



HAL
open science

Transformée de Fourier-Mukai sur les schémas formels

Florian Viguié

► **To cite this version:**

| Florian Viguié. Transformée de Fourier-Mukai sur les schémas formels. 2022. hal-03599540

HAL Id: hal-03599540

<https://hal.science/hal-03599540>

Preprint submitted on 7 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Transformée de Fourier-Mukai sur les schémas formels

Florian VIGUIER

12 février 2022

Abstract

In 1981, Mukai constructed the Fourier-Mukai transform for abelian varieties over an algebraically closed field, which gives an equivalence of categories between quasi-coherent sheaves over A and the one over A^\vee , its dual variety. Laumon generalized these results for abelian varieties over a locally noetherian base. In this article, we define a Fourier-Mukai transform for an abelian formal scheme $A/S = \text{Spf}(V)$, where V is a discrete valuation ring, and we extend the classical results of Fourier-Mukai transform to this case. Finally, we discuss the case of the generic fiber A_K of A to obtain an equivalence of categories between coherent sheaves over A_K and the ones over A_K^\vee .

Résumé

En 1981, Mukai a construit la transformée de Fourier-Mukai pour des variétés abéliennes sur un corps algébriquement clos, qui donne une équivalence de catégories entre les faisceaux quasi-cohérents sur A et ceux sur A^\vee , sa variété duale. Laumon a généralisé ces résultats pour les variétés abéliennes sur une base localement noethérienne. Dans cet article, nous définissons une transformée de Fourier-Mukai dans le cas où A est un schéma abélien formel sur $S = \text{Spf}(V)$, avec V un anneau à valuation discrète, et nous étendons les résultats classiques de la transformée de Fourier-Mukai dans ce cas. Nous traitons enfin le cas de la fibre générique A_K de A afin d'obtenir une équivalence de catégories entre les faisceaux cohérents sur A_K et ceux sur A_K^\vee .

Table des matières

1	Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel	3
1.1	Outils de dévissage	3
1.2	Caractérisation des faisceaux quasi-cohérents	4
1.3	Foncteurs agissant sur les faisceaux quasi-cohérents	8
2	Transformée de Fourier-Mukai pour les schémas abéliens formels	11
2.1	Un résultat de commutativité du produit tensoriel et de la limite projective	11
2.2	Le faisceau de Poincaré est compatible aux changements de base	12
2.3	Transformée de Fourier-Mukai pour les schémas en groupes abéliens formels	13
2.3.1	Cas des faisceaux cohérents	13
2.3.2	Cas des faisceaux quasi-cohérents	14
2.4	Action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur un schéma abélien formel principalement polarisé	18
3	Cas des faisceaux cohérents sur une variété analytique rigide avec bonne réduction	20
3.1	Quelques propriétés du morphisme de spécialisation	21
3.2	Dual de la fibre générique	22
3.3	Transformée de Fourier-Mukai rigide sur les faisceaux cohérents	22

Introduction

La transformée de Fourier-Mukai, introduite par Shigeru Mukai dans [Muk81] pour une variété abélienne sur un corps algébriquement clos, est un outil très puissant permettant d'étudier les faisceaux quasi-cohérents sur une variété abélienne. Grâce aux travaux de Mazur-Messing [MM74] et de Laumon [Lau96], cette construction peut être étendue au cas d'une variété abélienne A sur un schéma S localement noethérien. On peut construire un foncteur de la catégorie des S -schémas dans la catégorie des groupes abéliens :

$$Pic^0(A \times \bullet/\bullet) : T \mapsto Pic^0(A \times_S T/T),$$

où $Pic^0(X/T)$ est le groupe abélien des faisceaux de \mathcal{O}_X -modules inversibles \mathcal{L} tels que

$$m^* \mathcal{L} \simeq p_1^* \mathcal{L} \otimes p_2^* \mathcal{L},$$

où $m, p_1, p_2 : X \times_T X \rightarrow X$ sont respectivement la multiplication et les projections canoniques (on dit que \mathcal{L} vérifie le théorème du carré). Pour plus d'informations sur les foncteurs et schémas de Picard on renvoie à [I⁺05], partie 5, ou encore à [FC90], chapitre I.1.

Le foncteur $Pic^0(A \times \bullet/\bullet)$ est représentable par un schéma abélien sur S de même dimension que A , noté A^\vee et appelé variété abélienne duale. La représentabilité de ce foncteur donne un élément universel \mathcal{P} de $Pic^0(A \times A^\vee/A^\vee)$, correspondant à $id_{A^\vee} \in Hom(A^\vee, A^\vee)$. Le faisceau \mathcal{P} est donc un $\mathcal{O}_{A \times A^\vee}$ -module inversible vérifiant le théorème du carré pour la A^\vee -variété abélienne $A \times A^\vee$, qui est appelé faisceau de Poincaré.

On définit alors la transformée de Fourier-Mukai comme étant le foncteur \mathcal{F} de la catégorie dérivée bornée des complexes de faisceaux quasi-cohérents sur A dans la catégorie dérivée bornée des complexes de faisceaux quasi-cohérents sur A^\vee défini par

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) = Rp_*^\vee(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p^* \mathcal{E}^\cdot),$$

où $p : A \times A^\vee \rightarrow A$ et $p^\vee : A \times A^\vee \rightarrow A^\vee$ sont les projections. On définit de même la transformée de Fourier-Mukai duale $\mathcal{F}^\vee : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\vee}) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_A)$ par

$$\mathcal{F}^\vee(\mathcal{E}^\cdot) = Rp_*(\mathcal{P} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p^{\vee*} \mathcal{E}^\cdot).$$

Les propriétés les plus importantes de la transformée de Fourier-Mukai (voir [Muk81]) sont les suivantes

1. Si $\mathcal{E}^\cdot \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_A)$, $\mathcal{F}(\mathcal{E}^\cdot) \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{A^\vee})$.
2. $\mathcal{F} : D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_A) \rightarrow D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{A^\vee})$ réalise une équivalence de catégories.
3. \mathcal{F} est involutive, dans le sens où $\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F} \simeq \langle -1 \rangle^*$ à un faisceau inversible et un décalage près, avec $\langle -1 \rangle : A \rightarrow A$ le morphisme d'inversion (voir par exemple [Lau96]).
4. Si (A, \mathcal{L}) est principalement polarisée, les foncteurs \mathcal{F} et $\otimes \mathcal{L}$ munissent la catégorie $D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_A)$ d'une action de $SL_2(\mathbb{Z})$.

Le but de toute extension de la transformée de Fourier-Mukai est de conserver ces propriétés.

L'objectif des travaux exposés ici est d'étendre la définition de la transformée de Fourier-Mukai, définie sur les faisceaux quasi-cohérents sur une variété abélienne classique, pour en faire un foncteur sur les faisceaux quasi-cohérents sur un schéma abélien formel. Plus précisément, on fixe V un anneau à valuation discrète, π une uniformisante, $p = char(V/\pi) > 0$ et V_i la réduction modulo π^i . On considère (A_i) un système inductif de variétés abéliennes sur les $S_i = Spec(V_i)$ et $\mathcal{A} = \varinjlim A_i$.

Pour construire une transformée de Fourier-Mukai sur \mathcal{A} , on s'appuie sur les transformées de Fourier-Mukai déjà construites sur les A_i . L'idée générale sera alors de faire "commuter" les résultats fondamentaux de la transformée de Fourier-Mukai avec la limite projective.

Dans le premier chapitre, on étudiera en détail les faisceaux quasi-cohérents sur une variété formelle. On se rendra alors compte que les foncteurs image directe et image inverse définis naïvement sur ces faisceaux n'auront pas les bonnes propriétés, ce qui nous poussera à définir de nouveaux foncteurs, d'une manière analogue à ce qui est fait dans [Ber02].

Dans le second chapitre, on donnera une méthode pour étendre la transformée de Fourier-Mukai en un foncteur sur les \mathcal{O} -modules sur un schéma formel. On montre alors que les opérations cohomologiques pour les faisceaux quasi-cohérents au foncteur dérivé de la limite projective et on en déduit les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier-Mukai (Théorèmes 2.20, p.18 et 2.27, p.20).

Dans le troisième chapitre, on se placera sur la fibre générique \mathcal{A}_K (vue comme espace analytique rigide) d'un schéma abélien formel \mathcal{A} et on montrera qu'on peut étendre la transformée de Fourier-Mukai ainsi que ses propriétés fondamentales sur les faisceaux cohérents sur \mathcal{A}_K (Corollaire 3.10, p.23). On déduira ces résultats de ceux de la partie précédente en les faisant commuter au morphisme de spécialisation.

Je remercie Christine Huyghe pour les nombreuses conversations que nous avons eues à propos de cet article ainsi que pour ses précieux conseils. Je souhaite aussi remercier le professeur Urs Hartl pour son aide précieuse et les références qu'il m'a fournies pour la section 3.2, ainsi que Rutger Noot pour les précisions qu'il m'a apportées sur les variétés principalement polarisées.

On considère dans la suite V un anneau à valuation discrète d'uniformisante π et V_i sa réduction modulo π^i .

1 Faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel

Dans cette section, on considère un schéma formel propre et lisse $\mathcal{X} = \varinjlim_i X_i$ sur $Spf(V)$. On fixe \mathcal{I} son idéal de définition maximal (voir [Har77] Prop 9.5). A partir du second chapitre, \mathcal{I} sera l'idéal (π) .

1.1 Outils de dévissage

Étant donnée une catégorie abélienne \mathcal{C} , on notera $D(\mathcal{C})$ la catégorie dérivée de \mathcal{C} , $D^+(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{C})$ dont les objets sont bornés inférieurement, $D^-(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{C})$ dont les objets sont bornés supérieurement et $D^b(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{C})$ dont les objets sont bornés.

On aura besoin dans la suite d'outils de dévissage, en particulier du résultat suivant :

Propriété 1.1. *Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux catégories abéliennes et F et G deux δ -foncteurs de $D^*(\mathcal{C})$ dans $D(\mathcal{C}')$ (où "*" désignera tour à tour "b", "-", "+" et " "). Soit X un objet de $D^*(\mathcal{C})$. On suppose l'existence d'un morphisme de foncteurs $\eta : F \rightarrow G$ tel que pour tout n , η induit un quasi-isomorphisme $F(X^n) \simeq G(X^n)$.*

On suppose de plus l'une des conditions suivantes :

1. $F, G : D^b(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$.
2. $F, G : D^-(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$ sont way-out à gauche.
3. $F, G : D^+(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$ sont way-out à droite.
4. $F, G : D(\mathcal{C}) \rightarrow D(\mathcal{C}')$ sont way-out dans les deux directions.

