). Il s'agit en particulier d'un borel standard (car $C_G(ij) = iI \cap jI$).

Remarque 4.5.7. *On rappelle qu'un borel faiblement standard B s'écrit sous la forme $B = B' \rtimes (B \cap C)$, avec $(B \cap C) \hookrightarrow K^\times$, pour un corps K . Par conséquent, si B contient un p -groupe unipotent alors sous l'hypothèse de l'infinité des p -nombres premiers de Mersenne, le Fait 4.1.13 nous permet de conclure que B est un borel standard.*

Soit A le groupe obtenu dans le Théorème 4.5.6. Si $N_G(A)^\circ = N^\circ$ contient des involutions (en particulier, si N° contient un p -groupe unipotent et si on

suppose qu'il n'existe pas de mauvais corps en caractéristique positive), alors nous obtenons un borel standard que l'on peut caractériser assez précisément.

Proposition 4.5.8. *Sous les mêmes hypothèses et notations que le Théorème 4.5.6, supposons de plus que $i, j \in N^\circ = A \rtimes (C_i \cap N^\circ)$ avec N° résoluble. Alors N° est un borel.*

Démonstration. Il existe un borel B tel que $N^\circ \leq B$. Le groupe B est un quasi-groupe de Frobenius résoluble et donc d'après le Lemme 4.2.3 et le Lemme 4.2.5, on a $B = B' \rtimes (B \cap C)$ et $B' = B \setminus \bigcup_B (C \cap B)^b$. Par conséquent, $A \leq B'$ et B' est définissable connexe abélien inversé par i et j (et intersecte trivialement C et ses conjugués). Par maximalité de A , on a donc $A = B'$. Par conséquent, $B = N_G(A)^\circ$. \square

Pour un tel borel standard, il nous est dès lors possible de déterminer les intersections avec ses conjugués d'une façon qui rappelle ce qui se passe par exemple dans les N° -groupes (voir [DJ10]).

Proposition 4.5.9. *Sous les mêmes hypothèses et notations que le Théorème 4.5.6, supposons de plus que $N^\circ = B$ est un borel standard et que C est résoluble. Pour $B \neq B^g$, on note $I_g = (B \cap B^g)^\circ$. Alors l'un des deux cas suivants se produit :*

1. I_g est trivial, i.e., $B \cap B^g$ est fini.
2. I_g est un tore, i.e., un groupe définissable abélien divisible.

Démonstration. On peut tout d'abord supposer que G n'est pas résoluble. Supposons que $I_g = (B \cap B^g)^\circ$ est non-trivial. Si $I_g \cap C$ n'est pas trivial (quitte à conjuguer C), par le Lemme 4.2.1, on sait que cette intersection est infinie. Supposons que $I_g \neq (I_g \cap C)$. Par le Lemme 4.2.3, on a : $I_g = F(I_g)^\circ \rtimes (C \cap I_g)$. Le groupe $F(I_g)^\circ$ est contenu dans $F(B)^\circ \cap F(B^g)^\circ$ (Lemme 4.2.5). Mais d'après le Théorème 4.5.6, on a $F(B)^\circ = F(B^g)^\circ$ (par la propriété TI).

On considère désormais $N_G(F(B))^\circ$ qui contient B et B^g . C'est un quasi-groupe de Frobenius de type impair. Par la proposition 4.3.9, le groupe est scindé et donc résoluble. On a donc $B = B^g$, contradiction.

Si $I_g \cap \bigcup_G C^g = \{1\}$ alors $I_g \leq F(B)^\circ \cap F(B^g)^\circ$ et on raisonne comme au paragraphe précédent.

On a donc $I_g \leq C \cap (B \cap B^g)$ (quitte à conjuguer). Mais le groupe $C \cap B$ est un quasi-complément de Frobenius dans B et donc $I_g \leq K^\times$. Il s'agit bien d'un tore. \square

Comment obtenir un borel fortement standard ? Dans [FJ08], les auteurs considèrent plusieurs conjectures de généricité, notamment la *générosité des borels* (GB) et la *générosité des sous-groupes de Carter* (GC) (dans le deuxième cas, par [Jal06], cela implique la conjugaison des sous-groupes de Carter). On

peut envisager ces hypothèses de générosité comme la reformulation dans le contexte rangé d'hypothèses topologiques de densité.

L'hypothèse (GB) est suffisante pour démontrer que nous avons des borels fortement standards si le quasi-complément de Frobenius est abélien et même nilpotent (modulo l'hypothèse (PT)). Remarquons que O.Frécon a montré dans [Fre08] que les groupes simples minimaux connexes satisfont (GC).

Question : Les groupes simples minimaux connexes satisfont-ils (GB) ?

