



**HAL**  
open science

## Analyse bayésienne d'un barème fiscal

Guy Cirier

► **To cite this version:**

| Guy Cirier. Analyse bayésienne d'un barème fiscal. Annales de l'ISUP, 2015, 59 (3), pp.37-46. <hal-03604858>

**HAL Id: hal-03604858**

**<https://hal.science/hal-03604858v1>**

Submitted on 10 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

## Analyse bayésienne d'un barème fiscal

G. Cirier

LSTA, Université Paris VI, France

Email: guy.cirier@gmail.com

### Résumé :

Supposons qu'un État veuille financer un risque affectant sa population. Il va en répartir le coût sur tous les individus en fixant un barème fondé sur un petit nombre de critères économiques. L'ignorance de toutes les autres caractéristiques de la population implique une approche bayésienne pour le calcul de ce barème. Les lois de répartition des critères retenus doivent alors être de type exponentiel. Ces critères doivent être des résumés exhaustifs. Autrement dit, dans bien des cas, les barèmes utilisés en fiscalité devraient être des statistiques exhaustives pour pouvoir être appliqués.

### Abstract :

We suppose that a State wants to finance a risk for its population. The charges are shared among the populations with a fixed scale of some economic criteria. A serious gap in the knowledge of the characteristics of the population implies a Bayesian approach. Under these conditions, the distribution's laws of the criteria are exponential families and criteria have to be sufficient statistics.

## I- Généralités

Le problème des prélèvements financiers obligatoires destinés à couvrir le coût d'un risque tel que celui de la santé, d'accidents ou d'autres risques divers est bien connu en assurance [2]. On utilise en général une tarification variant selon l'importance du risque constaté dans le passé telle qu'elle est couramment pratiquée en assurance automobile : on module la prime selon le système du bonus malus [2]. On se propose d'adapter ces concepts à la fiscalité.<sup>1</sup>

### 1- Problème de la taxation équitable

En matière de fiscalité, la question, bien qu'elle puisse être envisagée de manière similaire par bien des aspects dans certains cas, est de nature très différente dans son essence.

- On peut envisager l'action de l'État comme providentielle, couvrant un certain nombre de risques (éducation, santé, guerre, emploi, aide économique et sociale, subventions, ...) auprès des différents acteurs économiques (individus, entreprises, collectivités, ...). Dans ce domaine, la multiplicité des risques et des situations rend la relation, entre les risques et les acteurs, beaucoup moins directe qu'en assurance. De plus, les interventions de l'État en faveur des acteurs varient considérablement en intensité selon les moments de leur existence. D'un point de vue actuariel, une famille nombreuse, qui consomme davantage d'éducation et d'aides de l'État, doit être pénalisée. Or, c'est le contraire qui se produit en fiscalité.

<sup>1</sup> Un lecteur admettant les justifications économiques de nos hypothèses mathématiques peut aller directement au § II.

Ces considérations justifient le principe de fiscalité appliqué par tous les États du monde de ne jamais affecter directement un impôt à une dépense publique sauf cas très particuliers.

- S'agissant des prélèvements, puisqu'il est presque impossible d'asseoir l'impôt sur les risques encourus par les acteurs, il paraît équitable d'assujettir la contribution de chaque acteur selon sa situation économique et sociale. Mais, là encore, la situation est très aléatoire. La multitude d'aléas qui affectent cette situation peut être classée en deux catégories. Les aléas mesurables tels que le revenu, la consommation ou tout autre grandeur économique mesurable. Les aléas non mesurables : facteurs extérieurs ou environnementaux, avantages économiques, réseaux politiques et sociaux, comportements familiaux et socioprofessionnels, ou enfin circonstances et variations imprévues dans les ressources.

## **2- Un sujet d'actualité permanente**

La question d'une taxation équitable n'est pas philosophique.