Alors η induit un quasi-isomorphisme $F(X) \simeq G(X)$.

Pour plus de détails sur les foncteurs way-out et leurs utilisations dans les techniques de dévissage, on revoit à [Har66] Chap I.7.

On rappelle aussi les deux lemmes classiques suivants.

Lemme 1.2 (Formule de la projection). *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schéma quasi-compact et quasi-séparé. Pour tout $\mathcal{E} \in D_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{F} \in D_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_X)$ on a un isomorphisme*

$$Rf_*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{F} \simeq Rf_*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} Lf^* \mathcal{F}).$$

Démonstration. On renvoie à [Sta21, Lemme 08EU]. □

Lemme 1.3 (Changement de base). *Soient $g : S' \rightarrow S$ un morphisme de schémas et $f : X \rightarrow S$ quasi-compact et quasi-séparé. Soit le diagramme de changement de base suivant*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

Si X et S' sont Tor-indépendants sur S (en particulier, si X ou S' est plat sur S) alors pour tout $\mathcal{E} \in D_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_X)$ on a $Rf'_ L(g')^* \mathcal{E} \simeq Lg^* Rf_* \mathcal{E}$.*

Démonstration. On renvoie à [Sta21, Lemme 08IB]. □

1.2 Caractérisation des faisceaux quasi-cohérents

Dans la suite, on dénotera par $D(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ la catégorie dérivée de la catégorie $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules, et $D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ sa sous-catégorie dont les objets sont les complexes bornés supérieurement.

Avant toute chose, on rappelle la définition des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel.

Définition 1.4. *On définit $D_{\text{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ comme étant la sous-catégorie pleine de $D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dont les objets \mathcal{E}^\bullet vérifient*

- $\mathcal{E}_0^\bullet \in D_{\text{qcoh}}^-(X_0)$.
- $\mathcal{E}^\bullet \simeq R\varprojlim_i \mathcal{E}_i^\bullet$.

Où $\mathcal{E}_i^\bullet = \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^\bullet$.

On pose X_\bullet le topos des systèmes projectifs de faisceaux $\mathcal{E}_\bullet = (\mathcal{E}_i)_i$ sur \mathcal{X} , qu'on voit comme un topos annelé en le munissant du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X_\bullet} = (\mathcal{O}_{X_i})_i$. On a alors deux foncteurs (voir [Ber02])

$$R\varprojlim : \mathcal{E}_\bullet \in D^-(\mathcal{O}_{X_\bullet}) \mapsto R\varprojlim(\mathcal{E}_i) \in D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$$

et

$$LS : \mathcal{E}^\bullet \in D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \mapsto (\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}^\bullet)_i \in D^-(\mathcal{O}_{X_\bullet}).$$

Définition 1.5. *Un élément \mathcal{E}_\bullet de $D^-(\mathcal{O}_{X_\bullet})$ est dit quasi-consistant si pour tout i le morphisme canonique*

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_{i+1}^\bullet \rightarrow \mathcal{E}_i^\bullet$$

est un isomorphisme.

On a la caractérisation suivante, énoncée dans [Ber02], bien qu'elle n'y soit pas démontrée.

Théorème 1.6 (Berthelot). *Le foncteur $R\varprojlim$ réalise une équivalence de catégorie (d'inverse LS) entre la catégorie $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et la sous-catégorie pleine de la catégorie $D^-(\mathcal{O}_{X_\bullet})$ formée des objets $(\mathcal{E}_\bullet)_i$ tels que :*

- Le complexe \mathcal{E}_0 appartient à $D_{qcoh}^-(X_0)$.
- \mathcal{E}_\bullet est quasi-consistant.

Dans la suite cette catégorie sera notée $\widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_{X_\bullet})$.

Démonstration. Ce résultat est un corollaire direct de la proposition B.5 en annexe B de [BO78]. \square

Définition 1.7. *Soit \mathcal{I} l'idéal de définition maximal de \mathcal{X} . On pose $A = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et pour tout i , $A_i = A/\mathcal{I}^i A$. On définit alors $D_{qcoh}^-(A)$ comme la sous-catégorie pleine de $D^-(A)$ dont les éléments M vérifient $M \simeq R\varprojlim_i M_i$, où $M_i = M \otimes_A^{\mathbb{L}} A_i$.*

La caractérisation du théorème précédent s'applique aussi dans ce cas et donne une équivalence de catégories entre $D_{qcoh}^-(A)$ et la sous-catégorie pleine de $D^-(A_\bullet)$, notée $\widetilde{D_{qcoh}^-}(A_\bullet)$, dont les objets $(M_i)_i$ vérifient

$$\forall i, A_i \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} M_{i+1} \simeq M_i.$$

Théorème 1.8. *On suppose que $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A)$ où A est un anneau π -adiquement complet. Le foncteur $\Lambda : D^-(A) \rightarrow D^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ défini par*

$$\Lambda(M) = R\varprojlim_i (\mathcal{O}_{X_i} \otimes_A^{\mathbb{L}} M)$$

est à image dans $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

De plus, $\Lambda : D_{qcoh}^-(A) \rightarrow D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ réalise une équivalence de catégories de quasi-inverse $R\Gamma$.

Pour la démonstration nous allons avoir besoin du résultat suivant, tiré de [Sta21, Lemme 0D60].

Lemme 1.9. *Le foncteur $R\varprojlim$ commute avec le foncteur $R\Gamma$.*

Remarque. *Le foncteur $R\Gamma$ est bien défini sur $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ car pour tout i , $R\Gamma$ est de dimension cohomologique finie sur $D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{X_i})$ et $R\Gamma$ commute à $R\varprojlim$ qui est de dimension cohomologique 1 (voir par exemple [Sta21, Lemme 091D]), donc $R\Gamma$ est de dimension cohomologique finie sur $D_{qcoh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.*

Démonstration. (du théorème 1.8.) Soit $M \in D^-(A)$. Pour montrer que $\Lambda(M)$ est quasi-cohérent, on utilise la caractérisation du théorème précédent en posant $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{X_i} \otimes_A^{\mathbb{L}} M$ pour tout i .

- $\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_{X_0} \otimes_A^{\mathbb{L}} M$ est clairement dans $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{X_0})$.
- Pour tout i , on a

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{X_{i+1}} \otimes_A^{\mathbb{L}} M \simeq \mathcal{O}_{X_i} \otimes_A^{\mathbb{L}} M = \mathcal{E}_i.$$

Ainsi, $\Lambda(M)$ est quasi-cohérent.

Pour la suite on va procéder par dévissage. Pour ce faire, on va en grande partie s'appuyer sur la propriété 1.1.

Pour montrer l'équivalence de catégories on va passer par des catégories intermédiaires. On a alors les foncteurs suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
& & R\Gamma & & \\
& \swarrow & & \searrow & \\
D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) & \xrightarrow{LS} & \widetilde{D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{X_\bullet})} & \xrightarrow{\Psi} & \widetilde{D_{qcoh}^-(A_\bullet)} & \xrightarrow{R\varprojlim} & D_{qcoh}^-(A) \\
& \nwarrow & & \swarrow & & \nwarrow & \\
& & R\varprojlim & & \Phi & & LS \\
& & & & & & \\
& \searrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
& & \Lambda & & & &
\end{array}$$

où

$$\Psi((\mathcal{E}_i)_i) = (R\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i))_i$$

et

$$\Phi((M_i)_i) = (\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} M_i)_i.$$

Notons que, comme les X_i sont affines, $R\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i)$ est le complexe constitué des $\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i^n)$. De même, \mathcal{O}_{X_i} est plat sur A_i , donc $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} M_i$ est le complexe constitué des $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} M_i^n$.

Comme $R\Gamma$ et $R\varprojlim$ commutent, on a les isomorphismes suivants :

$$R\varprojlim \circ \Psi \circ LS(\mathcal{E}^\cdot) = R\varprojlim_i (R\Gamma(X_i, \mathcal{E}^\cdot \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{X_i})) \simeq R\Gamma(\mathcal{X}, R\varprojlim_i (\mathcal{E}^\cdot \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{X_i})) = R\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}^\cdot).$$

$$R\varprojlim \circ \Phi \circ LS(M^\cdot) = R\varprojlim_i (\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} A_i \otimes_A^{\mathbb{L}} M^\cdot) \simeq R\varprojlim_i (\mathcal{O}_{X_i} \otimes_A^{\mathbb{L}} M^\cdot) = \Lambda(M^\cdot).$$

Ainsi, pour montrer que $R\Gamma$ et Λ réalisent une équivalence de catégories, il suffit de montrer que c'est le cas pour Ψ et Φ .

1. Dans un premier temps, il faut s'assurer que les foncteurs Ψ et Φ sont bien définis, dans le sens où il faut que leurs images vérifient les conditions des catégories $\widetilde{D_{qcoh}^-}^*$.

Soit $(M_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(A_\bullet)$. Alors

- $\Phi((M_j)_j)_0 = \mathcal{O}_{X_0} \otimes_{A_0}^{\mathbb{L}} M_0$ est clairement un objet de $D_{qcoh}^-(X_0)$.
- Soit $i \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \Phi((M_j)_j)_{i+1} &= \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{X_{i+1}} \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} M_{i+1} \simeq \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} M_{i+1} \\
&\simeq \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} A_i \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} M_{i+1} \simeq \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} M_i = \Phi((M_j)_j)_i,
\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme venant du fait que $(M_i) \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(A_\bullet)$.

Ainsi, $\Phi((M_j)_j) \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_{X_\bullet})$.

2. Soit $(\mathcal{E}_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_{X_\bullet})$. Soit $i \in \mathbb{N}$, alors la condition à vérifier est

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i).$$

Or on sait que $\mathcal{E}_i \simeq \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_{i+1}$, donc il faut vérifier que

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}_{i+1}).$$

Comme $X_{i+1} = \text{Spec}(A_{i+1})$ est un schéma affine, tout faisceau quasi-cohérent est quotient d'un $\mathcal{O}_{X_{i+1}}$ -module libre. Ainsi, \mathcal{E}_{i+1} est quasi-isomorphe à un complexe \mathcal{L}_{i+1} de faisceaux libres. Il suffit alors de vérifier que

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{L}_{i+1}) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}_{i+1}).$$

Ici X_{i+1} est lisse et donc le foncteur $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \bullet$ a dimension cohomologique finie. On cherche donc à comparer $F(\mathcal{L}_{i+1})$ et $G(\mathcal{L}_{i+1})$ où F et G ont dimension cohomologique finie. D'après la propriété 1.1 (p.3), il suffit de vérifier que

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{L}) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}),$$

où \mathcal{L} est un faisceau libre sur X_{i+1} .