Lemme 4.5.10. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé avec C abélien ou bien C nilpotent (sous l'hypothèse (PT)). Soit B un borel faiblement standard. Alors si B est généreux, on obtient que $C \leq B$.*

Démonstration. Par le Lemme 4.2.3, $B = B' \rtimes (B \cap C)$. Notons que $B \cap C$ est un groupe abélien divisible (car il se plonge dans K^\times pour un corps définissable K). Si la caractéristique est positive, c'est un bon tore, en particulier c'est un groupe central dans C . Si la caractéristique est nulle, alors, par hypothèse, c'est un pseudo-tore, central dans C également.

On remarque que $B \cap C$ est généreux dans B . Or, puisque B est généreux (dans G) et presque-autonormalisant, il existe une partie définissable générique X tel que pour tout $x \in X$, l'élément x est contenu dans un nombre fini de conjugués de B (Fait 4.1.1).

Par connexité de B , il existe $1 \neq c \in C \cap X$ (quitte à conjuguer). Mais c est central dans C , par conséquent $c \in B \cap B^{c'}$ pour $c' \in C$.

Le groupe $C \cap N_G(B)$ est donc générique dans C et par connexité de C , on obtient que $C \leq N_G(B)^\circ = B$. \square

Pour conclure cette section, donnons un critère pour déterminer la générosité d'un borel standard.

Lemme 4.5.11. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair. Soit B un borel standard. Si toutes les intersections $B \cap B^g$ sont finies alors B est généreux.*

Démonstration. On considère la famille uniformément définissable $\{B \cap B^g : g \in G\}$. Si tous les membres de cette famille sont finis alors il existe une borne n pour leur cardinalité (Axiome D).

Or, B ne peut pas être génériquement d'exposant n . Sinon, B satisferait génériquement une équation du type $x^n = 1$. Mais d'après la proposition IV 4.16 de [ABC08], $O_2(B)$ (le 2-groupe normal maximal, *a priori* non-définissable) serait unipotent et donc trivial, et $B/O_2(B) = B$ serait sans involutions, contradiction.

Le groupe B est donc génériquement disjoint de ses conjugués et puisque il est presque-autonormalisant, on peut conclure que B est généreux par le Fait 4.1.1. \square

4.6 Théorèmes de classification

Nous pouvons maintenant démontrer nos deux théorèmes de classification :

1. Théorème 1.0.2 : Les (QFP) rangés de type impair tel que les sous-groupes de Borel sont généreux (ou bien qui contiennent un borel standard) sont isomorphes à $\mathrm{PGL}_2(K)$ pour un corps K (rangé) algébriquement clos de caractéristique différente de 2.
2. Théorème 1.0.3 : Les groupes de Frobenius connexes rangés de type impair avec complément abélien (respectivement nilpotent satisfaisant (PT)) tel que les sous-groupes de Borel sont généreux (ou bien qui contiennent un Borel standard) sont résolubles et scindés.

Nous formulerons certains lemmes intermédiaires sous l'hypothèse de l'existence d'un borel faiblement standard (ou standard). Nous souhaitons dans la mesure du possible éviter d'utiliser toute la force de l'hypothèse de l'existence d'un borel fortement standard.

Pour les (QFP), nous savons que le quasi-complément de Frobenius est abélien. Néanmoins, il pourrait s'agir d'un sous-groupe de Borel (une situation fortement non-algébrique). On retrouve là l'un des contre-exemples (Cibo₂) minimaux potentiels à la Conjecture de Cherlin-Zilber pour les groupes de petit rang de Prüfer (voir [DJ16]). Une résolution complète de la conjecture A_1 de [DW20] permettrait donc l'élimination de cette configuration pathologique.

L'identification de $\mathrm{PGL}_2(K)$ se fait *via* l'existence d'une (B, N) -paire scindée spéciale de rang 1. Dans tout groupe algébrique réductif, un borel B et $N_G(T)$ où T est un tore maximal contenu dans B forment une (B, N) -paire. Le rang de la (B, N) -paire correspond au nombre d'involutions qui engendrent le groupe $N/B \cap N$. Plus spécifiquement, dans $\mathrm{PGL}_2(K)$, une telle (B, N) -paire est scindée de rang 1 (on a en effet $B = B_u \rtimes T$ où B_u est le radical unipotent et T le tore algébrique maximal). De plus, dans ce cas, un tore maximal T est un groupe TI presque-autonormalisant tel que $N_G(T)/T$ est d'exposant 2.

Nous nous inspirons de la stratégie employée dans [DJ16] (voir en particulier la Proposition 3). Nous renvoyons également à [Del07].

Une (B, N) paire scindée spéciale de rang 1 est un quadruplet de groupes $B, N, H = N \cap B$ et U un groupe nilpotent avec H normal dans N qui satisfait les axiomes suivants :

1. $G = \langle B, N \rangle$.
2. $[N : H] = 2$.
3. Pour tout $k \in N \setminus H$, on a $H = B \cap B^k$, $G = B \cup BkB$, et $B^k \neq B$.
4. $B = U \rtimes H$.

