Partition de graphe sous contrainte de ratio de degré

Valentin Bouquet[1], François Delbot[2], Christophe Picouleau[1]

[1] Conservatoire National des Arts et Métiers, CEDRIC, Paris (France) : valentin.bouquet@cnam.fr, christophe.picouleau@cnam.fr

[2] Sorbonne Université, LIP6, Paris (France) : francois.delbot@lip6.fr

Mots-clés : *partition de sommets, optimisation, voisinage fermé.*

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe simple et non orienté. Étant donné une partition non triviale (S_1, S_2) des sommets de G, la satisfaction d'un sommet s de S_i est le rapport entre la taille de son voisinage fermé dans S_i et la taille de son voisinage fermé dans S. La qualité de cette partition est définie par la plus petite satisfaction d'un sommet du graphe. Nous nous intéressons à la qualité maximum parmi toutes les partitions non triviales possibles des sommets de G.

Formellement, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des partitions non triviales possibles des sommets de G. Pour $s \in S_i$ nous définissons

$$q_G^i(s) = \frac{d_{G[S_i]}(s) + 1}{d(s) + 1}$$

comme la *satisfaction* de s dans la partition (S_1, S_2). Étant donné G, nous définissons

$$q(G) = \max_{(S_1,S_2)\in\mathcal{P}} \{ \min_{\substack{s\in S^i \\ i=1,2}} \{q^i(s)\}\}$$

comme la *satisfaction optimale* du graphe G. Une partition (S_1, S_2) est optimale quand

$$\min_{\substack{s\in S \\ i=1,2}} q_G^i(s) \geq q(G)$$

Le problème de décision associé à la satisfaction optimale $q(G)$, est le suivant :

Partition Ratio Degré	
Instance :	un graphe G et un rationnel positif q, $0 < q \leq 1$.
Question :	est-ce que $q(G) \geq q$?

Nous notons $\Delta(G)$ le degré maximum d'un sommet de G. La clique à trois sommets est noté K_3. Nous présentons les résultats suivants :

Proposition 1 ([1]) *$q(G) = \frac{1}{3}$ si et seulement si $G = K_3$. Quand $G \neq K_3$ alors $q(G) \geq \frac{2}{5}$.*

Nous notons $\Delta(G)$ le degré maximum d'un sommet de G.

Proposition 2 ([1]) *Soit G un graphe avec $\Delta(G) \leq 6$ et $\mathcal{F} = \{K_5, K_5 - e, T_3, \overline{K_2 \cup claw}\}$. Alors $q(G) = \frac{2}{5}$ si et seulement si $G \in \mathcal{F}$. Quand $G \notin \mathcal{F} \cup \{C_3\}$ alors $q(G) \geq \frac{3}{7}$.*

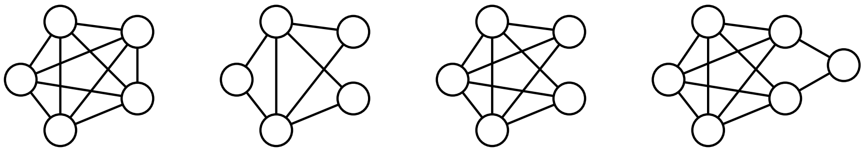

FIG. 1 – De gauche à droite : $K_5, T_3, K_5 - e, \overline{K_2 \cup claw}$.

Proposition 3 ([1]) *Soit G un graphe biparti connexe k-régulier où $k \geq 4$. Alors décider si $q(G) = \frac{k}{k+1}$ est* NP*-complet.*

Références

[1] V. Bouquet, F. Delbot, C. Picouleau, *Partition of graphs with maximum degree ratio*, arXiv :2007.12434, (2020)