- S'agissant de l'Europe, la fiscalité reste un des seuls instruments aux mains des États pour concurrencer leurs voisins au sein de l'Union européenne [7]. Le traité fondateur de Rome demandait en 1957 aux États membres de concourir à l'établissement d'un régime fiscal ne faussant pas la concurrence tout en leur laissant leur souveraineté. Mais, en 1992, un conseil des ministres, Ecofin, décida que l'harmonisation de la fiscalité n'était pas une condition nécessaire pour faire avancer la construction européenne. Le traité de Lisbonne rappelle en 2007, cinquante ans après le traité de Rome, le principe de neutralité fiscale dans les échanges intracommunautaires. Il prévoit d'harmoniser la taxation indirecte afin de ne pas fausser ces échanges. En matière de fiscalité directe, la Cour de justice a admis la possibilité d'une harmonisation sur la base d'un rapprochement des législations. Mais, au nom du souverainisme, un taux d'imposition sur les sociétés plus faible permet à certains États d'attirer des capitaux. Face au dumping fiscal (1000 milliards d'euros échapperaient aux États), la commission européenne se fixe comme objectif de mettre en place en 2016, l'échange automatique d'informations (fin du secret bancaire) entre États de l'UE, pour lutter contre l'évasion fiscale [9]. Mais la règle de l'unanimité des États en matière de fiscalité et l'immense égoïsme des États ne favorisent guère l'adoption de mesures communautaires.

- S'agissant de la protection sociale aux Etats-Unis, après un siècle de débats, une loi sur la protection des patients, surnommée Obamacare [8], fut enfin votée par le 111e Congrès américain et promulguée le 30 mars 2010. Son financement devrait être assuré par des taxes et la baisse des dépenses de soins. On ne parlera pas ici des innombrables difficultés d'application que rencontre cette loi.

Ces exemples illustrent les théories qui s'affrontent en démocratie entre un certain individualisme, où chaque individu est responsable de son problème et doit par conséquent payer les aléas auxquels il se trouve confronté, et une solidarité complète où les risques sont mutualisés sans distinction des caractéristiques des individus. Entre ces deux extrêmes, plusieurs situations intermédiaires sont possibles, tant pour déterminer la tarification des prélèvements que pour assurer une juste répartition.

## **3- Une approche bayésienne**

On ne s'intéresse ici qu'à la tarification des prélèvements sans remettre en doute le bien-fondé de leur finalité. Dans ce cadre restrictif, quelles conditions doivent remplir les barèmes ou les lois de répartition des critères économiques utilisés afin d'éviter des pénalisations pour certaines catégories d'individus?

Car une tarification s'appuie sur un barème utilisant un petit nombre de critères économiques simples à mesurer et ignore toutes les caractéristiques non mesurables d'un acteur. Il est en

effet pratiquement impossible de prendre en compte toute la diversité des situations. Cette perspective implique une approche bayésienne de répartition probabiliste des grandeurs économiques, comme on l'a déjà montré dans un autre cadre plus restrictif, celui des assurances [3], en élargissant ici les hypothèses.

## II – Formalisation mathématique du problème

Soit une population  $\Omega$  où chaque individu présente des caractéristiques socio-économiques aléatoires. Soit  $\varpi \subset \Omega$  un sous-ensemble quelconque de cette population.

### Caractéristiques d'un individu

Certaines caractéristiques économiques d'un individu sont faciles à identifier et à mesurer. On n'en prendra que deux pour cette étude:  $X$  et  $Y$  qui sont des variables aléatoires réelles. Cela peut être par exemple : le revenu, la consommation ou le capital.

D'autres sont souvent qualitatives, tout en ayant un impact sur  $R$ , mais très difficiles à appréhender.  $\Theta$  est la variable aléatoire qui représente tous ces facteurs inconnus dont la réalisation  $\theta \in \theta(\Omega)$  est propre à chaque individu.

Lorsque l'on tire au hasard un individu dans la population  $\Omega$ , on a une réalisation  $(x, y, \theta)$  de toutes les caractéristiques connues et inconnues. On identifie un individu à cette réalisation.

