



**HAL**  
open science

## Sur les quotients discrets de semi-groupes complexes

Christian Miebach

► **To cite this version:**

Christian Miebach. Sur les quotients discrets de semi-groupes complexes. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques., 2010, 19 (2), pp.269-276. 10.5802/afst.1243 . hal-03600321

**HAL Id: hal-03600321**

**<https://hal.science/hal-03600321>**

Submitted on 7 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# SUR LES QUOTIENTS DISCRETS DE SEMI-GROUPES COMPLEXES

*par*

Christian Miebach

---

**Résumé.** — Soit  $X = G/K$  un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact et soit  $S \in G^{\mathbb{C}}$  le semi-groupe associé formé des compressions de  $X$ . Soit  $\Gamma \subset G$  un sous-groupe discret. Nous donnons une condition suffisante pour que le quotient  $\Gamma \backslash S$  soit une variété de Stein. En outre nous démontrons qu'en général  $\Gamma \backslash S$  n'est pas de Stein ce qui réfute une conjecture de Achab, Betten et Krötz.

## Introduction

Soit  $X = G/K$  un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact et soit  $S \in G^{\mathbb{C}}$  le semi-groupe associé consistant des compressions de  $X$ . On démontre dans [ABK04] que le quotient  $\Gamma \backslash S$  est holomorphiquement séparable pour tout sous-groupe discret  $\Gamma \subset G$ . De plus, ils conjecturent que ce quotient est une variété de Stein et ils vérifient cette conjecture dans le cas où  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  et  $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ .

Dans ce travail nous donnons une condition suffisante pour que  $\Gamma \backslash S$  soit de Stein.

**Théorème.** — *Soit  $X = G/K$  un espace symétrique Hermitien irréductible de type non-compact et soit  $S \in G^{\mathbb{C}}$  le semi-groupe associé formé des compressions de  $X$ . Soit  $\Gamma \subset G$  un sous-groupe discret qui agit librement sur  $X$ . Si  $X/\Gamma$  est une variété de Stein, alors  $\Gamma \backslash S$  est de Stein aussi.*

Après avoir présenté les fondements nécessaires de la théorie des espaces symétriques hermitiens et des semi-groupes de compression dans la première section, nous démontrons ce théorème. Notre preuve utilise essentiellement le fibré  $G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow Z$  (où nous notons par  $Z$  le dual compact de  $X$ ) et des techniques qui ont été développées dans [Mie08]. Dans la dernière section nous montrons que, si  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  et si  $G/\Gamma$  est compacte, alors  $\Gamma \backslash S$  n'est pas de Stein ce qui réfute la conjecture générale dans [ABK04].

Je remercie Karl Oeljeklaus pour l'intérêt et l'aide qu'il a apporté à ce travail ainsi que pour l'invitation à LATP de l'Université de Provence où ce travail a été effectué.

## 1. Le semi-groupe de compression associé à un espace symétrique Hermitien

Dans cette section nous parcourons les parties de la théorie des espaces symétriques hermitiens non-compacts  $X$  dont nous avons besoin afin de définir le semi-groupe de compression associé à  $X$ . Pour en savoir plus nous prions le lecteur de s'adresser à [Hel01] et [HN93].

Soit  $X = G/K$  un espace symétrique hermitien irréductible de type non-compact. Nous pouvons supposer que  $G$  est un groupe de Lie réel connexe simple sans facteurs compacts qui est plongé dans sa complexification universelle  $G^{\mathbb{C}}$  et que  $K$  est un sous-groupe maximal compact de  $G$  qui est défini par l'involution de Cartan  $\theta \in \text{Aut}(G)$ . Nous dénotons par  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la décomposition de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  par rapport à  $\theta_*$   $\in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ . Puisque  $X$  est une variété complexe sur laquelle  $G$  agit par des transformations holomorphes, il y a une structure complexe  $J$  sur  $\mathfrak{p}$  invariante par l'action adjointe de  $K$ . Nous étendons  $J$  comme un opérateur  $\mathbb{C}$ -linéaire à  $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ . Puisque les valeurs propres de  $J$  sont  $\pm i$ , on obtient la décomposition en somme directe  $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ . On peut démontrer que  $\mathfrak{p}^{\pm}$  est une sous-algèbre commutative de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  et  $[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}^{\pm}] \subset \mathfrak{p}^{\pm}$ .

