



**HAL**  
open science

## Sur les matériaux standard généralisés

Bernard Halphen, Quoc Son Nguyen

► **To cite this version:**

Bernard Halphen, Quoc Son Nguyen. Sur les matériaux standard généralisés. Journal de Mécanique, 1975, 14 (1), pp.39-63. hal-03600755

**HAL Id: hal-03600755**

**<https://hal.science/hal-03600755v1>**

Submitted on 7 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Sur les matériaux standards généralisés

par

**Bernard HALPHEN\* et NGUYEN QUOC SON\***

---

**RÉSUMÉ.** — Admettant l'hypothèse de dissipativité normale, nous établissons pour une classe de matériaux élastoviscoplastiques et élastoplastiques à déformation plastique instantanée, les lois d'évolution de la transformation plastique et des paramètres internes caractérisant l'écroutissage.

Ces lois nous permettent d'étudier ensuite en transformation infiniment petite isotherme quelques problèmes relatifs à l'évolution des champs de contrainte, de paramètres internes et de déplacement pour un trajet de charge quelconque. Nous établissons en particulier un théorème d'unicité des contraintes et des paramètres internes.

**ABSTRACT.** — Under the assumption of normal dissipativity, rate equations of the plastic transformation and the internal parameters are established for a class of elastic viscoplastic and elastic plastic materials.

These results enable us to study some problems concerning the evolution of stress, internal parameters and displacements fields for an arbitrary loading program in isothermal, infinitesimal transformation. In particular a uniqueness theorem for stress and internal parameters is demonstrated.

## 1. Introduction

Il est maintenant bien établi que la thermodynamique des milieux continus hors d'équilibre constitue un complément indispensable à l'étude des lois de comportement des milieux continus dissipatifs (*cf.* Eckart [6], Meixner [17], Biot [1], Ziegler [28], Coleman [2], ...). On connaît de nombreuses applications de la théorie de Coleman à l'élastoplasticité et à l'élastoviscoplasticité à paramètres internes (Green et Naghdi [8], Perzyna [23], Mandel [15], Lubliner [13]), mais les relations qu'elles fournissent ne précisent pas suffisamment les lois d'évolution.

---

(\*) Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 17, rue Descartes, 75005 Paris.

Suivant une approche différente, Ziegler [28] a proposé un principe d'orthogonalité et de convexité dans le but de généraliser les relations de réciprocité d'Onsager. A partir de cette théorie, Moreau ([18], [19]) a étudié l'hypothèse de l'existence d'un potentiel de dissipation, appelée dans cette étude dissipativité normale.

On sait que la thermodynamique classique est étendue à des systèmes hors d'équilibre en admettant l'existence de l'entropie, de la température et la validité du second principe de la thermodynamique; celui-ci postule que pour un système en évolution, la vitesse de production d'entropie interne spécifique est positive, nulle seulement si le processus est réversible :

$$\dot{s}_1 = A_k a_k \geq 0, \quad k = 1, n.$$

Les  $a_k$  sont les vitesses (ou flux) et les  $A_k$  les forces généralisées associées. La vitesse  $a_k$  peut être par exemple un flux thermique, une vitesse de réaction chimique, une intensité de courant électrique; la force associée  $A_k$  est alors respectivement un gradient de température, une affinité chimique, une différence de potentiel électrique (Prigogine [24], de Groot [3]).

La loi de comportement la plus simple est donnée par une relation linéaire entre les vitesses et les forces généralisées

$$(1) \quad a_k = L_{ki} A_i.$$

Pour la conduction de la chaleur par exemple, on obtient ainsi la loi de Fourier. Dans le cas d'une loi linéaire, on admet généralement le principe de symétrie d'Onsager :

$$(2) \quad L_{ij} = L_{ji}.$$

L'inégalité du second principe s'écrit alors :

$$\dot{s}_1 = L_{ij} A_i A_j \geq 0,$$

ce qui implique que  $L$  soit une matrice positive. Posant

$$\Omega(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} L_{ij} A_i A_j \quad \text{et} \quad \Omega^*(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} L_{ij}^{-1} a_i a_j,$$

on peut mettre la relation (1) sous la forme

$$(3) \quad a_k = \frac{\partial \Omega}{\partial A_k} \quad \text{et} \quad A_k = \frac{\partial \Omega^*}{\partial a_k}.$$

Les vitesses  $\mathbf{a}_k$  et les forces généralisées  $A_k$  dérivent ainsi respectivement du potentiel de résistance  $\Omega(\mathbf{A})$  et du potentiel de dissipation  $\Omega^*(\mathbf{a})$ . La matrice  $\mathbf{L}$  devant être positive, ces potentiels quadratiques sont convexes.

On peut encore écrire les relations (3) dans le cas où les lois liant les vitesses et les forces

$$(4) \quad a_k = g_k(A_1, \dots, A_n),$$

ne sont pas linéaires, si les fonctions  $g_k$  vérifient les conditions de symétrie analogues à (2) :

$$(5) \quad \frac{\partial g_i}{\partial A_j} = \frac{\partial g_j}{\partial A_i}; \quad i, j = 1, n,$$

qui expriment la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions  $g_k$  dérivent d'un potentiel  $\Omega(\mathbf{A})$  et qui généralisent les relations de réciprocité d'Onsager (2).

Lorsque le potentiel  $\Omega(\mathbf{A})$  est convexe, les lois d'évolution (4), (5), dites normales, permettent de retrouver dans le cas de plasticité ou de viscoplasticité parfaite, les théories du potentiel plastique de Hill [9] et du potentiel viscoplastique de Rice [25]. Réciproquement, comme il a été souligné par Moreau [19], Germain [7], l'hypothèse de dissipativité normale fournit une méthode de construction systématique des lois constitutives simples.

L'état thermodynamique d'un élément de matière élastoplastique ou élastoviscoplastique est défini d'une part par la valeur de paramètres mécaniques ou thermiques, d'autre part par la valeur des paramètres internes caractérisant son état physico-chimique. Le comportement viscoplastique du matériau est dû aux processus irréversibles modifiant son état interne. Dans le cas particulier des monocristaux métalliques, de nombreux travaux (*voir* par exemple Kröner [11], Zarka [27]) ont permis de préciser la nature des paramètres internes, leurs lois d'évolution et leur rôle dans la déformation plastique; ce sont des paramètres liés à la distribution des dislocations. Dans le cas des polycristaux (*voir* par exemple Zaoui [26]), on doit y ajouter les paramètres géométriques définissant la position des grains les uns par rapport aux autres.

D'une manière générale, nous supposons que pour tout matériau viscoplastique, il existe une famille finie de paramètres internes à valeurs scalaires ou tensorielles définissant son état. L'objet de notre étude est l'application à de tels matériaux de l'hypothèse de dissipativité normale.

Nous construisons une loi d'évolution de la transformation plastique et des paramètres internes. Elle possède les propriétés de normalité et de convexité et constitue ainsi une extension de la théorie des matériaux plastiques standards. Elle nous permet d'établir quelques résultats nouveaux concernant les matériaux écrouissables.

## 2. Hypothèse de dissipativité normale

La configuration actuelle ( $\bullet$ ) du système étudié étant repérée par un système de coordonnées cartésiennes orthonormées  $x_i$ , on désigne par  $\sigma_{ij}$  les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy  $\sigma$  et  $\mathcal{D}_{ij}$  les composantes du tenseur de vitesse de déformation  $\mathcal{D}$  défini par

$$(6) \quad \mathcal{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$v_i$  désignant les composantes de la vitesse  $\mathbf{v}$  d'un point matériel. Soient  $\rho$ ,  $e$ ,  $s$ ,  $T$  respectivement la masse volumique, l'énergie interne spécifique, l'entropie spécifique et la température absolue d'un élément de matière dans la configuration actuelle ( $\bullet$ ); on désigne par  $\Phi$  l'énergie libre spécifique définie par

$$(7) \quad \Phi = e - Ts.$$

En l'absence de rayonnement,  $\mathbf{q}$  désignant le vecteur flux de chaleur, l'expression locale du premier principe de la thermodynamique est

$$(8) \quad \rho \dot{e} = \sigma_{ij} \mathcal{D}_{ij} - \text{div } \mathbf{q}.$$

Le point désigne conventionnellement la dérivée particulaire.