### Impôt équitable

Contrairement aux hypothèses formalisant le bonus-malus où le risque automobile est propre à un individu, l'ensemble des risques couverts par le fisc (santé, éducation, guerre, etc.) n'est pas directement lié à un individu. On veut que le montant d'imposition  $R$  affectant un individu, à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , soit le plus équitable possible, au sens où deux individus présentant les mêmes caractéristiques doivent payer le même montant.  $R$  doit donc prendre en compte le mieux possible toutes les caractéristiques d'un individu et dépendra essentiellement de  $(x, y, \theta)$ . Le montant  $R$  peut être considéré comme une fonction déterministe  $R = F(X, Y, \Theta)$  comme pour l'impôt sur le revenu. Mais, on peut aussi considérer  $R$  comme une variable aléatoire  $(R|x, y, \theta)$ , pour la rapprocher des concepts actuariels de l'assurance automobile. En ce cas,  $R$  dépendrait de circonstances aléatoires extérieures qui affecteraient plus ou moins directement l'individu. Comme on ne considère ici que l'espérance mathématique de  $R$ , les formulations probabilistes ou déterministes sont équivalentes.

### Définition 1

*Quand on connaît parfaitement toutes les caractéristiques  $(x, y, \theta)$  de l'individu considéré, l'impôt équitable est la moyenne individuelle notée  $m(x, y, \theta) = E(R|x, y, \theta)$ . Elle est dite isotrope si elle est la même quel que soit l'individu  $(x, y, \theta)$ .*

- Comme, malheureusement, on ne connaît pas  $\theta$ , on fera comme si la population se répartissait selon une densité a priori inconnue et continue  $\mu(\theta)d\theta$ .

- On définit alors les trois variables aléatoires  $R, X, Y$  conditionnellement à l'événement  $\{\Theta = \theta\}$  que l'on note respectivement :  $R|\theta, X|\theta$  et  $Y|\theta$ .

$(X|\theta, Y|\theta)$  représente deux critères économiques à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dont la réalisation  $(x, y)$  va servir à moduler la moyenne de  $R|\theta$  à taxer. Ces deux v.a. sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et définies sachant  $\{\Theta = \theta\}$ .

### Hypothèses H

Les v.a.  $X|\theta$  et  $Y|\theta$  sont indépendantes. Les densités respectives  $p(x|\theta)$  et  $q(y|\theta)$  sont de classe  $C^3$  au moins.

La densité inconnue  $\pi(r|x,y,\theta)$  de  $R|x,y,\theta$  est de classe  $C^3$  au moins. La moyenne individuelle  $m(x,y,\theta) = E(R|x,y,\theta)$ , est aussi de classe  $C^3$  au moins.

La connaissance de toutes ces densités permet de calculer toutes les moyennes que l'on veut, et en particulier, la moyenne individuelle de l'impôt d'un groupe  $\omega \subset \Omega$  de contribuables présentant les caractéristiques  $(x,y)$ . Á  $\omega \subset \Omega$ , on fait correspondre  $\omega \subset \theta(\Omega)$ .

### Définition 2 de l'impôt équitable pour un groupe $\omega$ présentant les caractéristiques $(x,y)$

Comme on ne peut mesurer que la réalisation  $(x,y)$  des critères  $(X,Y)$ , la taxe sera la même pour tout individu caractérisé par  $(x,y)$ , donc pour tout sous-ensemble  $\omega \subset \theta(\Omega)$  ayant ces caractéristiques. On la définit comme l'espérance bayésienne pour  $\forall \omega \subset \theta(\Omega)$ .

Calculons cette l'espérance bayésienne pour  $\forall \omega \subset \theta(\Omega)$ :  $m_\omega(x,y) = E(R|x,y,\theta \in \omega)$

#### Notations :

On allège la notation:  $g(x) = p(x|\theta)$ ,  $h(y) = q(y|\theta)$  et  $d\sigma = g(x)h(y)\mu(\theta)d\theta$ .

#### Lemme 1

Sous l'hypothèse H, l'espérance bayésienne  $m_\omega(x,y)$  s'écrit pour  $\forall \omega \subset \theta(\Omega)$  :

$$m_\omega(x,y) = \int_\omega m(x,y,\theta) d\sigma / \int_\omega d\sigma$$

où  $m(x,y,\theta) = \int_{\mathbb{R}} r\pi(r|x,y,\theta) dr$ .