Soit  $K^{\mathbb{C}}$  et  $P^{\pm}$  les sous-groupes analytiques de  $G^{\mathbb{C}}$  dont l'algèbre de Lie est donnée par  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$  et  $\mathfrak{p}^{\pm}$ . Alors  $K^{\mathbb{C}}$  et  $P^{\pm}$  sont des sous-groupes fermés et complexes de  $G^{\mathbb{C}}$ . De plus, l'ensemble  $Q^{\pm} := K^{\mathbb{C}}P^{\pm}$  est un sous-groupe fermé complexe parabolique et isomorphe au produit semi-direct  $K^{\mathbb{C}} \ltimes P^{\pm}$ . L'espace complexe homogène  $Z := G^{\mathbb{C}}/Q^-$  peut être identifié au dual compact de  $X$  et l'application  $X \rightarrow Z, gK \mapsto gQ^-$ , définit un plongement holomorphe de  $X$  comme un ouvert de  $Z$ . Ce plongement est connu comme le plongement de Borel. Désormais nous regardons  $X$  comme l'orbite ouverte  $G \cdot eQ^- \subset Z$ .

**Définition 1.1.** — L'ensemble

$$S := \{g \in G^{\mathbb{C}}; g(\bar{X}) \subset X\}$$

s'appelle le semi-groupe ouvert complexe de compression associé à  $X$ .

Il suit immédiatement que  $S$  est un sous-ensemble ouvert et  $(G \times G)$ -invariant de  $G^{\mathbb{C}}$  où l'action de  $G \times G$  est donnée par  $z \mapsto g_1 z g_2^{-1}$ . De plus,  $S$  est stable par rapport à la multiplication de  $G^{\mathbb{C}}$  et par conséquent un semi-groupe. Ce semi-groupe de compression est un cas particulier d'un semi-groupe d'Ol'shanskiï (comparer chapitre 8 dans [HN93]).

**Théorème 1.2** ([Nee00]). — *Le semi-groupe de compression  $S$  est un domaine d'holomorphic hyperbolique au sens de Kobayashi dans  $G^{\mathbb{C}}$ . En particulier, le groupe  $G \times G$  agit proprement sur  $S$ .*

Le quotient  $\Gamma \backslash S$  est une variété complexe pour tout sous-groupe  $\Gamma \subset G$  qui agit par multiplication de gauche sur  $S$ . Le théorème suivant est un cas particulier d'un résultat plus général de Achab, Betten et Krötz ([ABK04]).

**Théorème 1.3.** — *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$ .*

- (1) *La variété complexe  $\Gamma \backslash S$  est holomorphiquement séparable.*
- (2) *Si  $G/\Gamma$  est compact, alors les fonctions holomorphes bornées séparent les points de  $\Gamma \backslash S$ , i. e.  $\Gamma \backslash S$  est hyperbolique au sens de Caratheodory.*
- (3) *Si  $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$  et si  $\Gamma$  est contenu dans  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ , alors  $\Gamma \backslash S$  est une variété de Stein.*

La preuve de ce théorème utilise la théorie des représentations de  $S$ .

Enfin, nous notons l'observation suivante qui se trouve sans démonstration dans [BR01]. Pour l'aise du lecteur nous en donnons une démonstration. À l'égard de la théorie des ensembles réel-algébriques et semi-algébriques nous renvoyons le lecteur à [BCR98].