Remarque. Dans le cas général, le foncteur $\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \bullet$ est way-out à gauche, ce qui suffit à appliquer le lemme pour \mathcal{E}_i qui est supérieurement borné.

De plus, X_{i+1} est quasi-compact (car affine) donc Γ commute aux limites inductives ([Kem80] Prop 6). Comme tout $\mathcal{O}_{X_{i+1}}$ -module libre s'écrit comme limite inductive de $\mathcal{O}_{X_{i+1}}$ -module libres de rang fini, il suffit de montrer le résultat dans le cas où $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{X_{i+1}}^k$. Dans ce cas, on a clairement

$$R\Gamma(X_{i+1}, \mathcal{O}_{X_{i+1}}^k) \otimes_{A_{i+1}}^{\mathbb{L}} A_i \simeq A_i^k \simeq R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{X_{i+1}}^k).$$

$\Psi(\mathcal{E}_i)$ est alors bien un objet de $\widetilde{D_{qcoh}^-}(A_\bullet)$.

3. On va maintenant vérifier que Ψ et Φ réalisent une équivalence de catégorie.

Soit $(M_i)_i \in \widetilde{D_{qcoh}^-}(A_\bullet)$. Pour montrer que $\Psi \circ \Phi((M_i)_i) \simeq (M_i)_i$, on montre pour tout i que

$$R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} M_i) \simeq M_i.$$

De même que précédemment, comme tout A_i -module est quotient d'un A_i -module libre, M_i est quasi-isomorphe à un complexe de A_i -modules libres L_i et il suffit de montrer que

$$R\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} L_i) \simeq L_i.$$

A nouveau, les deux foncteurs qui apparaissent sont de dimension cohomologique finie (on rappelle que $(\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} L_i)^n = \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} L_i^n$), donc d'après la propriété 1.1 il suffit de montrer que

$$\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} L_i) \simeq L_i,$$

pour tout A_i -module libre L_i . Enfin, comme Γ commute aux limites inductives, il suffit de vérifier que

$$\Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} A_i^k) \simeq A_i^k,$$

ce qui est vrai.

4. Soit $(\mathcal{E}_i)_i \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{X_\bullet})$. Pour montrer que $\Phi \circ \Psi((\mathcal{E}_i)_i) \simeq (\mathcal{E}_i)_i$, on montre pour tout i que

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i}^{\mathbb{L}} R\Gamma(X_i, \mathcal{E}_i) \simeq \mathcal{E}_i.$$

Pour les mêmes raisons qu'au point 2, il suffit de vérifier l'isomorphisme dans le cas où \mathcal{E}_i est réduit à $\mathcal{O}_{X_i}^k$. Dans ce cas on a bien

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes_{A_i} \Gamma(X_i, \mathcal{O}_{X_i}^k) \simeq \mathcal{O}_{X_i}^k.$$

Ainsi, Ψ et Φ réalisent une équivalence de catégorie et il en est donc de même pour $R\Gamma$ et Λ . \square

1.3 Foncteurs agissant sur les faisceaux quasi-cohérents

La définition des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma formel est beaucoup plus rigide que celle sur les variétés classiques. Ce faisant, la définition naturelle du pull-back sur $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ ne garantit pas que le pull-pack d'un quasi-cohérent soit quasi-cohérent, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit V un anneau à valuation discrète d'uniformisante π .

Soit $\mathcal{X} = Spf(V\{t\})$ avec $V\{t\} = \left\{ \sum_{k \geq 0} a_k t^k \mid v_\pi(a_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \right\}$. On considère la projection sur la première coordonnée $p : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Grâce au théorème précédent, on définit un objet $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{X})$ par

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = \left\{ \sum_{k,l \geq 0} a_{k,l} t^k \partial^l \mid a_{k,l} \in V, v_\pi(a_{k,l}) \xrightarrow[k,l \rightarrow \infty]{} \infty \right\}.$$

Remarque. \mathcal{E} est le faisceau $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ de Berthelot. On renvoie à [Ber02] pour plus de détails sur ce faisceau. On ne se servira de ce faisceau qu'en guise d'exemple et on n'utilisera à aucun moment dans cet article la théorie des opérateurs différentiels de Berthelot.

Dans ce cas, les sections globales du faisceau $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} \otimes_{p^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} p^{-1}\mathcal{E}$ (le pull-back classique) sont données par

$$\Gamma(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{F}) = V\{s, t\} \otimes_{V\{t\}} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}),$$

c'est-à-dire les éléments de la forme $\sum_{k < \infty} b_k(s, t) \otimes c_k(t, \partial)$, où les b_k et les c_k sont des séries respectivement en s, t et en t, ∂ à coefficients dans V et à décroissance π -adique, dans le sens où elles sont de la forme

$$b_k(s, t) = \sum_{n,m \geq 0} b_{k,n,m} s^n t^m \text{ et } c_k(t, \partial) = \sum_{n,m \geq 0} c_{k,n,m} t^n \partial^m$$

avec $v_\pi(b_{k,n,m}) \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} \infty$ et $v_\pi(c_{k,n,m}) \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} \infty$.

L'anneau des sections globales de \mathcal{F} n'est pas complet, donc \mathcal{F} ne peut pas être quasi-cohérent.

Ce constat pousse à définir autrement le tiré en arrière d'un objet de $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

Définition 1.10. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels. On pose

$$f^! \mathcal{E} = \mathop{\mathrm{R}\varprojlim}_i (L f_i^* \mathcal{E}_i).$$

Remarque. Si tous les f_i sont plats, $f^! \mathcal{E} \simeq \mathop{\mathrm{R}}\lim_{\leftarrow i} (f_i^* \mathcal{E}_i)$.

Propriété 1.11. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels p -adiques sur $\mathrm{Spf}(V)$. On suppose que pour tout i , X_i et Y_{i+1} sont Tor-indépendants sur X_{i+1} ainsi que $X_i \simeq X_{i+1} \times_{Y_{i+1}} Y_i$. Alors pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ on a $f^! \mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on utilise la caractérisation donnée par le théorème 1.6 (p.5).

- \mathcal{E}_0 étant quasi-cohérent, il en est de même pour $Lf_0^* \mathcal{E}_0$, du fait qu'il s'agit cette fois de faisceaux sur des variétés classiques.
- Pour ce point il faut faire plus attention. En effet, quand on énonce la caractérisation du théorème 1.6, on commet un abus de langage en écrivant $\mathcal{E}_{i+1}^* \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{O}_{X_i} \simeq \mathcal{E}_i^*$ car les faisceaux ne sont pas tous sur la même variété. La condition s'écrit plus précisément

$$\mathcal{E}_{i+1}^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{i+1}}} \psi_{i,*} \mathcal{O}_{Y_i} \simeq \psi_{i,*} \mathcal{E}_i^*,$$

avec $\psi_i : Y_i \rightarrow Y_{i+1}$ donné par le système inductif $(Y_i)_i$. Ce détail nous force à utiliser la formule du changement de base (lemme 1.3) et donc à avoir des conditions supplémentaires pour le morphisme f .

Les conditions imposées dans l'énoncé permettent d'utiliser la formule du changement de base dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \psi_i \\ X_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & Y_{i+1} \end{array}$$

et permettent de trouver que $\phi_{i,*} Lf_i^* \mathcal{E}_i \simeq Lf_{i+1}^* \psi_{i,*} \mathcal{E}_i$, $\phi_{i,*}$ et $\psi_{i,*}$ étant des immersions fermées.

Ainsi

$$\phi_{i,*} Lf_i^* \mathcal{E}_i \simeq Lf_{i+1}^* (\mathcal{E}_{i+1}^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{i+1}}} \psi_{i,*} \mathcal{O}_{Y_i}) \simeq Lf_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1}^* \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \phi_{i,*} Lf_i^* \mathcal{O}_{Y_i} \simeq Lf_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1}^* \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \phi_{i,*} \mathcal{O}_{X_i}.$$

□

Corollaire 1.12. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels plats sur $\mathrm{Spf}(V)$. Alors pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ on a $f^! \mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

Démonstration. Tout repose sur le lemme suivant.

Lemme 1.13. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels plats sur $\mathrm{Spf}(V)$. Alors pour tout i

- $X_i \simeq X_{i+1} \times_{Y_{i+1}} Y_i$
- X_i et Y_{i+1} sont Tor-indépendants sur X_{i+1} .

Démonstration. • Comme les schémas sont sur $\mathrm{Spf}(V)$, on a les isomorphismes suivants

$$X_{i+1} \times_{Y_{i+1}} Y_i \simeq X_{i+1} \times_{Y_{i+1}} (Y_{i+1} \times_{S_{i+1}} S_i) \simeq X_{i+1} \times_{S_{i+1}} S_i \simeq X_i,$$

où $S_i = \mathrm{Spec}(V/\pi^i V)$ avec π une uniformisante de V .

- On a la suite exacte de V -modules suivante

$$\cdots \xrightarrow{\times \pi^i} V/\pi^{i+1}V \xrightarrow{\times \pi} V/\pi^{i+1}V \xrightarrow{\times \pi^i} V/\pi^{i+1}V \longrightarrow V/\pi^iV \longrightarrow 0.$$

On fixe $x \in \mathcal{X}$ et $y = f(x)$. Par platitude de \mathcal{Y} , en appliquant le foncteur $\cdot \otimes_V \mathcal{O}_{\mathcal{Y},y}$ à la suite exacte précédente on trouve la suite exacte

$$\cdots \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{Y_{i+1},y} \xrightarrow{\times \pi} \mathcal{O}_{Y_{i+1},y} \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{Y_{i+1},y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_i,y} \longrightarrow 0.$$

Ainsi on vient d'exhiber une résolution projective plate sur $\mathcal{O}_{Y_{i+1},y}$ de $\mathcal{O}_{Y_i,y}$.

En appliquant le foncteur $\cdot \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{i+1},y}} \mathcal{O}_{X_{i+1},x}$ on trouve un complexe quasi-isomorphe à

$\text{Tor}_{\mathcal{O}_{Y_{i+1},y}}(\mathcal{O}_{Y_i,y}, \mathcal{O}_{X_{i+1},x}) :$

$$\cdots \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{X_{i+1},x} \xrightarrow{\times \pi} \mathcal{O}_{X_{i+1},x} \xrightarrow{\times \pi^i} \mathcal{O}_{X_{i+1},x} \longrightarrow 0.$$

Comme \mathcal{X} est plat, ce complexe est quasi-isomorphe au complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_i,x} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

qui n'a de cohomologie qu'en degré 0. Ainsi, X_i et Y_{i+1} sont Tor-indépendants sur X_{i+1} . □

□

On conserve aussi certaines propriétés du pull-back classique.