Les deux théorèmes suivants permettent d'identifier des groupes algébriques *via* des (B, N) -paires dans le contexte rangé.

Fait 4.6.1. (adapté de [DMT08, Théorème 2.1]) Dans un univers rangé, soit (B, N, U, H) une (B, N) -paire (définissable) scindée spéciale de rang 1 tel que U est divisible sans torsion. Alors $G \simeq PGL_2(K)$.

Fait 4.6.2. (adapté de [Wis11, Théorème 1.2]) Dans un univers rangé, soit (B, N, U, H) une (B, N) -paire (définissable) scindée spéciale de rang 1. Supposons que de plus U contient un élément d'ordre $p > 2$. Soient $L = \bigcap_G B^g$ et $M = \langle U^g : g \in G \rangle L$; si $H \neq L$ et si $(H \cap M)/L$ ne contient pas de p -groupe abélien élémentaire, alors $G/L \simeq PGL_2(K)$.

Rappelons que dans un quasi-groupe de Frobenius résoluble, on a $B' = F(B)^\circ$. De plus, le rang de Prüfer d'un (QFP) ou d'un groupe de Frobenius connexe de type impair, est égal à un.

Lemme 4.6.3. Soit $C < G$ un (QFP) rangé de type impair tel qu'il existe un borel fortement standard B , i.e., $B = B' \rtimes C_i$. Alors $B^k \neq B$ pour tout $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$. De plus, B est autonormalisant.

Si $C < G$ est un groupe de Frobenius connexe de type impair et sous les mêmes hypothèses autrement, B est autonormalisant.

Démonstration. On rappelle que si G est un (QFP) alors $N_G(C_i) \setminus C_i$ consiste d'involutions (voir Fait 4.3.7).

Soit $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$ une involution. Supposons par l'absurde que $B^k = B$. Le groupe $C_B(k)^\circ$ est infini (sinon B serait abélien). D'après, le Lemme 4.2.1, $C_k \leq B$ et donc $k \in B$. Mais d'après le Corollaire 4.2.3, B est un groupe de Frobenius et donc $k \in C_i$, contradiction.

Montrons maintenant que B est autonormalisant. Soit $g \in N_G(B) \setminus B$, le groupe C_i^g est un quasi-complément de Frobenius de B et par le Lemme 4.2.1, il existe $b \in B$ tel que $C_i^{gb^{-1}} = C_i$. On a : $g \in B$ ssi $gb^{-1} \in B$. On peut donc supposer que $g \in N_G(C_i)$, si $g \in C_i$ alors on conclut, sinon g est une involution normalisant C_i et B , le paragraphe précédent montre qu'alors $g = i \in C_i$.

Si $C_i < G$ est un groupe de Frobenius alors en raisonnant comme dans le paragraphe précédent, il existe un $b \in B$ tel que $C_i^{gb^{-1}} = C_i$, mais $gb^{-1} \in N_G(C_i) = C_i$ et par conséquent $g \in B$. Le groupe B est bien autonormalisant. \square

Lemme 4.6.4. Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair avec C résoluble (et de rang de Prüfer 1). Soit B un borel standard, i.e., $B = B' \rtimes (B \cap C_i)$ avec $i \in B$. Supposons de plus que $N_G(B) \cap i^G = B \cap i^G$.

Soit $T_B(k) = \{b \in B : b^{-1} = b^k\}$ où k est une involution ne normalisant pas B . Alors ou bien G est résoluble ou bien $i^G \setminus N_G(B)$ et

$$K_B = \{k \in i^G \setminus N_G(B) : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$$

sont génériques dans i^G .

Démonstration. Remarquons tout d'abord que d'après le Corollaire 4.4.5, le groupe $C < G$ ne peut pas être un (QFI).

Les involutions de G forme une classe de conjugaison i^G . Par hypothèse, $N_G(B) \cap i^G = B \cap i^G$. Supposons que $i^G \setminus N_G(B)$ n'est pas générique dans i^G , i.e., $i^G \cap N_G(B) = i^G \cap B$ est large dans i^G . Le groupe $N = \bigcap_G B^g = \bigcap_{1 \leq i \leq n} B^{g_i}$ est un groupe définissable normal contenant toutes les involutions (car $i^G \setminus \bigcup_G B^g = i^G \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n} B^{g_i}$ est non-générique); c'est en particulier un sous-groupe infini.

Si $H = C \cap N^\circ$ est trivial, alors par la Proposition 4.3.9, $G = A \rtimes C$ pour un sous-groupe définissable abélien A et G est résoluble. On peut donc supposer que H est non-trivial.

Le groupe N° est i -invariant. Si $C_{N^\circ}(i)$ était fini alors N° serait abélien. Mais il existerait $1 \neq h \in H$ et donc on aurait $N^\circ \leq C_G(h)^\circ \leq C_i$, contradiction. On peut donc supposer que H est infini.