**Lemme 1.4.** — *Le semi-groupe  $S$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $G^{\mathbb{C}}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $A: G^{\mathbb{C}} \times Z \rightarrow Z \times Z$  l'application  $(g, z) \mapsto (g \cdot z, z)$  et soit  $p_{G^{\mathbb{C}}}: G^{\mathbb{C}} \times Z \rightarrow G^{\mathbb{C}}$  la projection sur la première composante. Il n'est pas difficile de montrer que l'on a:

$$G^{\mathbb{C}} \setminus S = p_{G^{\mathbb{C}}}(A^{-1}(Z \setminus X \times \overline{X})).$$

De plus il est bien connu que  $G^{\mathbb{C}}$  porte une unique structure de groupe linéaire-algébrique et que  $G^{\mathbb{C}}$  agit de façon algébrique sur la variété projective  $Z$ . Puisque  $G$  est réel-algébrique dans  $G^{\mathbb{C}}$ , le théorème de Tarski-Seidenberg implique que l'orbite  $X = G \cdot eQ^-$  est semi-algébrique. Par conséquent, son complémentaire  $Z \setminus X$  et son adhérence  $\overline{X}$  sont également semi-algébriques, donc  $A^{-1}(Z \setminus X \times \overline{X})$  est semi-algébrique. Enfin, le théorème de Tarski-Seidenberg implique que  $G^{\mathbb{C}} \setminus S$  et par conséquent  $S$  sont semi-algébriques.  $\square$

## 2. Une condition suffisante pour que $\Gamma \setminus S$ soit de Stein

Nous continuons la notation établie dans la section précédente. La complexification de l'espace symétrique Hermitien  $X = G/K$  est par définition la variété complexe homogène  $X^{\mathbb{C}} := G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ . Puisque  $K^{\mathbb{C}}$  est fermé dans  $Q^- \cong K^{\mathbb{C}} \times P^-$  et puisque  $Q^-$  agit effectivement sur  $P^-$ , l'application naturelle  $p: G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/Q^-$  est un fibré holomorphe dont la fibre est donnée par  $P^- \cong \mathbb{C}^{\dim X}$  et dont le groupe structural est le groupe complexe connexe  $Q^-$ .

Il est connu que l'application  $gK^{\mathbb{C}} \mapsto (gQ^-, gQ^+)$  est un plongement ouvert de  $X^{\mathbb{C}}$  dans  $G^{\mathbb{C}}/Q^- \times G^{\mathbb{C}}/Q^+$ . Il s'ensuit que nous obtenons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & G^{\mathbb{C}}/Q^- \times G^{\mathbb{C}}/Q^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{\mathbb{C}}/Q^- & \longrightarrow & G^{\mathbb{C}}/Q^- \end{array}$$

est commutatif.

Soit  $\pi: G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$  le fibré principal de groupe structural  $K^{\mathbb{C}}$ . Nous commençons par montrer que l'image  $\pi(S)$  est une variété de Stein. Un théorème de Matsushima et Morimoto assure que  $\pi(S)$  est de Stein si et seulement si  $SK^{\mathbb{C}}$  est de Stein.

**Proposition 2.1.** — *Le domaine  $SK^{\mathbb{C}} \subset G^{\mathbb{C}}$  est de Stein. Par conséquent,  $\pi(S) \subset G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$  est de Stein.*

*Démonstration.* — Puisque  $S$  est invariant par rapport à la multiplication à droite de  $K$ , on obtient une action holomorphe locale par  $K^{\mathbb{C}}$  sur  $S$ . Par [Hei91] il y a une variété de Stein  $S^*$  munie d'une action holomorphe de  $K^{\mathbb{C}}$  et un plongement ouvert holomorphe  $K$ -equivariant  $\varphi: S \rightarrow S^*$  tel que  $S^* = K^{\mathbb{C}} \cdot \varphi(S)$ . De plus,  $S^*$  est universel ce qui implique l'existence d'une application holomorphe  $K^{\mathbb{C}}$ -equivariante  $\Phi: S^* \rightarrow SK^{\mathbb{C}}$  tel que  $\Phi \circ \varphi$  coïncide avec l'inclusion  $S \hookrightarrow SK^{\mathbb{C}}$ . Il s'en suit que  $\Phi$  est surjectif et localement biholomorphe. Donc il suffit de montrer que  $\Phi$  est une application finie. Dans notre situation c'est le cas si et seulement si les fibres de  $\Phi$  sont finies.