Propriété 1.14. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$.

1. Pour tout $\mathcal{E} \in D_{\text{qcoh}}(\mathcal{O}_{\mathcal{Z}})$, on a $f^!g^!\mathcal{E} \simeq (f \circ g)^!\mathcal{E}$.
2. Pour tout \mathcal{E} cohérent sur \mathcal{Y} , $f^!\mathcal{E}$ est cohérent sur \mathcal{X} .
3. Pour tout \mathcal{E} inversible sur \mathcal{Y} , $f^!\mathcal{E}$ est inversible sur \mathcal{X} .

Démonstration. 1. Par définition, $\mathcal{E} \simeq R\varprojlim_i \mathcal{E}_i$. Ainsi :

$$f^!g^!\mathcal{E} = R\varprojlim_i f_i^*g_i^*\mathcal{E}_i \simeq R\varprojlim_i (f_i \circ g_i)^*\mathcal{E}_i = (f \circ g)^!\mathcal{E}.$$

2. On sait que dans ce cas $\mathcal{E} \simeq \varprojlim_i \mathcal{E}_i$ où les $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{Y_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{E}$ sont cohérents. Ainsi, les $f_i^*\mathcal{E}_i$ sont cohérents aussi, et il en va donc de même pour $f^!\mathcal{E} \simeq \varprojlim_i f_i^*\mathcal{E}_i$.

3. On fixe un point x dans \mathcal{X} et $y = f(x)$. Le faisceau \mathcal{E} étant inversible, il existe un ouvert U de \mathcal{Y} contenant y et trivialisant \mathcal{E} , et donc $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{Y_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}} \mathcal{E}$ pour tout i . On pose $V = f^{-1}(U)$, de sorte que pour tout i $(f_i^*\mathcal{E}_i)|_V \simeq \mathcal{O}_{X_i|V}$. Ainsi, $f^!\mathcal{E}|_V \simeq \varprojlim_i (f_i^*\mathcal{E}_i)|_V \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}|V}$. □

Remarque. Attention : tous les résultats classiques ne sont pas conservés ! Par exemple il n'est plus vrai que $f^!(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \simeq f^!\mathcal{E} \otimes f^!\mathcal{F}$ (sauf si un des deux faisceaux est inversible, par exemple). La raison étant que \otimes ne commute en général pas avec \varprojlim . On peut s'en convaincre en constatant que $\varprojlim(\mathbb{Z}/p^i) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}_p$ alors que $\varprojlim(\mathbb{Z}/p^i \otimes \mathbb{Q}) = 0$.

On peut aussi construire un analogue à l'image directe sur les schémas formels.

Définition 1.15. Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme de schémas formels. On pose

$$f_+ \mathcal{E} = R\varprojlim_i (Rf_{i,*} \mathcal{E}_i).$$

Contrairement au cas de l'image inverse, cette définition n'apporte en réalité pas grand chose, étant donné la propriété suivante.

Propriété 1.16.

$$f_+ \simeq Rf_*.$$

Démonstration. Il s'agit d'un résultat de [Sta21, Lemme 0BKP]. □

2 Transformée de Fourier-Mukai pour les schémas abéliens formels

À présent, on va étendre la définition classique de la transformée de Fourier-Mukai en un foncteur sur les schémas formels. Pour ce faire, on va avoir besoin de plusieurs outils pour faire passer à la limite projective des résultats connus sur les variétés classiques, et ainsi obtenir leur équivalent sur les schémas formels.

2.1 Un résultat de commutativité du produit tensoriel et de la limite projective

De manière générale, le produit tensoriel et la limite projective ne commutent pas. Cependant, on peut tout de même avoir un morphisme en imposant la platitude d'un des deux systèmes projectifs.

Lemme 2.1. Soit $(R_i)_i$ un système projectif d'anneaux (ou de faisceaux d'anneaux) et soit $R = \varprojlim_i R_i$. On fixe $(L_i)_i \in \text{Mod}(R_\bullet)$ un système projectif de modules et $L = \varprojlim_i L_i$ (qui est donc un R -module). On fixe aussi $(K_i)_i \in D^-(\text{Mod}(R_\bullet))$ et $K = R\varprojlim_i K_i$. On suppose enfin que pour tout i , L_i est plat sur R_i et que L est plat sur R .

Alors on a un morphisme

$$K \otimes_R L \rightarrow R\varprojlim_i (K_i \otimes_{R_i} L_i).$$

Démonstration. Par définition (ou caractérisation) de \varprojlim (voir [Sta21, Lemme 0CQD]), on a le triangle distingué suivant

$$K \rightarrow \prod K_i \rightarrow \prod K_i \rightarrow K[1],$$

où le second morphisme est donné par $\phi : (k_i)_i \mapsto (k_i - f_{i+1}(k_{i+1}))_i$, si on note $f_i : K_i \rightarrow K_{i-1}$ les morphismes du système projectif $(K_i)_i$.

Comme L est plat sur R , le foncteur $\cdot \otimes_R L$ est un δ -foncteur (il est son propre foncteur dérivé) et ainsi on a le triangle distingué suivant

$$K \otimes_R L \rightarrow \left(\prod K_i \right) \otimes_R L \rightarrow \left(\prod K_i \right) \otimes_R L \rightarrow K \otimes_R L[1].$$

Or pour tout i on a un morphisme $p_i \otimes q_i : \left(\prod K_i \right) \otimes_R L \rightarrow K_i \otimes_{R_i} L_i$ où p_i est la projection donnée par la propriété universelle du produit et q_i est donné par celle de la limite projective. Ainsi, par propriété universelle du produit, on trouve un morphisme $\left(\prod K_i \right) \otimes_R L \rightarrow \prod (K_i \otimes_{R_i} L_i)$.

De plus, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\prod K_i) \otimes L & \xrightarrow{\phi \otimes id} & (\prod K_i) \otimes L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod (K_i \otimes L_i) & \xrightarrow{\psi} & \prod (K_i \otimes L_i) \end{array}$$

avec $\psi : (k_i \otimes l_i)_i \mapsto (k_i \otimes l_i - (f_{i+1} \otimes g_{i+1})(k_{i+1} \otimes l_{i+1}))_i$, où les $g_i : L_i \rightarrow L_{i-1}$ sont les morphismes du système $(L_i)_i$.

On trouve alors un morphisme de triangles distingués :

$$\begin{array}{ccccccc} K \otimes L & \longrightarrow & (\prod K_i) \otimes L & \longrightarrow & (\prod K_i) \otimes L & \longrightarrow & K \otimes L[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R\varprojlim_i (K_i \otimes L_i) & \longrightarrow & \prod (K_i \otimes L_i) & \longrightarrow & \prod (K_i \otimes L_i) & \longrightarrow & R\varprojlim_i (K_i \otimes L_i)[1]. \end{array}$$

L'existence de ce morphisme de triangles à partir des deux morphismes de complexes de faisceaux est donnée par un axiome de la définition des catégories dérivées (dans [Har66], il est appelé (TR3)).

Le morphisme de complexes en pointillés est le morphisme souhaité. \square

Corollaire 2.2. Soient (X_i) un système inductif de schémas sur les S_i et $\mathcal{X} = \varinjlim X_i$ le schéma formel associé. On fixe (\mathcal{L}_i) un système projectif de faisceaux inversibles sur les X_i et $\mathcal{L} = \varprojlim \mathcal{L}_i$ tels que \mathcal{L} est inversible sur \mathcal{X} . On fixe aussi (\mathcal{E}_i) un système projectif d'objets de $D^-(\mathcal{O}_{X_i})$ et $\mathcal{E} = R\varprojlim \mathcal{E}_i$.

Alors on a un isomorphisme

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L} \simeq R\varprojlim_i (\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}_i).$$

Démonstration. La propriété précédente assure qu'on a un morphisme

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L} \rightarrow R\varprojlim_i (\mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}^{\mathbb{L}} \mathcal{L}_i).$$

Il reste alors à montrer que ce morphisme réalise un isomorphisme au voisinage de chaque point x de \mathcal{X} . \mathcal{L} étant inversible, il existe un ouvert U contenant x tel que $\mathcal{L}|_U = \mathcal{O}_{\mathcal{X}|U}$. Comme $\mathcal{L}_i \simeq \mathcal{L}/\pi^i$, l'ouvert U trivialisait aussi les \mathcal{L}_i . Ainsi, le morphisme se réduit à

$$\mathcal{E}|_U \rightarrow R\varprojlim_i (\mathcal{E}_i|_U),$$

qui est un isomorphisme (voir par exemple [Sta21, Section 009E]). \square

2.2 Le faisceau de Poincaré est compatible aux changements de base

Soit A une variété abélienne sur S . On note A^\vee la variété abélienne duale de A .

Propriété 2.3. Soit T un S -schéma. On pose $A' = A \times_S T$.

Alors $A'^\vee \simeq A^\vee \times_S T$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de la construction de la variété abélienne duale, de la propriété universelle du produit et du lemme de Yoneda. \square

Corollaire 2.4. Notons $\alpha_i : A_i \times_{S_i} A_i^\vee \hookrightarrow A_{i+1} \times_{S_{i+1}} A_{i+1}^\vee$ l'immersion fermée canonique. Si \mathcal{P}_i désigne le faisceau de Poincaré associé à A_i , alors $\mathcal{P}_i \simeq \alpha_i^* \mathcal{P}_{i+1}$.

2.3 Transformée de Fourier-Mukai pour les schémas en groupes abéliens formels

Dans toute cette partie on considère V un anneau à valuation discrète d'uniformisante π , $p = \text{char}(V/\pi V) > 0$. On note $S = \text{Spec}(V)$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $V_i = V/\pi^i V$ et $S_i = \text{Spec}(V_i)$. On fixe (A_i) un système inductif de variétés abéliennes sur les V_i .

On va s'intéresser au schéma formel $\mathcal{A} = \varinjlim_i A_i$ sur $\mathcal{S} = \text{Spf}(V)$.

Les propriétés suivantes sont immédiates.

Propriété 2.5. *La famille $(A_i^\vee)_i$ est un système inductif.*

Définition 2.6. *On définit le schéma formel dual de \mathcal{A} par $\mathcal{A}^\vee = \varinjlim_i A_i^\vee$.*

Propriété 2.7. *La famille $(\mathcal{P}_i)_i$ des faisceaux de Poincaré associés aux variétés A_i est un système projectif.*

Définition 2.8. *On définit le faisceau de Poincaré associé à \mathcal{A} comme $\mathcal{P} = \varprojlim_i \mathcal{P}_i$, qui est donc un faisceau cohérent (et même inversible) sur $\mathcal{A} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{A}^\vee$.*

2.3.1 Cas des faisceaux cohérents

On va dans un premier temps construire la transformée de Fourier-Mukai formelle sur les faisceaux cohérents. Cette décision est motivée par le fait qu'un faisceau cohérent sur \mathcal{A} est isomorphe à la limite projective de ses réductions sur les A_i . Dans ce cas, les foncteurs images directe et inverse sur \mathcal{A} ont la même définition que ceux sur les A_i .

