HAL open science

Sur les données endoscopiques dans le cas de l'endoscopie tordue

Jean-Loup Waldspurger

To cite this version:

Jean-Loup Waldspurger. Sur les données endoscopiques dans le cas de l'endoscopie tordue. 2022. hal-03587265

HAL Id: hal-03587265

https://hal.science/hal-03587265v1

Preprint submitted on 24 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur les données endoscopiques dans le cas de l'endoscopie tordue

J.-L. Waldspurger

24 février 2022

Abstract. We give a simple combinatorial description of the elliptic endoscopic data of a twisted space under a group G, assuming that G is semi-simple and simply connected. Assuming the same hypothesis and that the base field is a number field, we prove that, if two elliptic endoscopic data are equivalent almost everywhere, then they are equivalent.

Introduction

Considérons un corps de nombres k et un groupe réductif connexe G défini sur k. Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k et considérons de plus un caractère continu χ de $G(\mathbb{A})$ trivial sur $G(k)$. On sait définir la notion de donnée endoscopique pour (G, χ). Pour toute place v de k, des objets précédents se déduisent des objets définis sur le complété k_v. Considérons deux données endoscopiques sur k et supposons que, pour toute place v, les données sur v qui s'en déduisent sont équivalentes. B. Lemaire et l'auteur ont prouvé en [5], proposition 1, que les deux données étaient alors globalement équivalentes.

On considère ici le cas de l'endoscopie tordue, c'est-à-dire que l'on se donne de plus un espace tordu $\tilde{G}$ sous G, défini sur k (cf. [6] I.1.1 pour une définition précise). Il y a encore une notion de donnée endoscopique. Le résultat de [5] ne s'étend pas à ce cas. Nous donnerons un contre-exemple dans le paragraphe 15. Nous prouverons toutefois qu'il reste valide si l'on impose les hypothèses suivantes :

- les données endoscopiques sont "s-unitaires", cf. paragraphe 5 ;

- le groupe G est semi-simple et simplement connexe (cf. paragraphe 13)ou semi-simple et absolument presque simple (cf. paragraphe 14).

Les données elliptiques sont s-unitaires. En fait, le résultat est certainement vrai sans cette hypothèse d'unitarité mais il nous a paru inutile de la lever.

L'intérêt de ce résultat est médiocre. Sa démonstration nous semble plus intéressante (accès d'optimisme ?). Considérons le cas où G est semi-simple et simplement connexe. Dans la proposition 2 de [5], où nous considérions le cas non tordu et où l'on supposait de plus G absolument presque simple, nous avons donné une description facile des classes d'équivalence des données endoscopiques elliptiques. Elle reposait sur une construction assez magique de Langlands, cf. [4] pages 708-709, et celui-ci ne considère que le cas non tordu. Nous étendons ici cette description au cas tordu. Expliquons-la. En fait, tout notre article se passe dans le groupe dual $\hat{G}$. Le corps k n'intervient que par une action continue du groupe de Galois absolu Γ_k sur $\hat{G}$ par automorphismes algébriques. On a supposé ci-dessus que k était un corps de nombres mais la description qui suit vaut aussi si k est un corps local de caractéristique nulle. Puisque G est simplement connexe, $\hat{G}$ est adjoint. De l'espace tordu $\tilde{G}$ se déduit un automorphisme θ de $\hat{G}$, qui commute à

l'action galoisienne. Notons e l'ordre de θ et Θ le groupe d'automorphismes engendré par θ. Notons $I(\hat{G})$ l'ensemble des composantes simples de $\hat{G}$. Le groupe $\Theta \times \Gamma_k$ agit sur $I(\hat{G})$, notons $i(\hat{G}, \theta \times \Gamma_k)$ le nombre d'orbites.

Introduisons deux corps locaux F et E de caractéristique nulle, de caractéristique résiduelle $p > e$, tels que E soit une extension galoisienne cyclique totalement ramifiée de F de degré e. Introduisons un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini et quasi-déployé sur F vérifiant les hypothèses suivantes :

$\mathbf{G}$ a mêmes données de racines que $\hat{G}$ (en oubliant les actions galoisiennes) ; cela entraîne que θ se transfère en un automorphisme algébrique encore noté θ de $\mathbf{G}$;

$\mathbf{G}$ est déployé sur E et il existe un générateur du groupe de Galois $\Gamma_{E/F}$ dont l'action $\mathbf{G}$ induise une action sur les données de racines coïncidant avec θ.