Le second principe de la thermodynamique exprime que la vitesse de production d'entropie interne est positive :

$$(9) \quad \rho \dot{s} + \text{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0.$$

La relation (7) et l'inégalité (9) permettent de traduire le second principe sous la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$(10) \quad \sigma_{ij} \mathcal{D}_{ij} - \rho (\dot{\Phi} + s \dot{T}) - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \text{grad } T \geq 0.$$

On définit la dissipation intrinsèque spécifique  $D$  par

$$(11) \quad D = \frac{\sigma_{ij} \mathcal{D}_{ij}}{\rho} - (\dot{\Phi} + s\dot{T}).$$

Si l'on suppose qu'il y a découplage entre la dissipation intrinsèque et la dissipation thermique (ce qui ne veut pas dire que les effets thermiques et mécaniques sont découplés), on obtient

$$(12) \quad D \geq 0$$

et

$$(13) \quad -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T \geq 0.$$

D'une manière générale, si dans l'expression de  $D$ , on exprime  $\dot{\Phi}$  en fonction des dérivées particulières des variables d'état du matériau étudié, on peut mettre la dissipation intrinsèque spécifique sous la forme

$$(14) \quad D = A_i a_i,$$

où les  $A_i$  sont des forces généralisées fonction des variables d'état du matériau et les  $a_i$  des vitesses. On identifie les  $A_i$  aux composantes d'un vecteur  $\mathbf{A}$  de  $R^n$  et les  $a_i$  aux composantes d'un vecteur  $\mathbf{a}$  de  $R^n$ .  $D$  peut alors s'écrire sous forme de produit scalaire

$$(15) \quad D = \mathbf{A} \mathbf{a}.$$

Nous faisons, suivant Moreau [18], l'hypothèse H 1 (de dissipativité normale) :

*HYPOTHÈSE H 1. — Il existe un potentiel  $\varphi(\mathbf{A})$ , convexe, semi-continu inférieurement (s. c. i.), tel que dans le processus thermodynamique réel la vitesse  $\mathbf{a}$  associée à la force  $\mathbf{A}$  soit un sous-gradient de  $\varphi$  :*

$$(16) \quad \mathbf{a} \in \partial\varphi(\mathbf{A}),$$

*ce qui signifie que  $\mathbf{a}$  est la pente d'un hyperplan d'appui de la fonction  $\varphi$  au point  $\mathbf{A}$ .*

Sous cette hypothèse, considérons la transformée de Fenchel <sup>(1)</sup>  $\varphi^*(\mathbf{a})$  de  $\varphi(\mathbf{A})$  définie par

$$(17) \quad \varphi^*(\mathbf{a}) = \text{Sup}_{\mathbf{A}^*} \{ \mathbf{A}^* \mathbf{a} - \varphi(\mathbf{A}^*) \}.$$

On démontre que  $\varphi^*(\mathbf{a})$  est une fonction convexe, s. c. i. de la variable  $\mathbf{a}$  et que la force associée  $\mathbf{A}$  est un sous-gradient de  $\varphi^*(\mathbf{a})$  :

$$(18) \quad \mathbf{A} \in \partial \varphi^*(\mathbf{a}).$$

On établit également que connaissant  $\varphi^*(\mathbf{a})$ , le potentiel  $\varphi(\mathbf{A})$  est donné par

$$(19) \quad \varphi(\mathbf{A}) = \text{Sup}_{\mathbf{a}^*} \{ \mathbf{A} \mathbf{a}^* - \varphi^*(\mathbf{a}^*) \}$$

et que

$$(20) \quad \varphi(\mathbf{A}) + \varphi^*(\mathbf{a}) = \mathbf{A} \mathbf{a},$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{a}$  sont associés par l'une des relations (16) ou (18).

Le potentiel  $\varphi^*(\mathbf{a})$ , fonction de la vitesse  $\mathbf{a}$ , est appelé potentiel de dissipation. Si les fonctions  $\varphi(\mathbf{A})$  et  $\varphi^*(\mathbf{a})$  sont différentiables, on retrouve la transformation de Legendre classique, i. e. :

$$(21) \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{A}}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{a}}.$$

Les définitions précédentes permettent de montrer que l'hypothèse H 1 est équivalente à chacun des deux principes de maximum suivants :

(a) pour une vitesse  $\mathbf{a}$  donnée, la force réelle  $\mathbf{A}$  associée à la vitesse  $\mathbf{a}$  maximise la quantité  $\mathbf{A}^* \mathbf{a} - \varphi(\mathbf{A}^*)$ ;

(b) pour une force  $\mathbf{A}$  donnée, la vitesse réelle  $\mathbf{a}$  associée à la force  $\mathbf{A}$  maximise la quantité  $\mathbf{A} \mathbf{a}^* - \varphi^*(\mathbf{a}^*)$ .

L'hypothèse H 1 ne donne aucune indication sur le signe de la dissipation intrinsèque spécifique D. C'est le second principe de la thermodynamique qui impose qu'elle soit positive. Sous l'hypothèse de dissipativité normale, cette restriction implique que, quel que soit  $\mathbf{A}$ , le vec-

---

<sup>(1)</sup> Qui généralise la transformation de Legendre aux fonctions convexes, non différentiables.

teur  $\mathbf{a}$ , normal à la surface convexe  $\varphi(\mathbf{A}^*) = \text{constante}$  passant par  $\mathbf{A}$  dans l'espace des forces, est tel que

$$\mathbf{A} \mathbf{a} \geq 0.$$

Le potentiel  $\varphi$  doit alors posséder la propriété suivante : quel que soit le nombre réel  $M$ , l'ensemble des  $\mathbf{A}$  tels que  $\varphi(\mathbf{A}) \leq M$  dans l'espace des forces  $\mathbf{A}$ , s'il n'est pas vide, contient le vecteur nul.

De même, on montre que dans l'espace des vitesses  $\mathbf{a}$ , l'ensemble des  $\mathbf{a}$  tels que  $\varphi^*(\mathbf{a}) \leq M$ , s'il n'est pas vide, contient le vecteur nul

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall M \in \mathbb{R}, \\ 0 \in S_A = \{ \mathbf{A} \mid \varphi(\mathbf{A}) \leq M \} \quad \text{si } S_A \neq \emptyset. \\ 0 \in S_a = \{ \mathbf{a} \mid \varphi^*(\mathbf{a}) \leq M \} \quad \text{si } S_a \neq \emptyset. \end{array} \right.$$

### 3. Transformation élastoplastique ou élastoviscoplastique

Soit  $(o)$  la configuration occupée par un élément de matière sous contrainte nulle, à la température  $T_0$  et soit  $(a)$  la configuration actuelle. Supposons que, partant de la configuration  $(a)$ , on décharge <sup>(2)</sup> l'élément de matière et qu'on le ramène à la température  $T_0$ . On obtient ainsi une configuration  $(\varkappa)$  dite intermédiaire relâchée qui n'est définie qu'à une rotation arbitraire près. La transformation qui fait passer de  $(\varkappa)$  à  $(a)$  est la transformation élastique, celle qui fait passer de  $(o)$  à  $(\varkappa)$  est la transformation plastique.

