



HAL
open science

Points algébriques de degré au plus 14 sur la septique de Fermat

Moussa Fall, Moustapha Camara, Oumar Sall

► **To cite this version:**

Moussa Fall, Moustapha Camara, Oumar Sall. Points algébriques de degré au plus 14 sur la septique de Fermat. 2022. hal-03602841

HAL Id: hal-03602841

<https://hal.science/hal-03602841>

Preprint submitted on 9 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Points algébriques de degré au plus 14 sur la septique de Fermat

¹Moussa Fall, ²Moustapha Camara, ³Oumar Sall

Laboratoire de Mathématiques et Applications (L.M.A.)
U.F.R. des Sciences et Technologies
Université Assane Seck de Ziguinchor, Sénégal

E-mails : ¹moussafalls@yahoo.fr ²m.camaraedu@gmail.com ³oumarsfr@yahoo.fr

Résumé. Nous donnons une description géométrique des points algébriques de degré au plus 14 sur \mathbb{Q} sur la septique de Fermat.

Mots clés. Points algébriques · Conjugués de Galois · Groupe de Mordell-Weil · Diviseur · Systèmes linéaires

1 Introduction

Soit \mathcal{C} une courbe plane lisse de degré d définie sur \mathbb{Q} . Le degré d'un point algébrique sur \mathcal{C} est le degré de son corps de définition sur \mathbb{Q} . Un théorème de Debarre et Klassen ([3]) affirme que

- (1) si $d \geq 7$ alors, l'ensemble des points algébriques sur \mathcal{C} de degré au plus $d - 2$ sur \mathbb{Q} est fini.
- (2) si $d \geq 8$ alors, à un nombre fini d'exceptions près, l'ensemble des points algébriques sur \mathcal{C} de degré au plus $d - 1$ sur \mathbb{Q} se présente comme l'intersection de \mathcal{C} avec une droite définie sur \mathbb{Q} passant par un point rationnel de \mathcal{C} .

Notons F_7 la septique de Fermat, i.e., la courbe plane lisse de degré 7 d'équation projective

$$F_7 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}}) : X^7 + Y^7 + Z^7 = 0\}.$$

On désigne par J_7 sa jacobienne et son genre est égal à 15. D'après (1), l'ensemble des points algébriques sur F_7 de degré au plus 5 sur \mathbb{Q} est fini. Tzermias ([9]) a décrit complètement cet ensemble. L'étude des points de degré ≥ 6 est plus difficile puisqu'il s'agit de décrire une infinité de solutions. Il existe exactement cinq points algébriques de degré au plus 5 sur F_7 , à savoir

$$a = (0, -1, 1), b = (-1, 0, 1), \infty = (-1, 1, 0), P = (-\eta, -\bar{\eta}, 1), \bar{P} = (-\bar{\eta}, -\eta, 1)$$

où η est une racine primitive 6^{ième} de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\bar{\eta}$ est le complexe conjugué de η . Sall ([7], [8]) a poussé plus loin cette description en déterminant les points algébriques sur F_7 de degré au plus 10 sur \mathbb{Q} , et il établit le théorème suivant :

Théorème 1

1. Les points algébriques sur F_7 de degré 6 sur \mathbb{Q} sont obtenus en coupant F_7 par une droite définie sur \mathbb{Q} passant par a, b ou ∞ .
2. Les points algébriques sur F_7 de degré 7 sur \mathbb{Q} sont obtenus comme intersection de F_7 avec une droite définie sur \mathbb{Q} .
3. Il n'existe pas sur F_7 de points algébriques de degré 8 ou 9 sur \mathbb{Q} .
4. Les points algébriques sur F_7 de degré 10 sur \mathbb{Q} sont obtenus comme intersection résiduelle de F_7 avec une conique \mathcal{C} définie sur \mathbb{Q} ayant un point de contact d'ordre 2 en $\{a, b\}$ ou $\{a, \infty\}$ ou $\{b, \infty\}$, i.e., $\mathcal{C}.F_7 = R_1 + \dots + R_{10} + 2Q_1 + 2Q_2$ avec $Q_1 \neq Q_2 \in \{a, b, \infty\}$.