L'action de Γ_k sur $\hat{G}$ se transfère en une action de Γ_k sur $\mathbf{G}$ par automorphismes algébriques. On note $\sigma \mapsto \sigma_G$ cette action. Introduisons les immeubles de Bruhat-Tits $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$ sur E et F. Des actions de θ et Γ_k sur $\mathbf{G}$ se déduisent des actions sur l'immeuble $Imm_E(\mathbf{G})$. L'immeuble $Imm_F(\mathbf{G})$ s'identifie au sous-ensemble de points fixes $Imm_E(\mathbf{G})^\theta$. On peut fixer un appartement $App_E \subset Imm_E(\mathbf{G})$ et une alcôve $C \subset App_E$ qui soient conservés par θ et par l'action de Γ_k. L'ensemble $\mathbf{A}^{nr} = App_E^\theta$ est un appartement de $Imm_F(\mathbf{G})$ et l'ensemble $C^{nr} = C^\theta$ est une alcôve de cet appartement. On sait bien qu'il y a un ensemble fini de "racines" Δ_a^{nr} et, pour toute $\beta \in \Delta_a^{nr}$, une racine affine β^{aff} sur $\mathbf{A}^{nr}$ de sorte que

C^{nr} soit l'ensemble des $x \in \mathbf{A}^{nr}$ tels que $\beta^{aff}(x) > 0$ pour toute $\beta \in \Delta_a^{nr}$;

pour tout $\beta \in \Delta_a^{nr}$, l'hyperplan annulateur de β^{aff} soit un mur de l'adhérence $\bar{C}^{nr}$ de C^{nr}.

Bruhat et Tits définissent le groupe de Weyl affine étendu W^{aff}. Il agit sur $\mathbf{A}^{nr}$. On note Ω^{nr} le sous-groupe des $v \in W^{aff}$ dont l'action conserve C^{nr}. C'est un groupe abélien fini. L'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ de Γ_k conserve C^{nr}. Notons $\underline{Endo}$ l'ensemble des couples $(\omega_\star, x)$ tels que

$\omega_\star : \Gamma_k \to \Omega^{nr}$ est une application continue et l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star := \omega_\star(\sigma) \circ \sigma_G$ est un homomorphisme (à valeurs dans le groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}^{nr}$) ;

x est un élément de $\bar{C}^{nr}$ fixé par $\sigma_\star$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

Pour $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$, notons $S(x)$ l'ensemble des $\beta \in \Delta_a^{nr}$ tels que $\beta^{aff}(x) = 0$. C'est un sous-ensemble propre de Δ_a^{nr}. De l'action $\sigma \mapsto \sigma_\star$, qui conserve C^{nr}, se déduit une action sur Δ_a^{nr}, notée de la même façon. Cette action conserve $S(x)$, donc aussi $\Delta_a^{nr} - S(x)$. On vérifie facilement que le nombre d'orbites de l'action de Γ_k sur $\Delta_{nr}^a - S(x)$ est minoré par $i(\hat{G}, \theta \times \Gamma_k)$. Disons que $(\omega_\star, x)$ est elliptique si ce nombre d'orbites est égal à $i(\hat{G}, \theta \times \Gamma_k)$.

Deux éléments $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ de $\underline{Endo}$ sont dits équivalents si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega^{nr}$ tel que $\omega(x_1) = x_2$ et $\omega\sigma_{\star,1}\omega^{-1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. On note $Endo$ l'ensemble des classes d'équivalences et $Endo_{ell}$ le sous-ensemble des classes elliptiques.

Notre résultat est qu'il y a une bijection "naturelle" entre l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques s-unitaires et l'ensemble $Endo$ et que cette bijection se restreint en une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques elliptiques et l'ensemble $Endo_{ell}$. C'est le théorème du paragraphe 12. Cela fournit une description combinatoire simple des données endoscopiques s-unitaires ou elliptiques.

1 Notations

On note $\mathbb{N}_{>0}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note $\mu_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$. On note $\mu(\mathbb{C})$ la réunion des $\mu_n(\mathbb{C})$ quand n décrit $\mathbb{N}_{>0}$. On note U^1 le groupe des nombres complexes de module 1.