On désigne par  $\mathbf{F}$  le gradient de la transformation totale  $(o) \rightarrow (a)$ , par  $\mathbf{E}$  le gradient de la transformation élastique  $(\varkappa) \rightarrow (a)$ , par  $\mathbf{P}$  le gradient de la transformation plastique  $(o) \rightarrow (\varkappa)$ . Ces trois tenseurs sont liés par la relation

$$(23) \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}.$$

L'état thermodynamique de l'élément de matière est défini par les variables d'état suivantes :

$\Delta^e$ , tenseur de déformation de Green dans la transformation élastique

$$\mathbf{I} + 2\Delta^e = \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{E};$$

---

<sup>(2)</sup> Décharge rapide pour les matériaux viscoplastiques. Si des déformations plastiques instantanées sont possibles (élastoplasticité), il est nécessaire de supposer que, par des actions extérieures, les paramètres internes sont alors bloqués.

$\alpha = (\alpha_j)$ , famille de paramètres internes caractérisant l'état d'écroutissage du matériau;  $T$  est la température absolue.

Nous avons indiqué plus haut que la configuration relâchée ( $\kappa$ ) n'est définie qu'à une rotation arbitraire près. On introduit alors, suivant Mandel [15], la notion de repère directeur ( $d$ ), repère de la configuration relâchée dans lequel les fonctions d'état telles que l'énergie libre spécifique ont une expression donnée, invariable en fonction des variables d'état. Si l'on conserve au repère directeur une orientation fixe dans les configurations relâchées, on obtient une suite de configurations (relâchées) dites isoclines ( $\hat{\kappa}$ ) dans lesquelles l'expression de l'énergie libre spécifique est

$$(24) \quad \Phi = \hat{\Phi}(\hat{\Delta}^e, \hat{\alpha}, T).$$

Si la configuration ( $\kappa$ ) se déduit de ( $\hat{\kappa}$ ) par une transformation orthogonale  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{x}}$ , l'énergie libre spécifique a pour expression dans la configuration ( $\kappa$ ) :

$$(25) \quad \Phi = \Phi(\Delta^e, \alpha, T, \boldsymbol{\beta}) = \hat{\Phi}(\boldsymbol{\beta}^T \cdot \Delta^e \cdot \boldsymbol{\beta}, \hat{\alpha}, T),$$

où les paramètres internes ( $\alpha_j$ ), quantités scalaires ou tensorielles, ont subi les transformations correspondantes dans le passage de ( $\hat{\kappa}$ ) à ( $\kappa$ ).

Dans le cas d'un monocristal métallique, le trièdre directeur est un trièdre lié au réseau cristallin et les variables d'état  $\alpha_j$  peuvent être prises égales à des densités de dislocations.

On notera  $D/Dt$  la dérivée par rapport au temps d'un tenseur ou d'un vecteur dans le mouvement par rapport au trièdre directeur. Cette dérivée ne dépend pas du repère choisi dans la configuration relâchée ( $\kappa$ ) [15].

De la relation (23), on déduit que le gradient de la vitesse de la transformation totale est donné par

$$(26) \quad \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}^{-1} + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{E}^{-1}.$$

Soit

$$\boldsymbol{\Pi} = \frac{\rho_{\kappa}}{\rho} \mathbf{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^{\text{T}-1}$$

le tenseur de contrainte de Kirchhoff rapporté à la configuration relâchée ( $\kappa$ ). L'égalité (26) permet d'écrire :

$$(27) \quad \frac{\sigma_{ij} \mathcal{D}_{ij}}{\rho} = \text{tr} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{D}}{\rho} = \frac{1}{\rho_{\kappa}} \text{tr} \left( \boldsymbol{\Pi} \frac{D\Delta^e}{Dt} + \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{E}^{\text{T}} \cdot \mathbf{E} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} \right).$$

On peut alors transformer l'inégalité de Clausius-Duhem (10) et l'écrire sous la forme

$$(28) \quad \text{tr} \left\{ \left( \frac{\Pi}{\rho_x} - \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta^e} \right) \frac{D\Delta^e}{Dt} \right\} - \left( s + \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j} \frac{D\alpha_j}{Dt} + \text{tr} \left\{ \frac{\Pi}{\rho_x} \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{E} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} \right\} - \frac{1}{\rho T} \mathbf{q} \cdot \text{grad } T \geq 0.$$

Pour les matériaux viscoplastiques, utilisant le fait que l'on peut imposer à  $D\Delta^e/Dt$ ,  $\dot{T}$  des valeurs arbitraires sans changer les valeurs actuelles des variables d'état <sup>(3)</sup>, on déduit de l'inégalité (28) les relations

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Pi}{\rho_x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta^e}, \\ s = - \frac{\partial \Phi}{\partial T}. \end{array} \right.$$

La dissipation intrinsèque spécifique a alors pour expression :

$$(30) \quad D = \text{tr} \left( \frac{\Pi}{\rho_x} \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{E} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} \right) + \mathcal{A}_j \frac{D\alpha_j}{Dt},$$

dans laquelle  $\mathcal{A}_j$  désigne l'action thermodynamique associée <sup>(4)</sup> au paramètre interne  $\alpha_j$  :

$$(31) \quad \mathcal{A}_j = - \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j}.$$

$(D\mathbf{P}/Dt) \mathbf{P}^{-1}$  est le gradient de la vitesse de la transformation plastique. Le tenseur non nécessairement symétrique

$$\mathcal{R} = \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{E} \frac{\Pi}{\rho_x} = \mathbf{E}^T \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{T}^{-1}$$

<sup>(3)</sup> Dans le cas où il y a des déformations plastiques instantanées, les vitesses  $D\Delta^e/Dt$ ,  $D\alpha_j/Dt$ ,  $(D\mathbf{P}/Dt)\mathbf{P}^{-1}$ ,  $\dot{T}$  sont des variables liées. Comme il s'agit d'un cas limite des matériaux viscoplastiques, nous *admettons* que les relations (29) de Coleman sont toujours vérifiées.

<sup>(4)</sup> Il résulte des relations (29) et (31) que l'on peut, d'une manière équivalente, écrire l'expression de la dissipation spécifique à partir de tout potentiel thermodynamique déduit de l'énergie libre  $\Phi(\Delta^e, \alpha, T, \beta)$  par transformation de Legendre partielle ou totale par rapport aux couples de variables conjuguées  $(\Pi/\rho_x, \Delta^e)$ ,  $(s, T)$ ,  $(\mathcal{A}, \alpha)$ , tel que l'énergie interne  $e(\Delta^e, \alpha, s, \beta)$ , l'enthalpie libre  $H(\Pi/\rho_x, \alpha, T, \beta)$ , etc.

est la force associée à cette vitesse. De même  $\mathcal{A}_j$  est la force associée à la vitesse  $D\alpha_j/Dt$ . On peut en effet écrire :

$$(32) \quad \mathbf{D} = \text{tr} \left( \mathcal{R}^T \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} \right) + \mathcal{A}_j \frac{D\alpha_j}{Dt}.$$

#### 4. Matériaux standards généralisés

4.1. DÉFINITION. — *Nous appelons matériau standard généralisé un matériau élastoviscoplastique et élastoplastique à déformation plastique instantanée pour lequel il existe une famille de paramètres internes  $(\alpha_j)$  telle que si  $\mathcal{A}_j$  désigne la force associée par la relation (31), l'hypothèse de dissipativité normale H 1 soit vérifiée pour  $\mathbf{A} = (\mathcal{R}, \mathcal{A})$ .*

Pour un tel milieu, il existe un potentiel  $\varphi(\mathcal{R}, \mathcal{A})$  convexe et s. c. i. tel que

$$(33) \quad \left( \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1}, \frac{D\alpha}{Dt} \right) \in \partial\varphi(\mathcal{R}, \mathcal{A}).$$

Le potentiel  $\varphi$  peut dépendre de la température  $T$  lorsque les effets thermiques et mécaniques sont couplés.