En raison de l'indépendance de  $X|\theta$  et de  $Y|\theta$ , la densité de  $(\Theta|x,y)$  s'écrit :

$$p(\theta|x,y) = p(x,y,\theta) / p(x,y) = p(x|\theta)q(y|\theta)\mu(\theta) / E_\theta(p(x|\Theta))E_\theta(q(y|\Theta))$$

Les densités marginales  $E_\theta(p(x|\Theta))$  et  $E_\theta(q(y|\Theta))$  disparaissent dans le calcul de la densité  $\pi(r|x,y,\Theta \in \omega)$  de  $(R|x,y,\Theta \in \omega)$  puisque :

$$\pi(r|x,y,\Theta \in \omega) \int_{\theta \in \omega} p(\theta|x,y) d\theta = \int_{\theta \in \omega} \pi(r|x,y,\theta) p(\theta|x,y) d\theta$$

Il en résulte :

$$m_\omega(x,y) \int_\omega d\sigma = \int_\omega \left( \int_{\mathbb{R}} r\pi(r|x,y,\theta) dr \right) d\sigma = \int_\omega m(x,y,\theta) d\sigma$$

On veut maintenant moduler cette taxe moyenne  $m(x,y,\theta)$  de  $R$  selon un barème fixé ne dépendant que de la réalisation  $(x,y)$  de  $(X,Y)$ . On définit alors un barème modulant.

### Définition d'un barème modulant, d'une taxe ou d'un risque modulable

Un barème modulant  $f$  est une fonction non constante de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $f(x,y)$ ,

indépendante de  $\theta$ , de classe  $C^3$  où  $(x,y)$  est la réalisation de deux critères économiques à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Un risque ou une taxe  $R$  est modulable si sa moyenne bayésienne  $m_\omega(x,y)$  n'est fonction de  $(x,y)$  que par l'intermédiaire de  $f$ :  $m_\omega(x,y) = T_\omega(f(x,y))$  pour  $\forall \omega \subset \theta(\Omega)$ .

### Exemples

Dans le cas d'une taxe, on peut moduler son montant selon le revenu ou la faire varier selon d'autres critères économiques. Mathématiquement, on peut :

- prendre dans le cas d'une seule statistique modulante,  $f(x) = kx$  avec  $k$  fixé ;

- ou écrire avec deux statistiques  $f(x,y) = x + y$  ;

- ou introduire des récurrences dans le temps  $f_n(x,y) = x_n + g(x_{n-1})$

*L'hypothèse de modulation de l'espérance bayésienne induit des conditions très fortes sur la fonction modulante  $f$  et sur les densités  $p(x|\theta)$  et  $q(y|\theta)$  des critères de modulation.*

### III- Propriétés des espérances bayésiennes modulables

Pour alléger la notation, on pose  $m(\theta) = m(x,y,\theta)$ ,  $m'_x = \partial m(\theta) / \partial x$  et  $m'_y = \partial m(\theta) / \partial y$ .

Soient les fonctions:  $\psi(\theta) = (f'_x)^{-1}(g'_x/g) - (f'_y)^{-1}(h'_y/h)$  et  $\varphi(\theta) = (f'_x)^{-1}m'_x - (f'_y)^{-1}m'_y$ , qui sont de classe  $C^2$  au moins par rapport à  $(x,y,\theta)$  et définies  $\sigma$  p.p.

#### Lemme 2

*Sous H, si l'espérance bayésienne est modulable, on a la relation :*

$$F = \iint_{\omega \times \omega} \{m(\theta)[\psi(\theta_1) - \psi(\theta)] + \varphi(\theta)\} d\sigma(\theta) \otimes d\sigma(\theta_1) = 0$$

*pour tout sous-ensemble  $\forall \omega \subset \theta(\Omega)$ .*

- Si  $m_\omega(x,y) = T_\omega(f)$  est modulée par  $f$ , elle doit rester constante lorsque  $f$  est constante. Cela implique :

$$dT_\omega(f) = \partial m_\omega(x,y) / \partial x dx + \partial m_\omega(x,y) / \partial y dy = 0 \text{ si } df = f'_x dx + f'_y dy = 0$$

$$\text{et le déterminant doit être nul : } \Delta = \partial m_\omega(x,y) / \partial x f'_y - \partial m_\omega(x,y) / \partial y f'_x = 0$$