Définition 2.9. *On note $p : \mathcal{A} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{A}^\vee \rightarrow \mathcal{A}$ et $p^\vee : \mathcal{A} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{A}^\vee \rightarrow \mathcal{A}^\vee$ les deux projections canoniques. Pour tout faisceau cohérent \mathcal{E} sur \mathcal{A} , on définit la transformée de Fourier-Mukai de \mathcal{E} par*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) = R p_*^\vee (L p^* \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\vee}}^{\mathbb{L}} \mathcal{P}) \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\vee}).$$

Remarques. • p est plat, donc $L p^* = p^*$.

- $\otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{P} = \otimes \mathcal{P}$ (car \mathcal{P} est inversible donc plat).
- Comme \mathcal{E} est cohérent, il est π -adiquement complet et

$$\mathcal{E} = R \varprojlim_i \mathcal{E}_i = \varprojlim_i \mathcal{E}_i,$$

$$\text{où } \mathcal{E}_i = \mathcal{E} / \pi^i \mathcal{E}.$$

Lemme 2.10. *On a l'isomorphisme suivant :*

$$\varprojlim_i (p_i^* \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{P}_i) \simeq p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P},$$

où $p_i : A_i \times_S A_i^\vee \rightarrow A_i$ est la projection canonique.

Démonstration. $p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}$ est cohérent, donc $p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} \simeq \varprojlim_i (p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} / \pi^i)$.

De plus, $p^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} / \pi^i \simeq p_i^* \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{P}_i$. □

Propriété 2.11. $R p_*^\vee$ commute avec $R \varprojlim$. En particulier,

$$R p_*^\vee \varprojlim_i (p_i^* \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{P}_i) \simeq R \varprojlim_i R p_{i,*}^\vee (p_i^* \mathcal{E}_i \otimes \mathcal{P}_i).$$

Démonstration. On renvoie à [Sta21, Lemme 0BKP]. □

Propriété 2.12. *Pour tout faisceau cohérent \mathcal{E} sur \mathcal{A} ,*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq \mathop{\mathrm{R}}\lim_{\leftarrow i} \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i),$$

où \mathcal{F}_i désigne la transformée de Fourier-Mukai sur A_i .

Démonstration. Il suffit de mettre tous les résultats précédents bout à bout. □

2.3.2 Cas des faisceaux quasi-cohérents

Pour les faisceaux quasi-cohérent, on va utiliser les foncteurs image inverse et image directe formels construits dans la partie précédente. On définit la transformée de Fourier-Mukai formelle de la façon suivante.

Définition 2.13. *Soit $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$. On définit la transformée de Fourier-Mukai de \mathcal{E} par*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) = p_+^{\vee}(p^! \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{P}).$$

On définit symétriquement \mathcal{F}^{\vee} pour les objets de $D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\vee}})$.

Avant de poursuivre, remarquons le résultat suivant, induit par la définition du foncteur image inverse sur les schémas formels.

Propriété 2.14. *Soient $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$, $p : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{\vee} \rightarrow \mathcal{A}$ et pour tout i , $p_i : A_i \times A_i^{\vee} \rightarrow A_i$. Dans ce cas,*

$$p^! \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{P} \simeq \mathop{\mathrm{R}}\lim_{\leftarrow i} (p_i^* \mathcal{E}_i \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{P}_i).$$

Démonstration. On sait que \mathcal{P} est inversible et par définition, $p^! \mathcal{E} = \mathop{\mathrm{R}}\lim_{\leftarrow i} p_i^* \mathcal{E}_i$. Ainsi, on peut appliquer le corollaire 2.2 (p.12). □

Ce résultat permet de montrer que la transformée de Fourier-Mukai définie plus haut commute à la limite projective.

Corollaire 2.15. *Pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$,*

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq \mathop{\mathrm{R}}\lim_{\leftarrow i} \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i),$$

où \mathcal{F}_i est la transformée de Fourier-Mukai sur A_i .

Démonstration. Il suffit d'utiliser le résultat précédent, la propriété 1.16 (p.11) et la commutativité de Rp_*^{\vee} et $\mathop{\mathrm{R}}\lim_{\leftarrow}$. □

Grâce à ce résultat, on peut déduire les propriétés importantes de la transformée de Fourier-Mukai formelle à partir de celles déjà connues sur la transformée de Fourier-Mukai classique.

Propriété 2.16. *Pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$, $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \in D_{\mathrm{qcoh}}^-(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^{\vee}})$.*

Démonstration. On va utiliser le corollaire précédent et montrer que le système $(\mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i))_i$ est dans $\widetilde{D_{qcoh}^-}(\mathcal{O}_{A_\bullet})$ en utilisant la caractérisation du théorème 1.6 (p.5).

On sait déjà par construction de \mathcal{F}_0 que $\mathcal{F}_0(\mathcal{E}_0) \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A_0})$. Il reste alors à montrer que pour tout i

$$\mathcal{F}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{A_i^\vee} \simeq \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i).$$

Plus précisément, avec les notations du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xleftarrow{p_i} & A_i \times A_i^\vee & \xrightarrow{p_i^\vee} & A_i^\vee \\ \downarrow \beta_i & & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \beta_i^\vee \\ A_{i+1} & \xleftarrow{p_{i+1}} & A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee & \xrightarrow{p_{i+1}^\vee} & A_{i+1}^\vee \end{array}$$

il faut montrer que

$$\mathcal{F}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*}^\vee \mathcal{O}_{A_i^\vee} \simeq \beta_{i,*}^\vee \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i),$$

en sachant que

$$\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i} \simeq \beta_{i,*} \mathcal{E}_i.$$

Remarquons aussi que comme β_i est une immersion fermée le foncteur $\beta_{i,*}$ est exact et donc son propre foncteur dérivé. Pour montrer l'isomorphisme ci-dessus on va s'appuyer sur le lemme suivant qui est une conséquence directe du lemme 1.3 (p.4) car p_{i+1} est plat.

Lemme 2.17. *Pour tout $\mathcal{E}_i \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A_i})$, $p_{i+1}^* \beta_{i,*} \mathcal{E}_i \simeq \alpha_{i,*} p_i^* \mathcal{E}_i$.*

Grâce à ce lemme et à la formule de la projection (lemme 1.2 en page 4), on trouve

$$\begin{aligned} \beta_{i,*}^\vee \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) &\simeq \beta_{i,*}^\vee R p_{i,*}^\vee (\mathcal{P}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i \times A_i^\vee}} p_i^* \mathcal{E}_i) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\alpha_{i,*} (\alpha_i^* \mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_i \times A_i^\vee}} p_i^* \mathcal{E}_i)) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} \alpha_{i,*} p_i^* \mathcal{E}_i) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \beta_{i,*} \mathcal{E}_i). \end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'hypothèse :

$$\begin{aligned} \beta_{i,*}^\vee \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* (\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i})) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} p_{i+1}^* \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i}) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} \alpha_{i,*} p_i^* \mathcal{O}_{A_i}) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} \alpha_{i,*} \mathcal{O}_{A_i \times A_i^\vee}). \end{aligned}$$

D'un autre côté, on trouve que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*}^\vee \mathcal{O}_{A_i^\vee} &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*}^\vee \mathcal{O}_{A_i^\vee} \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} p_{i+1}^* \beta_{i,*}^\vee \mathcal{O}_{A_i^\vee}) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} \alpha_{i,*} p_i^* \mathcal{O}_{A_i^\vee}) \\ &\simeq R p_{i+1,*}^\vee (\mathcal{P}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}} p_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1} \times A_{i+1}^\vee}}^{\mathbb{L}} \alpha_{i,*} \mathcal{O}_{A_i \times A_i^\vee}). \end{aligned}$$

Ainsi $\beta_{i,*}^{\vee} \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) \simeq \mathcal{F}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_{i+1}^{\vee}}} \beta_{i,*}^{\vee} \mathcal{O}_{A_i^{\vee}}$.

□

Propriété 2.18. *Pour tout $\mathcal{E}^{\bullet} \in D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$, $\mathcal{F}(\mathcal{E}^{\bullet}) \in D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{A^{\vee}})$.*

Démonstration. Comme tout faisceau cohérent sur \mathcal{A} est π -adiquement complet, $\mathcal{E}^{\bullet} \simeq \varprojlim_i \mathcal{E}_i^{\bullet}$, où les \mathcal{E}_i^{\bullet} sont cohérents. Ainsi,

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^{\bullet}) \simeq R\varprojlim_i \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i^{\bullet}),$$

avec $\mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i^{\bullet})$ cohérent pour tout i . Dans ce cas, le système projectif est donc acyclique et

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}^{\bullet}) \simeq \varprojlim_i \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i^{\bullet}) \in D_{\text{coh}}^{-}(\mathcal{O}_{A^{\vee}}).$$

□

Propriété 2.19. $\mathcal{F} : D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}) \rightarrow D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{A^{\vee}})$ réalise une équivalence de catégories de quasi-inverse

$$\mathcal{G} = \langle -1 \rangle^! \mathcal{F}^{\vee}(\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \pi^! \omega_{\mathcal{A}/S} [g],$$

où :

- $\langle -1 \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est le morphisme d'inversion.
- $\pi : \mathcal{A} \rightarrow S$ est le morphisme structural.
- $\epsilon : S \rightarrow \mathcal{A}$ est le morphisme neutre.
- g est la dimension relative de \mathcal{A} (et donc des A_i).
- $\omega_{\mathcal{A}/S} = \varprojlim_i \omega_{A_i/S_i}$ avec $\omega_{A_i/S_i} = \pi_{i,*} \Omega_{A_i/S_i}^g \simeq \epsilon_i^* \Omega_{A_i/S_i}^g$.