#### 4.2. CAS DE LA PLASTICITÉ

$C$  désignant un domaine convexe contenant l'origine  $O$  dans l'espace  $\mathcal{R} \times \mathcal{A}$ ,  $\varphi(\mathcal{R}, \mathcal{A})$  est la fonction indicatrice  $\Psi_C$  de  $C$  :

$$(34) \quad \varphi(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = \Psi_C(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\mathcal{R}, \mathcal{A}) \in C, \\ +\infty & \text{si } (\mathcal{R}, \mathcal{A}) \notin C, \end{cases}$$

les relations (33) s'expriment alors ainsi :

Si  $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$  est à l'intérieur du domaine  $C$ , les vitesses  $D\mathbf{P}/Dt$  et  $D\alpha/Dt$  de la déformation plastique et des paramètres internes sont nulles.

Si  $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$  est sur la frontière de  $C$ , le vecteur  $((D\mathbf{P}/Dt) \mathbf{P}^{-1}, D\alpha/Dt)$  est un vecteur normal à la frontière de  $C$ .

On a donc l'inégalité

$$(35) \quad \begin{cases} \forall (\mathcal{R}^*, \mathcal{A}^*) \in C, \\ \text{tr} \left\{ (\mathcal{R}^T - \mathcal{R}^{T*}) \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} \right\} + (\mathcal{A}_j - \mathcal{A}_j^*) \frac{D\alpha_j}{Dt} \geq 0, \end{cases}$$

qui peut s'énoncer ainsi : dans l'évolution de la transformation plastique et des paramètres internes réelle, la puissance de dissipation de la force réelle  $(\mathcal{R}, \mathcal{A})$  est supérieure ou égale à celle de toute autre force  $(\mathcal{R}^*, \mathcal{A}^*)$  plastiquement admissible, c'est-à-dire telle que  $(\mathcal{R}^*, \mathcal{A}^*) \in C$ .

Ce dernier énoncé est une généralisation du principe du travail maximum de Hill en plasticité parfaite. On retrouve la forme classique de ce principe en supprimant le deuxième terme du premier membre de l'inégalité (35) et en particulier, en supposant que  $D\alpha/Dt = 0$  c'est-à-dire que les paramètres internes n'évoluent pas (plasticité parfaite).

D'après ce qui a été dit au paragraphe 2, le second principe de la thermodynamique entraîne que l'origine  $(\mathcal{R} = 0, \mathcal{A} = 0)$  appartienne au domaine C. Ceci ne signifie pas que pour  $\mathcal{A}$  fixé, le point  $\mathcal{R} = 0$  se trouve à l'intérieur du domaine élastique dans l'espace des contraintes  $\mathcal{R}$ . La thermodynamique n'impose pas de restrictions sur les variations du domaine élastique.

Si C est défini comme l'intersection de N domaines réguliers  $F^k(\mathcal{R}, \mathcal{A}) \leq 0, k = 1, N$ , où les fonctions  $F^k$  sont différentiables (potentiel plastique multiple) la relation (33) se traduit par les égalités

$$(36) \quad \left. \begin{aligned} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} &= \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial \mathcal{R}} \\ \frac{D\alpha_j}{Dt} &= \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial \mathcal{A}_j} \end{aligned} \right\} \text{avec} \\ \left. \begin{aligned} \lambda_k &\geq 0 & \text{si } F^k(\mathcal{R}, \mathcal{A}) &= 0, \\ \lambda_k &= 0 & \text{si } F^k(\mathcal{R}, \mathcal{A}) &< 0. \end{aligned} \right\}$$

#### 4.3. CAS DE LA VISCOPLASTICITÉ

Le potentiel  $\phi(\mathcal{R}, \mathcal{A})$  est une fonction convexe différentiable  $\Omega(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ . La relation (33) s'écrit alors :

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{R}}, \\ \frac{D\alpha_j}{Dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{A}_j}. \end{aligned} \right.$$

La première relation (37) a été établie par Mandel [14] pour le monocristal métallique suivant la théorie du potentiel viscoplastique de Rice [24].

On la démontre à partir d'hypothèses physiques sur les glissements microscopiques.

#### 4.4. CAS DU MATÉRIAU ÉLASTOVISCOPLASTIQUE A DÉFORMATION PLASTIQUE INSTANTANÉE

Si  $\varphi(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = \psi_C(\mathcal{R}, \mathcal{A}) + \Omega(\mathcal{R}, \mathcal{A})$ , on obtient un matériau viscoplastique et plastique à déformation plastique instantanée. Dans le cas du potentiel plastique multiple, les relations (33) s'écrivent :

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D\mathbf{P}}{Dt} \mathbf{P}^{-1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{R}} + \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial \mathcal{R}}, \\ \frac{D\alpha_j}{Dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{A}_j} + \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial \mathcal{A}_j}, \\ \lambda_k \geq 0 \quad \text{si } F^k(\mathcal{R}, \mathcal{A}) = 0; \\ \lambda_k = 0 \quad \text{si } F^k(\mathcal{R}, \mathcal{A}) < 0. \end{array} \right.$$

Dans tous les cas, l'application de l'hypothèse H 1 de dissipativité normale a permis d'établir les lois d'évolution des paramètres internes et l'expression du gradient de la vitesse de la transformation plastique.

### 5. Étude des matériaux standards généralisés en transformation infiniment petite, isotherme

Dans la suite, on n'étudie que des transformations infiniment petites, isothermes.

#### 5.1. LOIS D'ÉVOLUTION DE LA DÉFORMATION PLASTIQUE ET DES PARAMÈTRES INTERNES

Le matériau étudié ne subit que de petits déplacements et de petites déformations. Les tenseurs de contrainte  $\sigma$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  sont alors égaux et on peut identifier les dérivées  $D/Dt$  aux dérivées particulières.

Soit  $\varepsilon$  la déformation totale,  $\varepsilon^e$  la déformation élastique,  $\varepsilon^p$  la déformation plastique, on a

$$(39) \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p.$$

L'énergie libre spécifique  $\Phi$  s'écrit maintenant :

$$\Phi = \Phi(\varepsilon^e, \alpha, T).$$

La relation (29) devient

$$(40) \quad \sigma = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon^e}, \quad s = - \frac{\partial \Phi}{\partial T}.$$

Comme  $\rho$  est une constante, il est commode de définir l'action thermodynamique  $\mathcal{A}_j$  associée au paramètre interne  $\alpha_j$  d'une manière analogue à la contrainte  $\sigma$ . On définira maintenant l'action thermodynamique associée par <sup>(5)</sup> :

$$(41) \quad \mathcal{A}_j = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j}.$$

La dissipation intrinsèque volumique a alors pour expression :

$$D_v = \rho D = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \mathcal{A}_j \dot{\alpha}_j \geq 0.$$

Appliquant l'hypothèse H 1 de dissipativité normale, on obtient pour un matériau visco-plastique et plastique, à déformation plastique instantanée en potentiel plastique multiple les lois d'évolution

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} + \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial \sigma}, \quad \lambda_k \geq 0 \quad \text{si } F^k(\sigma, \mathcal{A}) = 0; \\ -\dot{\alpha}_j = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{A}_j} + \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial \mathcal{A}_j}, \quad \lambda_k = 0 \quad \text{si } F^k(\sigma, \mathcal{A}) < 0. \end{array} \right.$$

Dans la suite, on notera  $\mathbf{L}$  le tenseur des coefficients élastiques d'éléments

$$\mathbf{L}_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e \partial \varepsilon_{kl}^e},$$

$\mathbf{W}$  le tenseur d'éléments

$$\mathbf{W}_{ijk} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}^e \partial \alpha_k}$$

et  $\mathbf{Z}$  le tenseur d'éléments

$$\mathbf{Z}_{ij} = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}.$$

<sup>(5)</sup> On remplace ainsi  $\mathcal{A}$  par  $-\rho \mathcal{A}$ .