Le groupe $H < N^\circ$ est donc un quasi-groupe de Frobenius; mais pour tout $g \in G$, il existe $n \in N^\circ$ tel que $H^g = H^n$. Par conséquent, $G = N^\circ$. $N_G(H)$.

Mais $N_G(H) \leq N_G(C)$. Or, $N_G(C)$ est résoluble (l'hypothèse sur le rang de Prüfer élimine le cas (QFI)). Le groupe G est donc résoluble.

Supposons maintenant que $i^G \setminus N_G(B)$ est générique dans i^G . Dans la suite, nous reprenons la démonstration de la Proposition 2 de [DJ16] pour obtenir que

$$K_B = \{k \in i^G \setminus N_G(B) : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$$

est aussi générique dans i^G .

On considère la fonction définissable $\phi : i^G \setminus N_G(B) \rightarrow G/B$ qui envoie k sur sa classe kB .

Le domaine est de rang $RM(i^G) = RM(G) - RM(C_G(i))$ et l'image de rang au plus $RM(G) - RM(B)$. La fibre $\phi^{-1}(\phi(k))$ pour k générique dans i^G est donc de rang au moins $RM(B) - RM(C_G(i))$. Mais si k et j appartiennent à la même fibre, on a $jB = kB$ et donc $kj \in T_B(k)$.

Par conséquent, pour k une involution générique, on a

$$RM(T_B(k)) \geq RM(\phi^{-1}\phi(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i)).$$

□

Remarque 4.6.5. *Les hypothèses du lemme précédent sont en particulier satisfaites si B est fortement standard. En effet, d'après le Lemme 4.6.3, on a $N_G(B) = B$.*

Lemme 4.6.6. *Soit $C < G$ un quasi-groupe de Frobenius rangé de type impair avec C résoluble (et de rang de Prüfer égal à un). Supposons qu'il existe un borel fortement standard $B = B' \rtimes C$. Supposons de plus que $i^G \setminus B$ et $K_B = \{k \in$*

$i^G \setminus B : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ sont génériques dans i^G . Alors pour toute involution $k \in K_B$, le groupe $I_k = (B \cap B^k)^\circ$ est un conjugué de C contenant une involution j_k .

Démonstration. Comme précédemment, le groupe $C < G$ ne peut pas être un (QFI).

Soit $k \in K_B$, on a tout d'abord $RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i)) = RM(F(B)^\circ)$.

On remarque que $T_B(k) \subseteq (B \cap B^k)$ et donc $RM(I_k) \geq RM(F(B)^\circ)$. Le groupe I_k est k -invariant. Supposons que $C_{I_k}(k)^\circ \leq C_k$ est infini : le groupe $B \cap C_k$ est un quasi-complément de Frobenius de B donc conjugué à C et finalement $C_k \leq B$, contradiction.

Le groupe I_k est donc abélien inversé par k . Par le Fait 4.1.18,

$$I_k = d(T) * U_{0,1}(I_k) * \dots * U_0(I_k) * [U_3(I_k) \times \dots \times U_{pmax}(I_k)]$$

On remarque qu'un $U_{0,k}$ -Sylow de I_k s'étend en un $U_{0,k}$ -Sylow de B (et de B^k). Or, d'après le Lemme 4.2.7, les $U_{0,k}$ -Sylow de B sont soit contenus dans B' soit contenus dans un conjugué de C (de même pour B^k). De plus, $d(T)$ s'étend en un tore décent maximal et il est donc contenu dans un conjugué de C .

Montrons d'abord que $d(T) \neq \{1\}$ ou bien $U_{0,k}(I_k) \neq \{1\}$ pour un $U_{0,k}$ -groupe contenu dans C (ou un conjugué).

Supposons par l'absurde que :

$$I_k = U_{0,1}(I_k) * \dots * U_0(I_k) * [U_3(I_k) \times \dots \times U_{pmax}(I_k)] \leq B'$$

Les ρ -groupes qui apparaissent sont contenus dans $B' \cap (B^k)'$ et donc $I_k \leq B' \cap (B^k)'$. Puisque k agit par inversion et $RM(I_k) \geq RM(T_k(B)) \geq RM(B')$, on a $B' = (B^k)'$.

On considère $N_G(B')^\circ$ qui contient B et B^k . Mais alors $N_G(B')^\circ$ est un quasi-groupe de Frobenius contenant un groupe définissable connexe normal B' d'intersection triviale avec C_i et donc par la Proposition 4.3.9, $N_G(B')^\circ = A \rtimes C_i$ où A est abélien. Le groupe $N_G(B')^\circ$ est définissable connexe résoluble et contient B et B^k , contradiction (car k ne normalise pas B).