Pour  $z_0 \in S$  nous définissons l'ensemble

$$K^{\mathbb{C}}[z_0] := \{k \in K^{\mathbb{C}}; z_0 k^{-1} \in S\}.$$

Or,  $S$  est semi-algébrique par Lemme 1.4 et  $K^{\mathbb{C}}$  est un groupe linéaire algébrique, donc  $K^{\mathbb{C}}[z_0]$  est semi-algébrique. En particulier, le nombre de composantes connexes de  $K^{\mathbb{C}}[z_0]$  est fini.

Nous allons démontrer que  $\#\Phi^{-1}(z_0)$  est borné par le nombre de composantes connexes de  $K^{\mathbb{C}}[z_0]$ .

Soit  $z \in \Phi^{-1}(z_0)$ . Alors il y a un élément  $k \in K^{\mathbb{C}}$  tel que  $k \cdot z \in \varphi(S)$ . Par conséquent, nous avons  $\Phi(k \cdot z) = k \cdot \Phi(z) = z_0 k^{-1} \in S$ , i. e.  $k \in K^{\mathbb{C}}[z_0]$ . Comme  $\Phi|_{\varphi(S)}: \varphi(S) \rightarrow S$  est biholomorphe, nous concluons  $k \cdot z = \varphi(z_0 k^{-1})$ , ce qui est équivalent à  $z = k^{-1} \cdot \varphi(z_0 k^{-1})$ . Comme réciproquement tout élément  $z \in S^*$  de la forme  $z = k^{-1} \cdot \varphi(z_0 k^{-1})$  avec  $k \in K^{\mathbb{C}}[z_0]$  est contenu dans  $\Phi^{-1}(z_0)$ , nous obtenons une application surjective

$$(2.1) \quad K^{\mathbb{C}}[z_0] \rightarrow \Phi^{-1}(z_0), \quad k \mapsto k^{-1} \cdot \varphi(z_0 k^{-1}).$$

Si  $k \in K^{\mathbb{C}}[z_0]$  est contenu dans la composante connexe de l'élément neutre, nous avons  $\varphi(z_0 k^{-1}) = k \cdot \varphi(z_0)$ . Cette observation implique que l'application (2.1) est localement constante, ce qui montre la proposition.  $\square$

**Remarque.** — La variété  $S^*$  est la globalisation universelle de la  $K^{\mathbb{C}}$ -action locale sur  $S$  au sens de [Pal57].

La proposition 2.1 nous permet de donner la condition équivalente suivante pour que  $\Gamma \backslash S$  soit de Stein.

**Proposition 2.2.** — Soit  $\Gamma \subset G$  un sous-groupe discret. Alors  $\Gamma \backslash S$  est de Stein si et seulement si  $\Gamma \backslash \pi(S)$  est de Stein.

*Démonstration.* — Si  $\Gamma \backslash S$  est de Stein, alors la globalisation universelle  $\Gamma \backslash S^*$  de la  $K^{\mathbb{C}}$ -action locale sur  $\Gamma \backslash S$  est aussi de Stein. Comme  $K^{\mathbb{C}}[\Gamma g] = K^{\mathbb{C}}[g]$  pour tout  $g \in S$ , le même argument qu'au-dessus implique que  $\Gamma \backslash SK^{\mathbb{C}}$  est de Stein, ce qui montre que  $\Gamma \backslash \pi(S)$  est de Stein.

Réciproquement, si  $\Gamma \backslash \pi(S)$  est de Stein, alors  $\Gamma \backslash SK^{\mathbb{C}}$  est aussi de Stein. Puisque  $\Gamma \backslash S$  est plongé comme ouvert dans  $\Gamma \backslash SK^{\mathbb{C}}$  et localement de Stein, l'affirmation découle d'un argument à la Docquier-Grauert (comparer Proposition 4.7 dans [Mie08]).  $\square$

Soit  $p: G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}/Q^-$  le fibré holomorphe et considérons  $X \subset G^{\mathbb{C}}/Q^-$ .

