



HAL
open science

Complexité du problème de l'unicité d'un transversal minimum dans un graphe

Olivier Hudry, Antoine Lobstein

► **To cite this version:**

Olivier Hudry, Antoine Lobstein. Complexité du problème de l'unicité d'un transversal minimum dans un graphe. 23ème congrès annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, INSA Lyon, Feb 2022, Villeurbanne - Lyon, France. hal-03596176

HAL Id: hal-03596176

<https://hal.science/hal-03596176>

Submitted on 3 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Complexité du problème de l'unicité d'un transversal minimum dans un graphe

Olivier Hudry¹, Antoine Lobstein²

¹ Télécom Paris, 91123 Palaiseau, France
olivier.hudry@telecom-paris.fr

² CNRS et LRI, université Paris-Sud, 91405 Orsay, France
antoine.lobstein@lri.fr

Mots-clés : *théorie de la complexité, problèmes NP-difficiles, optimisation combinatoire, théorie des graphes, transversal, clique, stable, problème de satisfiabilité (SAT), transformations polynomiales.*

I. Introduction

Étant donné un graphe $G = (S, A)$ non orienté, un *transversal* de G est un sous-ensemble T de S tel que toute arête de G a au moins une extrémité dans T . Le problème d'optimisation associé consiste à déterminer un transversal de cardinal minimum dans G . Ce problème est bien connu pour être NP-difficile (plus précisément, le problème de décision qui lui est associé est NP-complet [1, 3]).

Nous nous intéressons ici à la complexité des deux problèmes de décision suivants :

Nom : Unicité du transversal de cardinal majoré (U-TCM)

Instance : un graphe $G = (S, A)$; un entier K

Question : G admet-il un unique transversal de cardinal inférieur ou égal à K ?

et

Nom : Unicité du transversal optimal (U-TO)

Instance : un graphe $G = (S, A)$

Question : G admet-il un unique transversal de cardinal minimum ?

Pour étudier la complexité de U-TCM et U-TO, nous considérons deux autres problèmes d'unicité, à savoir le problème de l'unicité d'une fonction d'assignation permettant de satisfaire une formule logique :

Nom : Unicité pour le problème de satisfiabilité (U-SAT)

Instance : un ensemble B de variables booléennes, m sous-ensembles (ou *clauses logiques*) E_j ($1 \leq j \leq m$) de $B \cup \bar{B}$ (où \bar{B} est l'ensemble des complémentaires des variables de B)

Question : existe-t-il une unique fonction f définie sur B à valeurs dans $\{\text{vrai, faux}\}$ de sorte que chaque sous-ensemble E_j ($1 \leq j \leq m$) contienne au moins un élément à vrai par f ?

et la variante de U-SAT, notée U-1-dans-3-SAT, dans laquelle chaque sous-ensemble E_j contient exactement trois éléments de $B \cup \bar{B}$ et où l'on cherche s'il existe une unique fonction f définie

sur B à valeurs dans $\{\text{vrai}, \text{faux}\}$ de sorte que chaque sous-ensemble E_j ($1 \leq j \leq m$) contienne exactement un élément à vrai par f ?

II. Résultats de complexité

Les problèmes U-TCM, U-TO, U-SAT et U-1-dans-3-SAT ne sont pas connus pour être dans $NP \cup \text{co-NP}$ mais U-SAT et U-1-dans-3-SAT sont de même complexité au sens où l'un se transforme en l'autre selon des réductions polynomiales [2]. Ces deux problèmes sont NP-difficiles et appartiennent à la classe DP (aussi notée BH_2 dans la hiérarchie booléenne) qui regroupe les problèmes qui s'expriment, sous forme de langages, comme l'intersection d'un langage appartenant à NP (correspondant ici à la question « existe-t-il au moins une fonction d'assignation... ») et d'un langage appartenant à co-NP (correspondant ici à la question « existe-t-il au plus une fonction d'assignation... »). On notera l'inclusion $NP \cup \text{co-NP} \subseteq DP$. On remarquera par ailleurs que, dans [4], C. H. Papadimitriou doute que U-SAT soit DP-complet. En notant $<$ la réduction polynomiale, nous établissons les relations suivantes :

- U-1-dans-3-SAT $<$ U-TCM
- U-TCM $<$ U-SAT
- U-1-dans-3-SAT $<$ U-TO.

Compte tenu de la relation U-SAT $<$ U-1-dans-3-SAT établie dans [2] et grâce à la transitivité des réductions polynomiales, on en déduit que U-TCM, U-SAT et U-1-dans-3-SAT sont de même complexité (d'où il découle que U-TCM est NP-difficile et appartient à DP, ce que l'on peut par ailleurs établir directement).

Concernant U-TO, les réductions U-1-dans-3-SAT $<$ U-TO et U-SAT $<$ U-1-dans-3-SAT entraînent la relation U-SAT $<$ U-TO, ce que l'on peut interpréter de la façon suivante : U-TO est au moins aussi difficile à résoudre que U-SAT (en particulier, U-TO est NP-difficile). Par ailleurs, nous montrons que U-TO appartient à la classe, notée L^{NP} ou aussi Θ_2 , des problèmes de décision que l'on peut résoudre à l'aide d'un algorithme résolvant un problème NP-complet que l'on appelle un nombre logarithmique de fois (on notera l'inclusion $DP \subseteq L^{NP}$).

Enfin, compte tenu des liens habituels entre transversal, clique (une clique étant un sous-graphe complet) et stable (un stable étant un sous-graphe sans arête), les résultats précédents concernant U-TCM et U-TO s'étendent facilement à leurs équivalents relatifs à l'unicité d'une clique ou d'un stable de cardinal minoré ou à l'unicité d'une clique maximum ou d'un stable maximum.

III. Références

- [1] M. R. Garey et D. S. Johnson. *Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, New York, 1979.
- [2] O. Hudry et A. Lobstein. Some Complexity Considerations on the Uniqueness of Solutions for Colouring and Satisfiability Problems. Soumis pour publication.
- [3] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.), *Complexity of computer computations*, Plenum Press, New York, 85-103, 1972.
- [4] C. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, Reading, 1994.