Or, la dérivée de  $d\sigma$  par rapport à  $x$  s'écrit :  $d(d\sigma) / dx = g'(x)h(y)\mu(\theta)d\theta = (g'_x/g)d\sigma$ , et celle par rapport à  $y$  :  $d(d\sigma) / dy = (h'_y/h)d\sigma$ . On obtient:

$$\left( \int_\omega d\sigma(\theta_1) \right)^2 dT_\omega(f) / dx = \int_\omega (m'_x + m(\theta)(g'_x/g)) d\sigma(\theta) \int_\omega d\sigma(\theta_1) - \int_\omega m(\theta) d\sigma(\theta) \int_\omega (g'_x/g) d\sigma(\theta_1)$$

$$\left( \int_\omega d\sigma(\theta_1) \right)^2 dT_\omega(f) / dy = \int_\omega (m'_y + m(\theta)(h'_y/h)) d\sigma(\theta) \int_\omega d\sigma(\theta_1) - \int_\omega m(\theta) d\sigma(\theta) \int_\omega (h'_y/h) d\sigma(\theta_1)$$

Le déterminant  $\Delta$  vérifie alors la condition :

$$(f'_x)^{-1} \left\{ \int_\omega (m'_x + m(\theta)(g'_x/g)) d\sigma(\theta) \int_\omega d\sigma(\theta_1) - \int_\omega m(\theta) d\sigma(\theta) \int_\omega (g'_x/g) d\sigma(\theta_1) \right\} =$$

$$(f'_y)^{-1} \left\{ \int_\omega (m'_y + m(\theta)(h'_y/h)) d\sigma(\theta) \int_\omega d\sigma(\theta_1) - \int_\omega m(\theta) d\sigma(\theta) \int_\omega (h'_y/h) d\sigma(\theta_1) \right\}$$

Ce que l'on peut écrire:

$$\int_\omega (\varphi(\theta) + m(\theta)\psi(\theta)) d\sigma(\theta) \int_\omega d\sigma(\theta_1) - \int_\omega m(\theta) d\sigma(\theta) \int_\omega \psi(\theta_1) d\sigma(\theta_1) = 0$$

On a le résultat avec Fubini (voir [6] p269). Ensuite, on fera appel au lemme suivant :

#### Lemme 3

*Soient  $f_1(\theta), f_2(\theta), g_1(\theta)$  et  $g_2(\theta)$  quatre fonctions réelles de  $\theta$  de classe  $C^0$  au moins et  $w(u,v) = f_1(u)g_2(v) - f_2(v)g_1(u)$ . Soit un réel  $\lambda$  indépendant de  $\theta$ . Si l'on a :*

$$\iint_{\omega \times \omega} w(u,v) d\sigma(u) \otimes d\sigma(v) = 0 \text{ pour } \forall \omega \subset \theta(\Omega),$$

*Alors, l'une des deux conditions est vérifiée  $\sigma$  p.p.:*

$$- f_1 = \lambda f_2 \text{ et } g_1 = \lambda g_2$$

$$- f_1 = \lambda g_1 \text{ et } f_2 = \lambda g_2$$

$w(u,v)$  est une fonction de  $\theta(\Omega) \times \theta(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^0$ . Si, pour  $\forall \omega \subset \theta(\Omega)$ :

$$\iint_{\omega \times \omega} w(u,v) d\sigma(u) d\sigma(v) = 0$$

alors  $w(u,v)$  doit être antisymétrique  $\sigma \otimes \sigma$  p.p. (voir [6] p254). Mais :

$h(u,v) = w(u,v)(g_2(v)g_1(u))^{-1} = f_1(u)/g_1(u) - f_2(v)/g_2(v)$  est aussi antisymétrique puisque :  
 $h(u,v) + h(v,u) = h(u,u) + h(v,v) = 0$  car  $w(u,u) = w(v,v) = 0$  par continuité de  $w$ . Comme  $w$  est antisymétrique :  $h(v,u) + h(u,v) = (g_2(v)g_1(u) - g_2(u)g_1(v))w(u,v) = 0$ . D'où, le résultat.