Nous proposons dans cet article de donner une description géométrique des points algébriques sur F_7 de degré au plus 14 sur \mathbb{Q} . Notre résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 2 Soit $R \in F_7(\overline{\mathbb{Q}})$ de degré d sur \mathbb{Q} avec $11 \leq d \leq 14$. Soient R_1, \dots, R_d les conjugués de Galois de R . Alors, il existe une courbe algébrique plane Γ_m de degré m définie sur \mathbb{Q} telle que

1. Les points algébriques sur F_7 de degré 11 sont obtenus par
 - (i) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{11} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \neq m_j \in \{0, 1, 2\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 3$
2. Les points algébriques sur F_7 de degré 12 sont obtenus par
 - (i) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{0, 1, 2\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 2$
 - (ii) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + P + \overline{P}$
 - (iii) $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + 3a + 3b + 3\infty$
 - (iv) $\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + 8P + 8\overline{P}$
3. Les points algébriques sur F_7 de degré 13 sont obtenus par
 - (i) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{13} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{0, 1\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 1$
 - (ii) $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_{13} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{2, 3\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 8$
4. Les points algébriques sur F_7 de degré 14 sont obtenus par
 - (i) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{14}$
 - (ii) $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{1, 2, 3\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 7$
 - (iii) $\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 7P + 7\overline{P}$
 - (iv) $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 8P + 8\overline{P} + 5Q$ avec $Q \in \{a, b, \infty\}$
 - (v) $\Gamma_6.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 8P + 8\overline{P} + 6Q_1 + 6Q_2$ avec $Q_1 \neq Q_2 \in \{a, b, \infty\}$

2 Notions auxiliaires

2.1 Systèmes linéaires

Pour un diviseur D sur F_7 , notons par $l(D)$ la $\overline{\mathbb{Q}}$ -dimension de $\mathcal{L}(D)$, où $\mathcal{L}(D)$ est le $\overline{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel des fonctions rationnelles f définies par

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \overline{\mathbb{Q}}(F_7)^* : \text{div}(f) \geq -D\} \cup \{0\}.$$

Considérons x et y les fonctions rationnelles sur F_7 données par

$$x(X, Y, Z) = \frac{X}{Z} \quad \text{et} \quad y(X, Y, Z) = \frac{Y}{Z}.$$

Soit ε une racine primitive 14^{ième} de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Les points sur F_7 sont donnés par

$$a_j = (0, \varepsilon^{2j+1}, 1), \quad b_j = (\varepsilon^{2j+1}, 0, 1), \quad c_j = (\varepsilon^{2j+1}, 1, 0),$$

pour $0 \leq j \leq 6$. Notons que $a = a_3, b = b_3$ et $\infty = c_3$.

Lemme 1 (Rohrlich, [6]) On a

$$\text{div}(x) = (a_0 + \dots + a_6) - (c_0 + \dots + c_6) \quad \text{et} \quad \text{div}(x + y) = 7\infty - (c_0 + \dots + c_6).$$

Lemme 2

1. Une $\overline{\mathbb{Q}}$ -base pour $\mathcal{L}(28\infty)$ est donnée par les fonctions f_{rs} définies par

$$f_{rs}(x, y) = \frac{x^r}{(x+y)^s}, \quad 0 \leq r \leq s \leq 4.$$

2. Une $\overline{\mathbb{Q}}$ -base pour $\mathcal{L}(42\infty)$ est donnée par les fonctions f_{rs} définies par

$$f_{rs}(x, y) = \frac{x^r}{(x+y)^s}, \quad 0 \leq r \leq s \leq 6.$$

Preuve :

1. En utilisant le Lemme 1, on voit que toutes les fonctions f_{rs} sont dans $\mathcal{L}(28\infty)$. Elles sont aussi linéairement indépendantes, ainsi, puisque $\text{Card}(\{f_{rs}, 0 \leq r \leq s \leq 4\}) = 15$, alors il reste à montrer que $l(28\infty) = 15$. Comme le genre de F_7 est égal à 15, alors 28∞ est un diviseur canonique sur F_7 , donc $l(28\infty) = 15$.
2. Il suffit de calculer la dimension de $\mathcal{L}(42\infty)$ à l'aide du théorème de Riemann-Roch qui dit que $l(d\infty) = d - 14$ dès que $d \geq 29$ puis montrer que toutes les fonctions f_{rs} sont dans $\mathcal{L}(42\infty)$ et qu'elles sont linéairement indépendantes et de cardinal $l(42\infty)$.