Introduisant les notations schématiques suivantes [21] :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{W} \\ \mathbf{W}^T & \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = (\sigma, \mathcal{A}), \quad \mathbf{e} = (\varepsilon, \alpha), \quad \mathbf{e}^e = (\varepsilon^e, \alpha),$$

$$\mathbf{e}^p = (\varepsilon^p, -\alpha), \quad \mathcal{M}(\Sigma) = \Omega(\mathcal{R}, \mathcal{A}), \quad \mathcal{F}^k(\Sigma) = F^k(\mathcal{R}, \mathcal{A}),$$

puis

$$\mathcal{L} \cdot \Sigma = (\mathbf{L} \cdot \sigma + \mathbf{W} \cdot \mathcal{A}, \mathbf{W}^T \cdot \sigma + \mathbf{Z} \cdot \mathcal{A}),$$

les relations (39), (40), (41), (42) permettent d'écrire :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}^e + \dot{\mathbf{e}}^p, \\ \dot{\Sigma} = \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{e}}^e, \\ \dot{\mathbf{e}}^p = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Sigma} + \lambda_k \frac{\partial \mathcal{F}^k}{\partial \Sigma}, \quad \lambda_k \geq 0 \quad \text{si } \mathcal{F}^k(\Sigma) = 0, \\ \lambda_k = 0 \quad \text{si } \mathcal{F}^k(\Sigma) < 0. \end{array} \right.$$

Nous retrouvons ainsi formellement les lois de la viscoplasticité parfaite et de la plasticité parfaite pour les contraintes et les déformations généralisées.

## 5.2. DÉTERMINATION DES MULTIPLICATEURS PLASTIQUES $\lambda_i$ . LOI DE COMPORTEMENT ÉLASTOPLASTIQUE

*Supposons donnée la vitesse de déformation totale  $\dot{\mathbf{e}}$ .* — Suivant la méthode donnée dans [21], on désigne par  $\mathbf{K}$  la matrice d'éléments

$$(44) \quad K_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \Sigma} \mathcal{L} \frac{\partial \mathcal{F}^j}{\partial \Sigma},$$

où les indices  $i, j$  appartiennent à l'ensemble  $I$  des indices des mécanismes en jeu, c'est-à-dire tels que  $\mathcal{F}^i(\Sigma) = 0$  et tels que les vecteurs  $\partial \mathcal{F}^i / \partial \Sigma$  engendrent le cône des normales au point  $\Sigma$ . Si  $b_i$  désigne la quantité

$$b_i = \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \Sigma} \mathcal{L} \left( \dot{\mathbf{e}} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Sigma} \right).$$

Les multiplicateurs  $\lambda_i$ ,  $i \in I$  vérifient le système

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } K_{ij} \lambda_j = b_i & \text{alors } \lambda_i \geq 0 \quad (\dot{\mathcal{F}}^i = 0), \\ \text{si } K_{ij} \lambda_j > b_i & \text{alors } \lambda_i = 0 \quad (\dot{\mathcal{F}}^i < 0). \end{array} \right.$$

La matrice  $\mathbf{K}$  étant symétrique, résoudre le système (45) est équivalent à minimiser la fonction  $\lambda_i K_{ij} \lambda_j - 2 b_i \lambda_i$  sur le domaine convexe, fermé  $\lambda_i \geq 0$  de l'espace des  $\lambda_i$ . Si la matrice  $\mathbf{K}$  est définie positive, on doit minimiser une fonction convexe, coercive sur un ensemble convexe fermé, la solution en  $\lambda_i$  existe et est unique. Cette condition de positivité de la matrice  $\mathbf{K}$  n'exclut pas un comportement avec radoucissement.

Si la matrice  $\mathbf{K}$  est définie positive, on peut donc exprimer les multiplicateurs plastiques  $\lambda_i$  d'une manière unique en fonction de la vitesse de la déformation totale  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

*Supposons donnée la vitesse de contrainte  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ .* — On peut appliquer la méthode donnée par Mandel [14]. Un mécanisme  $i \in I$  reste actif si  $\dot{F}^i(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = 0$ , c'est-à-dire si la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial F^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} \dot{\mathcal{A}} = 0,$$

ce qui, tenant compte de la relation (40) et de la relation (41) peut s'écrire :

$$\frac{\partial F^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} \mathbf{W}^T \mathbf{L}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} (\mathbf{Z} - \mathbf{W}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0.$$

Utilisant la relation (42), on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} (\mathbf{Z} - \mathbf{W}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W}) \frac{\partial F^j}{\partial \mathcal{A}} \quad , \quad &= \frac{\partial F^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} \mathbf{W}^T \mathbf{L}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ &- \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} (\mathbf{Z} - \mathbf{W}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W}) \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Désignons alors par  $\mathbf{H}$  la matrice symétrique d'éléments

$$(46) \quad H_{ij} = \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} (\mathbf{Z} - \mathbf{W}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W}) \frac{\partial F^j}{\partial \mathcal{A}},$$

où les indices  $i$  et  $j$  appartiennent à l'ensemble  $I$  des indices des mécanismes en jeu. Posant

$$c_i = \frac{\partial F^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} \mathbf{W}^T \mathbf{L}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} (\mathbf{Z} - \mathbf{W}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W}) \frac{\partial F^j}{\partial \mathcal{A}},$$

les multiplicateurs plastiques  $\lambda_i$  vérifient le système

$$(47) \quad \begin{cases} \text{si } H_{ij} \lambda_j = c_i & \text{alors } \lambda_i \geq 0 & (\dot{F}^i = 0), \\ \text{si } H_{ij} \lambda_j > c_i & \text{alors } \lambda_i = 0 & (\dot{F}^i < 0). \end{cases}$$

Comme au paragraphe précédent et suivant le résultat de Mandel [14], si la matrice  $\mathbf{H}$  est définie positive, ce système admet une solution unique. Les multiplicateurs plastiques  $\lambda_i$  s'expriment alors de manière unique en fonction de la vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}$ .

*Quelques hypothèses intéressantes :*

Introduisons l'hypothèse H 2 suivante :

**HYPOTHÈSE H 2.** — *L'énergie libre  $\Phi$  est une fonction strictement convexe des variables  $(\varepsilon^e, \alpha)$ ; la matrice  $\mathcal{L}$  est alors définie positive.*

Sous cette hypothèse, on voit d'après les relations (43) que le matériau admet *a priori* les mêmes propriétés classiquement obtenues pour les matériaux élastiques parfaitement plastiques. En particulier, la relation constitutive (43) est équivalente à la propriété suivante :

Soit  $\mathcal{F}$  le cône tangent au point  $\Sigma$  du convexe  $\mathbf{C}$ , défini par

$$\mathcal{F} = \left\{ \dot{\Sigma}^* \mid \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial \Sigma} \dot{\Sigma}^* \leq 0, i \in I \right\},$$

la vitesse  $\dot{\Sigma}$  associée à une vitesse de déformation donnée  $\dot{\varepsilon} = (\dot{\varepsilon}, 0)$  minimise dans  $\mathcal{F}$  la fonction

$$(48) \quad \frac{1}{2} \dot{\Sigma}^* \mathcal{L} \dot{\Sigma}^* - \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \Sigma} \right) \dot{\Sigma}^*.$$