Démonstration. Pour tout i on note

$$\mathcal{G}_i = \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{F}_i^{\vee}(\cdot) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_i}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i} [g].$$

On sait que \mathcal{F}_i et \mathcal{G}_i réalisent une équivalence de catégorie entre $D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{A_i})$ et $D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{A_i^{\vee}})$ (voir par exemple [Lau96]). Pour montrer qu'ils induisent une équivalence de catégorie entre $D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ et $D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{A^{\vee}})$ il suffit de vérifier que si $(\mathcal{E}_i^{\bullet})_i \in \widetilde{D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{A^{\vee}})}$ alors $(\mathcal{G}_i(\mathcal{E}_i^{\bullet}))_i \in \widetilde{D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{A_{\bullet}})}$. Pour ce faire, il suffit de le montrer pour $\tilde{\mathcal{G}}_i$ défini par

$$\tilde{\mathcal{G}}_i(\mathcal{E}_i^{\bullet}) = \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i^{\bullet} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{A_i}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i},$$

pour tout $(\mathcal{E}_i^{\bullet})_i \in \widetilde{D_{\text{qcoh}}^{-}(\mathcal{O}_{A_{\bullet}})}$.

On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} S_i & \xrightleftharpoons[\pi_i]{\epsilon_i} & A_i & \xleftarrow{\langle -1 \rangle_i} & A_i \\ \downarrow \iota_i & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \beta_i \\ S_{i+1} & \xrightleftharpoons[\pi_{i+1}]{\epsilon_{i+1}} & A_{i+1} & \xleftarrow{\langle -1 \rangle_{i+1}} & A_{i+1} \end{array}$$

Dans un premier temps, remarquons que

$$\iota_i^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} = \iota_i^* \epsilon_{i+1}^* \Omega_{A_{i+1}/S_{i+1}}^g \simeq \epsilon_i^* \beta_i^* \Omega_{A_{i+1}/S_{i+1}}^g \simeq \epsilon_i^* \Omega_{A_i/S_i}^g = \omega_{A_i/S_i}.$$

Ainsi, on trouve grâce à la formule de la projection (lemme 1.2, p.4)

$$\begin{aligned} \beta_{i,*} \tilde{\mathcal{G}}_i(\mathcal{E}_i) &= \beta_{i,*} \left(\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i} \right) \\ &\simeq \beta_{i,*} \left(\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \pi_i^* \iota_i^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \right) \\ &\simeq \beta_{i,*} \left(\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \beta_i^* \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \right) \\ &\simeq \beta_{i,*} \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}}. \end{aligned}$$

Pour continuer il faut appliquer un changement de base (lemme 1.3). On peut le faire car le morphisme $\langle -1 \rangle_i$ est un isomorphisme et est donc plat. On trouve alors que $\beta_{i,*} \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \simeq \langle -1 \rangle_{i+1}^* \beta_{i,*} \mathcal{E}_i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \beta_{i,*} \tilde{\mathcal{G}}_i(\mathcal{E}_i) &\simeq \langle -1 \rangle_{i+1}^* (\beta_{i,*} \mathcal{E}_i) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \\ &\simeq \langle -1 \rangle_{i+1}^* (\mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \\ &\simeq \langle -1 \rangle_{i+1}^* \mathcal{E}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*} \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{O}_{A_i} \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \pi_{i+1}^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}}, \end{aligned}$$

en appliquant à nouveau le changement de base. Enfin, comme $\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{O}_{A_i} \simeq \mathcal{O}_{A_i}$, on trouve

$$\beta_{i,*} \tilde{\mathcal{G}}_i(\mathcal{E}_i) \simeq \tilde{\mathcal{G}}_{i+1}(\mathcal{E}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_{A_{i+1}}}^{\mathbb{L}} \beta_{i,*} \mathcal{O}_{A_i}.$$

On en conclut alors que le foncteur $(\mathcal{G}_i)_i$ est bien un foncteur de $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee})$ dans $D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A_\bullet})$ et qu'il induit ainsi une équivalence de catégorie de quasi-inverse $(\mathcal{F}_i)_i$ (comme pour chaque i , \mathcal{G}_i en induit une de quasi-inverse \mathcal{F}_i). Ainsi, \mathcal{F} réalise bien une équivalence de catégorie.

Il reste maintenant à expliciter le quasi-inverse de \mathcal{F} . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathcal{F} & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ & & & \text{---} & & & \\ D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A) & \xrightarrow{LS} & D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A_\bullet}) & \xrightarrow{(\mathcal{F}_i)_i} & D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee}) & \xrightarrow{R\lim} & D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee}) \\ & \xleftarrow{R\lim} & & \xleftarrow{(\mathcal{G}_i)_i} & & \xleftarrow{LS} & \\ & & & \text{---} & & & \\ & & & \mathcal{G} & & & \end{array}$$

Il faut donc montrer que la composition $R\lim \circ (\mathcal{G}_i)_i \circ LS$ est bien le foncteur \mathcal{G} .

On a vu plus haut qu'on a un isomorphisme canonique

$$\iota_i^* \omega_{A_{i+1}/S_{i+1}} \simeq \omega_{A_i/S_i}.$$

Ainsi, si on note e_i la section de ω_{A_i/S_i} telle que $\omega_{A_i/S_i} \simeq \mathcal{O}_{S_i} e_i$, on sait que l'image de e_{i+1} par le morphisme canonique est e_i , donc $\omega_{A/S}$ est inversible. Il en est donc de même pour $\pi^! \omega_{A/S}$.

Soit à présent $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee})$. Par le corollaire 2.15 (p.14) on peut écrire

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}) \simeq R\varprojlim_i (\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{F}_i^\vee(\mathcal{E}_i)) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} \varprojlim_i \pi_i^* \omega_{A_i/S_i} [g].$$

On peut alors appliquer le corollaire 2.2 (p.12) :

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}) \simeq R\varprojlim_i (\mathcal{G}_i(\mathcal{E}_i)).$$

Ceci finit de prouver que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont quasi-inverse. □

Remarque. Dans notre cas, les faisceaux ω_{A_i/S_i} et $\omega_{A/S}$ sont libres de rang 1.

Théorème 2.20. On a les formules d'involutivité suivantes :

$$\forall \mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A), \mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq \langle -1 \rangle^! \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} \pi^! \omega_{A/S}^{-1} [-g],$$

$$\forall \mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_{A^\vee}), \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^\vee(\mathcal{E}) \simeq \langle -1 \rangle^{\vee!} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{A^\vee}}^{\mathbb{L}} \pi^{\vee!} \omega_{A/S}^{-1} [-g].$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E} \in D_{qcoh}^-(\mathcal{O}_A)$. Le corollaire 2.15 (p.14) donne l'isomorphisme suivant

$$\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F}(\mathcal{E}) \simeq R\varprojlim_i \mathcal{F}_i^\vee \circ \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i).$$

Or sur A_i on a la formule d'involutivité

$$\mathcal{F}_i^\vee \circ \mathcal{F}_i(\mathcal{E}_i) \simeq \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i}^{-1} [-g].$$

Pour montrer le résultat il suffit alors de prouver l'isomorphisme

$$R\varprojlim_i \left(\langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{A_i}}^{\mathbb{L}} \pi_i^* \omega_{A_i/S_i}^{-1} [-g] \right) \simeq \left(R\varprojlim_i \langle -1 \rangle_i^* \mathcal{E}_i \right) \otimes_{\mathcal{O}_A}^{\mathbb{L}} \left(\varprojlim_i \pi_i^* \omega_{A_i/S_i}^{-1} \right) [-g].$$

A nouveau, on applique le corollaire 2.2 (p.12) pour conclure. □

2.4 Action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur un schéma abélien formel principalement polarisé

Avant toute chose, remarquons le fait suivant :

Propriété 2.21. Soient A un schéma en groupes abéliens (formel ou non) et \mathcal{L} un faisceau inversible sur \mathcal{O}_A , alors le faisceau

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{L}} = m^* \mathcal{L} \otimes p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{-1}$$

est dans $Pic^0(A \times A/A)$.

Ce faisant, on peut associer à \mathcal{L} un morphisme de A dans A^\vee de la manière suivante :

Définition 2.22. On pose $\varphi_{\mathcal{L}} : A \rightarrow A^\vee$ comme étant l'unique morphisme vérifiant

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{P}} \simeq (id_A \times \varphi_{\mathcal{L}})^* \mathcal{P}.$$

Dans cette partie, nous prendrons la définition suivante pour un schéma abélien formel principalement polarisé :

Définition 2.23. Soient \mathcal{A} un schéma abélien formel sur $\mathrm{Spf}(V)$ et \mathcal{L} un faisceau ample sur \mathcal{A} . On dit que $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ est principalement polarisé si $\varphi_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme.

Il s'agit d'une légère modification de la définition donnée dans [EvdGM] (définition 11.6). La seule différence c'est qu'on n'autorise pas d'extension du corps de base. On aurait pu prendre la définition de [EvdGM], mais dans ce cas on se serait placé directement sur le schéma abélien obtenu après extension de la base.

Propriété 2.24. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ est un schéma abélien formel principalement polarisé, alors il est algébrisable.

De plus, si A est un S -schéma propre tel que le complété π -adique de A est isomorphe à \mathcal{A} , il existe \mathcal{M} ample sur A tel que

1. $\mathcal{L} = \varprojlim \mathcal{M}/\pi^i$
2. Pour tout i , $(A_i, \mathcal{M}/\pi^i)$ est principalement polarisé.

Démonstration. Le fait que \mathcal{A} soit polarisable implique l'existence d'un faisceau ample sur \mathcal{A}/π . Le théorème 5.4.5 des EGA III ([Gro61]) assure alors que \mathcal{A} est algébrisable.

Si A est un S -schéma propre tel que le complété π -adique de A est isomorphe à \mathcal{A} et que \mathcal{M} est un faisceau ample sur A tel que $\mathcal{L} = \varprojlim \mathcal{M}/\pi^i$, on peut de plus montrer que (A, \mathcal{M}) est une variété abélienne principalement polarisée. Il en va donc de même pour les $(A_i, \mathcal{M}/\pi^i)$. □

Notons enfin que pour toute variété abélienne (A, \mathcal{L}) principalement polarisée (sur $\mathrm{Spec}(R)$ avec R un corps, un anneau à valuation discrète V ou un quotient V/π^i), on connaît la transformée de Fourier-Mukai de \mathcal{L} .

Propriété 2.25. Si (A, \mathcal{L}) est principalement polarisée, alors $\varphi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{F}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{-1}$.

Démonstration. Ce résultat a déjà été montré par Mukai ([Muk81], Proposition 3.11 et Théorème 3.13) sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Le fait est que la quasi-totalité de la démonstration s'adapte sans mal au cas d'un anneau à valuation discrète. On ne donnera donc ici que l'idée de la démonstration.

Par construction, en utilisant la formule de la projection, du changement de base et des isomorphismes bien choisis, on obtient l'isomorphisme

$$Rm_*(\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{L}) \simeq \mathcal{L} \otimes \varphi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{F}(\langle -1 \rangle^* \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}),$$

pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qcoh}}^b(\mathcal{O}_A)$.