Le groupe abélien I_k est donc contenu dans conjugué C_{j_k} qui intersecte B et B^k (l'intersection définit un quasi-complément de Frobenius dans B et B^k). Par conséquent, $C_{j_k} \leq B^k \cap B$ et donc $C_{j_k} = I_k$. \square

Corollaire 4.6.7. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius connexe rangé de type impair. Supposons qu'il existe un borel standard $B = B' \rtimes C$. Alors G est résoluble et donc scindé.*

Démonstration. D'après le Lemme 4.6.4, ou bien G est résoluble ou bien $i^G \setminus N_G(B)$ et $K_B = \{k \in i^G \setminus N_G(B) : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ sont génériques dans i^G .

On peut donc supposer que nous sommes dans le deuxième cas. Mais d'après le Lemme 4.6.6, pour $k \in K_B$, le groupe $(B \cap B^k)^\circ = I_k$ est un conjugué de C . Mais on a alors $k \in N_G(I_k)$ et donc $k \in I_k \leq B$, contradiction car k ne normalise pas B .

Le groupe $C < G$ est donc résoluble et on conclut par la Proposition 4.2.3 \square

Corollaire 4.6.8. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius connexe rangé de type impair tel que C est résoluble et les borels de G sont conjugués (respectivement, C est nilpotent, satisfait (PT) ou bien C est abélien, et les borels sont généreux). Alors G est résoluble et scindé.*

Démonstration. : D'après le Théorème 4.5.6, il existe un borel B faiblement standard. Supposons que C est un borel alors par hypothèse B serait un conjugué de C , contradiction (une translation ne peut pas être contenue dans un conjugué de C). Le groupe C est contenu strictement dans un borel et on conclut par le Corollaire 4.6.7

Si C est nilpotent et satisfait (PT) ou bien C est abélien et si de plus, B est généreux, alors par le Lemme 4.5.10, on a donc $C \leq B$; nous pouvons conclure comme précédemment. \square

Remarque 4.6.9. *Dans [CT21], K. Tent et T. Clausen aboutissent également à un résultat de classification des groupes de Frobenius connexes de type impair avec complément nilpotent. Ils font l'hypothèse de l'absence de mauvais corps en caractéristique nulle.*

Si nous identifions $N_G(A)^\circ = N^\circ$ à un sous-groupe de Borel, où A est le groupe obtenu au Théorème 4.5.6 (en présence d'involutions par exemple), il nous est possible de donner une version plus spécialisée du Lemme 4.6.6. Nous pourrions ainsi analyser plus précisément certains groupes de Frobenius, en particulier les groupes strictement 2-transitifs.

Lemme 4.6.10. *Soit $C < G$ un groupe de Frobenius rangé connexe de type impair tel que $B = N^\circ$ est un borel (standard) et C est résoluble. Alors l'une des deux possibilités suivantes se produit :*

1. G est résoluble.
2. $T_B(k)$ est fini, pour $k \in K_B$; de même que $B \cap B^k$.

Si de plus, si $RM(B) > RM(C)$ alors G est résoluble.

Démonstration. On obtient que $N_G(B) \cap i^G = B \cap i^G$: soit $j \in N_G(B)$, alors $C_B(j)^\circ \leq C_j \cap B$ est infini et donc $C_j \cap B$ est un complément de Frobenius dans

B ; ce sous-groupe est donc conjugué à $B \cap C_i$. Il contient l'involution j (la seule involution de C_j).

D'après le Lemme 4.6.4, si G n'est pas résoluble, alors $i^G \setminus N_G(B)$ et $K_B = \{k \in i^G \setminus N_G(B) : T_B(k) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ sont génériques dans i^G .

Supposons que $T_B(k)$ est infini pour $k \in K_B$. Le groupe $I_k = (B \cap B^k)^\circ$ est abélien inversé par k : sinon, $C_B(k)^\circ = B \cap C_k$ est infini et en raisonnant comme précédemment on obtient que $k \in B$, contradiction.

Puisque par hypothèse, on a $N^\circ = B$, d'après la Proposition 4.5.9, $I_k \leq C$ (quitte à conjuguer). Donc par k -invariance, on a $I_k \leq C_k$ et donc $B \cap C_k$ est un quasi-complément de Frobenius dans B et en raisonnant comme précédemment on obtient que $k \in B$, contradiction.

Si $RM(B) > RM(C)$, alors $RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C) > 0$ et donc G est résoluble. \square

Corollaire 4.6.11. *Soit $C < G$ un groupe strictement 2-transitif rangé de type impair et soit $B = N_G(C_G(ij))$ pour deux involutions $i \neq j$. Alors l'un des deux cas suivants se produit :*

1. G est résoluble et donc scindé.
2. Pour $k \in K_B(k)$, $T_B(k)$ et l'intersection $B^k \cap B$ sont finis.

Démonstration. On remarque que G est un groupe de Frobenius connexe. Soient $i \neq j$ deux involutions. Le groupe $N_G(C_G(ij)) = C_G(ij) \rtimes (N_C(C_G(ij)))$ est un groupe strictement 2-transitif par la Proposition 11.51 de [BN94]. Mais par le Théorème 10 de [ABW19], on a : $N_G(C_G(ij)) = K^+ \rtimes K^\times$, pour K un corps interprétable algébriquement clos. Le groupe $N_G(C_G(ij))$ est le borel standard que l'on cherche. Il nous suffit donc d'appliquer le théorème précédent. \square

Nous pouvons désormais compléter la suite des lemmes précédents pour identifier $\mathrm{PGL}_2(K)$ parmi les (QFP).