□

2.2 Groupe de Mordell-Weil

Dans cette section, nous déterminons la structure du groupe de Mordell-Weil $J_7(\mathbb{Q})$ et que la finitude de ce groupe est essentielle pour ce travail. Pour un entier s avec $1 \leq s \leq 5$, nous notons C_s la courbe d'équation affine $v^7 = u(1-u)^s$ et J_s sa jacobienne. Considérons l'application rationnelle définie par

$$f_s : F_7 \longrightarrow C_s, \quad (x, y) \longmapsto (-x^7, (-1)^{s+1}xy^s).$$

Cette application induit $f_s : J_7 \longrightarrow J_s$ et son dual $f_s^* : J_s \longrightarrow J_7$. Soient A et B les automorphismes de F_7 donnés par

$$A(X, Y, Z) = (\zeta X, Y, Z) \quad \text{et} \quad B(X, Y, Z) = (X, \zeta Y, Z)$$

où ζ est une racine primitive 7^{ième} de l'unité telle que $\varepsilon^2 = \zeta$. Puisque, $f_s : F_7 \longrightarrow C_s$ est un revêtement Galoisien dont le groupe de Galois est engendré par $A^{-s}B$, alors pour un diviseur D de degré zéro sur F_7 , on a

$$f_s^* \circ f_s(D) = \sum_{j=0}^6 (A^{-s}B)^j(D).$$

Il est bien connu (voir [2], [4]) que ces applications induisent une isogénie définie sur \mathbb{Q}

$$f = \prod_{s=1}^5 f_s : J_7 \longrightarrow \prod_{s=1}^5 J_s$$

et son dual

$$f^* = \sum_{s=1}^5 f_s^* : \prod_{s=1}^5 J_s \longrightarrow J_7$$

telles que $f^* \circ f = 7$ sur J_7 .

Lemme 3 $J_7(\mathbb{Q})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$.

Preuve : D'après Faddeev ([2]), $J_7(\mathbb{Q})$ est fini. Dans [9], Tzermias conclut les deux faits suivants :

- (i) pour un nombre premier $l \neq 2, 7$, le groupe $J_7[l^\infty](\mathbb{Q})$ est trivial.
- (ii) le groupe $J_7[7^\infty](\mathbb{Q})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$ et est engendré par $[a - \infty]$ et $[b - \infty]$.

Il nous reste à calculer la partie 2–primaire de $J_7(\mathbb{Q})$. Comme il existe une isogénie $f : J_7 \longrightarrow \prod_{s=1}^5 J_s$, alors cela revient à calculer la partie 2–primaire de chaque $J_s(\mathbb{Q})$. Or un résultat de Gross et Rohrlich dans [1] affirme que

$$J_s(\mathbb{Q})_{\text{tors}} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } 1 = s^3 = (6-s)^3 \pmod{7} \\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}$$

mais les seuls $s \leq 5$ tels que $1 = s^3 = (6-s)^3 \pmod{7}$ sont $s = 2$ ou $s = 4$, ce qui donne deux copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et ainsi

$$J_7[2^\infty](\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

□

Posons maintenant $x_0 = -P - \bar{P} + 2\infty$, $x_1 = f_4^* \circ f_4(x_0)$ et $x_2 = f_2^* \circ f_2(x_0)$. En se référant aux travaux Gross et Rohrlich ([1]) et de Sall ([7], [8]), on a les propriétés suivantes :

Propriétés 1

- (P1) x_0 et x_1 sont d'ordre 14 et 2 respectivement.
- (P2) $f_s(a - \infty)$ et $f_s(b - \infty)$ sont d'ordre 7.
- (P3) $f_4^* \circ f_4(x_1) = 7x_1$ et $f_2^* \circ f_2(x_2) = 7x_2$.
- (P4) $J_s(\mathbb{Q})_{\text{tors}} \subseteq \ker(f_s^*)$.
- (P5) $\ker(f_s^* \circ f_s) \subseteq J_7[7]$.