En appliquant cet isomorphisme à $\mathcal{E} = \mathcal{O}_A$, on trouve à gauche (après simplifications) $Rp_{2*} p_1^* \mathcal{L}$. Or on sait que les groupes de cohomologie de \mathcal{L} sont tous triviaux sauf un. Ce fait est par exemple montré dans [Mum85] ("vanishing theorem", chapitre 16). Même si dans cet ouvrage l'auteur se place sur un corps algébriquement clos, la preuve de ce résultat reste vraie sur une base plus générale. Plus précisément, l'essence de ce résultat est l'isomorphisme $Rp_*^{\vee} \mathcal{P} \simeq \epsilon_*^{\vee} \mathcal{O}_S[\dim(A)]$, qui est vrai sur une base de la forme $\mathrm{Spec}(R)$ avec R un corps, un anneau à valuation discrète V ou un quotient V/π^i (voir par exemple [Lau96], lemme 1.2.5).

Comme \mathcal{L} est ample, le groupe de cohomologie non-trivial est nécessairement le H^0 et comme (A, \mathcal{L}) est principalement polarisée, $\chi(\mathcal{L}) = 1$ (voir par exemple [Huy06], lemme 9.17 et définition 9.18). Ainsi, $Rp_{2*} p_1^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_A$.

À droite, on trouve simplement $\mathcal{L} \otimes \varphi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{F}(\mathcal{L})$. On en déduit donc le résultat. □

Remarque. Une autre démonstration, toute aussi rapide à adapter, est donnée dans [Huy06], lemme 9.29. Elle utilise essentiellement les mêmes arguments mais un point de vue légèrement différent.

Il est important de noter que les isomorphismes utilisés dans cette preuve sont tous compatibles aux réductions modulo π^i . On peut donc trouver le même résultat sur un schéma abélien formel principalement polarisé.

Propriété 2.26. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ un schéma abélien formel principalement polarisé. Alors on a un isomorphisme $\varphi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{F}(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{L}^{-1}$.

Démonstration. On considère (A, \mathcal{M}) principalement polarisée sur $S = \text{Spec}(V)$ telle que $\mathcal{A} = \hat{A}$ et $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{M}}$. Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent aux variétés principalement polarisées $(A/\pi^i, \mathcal{M}/\pi^i)$ et d'appliquer la limite projective aux isomorphismes ainsi trouvés. \square

Théorème 2.27. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ un schéma abélien formel principalement polarisé. Alors $\varphi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{F}$ et $\otimes \mathcal{L}$ munissent $D_{\text{qcoh}}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ d'une action de $SL_2(\mathbb{Z})$ modulo les décalages.

Plus précisément,

$$(\varphi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{F})^4 \simeq [-2\dim(\mathcal{A})]$$

et

$$(\otimes \mathcal{L} \circ \varphi_{\mathcal{L}}^* \mathcal{F})^3 \simeq [-\dim(\mathcal{A})].$$

Démonstration. Le premier isomorphisme est une conséquence directe du théorème 2.20 (p.18).

Pour ce qui est du deuxième isomorphisme, c'est une conséquence directe du résultat précédent et des formules de changement de base et de la projection.

On renvoie à [Huy06], Proposition 9.30 pour les calculs explicites dans le cas non-arithmétique. Compte tenu des résultats qu'on vient de prouver, les mêmes calculs fonctionnent dans le cas arithmétique. \square

3 Cas des faisceaux cohérents sur une variété analytique rigide avec bonne réduction

Dans cette partie, on suppose que V est d'inégale caractéristique $(0, p)$ ($p > 0$). On considère alors $K = \text{Frac}(V)$ le corps des fractions de V . On se fixe \mathcal{A} un schéma abélien formel sur $\mathcal{S} = \text{Spf}(V)$ et on note \mathcal{A}_K sa fibre générique (qui est donc une variété analytique rigide sur K) et $sp : \mathcal{A}_K \rightarrow \mathcal{A}$ le morphisme de spécialisation.

On rappelle le résultat suivant, tiré de [Ber96] (résultats 0.2.3.3 et 0.2.3.4)

Lemme 3.1.

$$sp_* \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}, \mathbb{Q}} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \otimes_{\hat{V}} K$$

et pour tout ouvert quasi-compact \mathcal{U} de \mathcal{A} ,

$$\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{A}}) \otimes_{\hat{V}} K \simeq \Gamma(\mathcal{U}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}),$$

avec $\mathcal{U}_K = sp^{-1}\mathcal{U}$.

On muni \mathcal{A}_K d'une structure de variété abélienne de la façon suivante : Comme \mathcal{A} est une variété abélienne, on a les morphismes

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{A}}, \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \text{ et } \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{S}},$$

qui correspondent respectivement à la multiplication, l'inverse et l'élément neutre. En les tensorisant par K et en appliquant le foncteur sp^* , on obtient la multiplication, l'inverse et l'élément neutre sur \mathcal{A}_K .

Remarque. Par construction, les morphismes m_K , $\langle -1 \rangle_K$ et ϵ_K de multiplication, inverse et élément neutre sur \mathcal{A}_K commutent à la spécialisation. On renvoie à [Ber96], proposition 0.2.3 pour plus de détails.

En particulier, $\langle -1 \rangle \circ sp = sp \circ \langle -1 \rangle_K$.

3.1 Quelques propriétés du morphisme de spécialisation

Avant de construire la transformée de Fourier-Mukai sur les variétés analytiques rigides avec bonne réduction, il faut comprendre un peu mieux le morphisme $sp : \mathcal{A}_K \rightarrow \mathcal{A}$.

Lemme 3.2.

1. Si E est un $\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}$ -module cohérent, alors sp_*E est $\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}$ -cohérent.
2. Si \mathcal{E} est un $\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}$ -module cohérent, alors $sp^*\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}$ -cohérent.

Démonstration. Comme la cohérence se vérifie localement, on peut supposer que $\mathcal{A} = Spf(A)$ et $\mathcal{A}_K = Spm(A_K)$. Dans ce cas, un théorème de Kiehl (voir par exemple [Bos14], Théorème 4 de la partie 6.1) assure que pour tout ouvert \mathcal{U} de \mathcal{A}

$$sp_*E(\mathcal{U}) = \Gamma(\mathcal{U}_K, E) = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}(\mathcal{U}_K) \otimes_{\mathcal{A}_K} \Gamma(\mathcal{A}_K, E).$$

Or le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{A}_K} \Gamma(\mathcal{A}_K, E)$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}$ -cohérent et

$$\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{A}_K} \Gamma(\mathcal{A}_K, E)) = \mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{A}_K} \Gamma(\mathcal{A}_K, E) = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}(\mathcal{U}_K) \otimes_{\mathcal{A}_K} \Gamma(\mathcal{A}_K, E) = sp_*E(\mathcal{U}).$$

Donc sp_*E est bien $\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}$ -cohérent.

Pour ce qui est de $sp^*\mathcal{E}$, le résultat est une conséquence du fait que $sp^* = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K} \otimes_{sp^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}} sp^{-1}$ est exact à droite. □

Propriété 3.3. Les foncteurs $sp_* : Coh(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}) \rightarrow Coh(\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}})$ et $sp^* : Coh(\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}) \rightarrow Coh(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K})$ sont exacts.

Démonstration. On sait déjà que $sp^* = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K} \otimes_{sp^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}} sp^{-1}$ est exact à droite. Or, comme $\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}(\mathcal{U}_K)$ est plat sur $A_K = \Gamma(\mathcal{A}_K, sp^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}) = \Gamma(\mathcal{A}_K, \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K})$, sp^* est exact.

Pour sp_* , on calcule $R^i sp_*(\mathcal{U}, E) = H^i(\mathcal{U}_K, E)$ pour E un $\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}$ -module cohérent et \mathcal{U} un ouvert affinoïde. Or, dans ce cas, le théorème de Tate (voir [Tat71]) assure que $H^i(\mathcal{U}_K, E) = 0$ pour $i > 0$. Donc E est acyclique pour sp_* , i.e. sp_* est exact. □

Propriété 3.4. sp_* et sp^* réalisent une équivalence de catégories entre $Coh(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K})$ et $Coh(\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}})$.

Démonstration. On a les morphismes canoniques $\mathcal{E} \rightarrow sp_*sp^*\mathcal{E}$ et $sp^*sp_*E \rightarrow E$. Il suffit de montrer que ces morphismes sont des isomorphismes pour \mathcal{E} et E cohérents.

Comme \mathcal{E} est cohérent, il existe une résolution

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}^a \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}^b \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

Comme sp_* et sp^* sont exacts, on a la résolution

$$sp_*sp^*\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}^a \rightarrow sp_*sp^*\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}^b \rightarrow sp_*sp^*\mathcal{E} \rightarrow 0.$$

Comme $sp_*sp^*\mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}$, on trouve que $sp_*sp^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$.

Le second isomorphisme fonctionne exactement pareil. □

3.2 Dual de la fibre générique

Comme \mathcal{A}_K est une variété abélienne, elle admet une variété abélienne duale, notée $(\mathcal{A}_K)^\vee$. On peut relier $(\mathcal{A}_K)^\vee$ à \mathcal{A}^\vee (le schéma abélien dual de \mathcal{A}) grâce au résultat suivant, tiré de [Lüt16] (Théorème 6.1.1).

Propriété 3.5.

$$(\mathcal{A}_K)^\vee \simeq (\mathcal{A}^\vee)_K.$$

On notera donc cette variété \mathcal{A}_K^\vee dans la suite. De même, on dispose d'un morphisme de spécialisation $sp^\vee : \mathcal{A}_K^\vee \rightarrow \mathcal{A}^\vee$. On peut alors construire le morphisme $\tilde{sp} = sp \times sp^\vee : \mathcal{A}_K \times \mathcal{A}_K^\vee \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\vee$. On peut alors compléter la propriété précédente.

Propriété 3.6. *Le faisceau de Poincaré \mathcal{P}_K sur $\mathcal{A}_K \times \mathcal{A}_K^\vee$ est canoniquement isomorphe à $\tilde{sp}^* \mathcal{P}$, où \mathcal{P} est le faisceau de Poincaré sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^\vee$.*

Remarquons aussi le fait suivant.

Propriété 3.7. *\tilde{sp} est le morphisme de spécialisation de $\mathcal{A}_K \times \mathcal{A}_K^\vee$.*

Démonstration. On renvoie à [Ber96], résultat 0.2.4 (iv). □

3.3 Transformée de Fourier-Mukai rigide sur les faisceaux cohérents

On a maintenant tous les outils nécessaires pour définir une transformée de Fourier-Mukai sur \mathcal{A}_K .