Soit X un ensemble sur lequel agit un groupe G. On note X^G l'ensemble des points fixes pour cette action. Si G est engendré par un unique élément θ, on note aussi $X^\theta = X^G$. Pour $x \in X$, on note $Z_G(x)$ le fixateur de x dans G. Pour tout sous-ensemble $Y \subset X$, on note $Norm_G(Y)$ le sous-groupe des éléments de G qui conservent Y.

Pour tout groupe algébrique G défini sur un corps k de caractéristique nulle, on note G^0 sa composante neutre et $Z(G)$ son centre. Pour un tore T défini sur k, on note $X^*(T)$, resp. $X_*(T)$ le groupe des caractères, resp. cocaractères, de T définis sur une clôture algébrique de k.

Soit k un corps qui est soit un corps local de caractéristique nulle, soit un corps de nombres. On en fixe une clôture algébrique $\bar{k}$, on note Γ_k le groupe de Galois de $\bar{k}/k$ et W_k le groupe de Weil de k. Si k' est une extension galoisienne de k, que l'on suppose toujours contenue dans $\bar{k}$, on note $\Gamma_{k'/k}$ le groupe de Galois de k'/k. Si k est un corps de nombres, on note V_k son ensemble de places. Pour toute place $v \in V_k$, on note k_v le complété de k en v et on identifie Γ_{k_v} à un sous-groupe de décomposition de Γ_k. On a un homomorphisme naturel $W_{k_v} \to W_k$.

On fixe pour tout l'article un corps k qui est soit un corps local de caractéristique nulle, soit un corps de nombres.

2 Données endoscopiques

On rappelle ici la notion de donnée endoscopique dans le cas tordu, cf. [6] I.1.5 pour plus de détails. Soit G un groupe réductif connexe défini sur k et $\tilde{G}$ un espace tordu sous G, lui aussi défini sur k. On note $\hat{G}$ le dual de Langlands de G. Soit $\mathbf{a}$ un élément de $H^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est local, de $H^1(W_k, Z(\hat{G}))/ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est un corps de nombres, où $ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ est le noyau de l'homomorphisme

$$H^1(W_k, Z(\hat{G})) \to \prod_{v \in V_k} H^1(W_{k_v}, Z(\hat{G})).$$

L'espace tordu $\tilde{G}$ détermine un automorphisme θ_Z de $Z(G)$ et on suppose que celui-ci est d'ordre fini. Ces données étant fixées, on sait définir la notion de donnée endoscopique du triplet $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Le groupe $\hat{G}$ est muni d'une action de Γ_k, que l'on note $\sigma \mapsto \sigma_G$, et il existe par définition une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\hat{G}$ qui est conservée par cette action. On fixe une telle paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$. La donnée de $\tilde{G}$ détermine un automorphisme θ de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$ et commute à l'action galoisienne. L'ensemble $\hat{G}\theta$ est un espace tordu sous $\hat{G}$. Introduisons le L-groupe ${}^LG = \hat{G} \rtimes W_k$. Alors l'ensemble ${}^LG\theta$ est aussi un espace tordu sous ${}^LG$.

Considérons un élément semi-simple $\tilde{s} \in \hat{G}\theta$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Considérons un sous-groupe $\mathcal{G}' \subset {}^LG$. On suppose $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. On a donc une suite

$$(1) \qquad 1 \to \hat{G}' \to \mathcal{G}' \to W_k \to 1.$$

On suppose que cette suite est exacte et scindée, c'est-à-dire que la projection $\mathcal{G}' \to W_k$ admet une section qui soit un homomorphisme continu. On suppose qu'il existe un

cocycle $a : W_k \to Z(\hat{G})$ dont la classe soit $\mathbf{a}$ dans $H^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est local ou dans $H^1(W_k, Z(\hat{G}))/ker^1(W_k, Z(\hat{G}))$ si k est un corps de nombres, de sorte que, pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$, on ait l'égalité

$$\tilde{s}(g, w) = (a(w)g, w)\tilde{s}$$

dans ${}^L G\theta$. De la suite (1) se déduit une L-action de Γ_k dans $\hat{G}'$ que l'on note $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Soit G' un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur k de sorte que $\hat{G}'$ muni de cette action galoisienne soit un groupe dual de G'. A ces conditions, le triplet $(G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ est appelé donnée endoscopique de $(G', \mathcal{G}', \mathbf{a})$. La donnée est dite elliptique si $Z(\hat{G}')^{\Gamma_k,0} = Z(\hat{G})^{\theta,\Gamma_k,0}$. Deux données endoscopiques $(G'_1, \mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(G'_2, \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont dites équivalentes s'il existe un élément $x \in \hat{G}$ tel que $x\tilde{s}_1 x^{-1} \in \tilde{s}_2 Z(\hat{G})$ et $x\mathcal{G}'_1 x^{-1} = \mathcal{G}'_2$.