On peut remarquer que l'inégalité de monotonie classique est vérifiée :

$$(49) \quad (\dot{\sigma} - \dot{\sigma}^*)(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^*) \geq 0.$$

Dans la suite, nous nous intéressons à des matériaux dont les propriétés élastiques ne dépendent pas des paramètres internes  $\alpha$ . Comme  $\sigma = \rho (\partial \Phi / \partial \varepsilon^e)$ , nous introduisons donc l'hypothèse H 3 :

**HYPOTHÈSE H 3.** — *L'énergie libre est séparée : elle est la somme d'une énergie  $\Phi_1(\varepsilon^e, T)$  ne dépendant pas des paramètres internes et d'une*

énergie  $\Phi_2(\boldsymbol{\alpha}, T)$  ne dépendant pas de la déformation élastique

$$(50) \quad \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, T) = \Phi_1(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T) + \Phi_2(\boldsymbol{\alpha}, T).$$

Physiquement, cette hypothèse semble assez bien vérifiée. Dans le cas d'un monocristal métallique, ceci revient à admettre que l'énergie libre est la somme de l'énergie de déformation du réseau cristallin et de l'énergie des défauts (dislocations).

On a alors :

$$\mathcal{A}_j = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j} = \rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_j} = \mathcal{A}_j(\boldsymbol{\alpha}, T).$$

Les actions thermodynamiques associées aux paramètres internes  $\boldsymbol{\alpha}$  ne dépendent pas de la déformation élastique. Leur évolution est donnée par ( $\dot{T} = 0$ ) :

$$(51) \quad \dot{\mathcal{A}}_j = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k = \frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_k.$$

Utilisant cette dernière égalité et la loi d'évolution (42), on obtient

$$\dot{\mathcal{A}}_j = \frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial \alpha_j} \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{A}_k} + \lambda_i \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}_k} \right].$$

Posons

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \equiv \Omega(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})), \\ f^k(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \equiv F^k(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})), \quad k = 1, N. \end{array} \right.$$

La première relation (42) et l'expression de  $\mathcal{A}_j$  nous permettent d'écrire les lois d'évolution sous la forme

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda_k \geq 0 \quad \text{si } f^k(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0; \\ -\dot{\mathcal{A}}_j = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_j} + \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial \alpha_j}, \quad \lambda_k = 0 \quad \text{si } f^k(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) < 0; \end{array} \right.$$

relations analogues aux relations (42), par rapport auxquelles les rôles de  $\mathcal{A}_j$  et  $\alpha_j$  sont ici inversés.

Soit un matériau élastoplastique standard généralisé à potentiel plastique multiple vérifiant simultanément les hypothèses H 2 de convexité et H 3 de séparation de l'énergie. L'évolution de la déformation plastique et

des paramètres internes est donnée par

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda_i \frac{\partial F^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda_i \frac{\partial f^i}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ -\dot{\alpha}_j = \lambda_i \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}_j} \quad \text{ou} \quad -\dot{\mathcal{A}}_j = \lambda_i \frac{\partial f^i}{\partial \alpha_j}, \\ \lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i f^i = \lambda_i F^i = 0 \quad (\text{pas de sommation}). \end{array} \right.$$

On dira que le matériau est à écoulement non négatif si l'inégalité de Drucker est vérifiée :

$$(55) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0.$$

Lorsque le mécanisme  $k$  est actif,  $F^k = 0$ ,  $F^k = 0$ , l'inégalité (55) se traduit par

$$\lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial \mathcal{A}_j} \dot{\mathcal{A}}_j \geq 0,$$

soit

$$\dot{\alpha}_j \dot{\mathcal{A}}_j \geq 0.$$

L'hypothèse H 3 nous permet d'écrire :

$$(56) \quad \dot{\alpha}_j \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k \geq 0.$$

Les inégalités (55) et (56) sont alors équivalentes. Sous l'hypothèse H 2, la matrice  $\mathbf{Z}$  est positive (elle est semi-positive si l'énergie libre est convexe au sens large); l'inégalité (55) est donc vérifiée.

Les hypothèses H 2 et H 3 impliquent que l'écoulement est positif ou nul pour un matériau élastoplastique standard généralisé. Il est intéressant de remarquer que l'hypothèse H 2 permet d'écrire :

$$(57) \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)(\varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^{e*}) + (\mathcal{A}_k - \mathcal{A}_k^*)(\alpha_k - \alpha_k^*) \geq 0,$$

où l'égalité n'a lieu que pour

$$\varepsilon_{ij}^e \equiv \varepsilon_{ij}^{e*}, \quad \mathcal{A}_k \equiv \mathcal{A}_k^*.$$

## 6. Problème en vitesses et problème d'évolution

On étudie dans ce paragraphe l'évolution d'une structure élastovisco-plastique et élastoplastique à déformation plastique instantanée, soumise

à un trajet de charge donné et on suppose essentiellement que la transformation est infiniment petite, isotherme et quasi-statique.

La structure étudiée, de volume  $V$ , de frontière  $S$  est soumise à des forces de masse  $X_i(\mathbf{x}, t)$ , des efforts de surface  $T_i^d(\mathbf{x}, t)$  sur une partie  $S_{T_i}$  de sa frontière; sur la partie complémentaire  $S_{u_i}$  les déplacements  $u_i^d(\mathbf{x}, t)$  sont imposés. La donnée des fonctions  $X_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $T_i^d(\mathbf{x}, t)$ ,  $u_i^d(\mathbf{x}, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  dans  $V$  et sur un intervalle de temps  $[0, T]$  ( $t$  est un paramètre cinématique quelconque pour un matériau purement élastoplastique), définit un trajet de charge de type classique.

Pour un trajet de charge donné, on veut déterminer les champs de contrainte  $\sigma(t)$ , de paramètre interne  $\alpha(t)$  et de déplacement  $\mathbf{u}(t)$  définis dans  $V$  pour tout instant  $t \in [0, T]$ , les conditions initiales étant données :

$$(58) \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0.$$

Les champs  $\sigma(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  sont les solutions d'un problème d'évolution. Bien que quelques aspects importants du problème d'évolution, en particulier le comportement asymptotique (adaptation), aient été étudiés pour les matériaux élastiques parfaitement plastiques, on discute surtout en plasticité classique le problème partiel suivant appelé problème en vitesses.

On suppose que, à un instant  $t$  donné, on connaît l'état c'est-à-dire les valeurs de la contrainte, des paramètres internes et du déplacement. Se donnant les vitesses  $\dot{X}_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{T}_i^d(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{u}_i^d(\mathbf{x}, t)$  respectivement des composantes de force massique, de force surfacique et de déplacement données, on se propose de déterminer les vitesses  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ .

### 6.1. PROBLÈME EN VITESSES

On sait que :

(a)  $\dot{\sigma}$  vérifie les équations de l'équilibre

$$\begin{cases} \operatorname{div} \dot{\sigma} + \rho \dot{\mathbf{X}} = 0 & \text{dans } V, \\ \dot{\sigma}_{ij} n_j - \dot{T}_i^d = 0 & \text{sur } S_{T_i}. \end{cases}$$

(b)  $\dot{\mathbf{u}}$  vérifie les liaisons imposées

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^d \quad \text{sur } S_{u_i}.$$

(c)  $\dot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\alpha}$  doivent suivre en chaque point du volume  $V$  les lois de comportement définies au paragraphe 4.