En combinant le Lemme 3 et les propriétés (P1), (P3) et (P5), on a le corollaire suivant :

Corollaire 1 On a $J_7(\mathbb{Q}) = \left\{ m[\infty - a] + n[\infty - b] + kx_0 + lx_1, \text{ avec } 0 \leq m, n \leq 6 \text{ et } 0 \leq k, l \leq 1 \right\}$
ou bien $J_7(\mathbb{Q}) = \left\{ m[\infty - a] + n[\infty - b] + kx_0 + lx_2, \text{ avec } 0 \leq m, n \leq 6 \text{ et } 0 \leq k, l \leq 1 \right\}$.

2.3 Lemmes de contact

Lemme 4 Soient L_a, L_b et L_∞ les droites tangentes à F_7 en a, b, ∞ respectivement.

- (i) Les droites L_a, L_b, L_∞ ont un point de contact d'ordre 7 avec F_7 en a, b, ∞ respectivement.
- (ii) Si une courbe algébrique plane Γ de degré ≤ 6 a un point de contact d'ordre $> \deg(\Gamma)$ avec F_7 en a, b ou ∞ , alors Γ est réductible et contient L_a, L_b ou L_∞ respectivement.

Preuve :

- (i) En affine, on a $F_7 : x^7 + y^7 + 1 = 0$. La droite tangente à F_7 en a est $L_a : y + 1 = 0$. Et on voit que a est le seul point d'intersection de la droite L_a et la courbe F_7 . Ainsi, par le théoème de Bézout, on a

$$L_a \cdot F_7 = (\deg L_a \times \deg F_7)a = 7a = \text{mult}_a(L_a \cap F_7)a.$$

On montre de même pour L_b et L_∞ .

- (ii) Soient H, G et F trois courbes planes. Supposons que H est irréductible et sans composante commune avec G ni F . Soit \mathcal{O} un point lisse de H . Alors, par le Lemme 2.3.2 dans [5], on a

$$\min\{\text{mult}_{\mathcal{O}}(H \cap F), \text{mult}_{\mathcal{O}}(H \cap G)\} \leq \text{mult}_{\mathcal{O}}(F \cap G).$$

Ainsi, pour obtenir le résultat souhaité, il suffit de prendre $\mathcal{O} \in \{a, b, \infty\}$, $H = L_{\mathcal{O}}$, $G = \Gamma$, $F = F_7$ en tenant compte de (i). □

Lemme 5 Soit L la droite d'équation $X + Y + Z = 0$. Alors $L \cdot F_7 = a + b + \infty + 2P + 2\bar{P}$.

Preuve : En affine, on a $L : x + y + 1 = 0$ et $F_7 : x^7 + y^7 + 1 = 0$. D'après Gross et Rohrlich ([1]), on a $L \cap F_7 = \{a, b, \infty, P, \bar{P}\}$; il existe alors des entiers strictement positifs n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 tels que $L \cdot F_7 = n_1a + n_2b + n_3\infty + n_4P + n_5\bar{P}$ avec $\sum_{i=1}^5 n_i = 7$. Comme P et \bar{P} sont des conjugués, on doit avoir $n_4 = n_5$. La tangente à F_7 au point P est $T_P : x + y + 1 = 0$, par conséquent $n_4 \geq 2$; donc $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ et $n_4 = n_5 = 2$. □