Lemme 4.6.12. *Soit $C < G$ un (QFP) rangé de type impair. Supposons qu'il existe un borel fortement standard, $B = B' \rtimes C_i$.*

De plus, supposons que $i^G \setminus B$ et $K_B = \{k \in i^G \setminus B : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ sont génériques dans i^G et que d'autre part pour tout involution $k \in K_B$, $I_k = (B \cap B^k)$ est un conjugué de C contenant une involution j_k .

Alors pour tout $g \in G \setminus B$, on a $G = B \cup BgB$ et donc G est un groupe 2-transitif (pour l'action sur G/B).

Démonstration. On rappelle que par le Lemme 4.6.3, le groupe B est autonormalisant.

Puisque le sous-groupe I_k est inversé par k , on a de plus $RM(T_B(k)) = RM(I_k) \geq RM(B) - RM(C_i) = RM(B')$. Mais $I_k < B$ est un quasi-groupe de Frobenius et

par conséquent on peut interpréter un corps K tel que $RM(B') \geq RM(K^+) = RM(K^\times) \geq RM(I_k) \geq RM(B')$ et donc $RM(B') = RM(I_k) = RM(C_i)$. Cette égalité est vraie pour les conjugués de B et les conjugués de C qui y sont contenus. En particulier, B' est soit un groupe abélien divisible sans torsion soit un p -groupe abélien élémentaire.

Il existe une fonction définissable de K_B vers i^B qui à chaque $k \in K_B$ associe l'unique involution j_k de I_k . De plus, si $j_k = j_l$ alors $B \cap B^l = B \cap B^k$ et donc l normalise le conjugué $C_{j_k} = I_k$, *i.e.*, $l \in C_G(j_k)$. Les fibres sont de rang $RM(C_G(i))$. On a donc :

$$\begin{aligned} RM(G) - RM(C_G(i)) &= RM(i^G) = RM(K_B) \leq RM(i^B) + RM(C_G(i)) \\ &= RM(i^B) + RM(C_B(i)) = RM(B) \end{aligned}$$

Finalement, $RM(G) \leq RM(B) + RM(C_i) = RM(B) + RM(B')$.

Soit $g \in G \setminus B$. On considère $X = (C_i \cap B^g)^\circ$

Supposons que X n'est pas trivial; on aurait $X = C_i$ (TI et conjugaison des quasi-compléments de Frobenius). On note $I_g = (B \cap B^g)^\circ$. Si $I_g = C_i$ alors $B' \cap B^g$ est fini.

Sinon, $C_i < I_g$ est un quasi-groupe de Frobenius résoluble (non-nilpotent). D'après le Lemme 4.2.3, on a $I_g = I'_g \rtimes C_i$. D'après le Fait 4.2.5, on a $I'_g \leq B' \cap (B^g)'$ et comme ces groupes sont abéliens, on a $B', (B^g)' \leq N_G(I'_g)^\circ$. Mais on a aussi $C_i \leq N_G(I'_g)^\circ$ et donc $B, B^g \leq N_G(I'_g)^\circ$. Finalement par la Proposition 4.3.9, on déduit que $N_G(I'_g)^\circ$ est résoluble et donc $B = N_G(I'_g)^\circ = B^g$, contradiction.

Par conséquent, ou bien $(B' \cap B^g)^\circ$ ou bien $(C_i \cap B^g)^\circ$ est trivial. Les fibres de l'application de $B' \times B$ (respectivement $C_i \times B$) vers $B'gB$ (respectivement, C_igB) qui à (f, b) associe fgb (respectivement, qui à (t, b) associe tgb) sont finies. On a donc $RM(B'gB) = RM(G)$ (respectivement $RM(C_igB) = RM(G)$). Dans les deux cas la double classe BgB est générique.

Par conséquent, pour tous $g, g' \in G \setminus B$, les doubles classes BgB et $Bg'B$ sont génériques dans G et donc par connexité de G , $g \in Bg'B$. On a donc $G = B \cup Bg'B$. Le groupe G est donc 2-transitif pour l'action de G sur G/B . \square

Remarque 4.6.13. *Le calcul de rang mis en oeuvre dans la démonstration précédente utilise pleinement l'hypothèse de l'existence d'un borel fortement standard.*

On peut désormais conclure la démonstration du Théorème 1.0.2

Démonstration. D'après le Fait 4.3.7, le groupe C est connexe abélien et contient une unique involution i . Il existe un borel B qui contient strictement C_i , *i.e.*, un borel fortement standard. En effet, d'après le Théorème 4.5.6, il existe un borel

B faiblement standard et puisque, par hypothèse, B est généreux, le Lemme 4.5.10 montre que B est en fait un borel fortement standard.