Nous donnons ici quelques résultats justifiés dans [21]. On suppose que l'hypothèse H 2 est vérifiée;  $\mathcal{L}$  est donc une matrice définie positive. On sait que la contrainte généralisée  $\Sigma = (\sigma, \mathcal{A})$  associée à une vitesse  $\dot{\epsilon}$  donnée est la solution unique du problème (48).

Soit  $\dot{\Sigma}^e = (\dot{\sigma}^e, 0)$  où  $\dot{\sigma}^e$  désigne la solution en contrainte pour un solide fictif, purement élastique, de coefficients élastiques  $L_{ijkl}$  soumis aux mêmes vitesses de charge. Le principe du minimum de Hodge-Prager peut être énoncé de la manière suivante :

Le champ de vitesse réelle  $\dot{\Sigma}$  minimise parmi les champs de vitesses  $\dot{\Sigma}^*$  statiquement admissibles (i. e.  $\dot{\sigma}^*$  vérifie les équations de l'équilibre en vitesses) et plastiquement admissibles (i. e.  $\dot{\Sigma}^* \in \mathcal{T}$  en chaque point du volume plastique actuel) la fonctionnelle

$$(59) \quad A(\dot{\Sigma}^*) = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\Sigma}^* - \dot{\Sigma}^e) \mathcal{L} (\dot{\Sigma}^* - \dot{\Sigma}^e) dV.$$

Comme il s'agit de minimiser une fonctionnelle quadratique, coercive dans un ensemble convexe fermé, ce problème admet une solution unique.

Le champ de vitesse de contrainte généralisée  $\dot{\Sigma}$  est donc unique. D'après (43) le champ de vitesse  $\dot{\epsilon}^e$  est aussi unique de sorte que l'on obtient l'unicité des champs  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{\alpha}$ . D'autre part, si non seulement la matrice  $\mathcal{L}$ , mais aussi la matrice  $\mathbf{H}$  est définie positive dans la zone plastique actuelle, les vitesses de déformation totale  $\dot{\epsilon}$  sont aussi déterminées de manière unique.

## 6.2. PROBLÈME D'ÉVOLUTION

L'étude du problème d'évolution nécessite des hypothèses supplémentaires. Un cas particulier intéressant correspond aux matériaux dont l'énergie libre  $\Phi$  est fonction quadratique de la déformation élastique et des paramètres internes. Il a été établi [22] que pour ces matériaux, on peut appliquer les méthodes proposées par Moreau [18] ou Duvaut et Lions [5] en plasticité parfaite pour caractériser l'évolution de la contrainte généralisée  $\Sigma$ .

Afin de pouvoir démontrer un théorème d'unicité dans un cadre moins restrictif, nous considérons les hypothèses suivantes :

**HYPOTHÈSE H 4.** — Comparant les relations (42) et (53), on constate que sous les hypothèses H 2, H 3 les variables  $\alpha_j$  et les variables  $\mathcal{A}_j$

jouent des rôles analogues. Il est alors naturel,  $\Omega$  et  $F^k$  étant des fonctions convexes de la variable  $(\sigma, \mathcal{A})$  d'introduire l'hypothèse H 4 :  $\omega(\sigma, \alpha)$  et  $f^k(\sigma, \alpha)$  sont des fonctions convexes de la variable  $(\sigma, \alpha)$ .

**HYPOTHÈSE H 5.** — *L'énergie  $\Phi_1$  est fonction quadratique de la déformation élastique  $\varepsilon^e$ ; i. e. le tenseur des coefficients élastiques  $\mathbf{L}$  est constant. L'énergie  $\Phi_2$  est par contre une fonction convexe quelconque des paramètres internes  $\alpha_j$ .*

(a) *Théorème d'unicité.*

**THÉORÈME.** — *Sous les hypothèses H 1, H 2, H 3, H 4, H 5, la solution du problème d'évolution en contrainte et paramètres internes est unique.*

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe deux solutions  $(\sigma, \alpha, \mathbf{u})$ ,  $(\sigma^*, \alpha^*, \mathbf{u}^*)$  du problème d'évolution en contrainte, paramètres internes, déplacement. Soient  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^*$  respectivement les champs de déformation associés aux déplacements  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}^*$ .

Le principe des puissances virtuelles, appliqué au champ de contrainte  $\sigma - \sigma^*$  statiquement compatible avec des forces données nulles dans  $V$  et sur la frontière  $S_{T_i}$  et au champ de déformation  $\varepsilon - \varepsilon^*$ , cinématiquement compatible avec des vitesses données nulles sur  $S_{u_i}$ , donne

$$(60) \quad \int_V (\sigma - \sigma^*) (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^*) dV = 0.$$

Comme  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p$ , l'égalité (60) peut être écrite sous la forme

$$(61) \quad \int_V (\sigma - \sigma^*) (\dot{\varepsilon}^e - \dot{\varepsilon}^{e*}) dV + \int_V (\sigma - \sigma^*) (\dot{\varepsilon}^p - \dot{\varepsilon}^{p*}) dV = 0.$$

Le potentiel viscoplastique  $\Omega(\sigma, \mathcal{A})$  étant convexe, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(62) \quad (\sigma - \sigma^*) \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} - \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma^*} \right) + (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{A}} - \frac{\partial \Omega}{\partial \mathcal{A}^*} \right) \geq 0.$$

Les fonctions  $F^k(\sigma, \mathcal{A})$ ,  $k = 1, N$ , étant également convexes, on a

$$(63) \quad \lambda_k \left[ (\sigma - \sigma^*) \frac{\partial F^k}{\partial \sigma} + (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) \frac{\partial F^k}{\partial \mathcal{A}} \right] \geq 0$$

et de même

$$(64) \quad \lambda_k^* \left[ (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial F^k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^*} + (\mathcal{A}^* - \mathcal{A}) \frac{\partial F^k}{\partial \mathcal{A}^*} \right] \geq 0.$$

Faisant la somme des inégalités (62), (63), (64), les lois d'évolution (42) de la déformation plastique et des paramètres internes impliquent

$$(65) \quad (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}) - (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^*) \geq 0.$$

Étant données les hypothèses que nous avons faites, les lois d'évolution (53) et la convexité de  $\omega(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$  et de  $f^k(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$  nous permettent d'écrire des inégalités analogues aux inégalités (62), (63), (64) en remplaçant  $\mathcal{A}$  par  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\Omega$  par  $\omega$  et  $F^k$  par  $f^k$  et d'obtenir l'inégalité

$$(66) \quad (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}) - (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^*)(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^*) \geq 0.$$

Faisant alors la somme des inégalités (65) et (66), on obtient

$$(67) \quad (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p*}) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^*)(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)] \geq 0,$$

d'où on déduit, en utilisant l'égalité (61) :

$$(68) \quad \int_V (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e*}) dV + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^*)(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) dV \leq 0.$$

Considérons alors l'intégrale  $\mathcal{F}(t)$  définie par

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{2} \int_V \{ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)(\boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\varepsilon}^{e*}) + (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^*) \} dV,$$

$\mathbf{L}$  étant un tenseur constant d'après l'hypothèse H 5, l'inégalité (68) s'écrit simplement :

$$(69) \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt} \leq 0.$$

Les conditions initiales sont les mêmes pour les deux solutions du problème d'évolution que l'on s'est posé, ce qui entraîne

$$(70) \quad \mathcal{F}(0) = 0.$$

L'hypothèse H 2 nous permet d'utiliser l'inégalité (57).

Rapprochant alors les résultats (69), (70), (57), on conclut que

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [0, T] \\ \text{on a} \\ \boldsymbol{\sigma}(t) \equiv \boldsymbol{\sigma}^*(t), \quad \boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \boldsymbol{\alpha}^*(t). \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi montré l'unicité des champs de contraintes et de paramètres internes, solutions du problème d'évolution.