3 Preuve du théorème 2

Soit R un point algébrique sur F_7 de degré $d \leq 14$ sur \mathbb{Q} ; si $d \leq 5$ ces points sont décrits par Tzermias ([9]); si $6 \leq d \leq 10$ ces points sont décrits par le théorème 1, ainsi supposons que $11 \leq d \leq 14$. Soit R_1, \dots, R_d les conjugués de Galois de R . Alors, aucun des R_i n'est égal aux points algébriques sur F_7 de degré $\leq d - 1$ sur \mathbb{Q} . On pose $t = [R_1 + \dots + R_d - d\infty] \in J_7(\mathbb{Q})$. D'après le corollaire, on peut considérer les quatre cas suivants :

1^{er} cas : $t = m[\infty - a] + n[\infty - b]$ avec $0 \leq m, n \leq 6$.

Alors, $[R_1 + \dots + R_d + ma + nb - (d + m + n)\infty] = 0$. Puisque $d + m + n \leq 28$, le Lemme 2 entraîne l'existence d'un polynôme quartique $f(x, y)$ tel que

$$\operatorname{div}(f(x, y)/(x + y)^4) = R_1 + \dots + R_d + ma + nb - (d + m + n)\infty.$$

Ainsi, par le Lemme 1,

$$\operatorname{div}(f(x, y)) = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + (28 - d - m - n)\infty - 4(c_0 + \dots + c_6).$$

Comme $f(x, y)$ est le quotient d'un polynôme quartique homogène par Z^4 , d'où, puisque F_7 est une courbe plane lisse, il existe alors une quartique Γ_4 telle que $\operatorname{div}(f(x, y)) = \Gamma_4.F_7 - 4(c_0 + \dots + c_6)$. Par conséquent,

$$\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + (28 - d - m - n)\infty.$$

Si $m \geq 5$ alors, par le Lemme 4, Γ_4 est réductible et contient L_a . De plus, puisque $m \leq 6$, un des R_i est égal à a , ce qui est absurde. De même, on ne doit pas avoir $n \geq 5$. D'où, $0 \leq m, n \leq 4$, donc $6 \leq 28 - d - m - n \leq 17$. Ainsi, par le Lemme 4, Γ_4 contient L_∞ , il existe une cubique Γ_3 telle que

$$\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + (21 - d - m - n)\infty.$$

On doit avoir $0 \leq m, n \leq 3$ et donc $1 \leq 21 - d - m - n \leq 10$. La somme des coefficients de a, b et ∞ est égal $21 - d$.

1. Si $1 \leq 21 - d - m - n \leq 3$, alors on a
 - (a) $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + 3a + 3b + 3\infty$
 - (b) $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_{13} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{2, 3\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 8$
 - (c) $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{1, 2, 3\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 7$
2. Si $21 - d - m - n \geq 4$, alors Γ_3 contient L_∞ , il existe une conique Γ_2 telle que

$$\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + (14 - d - m - n)\infty.$$

On doit avoir $0 \leq m, n \leq 2$ et $0 \leq 14 - d - m - n \leq 2$. La somme des coefficients de a, b et ∞ est égal $14 - d$. Ainsi, on a

- (a) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{11} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \neq m_j \in \{0, 1, 2\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 3$
- (b) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{0, 1, 2\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 2$
- (c) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{13} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{0, 1\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 1$
- (d) $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{14}$

2^{er} cas : $t = m[\infty - a] + n[\infty - b] + x_0$ avec $0 \leq m, n \leq 6$.

Alors, $[R_1 + \dots + R_d + ma + nb + P + \bar{P} - (d + m + n + 2)\infty] = 0$. Puisque $d + m + n + 2 \leq 28$, les Lemmes 2 et 1 assurent l'existence un polynôme quartique $f(x, y)$ tel que

$$\operatorname{div}(f(x, y)) = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + P + \bar{P} + (26 - d - m - n)\infty - 4(c_0 + \dots + c_6).$$

La courbe plane F_7 étant lisse, il existe alors une quartique Γ_4 telle que $\operatorname{div}(f(x, y)) = \Gamma_4.F_7 - 4(c_0 + \dots + c_6)$. Par suite,

$$\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + P + \bar{P} + (26 - d - m - n)\infty.$$

On doit avoir $0 \leq m, n \leq 4$ et donc $4 \leq 26 - d - m - n \leq 15$.