Définition 3.8. *Pour tout $E \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K})$, on définit la transformée de Fourier-Mukai de E , notée $\mathcal{F}_K(E)$, par*

$$\mathcal{F}_K(E) = Rq_*^\vee(\mathcal{P}_K \otimes q^* E).$$

De même, pour tout $F \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K^\vee})$, on définit la transformée de Fourier-Mukai duale de F , notée $\mathcal{F}_K^\vee(F)$, par

$$\mathcal{F}_K^\vee(F) = Rq_*(\mathcal{P}_K \otimes q^{\vee*} F).$$

Avec cette définition, on peut exprimer \mathcal{F}_K en fonction de \mathcal{F} , la transformée de Fourier-Mukai sur \mathcal{A} .

Propriété 3.9. *On a l'isomorphisme de foncteurs de $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K})$ dans $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}^\vee, \mathbb{Q}})$,*

$$sp_*^\vee \circ \mathcal{F}_K \simeq \mathcal{F} \circ sp_*.$$

De même, on a l'isomorphisme de foncteurs de $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K^\vee})$ dans $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}, \mathbb{Q}})$,

$$sp_* \circ \mathcal{F}_K^\vee \simeq \mathcal{F}^\vee \circ sp_*^\vee.$$

Démonstration. On rappelle que dans le cas des faisceaux cohérents, les foncteurs $p^!$ et p_+ définis dans la partie précédente pour les schémas formels sont exactement les foncteurs p^* et Rp_* .

On s'appuie sur le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_K & \xleftarrow{q} & \mathcal{A}_K \times \mathcal{A}_K^\vee & \xrightarrow{q^\vee} & \mathcal{A}_K^\vee \\ \downarrow sp & & \downarrow \tilde{sp} & & \downarrow sp^\vee \\ \mathcal{A} & \xleftarrow{p} & \mathcal{A} \times \mathcal{A}^\vee & \xrightarrow{p^\vee} & \mathcal{A}^\vee \end{array}$$

On ne montrera que le premier isomorphisme, l'autre se montrant exactement de la même manière. Soit $E \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K})$. Par définition,

$$sp_*^\vee \mathcal{F}_K(E) = sp_*^\vee Rq_*^\vee(\mathcal{P}_K \otimes q^* E).$$

Comme $sp_*^\vee \circ q^\vee = p^\vee \circ \tilde{sp}$, on a $sp_*^\vee \circ q_*^\vee \simeq p_*^\vee \circ \tilde{sp}_*$. Comme sp_*^\vee et \tilde{sp}_* sont exacts, on trouve l'isomorphisme de foncteurs dérivés $sp_*^\vee \circ Rq_*^\vee \simeq Rp_*^\vee \circ \tilde{sp}_*$.

On en déduit donc

$$sp_*^\vee \mathcal{F}_K(E) \simeq Rp_*^\vee \tilde{sp}_*(\mathcal{P}_K \otimes q^* E).$$

Ensuite, on montre que pour $F \in D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K \times \mathcal{A}_K^\vee})$, $\tilde{sp}_*(F \otimes \mathcal{P}_K) \simeq \tilde{sp}_* F \otimes \mathcal{P}$.

En fait, comme \tilde{sp}_* est exact, que F est cohérent et que les faisceaux de Poincaré sont inversibles et donc plats, il suffit de trouver un morphisme entre $\tilde{sp}_*(F \otimes \mathcal{P}_K)$ et $\tilde{sp}_* F \otimes \mathcal{P}$, puis montrer l'isomorphisme pour $F = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K \times \mathcal{A}_K^\vee}$.

Le morphisme se trouve en appliquant le morphisme d'adjonction $\mathcal{E} \rightarrow \tilde{sp}_* \tilde{sp}^* \mathcal{E}$ au faisceau $\tilde{sp}_* F \otimes \mathcal{P}$. On trouve alors un morphisme

$$\tilde{sp}_* F \otimes \mathcal{P} \rightarrow \tilde{sp}_*(\tilde{sp}^* \tilde{sp}_* F \otimes \mathcal{P}_K),$$

car $\mathcal{P}_K = \tilde{sp}^* \mathcal{P}$. En utilisant l'autre morphisme d'adjonction, on trouve un morphisme

$$\tilde{sp}_*(\tilde{sp}^* \tilde{sp}_* F \otimes \mathcal{P}_K) \rightarrow \tilde{sp}_*(F \otimes \mathcal{P}_K).$$

La composée de ces deux morphismes donne le morphisme voulu. Dans le cas où $F = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K \times \mathcal{A}_K^\vee}$, l'isomorphisme est immédiat.

On trouve alors

$$sp_*^\vee \mathcal{F}_K(E) \simeq Rp_*^\vee(\mathcal{P} \otimes \tilde{sp}_* q^* E).$$

Il suffit alors de montrer que $\tilde{sp}_* q^* E \simeq p^* sp_* E$. A nouveau, comme tous les foncteurs sont exacts et que E est cohérent, il suffit de trouver un morphisme entre ces deux faisceaux et de montrer l'isomorphisme dans le cas où $E = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}$.

De la même manière que précédemment on a retrouvé le morphisme utilisé pour montrer la formule de la projection sur les \mathcal{O} -modules, ici, en usant des morphismes d'adjonction, on retrouve le morphisme utilisé pour montrer le théorème du changement de base (voir par exemple [Sta21, Remarque 08HY]). Dans le cas où $E = \mathcal{O}_{\mathcal{A}_K}$, l'isomorphisme est immédiat

On conclut que

$$sp_*^\vee \mathcal{F}_K(E) \simeq Rp_*^\vee(\mathcal{P} \otimes p^* sp_* E) = \mathcal{F}(sp_* E).$$

□

Corollaire 3.10. *Les foncteurs \mathcal{F}_K et \mathcal{F}_K^\vee réalisent une équivalence de catégorie entre $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K})$ et $D_{coh}^b(\mathcal{O}_{\mathcal{A}_K^\vee})$. De plus, on a les formules d'involativité suivantes*

$$\mathcal{F}_K^\vee \circ \mathcal{F}_K \simeq \langle -1 \rangle_K^* \cdot \otimes \pi_K^* \omega_{\mathcal{A}_K}^{-1}[-g],$$

$$\mathcal{F}_K \circ \mathcal{F}_K^\vee \simeq \langle -1 \rangle_K^{\vee*} \cdot \otimes \pi_K^{\vee*} \omega_{\mathcal{A}_K}^{-1}[-g].$$

Où $\langle -1 \rangle_K$ et $\langle -1 \rangle_K^\vee$ sont les morphismes d'inversion sur \mathcal{A}_K et \mathcal{A}_K^\vee respectivement, g est la dimension de \mathcal{A}_K , π_K et π_K^\vee les morphismes structuraux de \mathcal{A}_K et \mathcal{A}_K^\vee et $\omega_{\mathcal{A}_K} = \pi_{K*} \Omega_{\mathcal{A}_K/K}^g \simeq \epsilon_K^* \Omega_{\mathcal{A}_K/K}^g$, en notant ϵ_K l'élément neutre de \mathcal{A}_K .

Démonstration. Avec les isomorphismes de la propriété précédente, on peut écrire

$$\mathcal{F}_K^\vee \circ \mathcal{F}_K \simeq sp^* \circ (\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F}) \circ sp_*.$$

Le théorème 2.20 (p.18) permet d'écrire

$$\mathcal{F}_K^\vee \circ \mathcal{F}_K \simeq sp^* \circ (\langle -1 \rangle^* \cdot \otimes \pi^* \omega_{\mathcal{A}}^{-1}[-g]) \circ sp_*,$$

où $\langle -1 \rangle$ est le morphisme d'inversion de \mathcal{A} , π son morphisme structural, g sa dimension et $\omega_{\mathcal{A}} = \pi^* \Omega_{\mathcal{A}/V}^g \simeq \epsilon^* \Omega_{\mathcal{A}/V}^g$, en notant ϵ l'élément neutre de \mathcal{A} .

Or g est aussi la dimension de \mathcal{A}_K , $sp^* \circ \langle -1 \rangle^* \circ sp_* \simeq \langle -1 \rangle_K^*$ (voir la remarque en page 21) et $sp^* \pi^* \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \simeq \pi_K^* \omega_{\mathcal{A}_K}^{-1}$ (car ω commute au changement de base).

Ainsi, on trouve le résultat attendu. A nouveau, l'autre isomorphisme se prouve de la même manière. □

Références

- [Ber96] Pierre Berthelot. Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres I. <https://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis>, 1996.
- [Ber02] Pierre Berthelot. Introduction à la théorie arithmétique des \mathcal{D} -modules. (279), 2002.
- [BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology*. Princeton University Press, 1978.
- [Bos14] Siegfried Bosch. *Lectures on Formal and Rigid Geometry*. Springer-Verlag, 2014.
- [EvdGM] Bas Edixhoven, Gerard van der Geer, and Ben Moonen. Abelian varieties. <http://van-der-geer.nl/~gerard/AV.pdf>. Version préliminaire en ligne.
- [FC90] Gerd Faltings and Ching-Li Chai. *Degeneration of Abelian Varieties*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [Gro61] Alexander Grothendieck. éléments de géométrie algébrique : III. étude cohomologique des faisceaux cohérents, première partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 11 :5–167, 1961.
- [Har66] Robin Hartshorne. *Residues and Duality*. Springer-Verlag, 1966.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.
- [Huy06] Daniel Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford University Press, 2006.
- [I⁺05] Luc Illusie et al. *Fundamental Algebraic Geometry, Grothendieck's FGA Explained*. American Mathematical Society, 2005.
- [Kem80] George R. Kempf. Some elementary proofs of basic theorems in the cohomology of quasi-coherent sheaves. *Rocky Mountain J. Math.*, 10(3) :637–646, 09 1980.
- [Lau96] Gérard Laumon. Transformation de Fourier généralisée. <https://arxiv.org/abs/alg-geom/9603004>, 1996.
- [Lüt16] Werner Lütkebohmert. *Rigid Geometry of Curves and Their Jacobians*. Springer-Verlag, 2016.

- [MM74] Barry Mazur and William Messing. *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*. Springer-Verlag, 1974.
- [Muk81] Shigeru Mukai. Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves. *Nagoya Math. J.*, 81 :153–175, 1981.
- [Mum85] David Mumford. *Abelian Varieties*. Tata Institute of Fundamental Research, 1985. reprint of the second edition (1974).
- [Sta21] The Stacks Project Authors. *Stacks project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2021.
- [Tat71] John Tate. Rigid analytic spaces. *Inventiones mathematicae*, 12 :257–289, 1971.