#### IV- Théorème

Sous l'hypothèse H, si  $m_\theta(x,y)$  est modulée par le barème  $f(x,y)$  indépendant de  $\theta$ , et si  $m(\theta)$  n'est pas isotrope, il existe deux fonctions réelles  $a(x)$  et  $b(y)$  indépendantes de  $\theta$ , de classe  $C^3$ , telles que :

1- Les densités de  $(X|Y|\theta)$  sont de type exponentiel :

$$p(x|\theta) = \alpha(\theta)r(x)\exp(c(\theta)a(x)) \text{ et } q(y|\theta) = \beta(\theta)s(y)\exp(c(\theta)b(y))$$

2- La moyenne individuelle est de la forme :  $m(\theta,x,y) = m_\theta(x,y) = T_\theta(a(x)+b(y))$  et tout se passe comme si  $f$  est semi linéaire :  $f(x,y) = a(x) + b(y)$ .

Autrement dit, les statistiques  $a(x)$  et  $b(y)$  doivent être exhaustives.

1-- En appliquant le lemme 3 à la formule  $F=0$  du lemme 2, on obtient soit  $m(\theta) = \lambda$ , soit  $\psi(\theta) = \lambda$  avec  $\lambda$  indépendant de  $\theta$ .

Si  $m(\theta)$  n'est pas isotrope, alors  $\psi(\theta) = \lambda$ . On en déduit :  $\varphi(\theta) = 0$ .

- Dérivons l'égalité  $\psi = \lambda$  par rapport à  $\theta$ . Puisque  $\lambda$  et  $f$  ne dépendent pas de  $\theta$ , on a :

$$\partial\psi/\partial\theta = (f'_x)^{-1}\partial(g'_x/g)/\partial\theta - (f'_y)^{-1}\partial(h'_y/h)/\partial\theta = 0$$

Si l'on note  $g_1 = \partial(\log g)/\partial\theta$  et  $h_1 = \partial(\log h)/\partial\theta$ , on a alors  $g_1'_x = \partial(g'_x/g)/\partial\theta$  et  $h_1'_y = \partial(h'_y/h)/\partial\theta$  qui sont alors toutes deux de classe  $C^1$  (sauf sur l'ensemble des zéros de  $(g,h)$  de mesure nulle pour  $\sigma$ ). L'équation précédente s'écrit :

$$\partial\psi/\partial\theta = (f'_x)^{-1}g_1'_x - (f'_y)^{-1}h_1'_y = 0.$$

Faisons le changement de variables :  $(x,y)$  devient  $(g_1, h_1)$ . On obtient  $\partial f/\partial g_1 = \partial f/\partial h_1$ , EDP connue sous le nom « d'équation de transport ». Sa solution est de la forme :

$$f(x,y) = t(g_1 + h_1)$$

où  $t$  est choisi de classe  $C^3$  puisque  $f$  est de classe  $C^3$ . On pose :  $u = g_1 + h_1$  de classe  $C^3$ , et l'on écrit,  $f = t(u, \theta)$ .

- Si  $f$  ne dépend pas de  $\theta$ ,  $f'_x = t'_u u'_x$  et  $f'_y = t'_u u'_y$  ne dépendent pas de  $\theta$  :

$$df'_x/d\theta = (dt'_u/d\theta)u'_x + t'_u u''_{\theta,x} = 0$$

$$df'_y/d\theta = (dt'_u/d\theta)u'_y + t'_u u''_{\theta,y} = 0$$

Ce système linéaire a une solution  $\{(dt'_u/d\theta), t'_u\}$  non nulle puisque  $f$  n'est pas constante ( $t'_u \neq 0$ ) et le déterminant doit être nul :  $u'_y u''_{\theta,x} - u'_x u''_{\theta,y} = 0$ . Ce qui s'écrit :

$$E = (u'_x)^{-1} u''_{\theta,x} = (u'_y)^{-1} u''_{\theta,y}. \text{ Or, } (u'_x)^{-1} u''_{\theta,x} = (g_1'_x)^{-1} g_1''_{\theta,x} \text{ ne dépend que de } x \text{ et } \theta.$$

De même,  $(u'_y)^{-1} u''_{\theta,y} = (h_1'_y)^{-1} h_1''_{\theta,y}$  ne dépend que de  $y$  et  $\theta$ .

$E$  reste alors constante pour tout  $(x, y)$ . On peut écrire :

$$(g_1' x)^{-1} g_1''_{\theta, x} = (h_1' y)^{-1} h_1''_{\theta, y} = k'_\theta / k$$

où  $k'_\theta / k$  est une fonction arbitraire de  $\theta$  qui ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ .

On intègre séparément ces deux équations, l'une relative à  $g_1$ , l'autre à  $h_1$ , pour obtenir avec les deux fonctions réelles  $a(x)$  et  $b(y)$  indépendantes de  $\theta$  :  $g_1(x) = k(\theta)a(x) + k_1(\theta)$ ,  $h_1(y) = k(\theta)b(y) + k_2(\theta)$ . Si l'on note  $k(\theta) = c'(\theta)$  avec  $k_1(\theta) = \partial \log(\alpha(\theta)) / \partial \theta$ , on aura :

$$g_1(x) = \partial \log(g) / \partial \theta = c'(\theta)a(x) + \partial \log(\alpha(\theta)) / \partial \theta.$$

Les densités  $g(x) = p(x|\theta)$  et  $h(y) = q(y|\theta)$  sont respectivement de la forme :

$$p(x|\theta) = \alpha(\theta)r(x)\exp(c(\theta)a(x)),$$

$$q(y|\theta) = \beta(\theta)s(y)\exp(c(\theta)b(y)),$$

avec la même constante  $c(\theta)$  commune ; les autres fonctions sont arbitraires.

2--  $\varphi(\theta) = 0$  implique  $(f'_x)^{-1}m'_x = (f'_y)^{-1}m'_y$ , ce qui s'écrit :  $\partial m / \partial a = \partial m / \partial b$ . Par changement de variables, on a encore l'équation de transport cohérente avec les précédents calculs. La prime (ici la taxe) modulable est :  $m_\omega(x, y) = T_\omega(a(x) + b(y))$ . Tout se passe comme si  $f$  est semi linéaire :  $f(x, y) = a(x) + b(y)$ .

On a alors une réciproque du résultat de Jewell [5] qui dit que si les densités sont de type exponentiel, l'espérance est bayésienne.

*Les lois de probabilités doivent appartenir à la famille exponentielle. La fonction modulante doit alors être une statistique exhaustive semi linéaire. La moyenne individuelle du risque doit être modulée par  $a(x) + b(y)$ .*

## V- Examen de l'hypothèse H

- Si  $X|\theta$  et  $Y|\theta$  ne sont plus indépendants : On obtient un résultat plus faible, mais qui semble à première vue peu intéressant.

- La prise en compte d'un plus grand nombre de critères ne modifie ni les raisonnements ni les résultats. En revanche, si l'on ne prend plus qu'un seul critère  $X|\theta$  au lieu de deux, la méthode ne fonctionne plus puisque l'on ne peut plus construire la fonction  $F = 0$ . C'est en quelque sorte normal. On ne peut plus éliminer  $dT_\omega(f) / df \int_\omega d\sigma(\theta_1)$  en dérivant  $T_\omega(f)$  par rapport à  $y$  pour obtenir le lemme 2. On devrait pouvoir alors surmonter cet obstacle en créant artificiellement une v.a.  $Y|\theta$  tirée dans une loi exponentielle et ainsi obtenir le résultat en dimension 1 pour  $X|\theta$ .

- La méthode utilisée ne donne aucune information sur la loi de  $R|(x, y, \theta)$  en dehors du fait que sa moyenne doit dépendre de la statistique exhaustive.

## VI - Conclusion

Naturellement, l'analyse présentée dans cet article apporte des réponses difficiles à réaliser aux questions que l'on pourrait se poser : comment rendre la fiscalité plus équitable ? Comme certains théorèmes négatifs que l'on rencontre en science économique [1], ce théorème restrictif pointe les difficultés que l'on rencontre en fiscalité.

## 1- Conséquences en politique économique et sociale

### Une condition d'exhaustivité difficile à remplir

- L'impôt sur le revenu s'adresse directement à chaque individu. Il s'agit d'un impôt particulièrement sensible, marqué par ce défaut majeur de ne pas être une statistique exhaustive. Se rendant compte empiriquement de cette difficulté, les législateurs ont multiplié les cas particuliers pour pallier cet inconvénient. Il suffit, pour s'en convaincre, de consulter le petit livre qui accompagne chaque année toute déclaration sur le revenu afin de la remplir correctement ou d'examiner le volume de la législation fiscale qui accompagne ce sujet.