**Lemme 2.3.** — On a  $\pi(S) \subset p^{-1}(X)$ .

*Démonstration.* — Soit  $g \in S$ . Comme les applications  $\pi$  and  $p$  sont  $G^{\mathbb{C}}$ -equivariantes, nous en déduisons que  $p \circ \pi(g) = g \cdot p \circ \pi(e) = g \cdot eQ^-$ . À cause de  $eQ^- \in X$ , la définition de  $S$  implique que  $gQ^- \in X$ .  $\square$

La restriction  $p: p^{-1}(X) \rightarrow X$  est un fibré holomorphe de fibre  $P^-$  et de groupe structural complexe connexe  $Q^-$ . De plus, le groupe  $G$  agit par des automorphismes de fibré sur  $p^{-1}(X)$ .

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que  $\Gamma \backslash S$  soit de Stein.

**Théorème 2.4.** — Soit  $\Gamma \subset G$  un sous-groupe discret qui agit librement sur  $X$ . Si  $X/\Gamma$  est de Stein, alors  $\Gamma \backslash S$  est également de Stein.

*Démonstration.* — Comme le groupe  $\Gamma$  agit par automorphismes de fibré, nous obtenons le fibré holomorphe  $\Gamma \backslash p^{-1}(X) \rightarrow X/\Gamma$  (comparer Proposition 6.1 dans [Mie08]). Comme  $X/\Gamma$  est de Stein, la fibre  $P^-$  est de Stein, et le groupe structural de ce fibré est complexe connexe, nous en déduisons que  $\Gamma \backslash p^{-1}(X)$  est de Stein. Puisque  $\pi(S)$  est de Stein et  $\Gamma \backslash \pi(S)$  est un ouvert dans  $\Gamma \backslash p^{-1}(X)$ , nous concluons que  $\Gamma \backslash \pi(S)$  est de Stein et donc que  $\Gamma \backslash S$  est de Stein.  $\square$

**Exemple.** — (1) Soit  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  et soit  $\Gamma \subset G$  un sous-groupe discret qui agit librement sur le demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$  tel que la surface de Riemann  $R := \mathbb{H}/\Gamma$  est non-compacte. Dans ce cas  $R$  est de Stein, donc le quotient  $\Gamma \backslash S$  est de Stein aussi. Cette observation donne une nouvelle démonstration du Théorème 1.3 (3).

(2) Si  $X = G/K$  est un espace symétrique hermitien arbitraire de type non-compact et si  $\Gamma \subset G$  est cyclique, alors  $X/\Gamma$  et donc  $\Gamma \backslash S$  sont de Stein par [Mie08].

### 3. Un contre-exemple

Dans cette section nous considérons l'exemple explicite du disque  $X = \Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ . Le dual compact de  $X$  est donné par  $Z = \mathbb{P}_1$  et nous avons

$$\Delta \cong \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}_1; |z_0|^2 - |z_1|^2 < 0\} \cong G/K$$

pour  $G = \mathrm{SU}(1, 1)$  et  $K = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1$ .

On vérifie que  $P^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Donc, nous pouvons identifier  $G^{\mathbb{C}}/Q^- \times G^{\mathbb{C}}/Q^+$  avec  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$  où le point  $(eQ^-, eQ^+)$  correspond à  $([0 : 1], [1 : 0])$ . De plus, nous identifions la complexification  $X^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$  avec la  $G^{\mathbb{C}}$ -orbite ouverte de  $(eQ^-, eQ^+)$ , i. e. avec  $(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1) \setminus D$  où nous notons par  $D$  la diagonale dans  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ . Par conséquent,  $p^{-1}(\Delta) = (\Delta \times \mathbb{P}_1) \setminus D$  contient les domaines  $G$ -invariants  $(\Delta \times \Delta) \setminus D$  et  $\Delta \times (\mathbb{P}_1 \setminus \bar{\Delta})$  qui sont de Stein tous les deux. Le groupe  $G$  agit librement et transitivement sur leur frontière  $F := \Delta \times S^1$  qui est alors une hypersurface Levi-plate dans  $p^{-1}(\Delta)$ .