Nous allons montrer que $(B, N_G(C_i))$ induit une (B, N) -paire (définissable) scindée spéciale de rang 1.

D'après le Lemme 4.6.3, pour tout $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$, $B^k \neq B$. De plus, B est autonormalisant.

On rappelle qu'on pose $T_B(k) = \{b \in B : b^{-1} = b^k\}$ pour une involution k qui ne normalise pas B . D'après le Lemme 4.6.4, l'ensemble $K_B = \{k \in N_G(B) \setminus B : RM(T_B(k)) \geq RM(B) - RM(C_G(i))\}$ est générique dans i^G (un quasi-groupe de Frobenius résoluble est un groupe de Frobenius).

On a bien $B \cap N_G(C_i) = C_i$ car $C_i < B$ est un groupe de Frobenius connexe. On a donc $[N_G(C_i) : (N_G(C_i) \cap B)] = 2$ (car $N_G(C_i)/C_i$ est d'exposant 2, Fait 4.3.7). De plus, pour $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$, on a $C_i \leq B \cap B^k$ et $(B \cap B^k) = C_i$ (car $(B \cap B^k)^\circ$ est abélien inversé par k et $N_B(C_i) = C_i$). Par ailleurs, $B = B' \rtimes C_i$ où B' est abélien. On a donc vérifié l'axiome 4, l'axiome 2 et une partie de l'axiome 3.

Soit $k \in K_B$, alors d'après le Lemme 4.6.6, $I_k = (B \cap B^k)^\circ$ est un conjugué de C_i contenant une involution j_k .

Finalement par le Lemme 4.6.12, on obtient :

$$G = B \cup BkB \text{ pour tout } k \in N_G(C_i) \setminus C_i \text{ et } G = \langle B, N \rangle$$

On a donc montré que $(B, N_G(C_i), C_i, B')$ forme une BN-paire scindée spéciale de rang 1.

Or, $\bigcap_{g \in G} B^g$ est trivial. En effet, on a $B \cap B^k = C_i$ pour $k \in N_G(C_i) \setminus C_i$ et donc $\bigcap_{g \in G} B^g \leq C_i$. Par la propriété TI, on a $G = N_G(\bigcap_{g \in G} B^g)^\circ \leq N_G(C_i)^\circ = C_i$.

Si B' est un p -groupe abélien élémentaire, alors en remarquant que $U_p(C_i) = \{1\}$ (on peut interpréter un corps K tel que $C_i \leq K^\times$) on applique le Fait 4.6.2 et on a $G / \bigcap_{g \in G} B^g \simeq \text{PGL}_2(K)$ et donc $G \simeq \text{PGL}_2(K)$.

Sinon, B' est abélien divisible sans torsion et on applique le Fait 4.6.1. Dans les deux cas, on obtient $G \simeq \text{PGL}_2(K)$. \square

En guise de conclusion, notons que tout l'enjeu est de montrer que le borel faiblement standard est un borel fortement standard. Nous espérons que les résultats présentés dans cet article seront susceptibles de rendre possible une approche inductive de ce problème, au moins en caractéristique positive (où l'existence de mauvais corps est improbable).

Références

[ABC08] T. Altinel, A. Borovik et G. Cherlin, *Simple groups of finite Morley rank*. AMS, 2008