On peut remarquer que la matrice  $\mathbf{H}$  a pour expression

$$H_{ij} = \frac{\partial F^i}{\partial \mathcal{A}} \mathbf{Z} \frac{\partial F^j}{\partial \mathcal{A}}, \quad i, j \in I.$$

Si les vecteurs  $\partial F^i / \partial \mathcal{A}$ ,  $i \in I$  sont linéairement indépendants à chaque instant et en chaque point de la zone plastique qui se développe au cours de l'évolution, on sait que la vitesse de déformation est unique. Il en résulte que, dans ce cas particulier, la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  est aussi unique.

(b) *Stabilité au sens de Drucker* [4].

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses H 1, H 2, H 3, H 4, H 5 le matériau est stable au sens de Drucker.*

Considérons un système élastoviscoplastique et plastique, à déformation plastique instantanée en état d'équilibre sous l'action des efforts et des liaisons donnés. Un agent extérieur, par des efforts ou des conditions de liaison supplémentaires impose au système une réponse dans le temps caractérisée par les champs  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ .

Le travail dépensé par cet agent extérieur est alors :

$$\mathcal{W}(t) = \int_0^t \int_V (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV d\tau.$$

D'une manière plus générale, soient deux trajets de charge quelconques à partir d'un même état initial ( $t = 0$ ), définis respectivement par les champs  $(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}(t), \mathbf{u}(t))$  et  $(\boldsymbol{\sigma}^*(t), \boldsymbol{\alpha}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$ . Soit  $\mathcal{W}(t)$  l'intégrale

$$(72) \quad \mathcal{W}(t) = \int_0^t \int_V (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^*) dV d\tau.$$

Drucker définit la stabilité par l'inégalité  $\mathcal{W}(t) \geq 0$ ,  $\forall t$  ce qui signifie que quel que soit le trajet considéré, il est impossible d'extraire de l'énergie du système.

La relation (67) permet d'écrire :

$$(\sigma - \sigma^*)(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^*) \geq (\sigma - \sigma^*)(\dot{\varepsilon}^e - \dot{\varepsilon}^{e*}) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)(\alpha - \alpha^*)],$$

d'où, en intégrant dans le temps :

$$\int_0^t (\sigma - \sigma^*)(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^*) d\tau \geq \int_0^t \frac{d}{d\tau} [(\sigma - \sigma^*)(\varepsilon^e - \varepsilon^{e*}) + (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)(\alpha - \alpha^*)] d\tau.$$

Tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$(73) \quad \int_0^t (\sigma - \sigma^*)(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^*) d\tau \geq [(\sigma - \sigma^*)(\varepsilon^e - \varepsilon^{e*}) + (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)(\alpha - \alpha^*)]_{\tau = t}.$$

D'après l'hypothèse H 2, le second membre de cette égalité est positif ou nul. On a donc localement l'inégalité

$$(74) \quad \int_0^t (\sigma - \sigma^*)(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^*) d\tau \geq 0, \quad \forall t.$$

En intégrant dans le volume V, on obtient l'inégalité (72), i. e. la stabilité au sens de Drucker.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIOT M. A., *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena* (*J. Appl. Phys.*, vol. 25, 1954, p. 1385. - 1391).
- [2] COLEMAN B. D., *Thermodynamics of materials with memory*, (*Arch. rat. Mech. Anal.*, vol. 17, 1964, p. 1-46).
- [3] DE GROOT S. R., *Thermodynamics of irreversible process*, North Holland, Amsterdam, 1952.
- [4] DRUCKER D. C., *On the postulate of stability of material in the mechanics of continua* (*Journal de Mécanique*, vol. 3, n° 2, 1964, p. 235-249).
- [5] DUVAUT G. et LIONS J.-L., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [6] ECKART C., *Theory of elasticity and anelasticity* (*Phys. Rev.*, vol. 73, 1948, p. 373-382).
- [7] GERMAIN P., *Cours de Mécanique des Milieux continus*, Masson et C<sup>ie</sup>, Paris, 1973.
- [8] GREEN A. E. et NAGHDI P. M., *A general theory of an elastic plastic continuum* (*Arch. rat. Mech. Anal.*, vol. 18, n° 4, 1965, p. 251-281).
- [9] HILL R., *The mathematical theory of Plasticity*, Oxford Ed., 1950.
- [10] KESTIN J. et RICE J. R., *Paradoxes in the application of thermodynamics to strained solids. A critical Review of thermodynamics*, Stuart, Baltimore, 1970.
- [11] KRÖNER E., *Zur Plastischen Verformung des Viel Kristalls* (*Acta Metallurgica*, vol. 9, 1961, p. 155-167).

- [12] LEE E. H., *Elastic plastic deformation at finite strains* (*J. Appl. Mech.*, vol. 36, 1969, p. 1-6).
- [13] LUBLINER J., *On the thermodynamic foundations of non linear solid mechanics* (*Int. J. Non linear Mechanics*, vol. 7, 1972, p. 237-254).
- [14] MANDEL J., *Généralisation de la théorie de plasticité de W. T. Koiter* (*Int. J. Solids Structures*, vol. 1, 1965, p. 273-296).
- [15] MANDEL J., *Plasticité classique et viscoplasticité*, Cours du C.I.S.M., Udine, Italie, 1971.
- [16] MANDEL J., *Thermodynamique et Plasticité* (*Int. Symposium of the Continuum thermodynamics*, Lisbonne, 1973).
- [17] MEIXNER J., *Die thermodynamische Theorie der Relaxationserscheinungen und ihr Zusammenhang mit der Nachwirkungstheorie* (*Kolloid Z.*, vol. 134, 1953, p. 2-9).
- [18] MOREAU J. J., *Fonctions de résistance et Fonctions de dissipation* (exposé n° 6), *Raflé par un convexe variable* (exposé n° 15) (*Séminaire d'Analyse convexe*, Montpellier, 1971).
- [19] MOREAU J. J., *Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité*, (*C. R. Acad. Sc.*, t. 271, série A, 1970, p. 608-611).
- [20] NGUYEN Q. S. et HALPHEN B., *Sur les lois de comportement élastoviscoplastiques à potentiel généralisé* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 277, série A, 1973, p. 319-322).
- [21] NGUYEN Q. S., *Contribution à la théorie macroscopique de l'élastoplasticité avec écrouissage* (*Thèse*, Paris, 1973).
- [22] NGUYEN Q. S., *Évolution de la contrainte et de l'écrouissage pour certains matériaux à écrouissage positif* (*Séminaire « Plasticité et Viscoplasticité »*, École Polytechnique, Paris, 1972).
- [23] PERZYNA P., *Viscoplasticity : theory and applications*, Cours du C.I.S.M., Udine, 1971.
- [24] PRIGOGINE I., *Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles*, Dunod, Paris, 1947.
- [25] RICE J. R., *Inelastic constitutive relations for solids : an internal variable theory and its application to metal plasticity* (*J. Mech. Phys. Solids*, vol. 19, n° 6, 1971, p. 433-455).
- [26] ZAOUÏ A., *Étude de l'influence propre de la désorientation des grains sur le comportement viscoplastique de métaux polycristallins (système C.F.C.)* [*Thèse*, Paris, 1970 (*Mémorial de l'Artillerie Française*, 1971)].
- [27] ZARKA J., *Étude du comportement des monocristaux métalliques. Application à la traction du monocristal C.F.C.* (*Journal de Mécanique*, vol. 12, n° 2, 1973, p. 275-318).
- [28] ZIEGLER H., *Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics*. *Progress in Solid Mechanics*, tome IV, North Holland Pub. C<sup>ie</sup>, Amsterdam, 1963.

(Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> octobre 1973,  
révisé le 8 janvier 1974.)