1. Si $26 - d - m - n = 4$, i.e., $d = 14, m = n = 4$ alors $\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 4a + 4b + P + \bar{P} + 4\infty$. On voit que Γ_4 contient L , ce qui est absurde sinon un des R_i serait égal à P ou \bar{P} .
2. Si $26 - d - m - n \geq 5$, alors Γ_4 contient L_∞ , il existe une cubique Γ_3 telle que

$$\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + P + \bar{P} + (19 - d - m - n)\infty.$$

On doit avoir $0 \leq m, n \leq 3$ et $0 \leq 19 - d - m - n \leq 8$.

- (a) Si $m = n = 0$, alors $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_d + P + \bar{P} + (19-d)\infty$. On a $19-d \geq 5$, donc Γ_3 contient L_∞ , il existe une conique Γ_2 telle que $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_d + P + \bar{P} + (12-d)\infty$. Ainsi, on a $d = 12$, d'où $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + P + \bar{P}$.
- (b) Si $m \neq 0$ ou $n \neq 0$, alors deux au moins des coefficients de a , b et ∞ sont non nuls, donc Γ_3 contient L , ce qui contredit nos hypothèses sur les R_i .

3^{er} cas : $t = m[\infty - a] + n[\infty - b] + kx_0 + x_1$ avec $0 \leq m, n \leq 6$ et $0 \leq k \leq 1$.

Alors, $[R_1 + \dots + R_d - d\infty] = [m(\infty - a) + n(\infty - b) + kx_0 + x_1]$. En composant par $f_4^* \circ f_4$ puis en utilisant les propriétés (P2), (P3), (P4) et (P5), on trouve

$$[R_1 + \dots + R_d + ma + nb + (7+k)P + (7+k)\bar{P} - (14+d+m+n+2k)\infty] = 0.$$

Puisque, $14 + d + m + n + 2k \leq 42$, les Lemmes 2 et 1 assurent l'existence un polynôme sextique $f(x, y)$ tel que

$$\text{div}(f(x, y)) = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (28-d-m-n-2k)\infty - 6(c_0 + \dots + c_6).$$

La courbe plane F_7 étant lisse, donc il existe une sextique Γ_6 telle que $\text{div}(f(x, y)) = \Gamma_6.F_7 - 6(c_0 + \dots + c_6)$. Par suite,

$$\Gamma_6.F_7 = R_1 + \dots + R_d + ma + nb + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (28-d-m-n-2k)\infty.$$