3 Transformation de la définition

Considérons un groupe réductif connexe $\hat{G}$ défini sur $\mathbb{C}$, muni d'une action continue de Γ_k par automorphismes algébriques (continue signifiant qu'elle se quotiente par une action d'un groupe fini $\Gamma_{k'/k}$). On suppose qu'il existe une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{B}, \hat{T}, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ de $\hat{G}$ qui est conservée par cette action. On fixe une telle paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}$. On pose encore ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_k$. Considérons un automorphisme algébrique θ de $\hat{G}$ qui conserve $\hat{\mathcal{E}}$, est d'ordre fini et commute à l'action galoisienne. On a de nouveau des espaces tordus $\hat{G}\theta$ sous $\hat{G}$ et ${}^L G\theta$ sous ${}^L G$. Soit $\tilde{s}$ un élément semi-simple de $\hat{G}\theta$. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Considérons un sous-groupe $\mathcal{G}' \subset {}^L G$. On suppose $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. On a donc une suite

$$(1) \qquad 1 \to \hat{G}' \to \mathcal{G}' \to W_k \to 1.$$

On suppose que cette suite est exacte et scindée, au même sens que dans le paragraphe précédent. On suppose que

(2) pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$, il existe $z \in Z(\hat{G})$ de sorte que $\tilde{s}(g, w) = (zg, w)\tilde{s}$.

A ces conditions, appelons le couple $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique de $({}^L G, \theta)$. Les notions d'ellipticité d'une pré-donnée ou d'équivalence de deux pré-données se définissent comme dans le paragraphe précédent.

Dans la situation de ce paragraphe précédent, une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$ définit une pré-donnée de $({}^L G, \theta)$. Inversement, soit $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée. A isomorphisme près, il existe un unique groupe réductif connexe G' défini et quasi-déployé sur k de sorte que $\hat{G}'$ en soit le groupe dual. Il existe alors une unique classe $\mathbf{a}$ de sorte que le triplet $(G', \mathcal{G}', \tilde{s})$ soit une donnée endoscopique de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$. Ces correspondances conservent la notion d'équivalence. Autrement dit, l'ensemble des pré-données endoscopiques de $({}^L G, \theta)$ s'identifie à la réunion sur les classes $\mathbf{a}$ des ensembles de données endoscopiques de $(G, \tilde{G}, \mathbf{a})$.

Remarquons que la notion de pré-donnée ne concerne que des objets définis sur $\mathbb{C}$. Le corps k n'y intervient que via une action continue de Γ_k.

4 Rappels concernant les pré-données endoscopiques

On se place dans la situation du paragraphe précédent. On note $w \mapsto w_G$ l'action de W_k sur $\hat{G}$ qui étend l'action galoisienne.

On note Σ l'ensemble des racines de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, on note α_{res} la restriction de α à $\hat{T}^{\theta,0}$. On pose $\Sigma_{res} = \{\alpha_{res}; \alpha \in \Sigma\}$. C'est un système de racines en général non

réduit. On note $\Sigma_{res,ind}$ le sous-ensemble des racines indivisibles, qui est encore un système de racines. L'automorphisme θ agit sur Σ et Σ_{res} est en bijection avec l'ensemble des orbites pour cette action. Notons $\Delta_{res} = \{\alpha_{res}; \alpha \in \Delta\}$. Cet ensemble est une base de $\Sigma_{res,ind}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, on note $e(\alpha)$ le plus petit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $\theta^n(\alpha) = \alpha$. Pour $\beta \in \Sigma_{res}$ et pour une racine $\alpha \in \Sigma$ telle que $\beta = \alpha_{res}$, l'entier $e(\alpha)$ ne dépend que de β, on le note aussi $e(\beta)$.

Notons W le groupe de Weyl de $\hat{G}$ relativement à $\hat{T}$. L'automorphisme θ agit sur W. Le groupe W^θ est le groupe de Weyl du système de racines $\Sigma_{res,ind}$. Plus précisément, W^θ s'identifie au groupe de Weyl du groupe $\hat{G}^{\theta,0}$ relativement au sous-tore maximal $\hat{T}^{\theta,0}$. Le système de racines de $\hat{G}^{\theta,0}$ est $\Sigma_{res,ind}$, cf. [3] 1.3.