- [ABF13] T. Altinel, J. Burdges et O. Frécon, On Weyl groups in minimal simple groups of finite Morley rank. *Israel. J. Math.* **197** (1), p.377-407, 2013
- [ABW19] T. Altinel, A. Berkman et F.O. Wagner, Sharply 2-transitive permutation groups. prépublication hal-01935537v2, 2019
- [AB09] T. Altinel et J. Burdges, On analogies between algebraic groups and groups of finite Morley rank. *J. London Math. Soc.* **78** (1), p.213-232, 2009
- [BN94] A. Borovik et A. Nesin, *Groups of finite Morley rank*. Oxford Logic Guides **26**, 1994
- [BBC07] A. Borovik, J. Burdges et G. Cherlin, Involutions in groups of finite Morley rank of degenerate case. *Selecta Math.* **13** (1), p.1-22, 2007
- [BC09] J. Burdges et G. Cherlin, Semisimple torsion in groups of finite Morley rank. *J. Math. Logic* **09** (02), p.183-200, 2009
- [Bur04] J. Burdges, A signalizer functor theorem for groups of finite Morley rank. *J. Algebra* **274**, p.215–229, 2004
- [Bur06] J. Burdges, Sylow 0-unipotent subgroups in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9**, p.467-481, 2006
- [Che05] G. Cherlin, Good tori in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **8**, p.613–621, 2005
- [CT21] T. Clausen et K. Tent, Mock hyperbolic plans and Frobenius groups of finite Morley rank. prépublication arXiv : 2104.10096v1, 2021
- [DMT08] T. De Medts et K. Tent, Special abelian Moufang sets of finite Morley rank. *J. Group Theory* **11** (5), p.645–655, 2008
- [Del07] A. Deloro, Thèse de doctorat, *Groupes simples connexes minimaux de type impair*. Université Paris-Diderot, 2007
- [Del09] A. Deloro, Steinberg’s torsion theorem in the context of groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **12** (5), p.709-710, 2009
- [DJ10] A. Deloro et E. Jaligot, Small groups of finite Morley Rank with involutions. *J. Reine Angew. Math.* **644**, p.23–45, 2010
- [DJ16] A. Deloro et E. Jaligot, Involutive automorphisms of N° -groups of finite Morley rank. *Pacific J. Math.* **285** (1), p.111–184, 2016
- [DW20] A. Deloro et J. Wiscons, The geometry of involutions in ranked groups with TI-subgroups. *Bull. London Math. Soc.* **52** (3), p. 411-428, 2020
- [Ed03] M.J. Edmundo, Solvable groups definable in o-minimal structures. *J. Pure. Appl. Algebra* **185** (1-3), p.103-145, 2003
- [EJO12] E. Baro, E. Jaligot et M. Otero, Commutators in groups definable in o-minimal structures. *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (10), p.3629-3643, 2012
- [EJO14] M. Edmundo, E. Jaligot et M. Otero, Cartan subgroups of groups definable in o-minimal structures. *J. Inst. Math. Jussieu* **13** (4), p.849–893, 2014
- [Fre00] O. Frécon, Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles. *J. Algebra* **229** (1), p.118–152, 2000

- [Fre06a] O. Frécon, Around unipotence in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9**, p.341–359, 2006.
- [Fre06b] O. Frécon, Carter subgroups in tame groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9**, p.361–367, 2006
- [Fre08] O. Frécon, Conjugacy of Carter subgroups in groups of finite Morley rank, *J. Math. Logic.* **8** (1), p.41–92, 2008
- [Fre09] O. Frécon, Pseudo-tori and subtame groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **12** (2), p.305–315, 2009
- [FJ08] O. Frécon et E.Jaligot, Conjugacy in groups of finite Morley rank. in *Model Theory and Applications to Algebra and Analysis*, Lond. Math. Soc. Lectures Notes Series **350**, 2008
- [Fre17] O. Frécon, Linearity of groups definable in o-minimal structures, *Selecta Math.* **23**, p.1563-1598, 2017
- [Jal06] E. Jaligot, Generix never gives up. *J. Symbolic Logic* **71**, p.599-610, 2006
- [MMT99] D. Macpherson, A. Mosley et K. Tent, Permutation groups in o-minimal structures. **62** (3), p. 650-670
- [Nes89] A. Nesin, Non-solvable groups of Morley rank 3. *J. Algebra* **124**, p.199-218, 1989
- [NPR91] A. Nesin, A. Pillay et V. Razenj, Groups of dimension two and three over o-minimal structures, *Ann. Pure. App. Logic* **53**, p.279-296, 1991
- [PPS00a] Y. Peterzil, A. Pillay et Y. Starchenko, Definably Simple Groups in o-minimal Structures. *Tran. Amer. Math. Soc.* **352**, p.4397-4419, 2000
- [Pill88] A. Pillay, On groups and fields definable in o-minimal structures. *J. Pure Applied Algebra* **53**, p.239-255, 1988
- [Poi87] B. Poizat, *Groupes Stables. Une tentative de réconciliation entre la Géométrie Algébrique et la Logique Mathématique*. Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1987
- [Schr82] E.M.Schröder, Eine Gruppentheoretisch-Geometrische kennzeichnung der projektiv-metrischen geometrien. *J. Geometry* **18**, 1982
- [Tent00] K. Tent, Sharply n-transitive groups in o-minimal structures. *Forum Math.* **12** , p. 65-75, 2000
- [Wag94] F.O. Wagner, Nilpotent complements and Carter subgroups in stable \mathfrak{R} -groups. *Arch. Math. Logic* **33** (1), p.23-34, 1994.
- [Wag01] F.O. Wagner, Fields of finite Morley rank, *J. Symbolic Logic* **66** (2), p.703-706, 2001
- [Wag03] F.O. Wagner, Bad fields in positive characteristic. *Bull. London Math. Soc.* **35**, p.499-502, 2003
- [Wis11] J. Wiscons, On groups of finite Morley rank with a split BN-pair of rank 1. *J. Algebra* **330**, p.431–447, 2011