1. Si $m = n = 0$, alors $\Gamma_6.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (28-d-2k)\infty$ avec $12 \leq 28-d-2k \leq 17$. La courbe Γ_6 contient L_∞ , il existe une quintique Γ_5 telle que $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (21-d-2k)\infty$ avec $5 \leq 21-d-2k \leq 10$.
 - (a) Si $21-d-2k = 5$, i.e., $d = 14$ et $k = 1$, alors $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 8P + 8\bar{P} + 5\infty$.
 - (b) Si $21-d-2k \geq 6$, alors Γ_5 contient L_∞ , il existe une quartique Γ_4 telle que $\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (14-d-2k)\infty$ avec $0 \leq 14-d-2k \leq 3$. On voit que le coefficient de ∞ doit être nul sinon un des R_i devrait être égal à a ou b . Donc, $14-d-2k = 0$, i.e., on a $(d = 14$ et $k = 0)$ ou $(d = 12$ et $k = 1)$; par conséquent, $\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 7P + 7\bar{P}$ ou $\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + 8P + 8\bar{P}$.
2. Si $m = 0$ et $n \geq 1$ (ou, de façon similaire, on traite $m \geq 1$ et $n = 0$), alors $\Gamma_6.F_7 = R_1 + \dots + R_d + nb + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (28-d-n-2k)\infty$ avec $6 \leq 28-d-n-2k \leq 16$.
 - (a) Si $28-d-n-2k = 6$, i.e., $d = 14$, $n = 6$ et $k = 1$, alors $\Gamma_6.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 6b + 8P + 8\bar{P} + 6\infty$.
 - (b) Si $28-d-n-2k \geq 7$, alors Γ_6 contient L_∞ , il existe une quintique Γ_5 telle que $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_d + nb + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (21-d-n-2k)\infty$ avec $0 \leq 21-d-n-2k \leq 9$. Puisque $n \neq 0$, alors le coefficient de ∞ doit être nul, i.e., $21-d-n-2k = 0$, dans ce cas, on a $(d = 14$, $n = 5$ et $k = 1)$ ou $(d = 13$, $n = 6$ et $k = 1)$; par conséquent, $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 5b + 8P + 8\bar{P}$ ou $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_{13} + 6b + 8P + 8\bar{P}$, ce dernier cas est absurde sinon un des R_i devrait être égal à b .
3. Si $m \geq 1$ et $n \geq 1$
 - (a) Si $m = n = 1$ alors $\Gamma_6.F_7 = R_1 + \dots + R_d + a + b + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (26-d-2k)\infty$. La courbe Γ_6 contient L , il existe une quintique Γ_5 telle que $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (5+k)P + (5+k)\bar{P} + (25-d-2k)\infty$. Comme le coefficient de ∞ est non nul alors Γ_5 contient L ce qui est absurde sinon un des R_i devrait être égal à a ou b .
 - (b) Si $m = 1$ et $n \geq 2$ (ou, de façon similaire, on traite $m \geq 2$ et $n = 1$) alors $\Gamma_6.F_7 = R_1 + \dots + R_d + a + nb + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (26-d-n-2k)\infty$. On voit que Γ_6 contient L , il existe une quintique Γ_5 telle que $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (n-1)b + (7+k)P + (7+k)\bar{P} + (25-d-n-2k)\infty$. Γ_5 contient L ce qui est absurde sinon un des R_i devrait être égal à a .
 - (c) Si $2 \leq m, n \leq 6$ alors
 - ▷ Si $28-d-m-n-2k = 0$, i.e., $d = 14$, $m = n = 6$ et $k = 1$, alors $\Gamma_6.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 6a + 6b + 8P + 8\bar{P}$.

▷ Si $28 - d - m - n - 2k \geq 1$, alors Γ_6 contient L , il existe une quintique Γ_5 telle que $\Gamma_5.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (m-1)a + (n-1)b + (5+k)P + (5+k)\bar{P} + (27-d-m-n-2k)\infty$.

On voit que Γ_5 contient L , il existe une quartique Γ_4 telle que

$$\Gamma_4.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (m-2)a + (n-2)b + (3+k)P + (3+k)\bar{P} + (26-d-m-n-2k)\infty.$$

Puisque, les coefficients de a , b et ∞ ne sont pas simultanément nuls, alors Γ_4 contient L , il existe une cubique Γ_3 telle que

$$\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (m-3)a + (n-3)b + (1+k)P + (1+k)\bar{P} + (25-d-m-n-2k)\infty.$$

On doit avoir $3 \leq m, n \leq 6$ et $0 \leq 25 - d - m - n - 2k \leq 8$.

✓ Si $m = n = 3$, alors $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (1+k)P + (1+k)\bar{P} + (19-d-2k)\infty$ avec $3 \leq 19 - d - 2k \leq 8$.

◊ Si $19 - d - 2k = 3$, i.e., $d = 14$ et $k = 1$, alors $\Gamma_3.F_7 = R_1 + \dots + R_{14} + 2P + 2\bar{P} + 3\infty$. On voit que Γ_3 contient L , ce qui est absurde.

◊ Si $19 - d - 2k \geq 4$, alors Γ_3 contient L_∞ ; il existe une conique Γ_2 telle que $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (1+k)P + (1+k)\bar{P} + (12-d-2k)\infty$. On doit avoir $12 - d - 2k = 0$, i.e., $d = 12$ et $k = 0$ donc $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + P + \bar{P}$.