**Lemme 3.1.** — *Le domaine  $\pi(S)$  contient l'hypersurface Levi-plate  $F$ .*

*Démonstration.* — On vérifie directement que pour  $t > 0$  l'élément  $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$  est contenu dans  $S \cap K^{\mathbb{C}}$ . Comme la matrice  $\begin{pmatrix} 1+ix & -ix \\ ix & 1-ix \end{pmatrix}$  se trouve dans  $G = \mathrm{SU}(1, 1)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , leur produit est contenu dans  $S$ . L'orbite par ce produit du point  $([0 : 1], [1 : 0])$  est donnée par

$$([-ie^{-t}x : e^t(1-ix)], [e^{-t}(1+ix) : ie^tx]).$$

Un calcul simple montre que pour le choix  $x = 1$  et  $t = \frac{1}{4} \log(2)$  cet élément est contenu dans  $F$ . En utilisant la multiplication à gauche par  $G$  l'affirmation est démontrée.  $\square$

**Proposition 3.2.** — *Si  $G/\Gamma$  est compact, alors le quotient  $\Gamma \backslash S$  n'est pas de Stein.*

*Démonstration.* — Par la proposition 2.2 le quotient  $\Gamma \backslash S$  est de Stein si et seulement si  $\Gamma \backslash \pi(S)$  est de Stein. Nous avons vu que  $\pi(S)$  contient une hypersurface  $G$ -invariante Levi-plate  $F$  ce qui implique que  $\Gamma \backslash \pi(S)$  contient la hypersurface compacte Levi-plate  $\Gamma \backslash F$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe arbitraire sur  $\Gamma \backslash \pi(S)$  et soit  $z \in \Gamma \backslash F$  un point dans lequel la norme absolue de la restriction de  $f$  sur  $\Gamma \backslash F$  prend son maximum. Comme  $\Gamma \backslash F$  est Levi-plate, il y a une feuille holomorphe qui passe par  $z$ . Le principe du maximum implique que  $f$  doit être constante sur cette feuille. Nous en déduisons que les points de cette feuille ne peuvent pas être séparés par les fonctions holomorphes, i. e. que  $\Gamma \backslash \pi(S)$  n'est pas holomorphiquement séparable, et en particulier, pas de Stein.  $\square$

### Références

[ABK04] D. ACHAB, F. BETTEN & B. KRÖTZ – “Discrete group actions on Stein domains in complex Lie groups”, *Forum Math.* **16** (2004), no. 1, p. 37–68.

- [BCR98] J. BOCHNAK, M. COSTE & M.-F. ROY – *Real algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 36, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.
- [BR01] B. E. BRECKNER & W. A. F. RUPPERT – “On asymptotic behavior and rectangular band structures in  $SL(2, \mathbb{R})$ ”, *J. Lie Theory* **11** (2001), no. 2, p. 559–604.
- [Hei91] P. HEINZNER – “Geometric invariant theory on Stein spaces”, *Math. Ann.* **289** (1991), no. 4, p. 631–662.
- [Hel01] S. HELGASON – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Corrected reprint of the 1978 original.
- [HN93] J. HILGERT & K.-H. NEEB – *Lie semigroups and their applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1552, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Mie08] C. MIEBACH – “Quotients of bounded homogeneous domains by cyclic groups”, 2008, arxiv:math.CV/0803.4476v1.
- [Nee00] K.-H. NEEB – *Holomorphy and convexity in Lie theory*, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 28, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
- [Pal57] R. S. PALAIS – “A global formulation of the Lie theory of transformation groups”, *Mem. Amer. Math. Soc. No.* **22** (1957), p. iii+123.

---

22 Avril 2008

CHRISTIAN MIEBACH, Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstraße 150, D - 44780 Bochum • E-mail : christian.miebach@ruhr-uni-bochum.de • Adresse actuelle: Centre de Mathématiques et d’Informatique, UMR-CNRS 6632 (LATP), 39, rue Joliot-Curie, Université de Provence, 13453 Marseille Cedex 13 France