

Représentation de l'ensemble des points non-dominés de problèmes d'optimisation multi-objectifs

Lucie Galand, Marie Humbert–Ropers, Daniel Vanderpooten

Université Paris-Dauphine, Université PSL, CNRS, LAMSADE, 75016 Paris, France
{lucie.galand,marie.humbert-ropers,daniel.vanderpooten}@dauphine.psl.eu

Mots-clés : *optimisation multi-objectif, représentation, ensemble des points non-dominés, ε -dominance*

1 Problématique

En optimisation multi-objectif, toute solution est associée à un vecteur, nommé point, dont les composantes sont les valeurs sur chacun des p objectifs. Les fonctions objectifs étant généralement conflictuelles, il n'existe pas un unique point qui soit le meilleur sur tous les objectifs. Ainsi, la résolution d'un problème multi-objectif nous amène à rechercher *l'ensemble des points non-dominés* contenant tous les points tel qu'il n'existe aucun point qui soit meilleur sur tous les objectifs. Cependant, cet ensemble peut être très large, voire exponentiel en la taille de l'instance pour les problèmes d'optimisation combinatoire multi-objectifs [Ehr05].

Afin de permettre à un décideur d'appréhender cet ensemble ainsi que la variété des compromis possibles, la définition d'une *bonne représentation* de cet ensemble constitue un enjeu essentiel. Étant donné un ensemble Y de points, une représentation de Y est un sous-ensemble $R \subset Y$ qui représente au mieux Y et en particulier le sous-ensemble Y_N des points non-dominés. La qualité d'une représentation s'apprécie à travers trois propriétés générales [Say00, FW10] :

- *couverture* : la représentation doit garantir que tout point non-dominé est couvert par au moins un point de la représentation
- *stabilité* : la représentation doit être composée de points suffisamment distincts
- *cardinalité* : la représentation doit être de taille raisonnable

Pour mettre en œuvre les propriétés de couverture et de stabilité, il est proposé dans [BJV17] d'utiliser la relation d' ε -dominance, notée \preceq_ε :

Étant donné $\varepsilon > 0$ et $y, y' \in Y$, $y \preceq_\varepsilon y'$ si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i \leq (1 + \varepsilon)y'_i$ (dans le cas d'objectifs à minimiser).

Couverture et stabilité s'expriment alors en fonction de cette relation pour différentes valeurs ε et ε' traduisant le degré d'exigence souhaité pour chacune de ces propriétés :

- *couverture* : $\forall y' \in Y \setminus R, \exists y \in R$ tel que $y \preceq_\varepsilon y'$
- *stabilité* : $\forall y, y' \in R, y \neq y', y \not\preceq_{\varepsilon'} y'$ et $y' \not\preceq_{\varepsilon'} y$

Il est montré dans [BJV17] qu'une telle représentation peut être déterminée en temps polynomial dans le cas biobjectif mais que cela est beaucoup plus difficile dès lors que $p \geq 3$. L'objectif de ce travail est donc de proposer une méthode générale, non restreinte au cas biobjectif, déterminant un ensemble R satisfaisant les propriétés d'une *bonne représentation*.

2 Construction d'une représentation

Nous nous intéressons ici à la construction d'une représentation de taille fixée k pour un ensemble Y discret. La propriété de couverture étant essentielle à la définition d'une représentation, nous proposons de l'optimiser prioritairement et de considérer la propriété de stabilité de manière secondaire. Nous définissons ainsi la recherche d'une bonne représentation comme le problème d'optimisation lexicographique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{lex}\{\min \varepsilon, \max \varepsilon'\} \\ |R| = k \\ \forall y' \in Y \setminus \{R\}, \exists y \in R, y \preceq_{\varepsilon} y' \\ \forall y, y' \in R, y \neq y', y \not\preceq_{\varepsilon'} y' \text{ et } y' \not\preceq_{\varepsilon'} y \end{array} \right. \quad (1)$$

Ce problème peut se formuler comme un programme linéaire en variables binaires qui s'apparente aux problèmes de k -centres et de k -dispersion. La distance d'un point y à un point y' , généralement considérée dans ces problèmes de localisation, est remplacée dans notre cas par la valeur minimale de ε tel que $y \preceq_{\varepsilon} y'$. En s'inspirant des formulations connues pour les problèmes des k -centres [Das11, ELP04, CT13] et de k -dispersion [Erk90], nous proposons une méthode adaptée aux spécificités de notre problème.

Nous présentons finalement une série d'expérimentations illustrant les performances de la méthode sur des ensembles de points de grande taille pour différentes valeurs de p et de k .

Références

- [BJV17] C. Bazgan, F. Jamain, & D. Vanderpooten. Discrete representation of the non-dominated set for multi-objective optimization problems using kernels. *European Journal of Operational Research*, 260(3) :814–827, 2017.
- [CT13] H. Calik & B.C. Tansel. Double bound method for solving the p -center location problem. *Computers and operations research*, 40(12) :2991–2999, 2013.
- [Das11] M.S. Daskin. *Network and discrete location : models, algorithms, and applications*. John Wiley & Sons, 2011.
- [Ehr05] Matthias Ehrgott. *Multicriteria Optimization (2. ed.)*. Springer, 2005.
- [ELP04] S. Elloumi, M. Labbé, & Y. Pochet. A new formulation and resolution method for the p -center problem. *INFORMS Journal on Computing*, 16(1) :84–94, 2004.
- [Erk90] E. Erkut. The discrete p -dispersion problem. *European Journal of Operational Research*, 46(1) :48–60, 1990.
- [FW10] S.L. Faulkenberg & M.M. Wiecek. On the quality of discrete representations in multiple objective programming. *Optimization and Engineering*, 11(3) :423–440, 2010.
- [Say00] S. Sayın. Measuring the quality of discrete representations of efficient sets in multiple objective mathematical programming. *Mathematical Programming*, 87(3) :543–560, 2000.