✓ Si $m \neq 3$ ou $n \neq 3$, on voit que Γ_3 contient L , il existe une conique Γ_2 telle que

$$\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_d + (m-4)a + (n-4)b + (-1+k)P + (-1+k)\bar{P} + (24-d-m-n-2k)\infty.$$

On doit avoir $4 \leq m, n \leq 6$, $k = 1$ et $0 \leq 24 - d - n - 2k \leq 2$. La somme des coefficients de a , b et ∞ est égal $14 - d$. Par conséquent, on a

◊ $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{11} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \neq m_j \in \{0, 1, 2\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 3$

◊ $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{12} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{0, 1, 2\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 2$

◊ $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{13} + m_1a + m_2b + m_3\infty$ avec $m_i \in \{0, 1\}$ et $m_1 + m_2 + m_3 = 1$

◊ $\Gamma_2.F_7 = R_1 + \dots + R_{14}$

4^{er} cas : $t = m[\infty - a] + n[\infty - b] + kx_0 + x_2$ avec $0 \leq m, n \leq 6$ et $0 \leq k \leq 1$.

En composant par $f_2^* \circ f_2$ puis en utilisant les propriétés (P2), (P3), (P4) et (P5), on trouve exactement la même l'expression que le **3^{er} cas** et donc on aboutit aux mêmes résultats.

4 Conclusion

Une $\bar{\mathbb{Q}}$ -base pour $\mathcal{L}(7k\infty)$ est donnée par $\mathcal{B}_k = \left\{ f_{rs}(x, y) = \frac{x^r}{(x+y)^s} \text{ avec } 0 \leq r \leq s \leq k \right\}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Les $\bar{\mathbb{Q}}$ -base des systèmes linéaires $\mathcal{L}(7k\infty)$ ont permis d'étudier les points algébriques sur F_7 de degré au plus 14 sur \mathbb{Q} dans notre travail et dans les travaux précédents ([9], [7], [8]). Le degré 14 est le maximum des degrés des points algébriques qu'on peut déterminer en utilisant le système linéaire $\mathcal{L}(42\infty)$. Pour poursuivre l'étude des points algébriques de degré $d > 14$, il est nécessaire de trouver une $\bar{\mathbb{Q}}$ -base pour le système linéaire $\mathcal{L}(d'\infty)$ avec $d' \geq d + 28$ qui généralise \mathcal{B}_6 .

Références

- [1] B. Gross and D. Rohrlich : Some results on the Mordell-Weil group of the jacobian of the Fermat curve, Invent. Math. 44 (1978), 201 – 224.
- [2] D. K. Faddeev : On the divisor class groups of some algebraic curves, Dokl. Tom 136 pp. 296 – 298 = Sov. Math. Vol. 2 (1961) pp. 67 – 69.
D. K. Faddeev : Invariants of divisor classes for the curves $x^k(1-x) = y^l$ in l -adic cyclotomic fields, Trudy Math. Inst. Steklov 64 (1961) pp. 284 – 293.

- [3] Debarre, O. and Klassen, M. : Points of low degree on smooth plane curves. *J. Reine Angew. Math.* 446, 81 – 87 (1994).
- [4] Lang, S. : Introduction to algebraic and abelian functions (2nd edition), GTM 89, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.
- [5] Namba, M. : Families of meromorphic functions on compact Riemann surfaces. *Lecture Notes in Math.* 767, Berlin : Springer-Verlag, 1979.
- [6] Rohrlich, D. : Points at infinity on the Fermat curves. *Invent. Math.* 39, 95 – 127 (1977)
- [7] Sall O. : Points algébriques de petits degré sur les courbes de Fermat, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.330, série I, p 67 – 70, 2000.
- [8] Sall O. : Points algébriques de degré au plus 10 sur la septique de Fermat, *Afrika mathematika*, serie 3, volume 15(2003) 49 – 55.
- [9] Tzermias P. : Algebraic points of low degree on the Fermat curve of degree seven, *Manusc. Math.* 97 (4) 1998, 483 – 488.