- Considérons la TVA, impôt sur la consommation par excellence. Si globalement la consommation était une statistique exhaustive du comportement économique de la population, on aurait une bonne base d'imposition. Mais la consommation n'est pas le seul critère économique du comportement de tous les éléments d'une population.

- Plus généralement, en dépassant le strict cadre de la fiscalité, cette difficulté apparaît en économie politique chaque fois que l'on veut établir un barème alors que l'on sait pertinemment que l'on ne dispose pas de statistique exhaustive. Si l'on veut aboutir à une sorte de compromis à partir d'un petit nombre de critères, il est primordial d'établir des nuances et de tenir compte des principaux cas particuliers pour qu'il soit accepté.

### Les inégalités et les disparités engendrées

On voudrait avancer prudemment ici quelques autres conséquences possibles :

- Outre les inégalités potentielles dans la redistribution des recettes fiscales que l'on a signalées, ne risque-t-on pas de créer des inégalités au moment de l'imposition, même en présence de statistiques exhaustives ? Cela est particulièrement vrai lorsqu'un État, ou une quelconque instance supérieure, impose un barème unique à des entités qui gèrent des sous-populations présentant des risques différents. Il s'agit d'une politique de redistribution ordonnée par des pouvoirs publics centraux, mais gérée localement par des organismes. Ces organismes peuvent être l'État lui-même, des communes, des caisses d'assurance ou de bien d'autres collectivités, même plusieurs États dans le cas d'une fédération.

En ce cas, des organismes  $i \in I$ , en nombres finis, se partagent la population  $\Omega$  en sous-ensembles  $\omega_i \subset \Omega$ , les  $\omega_i$  représentent un portefeuille de risques  $\sum_{i \in I} \omega_i = \Omega$  différents. Si  $\omega_i$  ne reçoit pas en moyenne  $m_{\omega_i}(x, y)$ , l'organisme  $i \in I$  sera avantagé ou pénalisé par la redistribution.

- Une mauvaise répartition géographique ou sociale des risques et des critères économiques engendre de graves distorsions entre les organismes s'ils ne réagissent pas [10]. Pourtant, les inégalités régionales ou urbaines semblent parfois acceptées avec une certaine résignation [4].

- Quand des experts imposent à des populations certains barèmes, surtout dans des situations critiques, ont-ils vraiment vérifié que les critères économiques retenus sont des statistiques exhaustives vérifiant la loi exponentielle ? Il est parfois permis d'en douter.

## 2- Extension statistique

On a présenté cette étude dans un cadre économique dont on aurait pu se passer. En fait, le résultat est général pour toute statistique bayésienne : si l'espérance bayésienne est modulable par une fonction ne dépendant a priori que d'un petit nombre de statistiques, alors ces statistiques utilisées dans cette fonction modulante doivent être exhaustives et leur loi de type exponentiel. Ce qui met en évidence le lien étroit qui existe entre analyse bayésienne, barèmes modulants et famille exponentielle.

## Références

- [1] Arrow K.J. *Rational choice functions and ordering*. *Economica*. New series, Vol.26, n°102, (1959)
- [2] Bühlmann H. *Mathematical methods in risk theory*. NY. Springer-Verlag. (1970)
- [3] Cirier G. *Contribution à l'étude du bonus-malus*. Mémoire de l'IAF. Paris. (1987)
- [4] Cour des Comptes. *Situation et perspectives financières des départements*. Rapport. (2013)
- [5] Jewel W. *Credible means are exact Bayesian for exponential families*. *Astin Bull.*8. (1974)
- [6] Lang S. *Real analysis*. Add. Wesley, (1973)
- [7] Madiès T., Le Cacheux J., Réjane Hugouneq R. *Diversité des fiscalités européennes et risques de concurrence fiscale*, *Revue de l'OFCE*, Vol. 70 (1999) pp. 63-109
- [8] Obamacare : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Patient\\_Protection\\_and\\_Affordable\\_Care\\_Act](http://fr.wikipedia.org/wiki/Patient_Protection_and_Affordable_Care_Act)
- [9] Représentation permanente auprès de l'UE : <http://www.rpfFrance.eu/fiscalite,2029;> (19/12/2012)
- [10] Thatcher M. *Discours de Dublin* du 30 /11/1979