Soit $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique. A équivalence près, on peut supposer $\tilde{s} = s\theta$, avec $s \in \hat{T}^{\theta,0}$. Supposons cette condition vérifiée. On a noté $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$. Le tore $\hat{T}^{\theta,0}$ en est un sous-tore maximal. Notons $W^{\hat{G}'}$ le groupe de Weyl de $\hat{G}'$ relatif à ce tore. Alors $W^{\hat{G}'} \subset W^\theta$. Notons $\Sigma(\hat{G}')$ l'ensemble de racines de $\hat{T}^{\theta,0}$ dans $\hat{G}'$. D'après [3] 1.3, $\Sigma(\hat{G}')$ est le sous-ensemble des racines $\beta \in \Sigma_{res}$ vérifiant l'égalité

$\beta(s)^{e(\beta)} = 1$ si β est indivisible ;

$\beta(s)^{e(\beta)} = -1$ si β est divisible.

Le couple $(\hat{B} \cap \hat{G}', \hat{T}^{\theta,0})$ est une paire de Borel de $\hat{G}'$. Complétons-la en une paire de Borel épinglée $\hat{\mathcal{E}}'$. Le groupe $\mathcal{G}'$ normalise $\hat{G}'$. Pour tout $w \in W_k$, on peut donc fixer $(g(w), w) \in \mathcal{G}'$ tel que la restriction à $\hat{G}'$ de l'automorphisme $ad_{g(w)} \circ w_G$ conserve $\hat{\mathcal{E}}'$. On note $w \mapsto w_{G'}$ l'action de W_k sur $\hat{G}'$, $w \in W_k$ agissant par la restriction de l'automorphisme précédent. Puisque $ad_{g(w)} \circ w_G$ conserve $\hat{\mathcal{E}}'$ et que w_G conserve $\hat{T}^{\theta,0}$, la conjugaison par $g(w)$ conserve $\hat{T}^{\theta,0}$, donc aussi son commutant $\hat{T}$. Donc $g(w)$ appartient à $Norm_{\hat{G}}(\hat{T})$. Notons $u(w)$ son image dans W. Son action sur $\hat{T}$ conserve $\hat{T}^{\theta,0}$ et cela implique que $u(w)$ appartient à W^θ. D'après ce que l'on a dit ci-dessus, on peut fixer un élément $n(w) \in Norm_{\hat{G}^{\theta,0}}(\hat{T}^{\theta,0})$ dont l'image dans W^θ soit $u(w)$. Il existe alors $t(w) \in \hat{T}$ tel que $g(w) = t(w)n(w)$. On a l'égalité $\mathcal{G}' = \{ht(w)n(w), w); w \in W_k, h \in \hat{G}'\}$. La condition 3(2) équivaut à

(1) pour tout $w \in W_k$, il existe $z \in Z(\hat{G})$ de sorte que $w_{G'}(s) = zs\theta(t(w))t(w)^{-1}$.

L'existence d'une section continue de la projection $\mathcal{G}' \mapsto W_k$ entraîne que les applications $w \mapsto n(w), w_{G'}$ peuvent être choisies telles qu'elles se quotientent par un quotient fini de W_k, puis s'étendent en des applications définies sur Γ_k. On notera celles-ci $\sigma \mapsto n(\sigma), \sigma_{G'}$.

Introduisons quelques notations. On note $1 - \theta$ l'homomorphisme $t \mapsto t\theta(t)^{-1}$ de $\hat{T}$ dans lui-même. On note $\hat{G}_{AD}$ le groupe adjoint de $\hat{G}$. Pour un élément $g \in \hat{G}$, resp. un sous-groupe $\hat{H}$ de $\hat{G}$, on note g_{ad}, resp.$\hat{H}_{ad}$, son image dans $\hat{G}_{AD}$. Signalons que les groupes $\hat{T}^\theta_{ad}$ et $\hat{G}^\theta_{AD}$ sont connexes.

5 Les pré-données endoscopiques elliptiques sont d'ordre fini

On dit qu'une pré-donnée endoscopique est s-unitaire si elle est équivalente à une donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ telle que $\tilde{s} = s\theta$, où s est un élément de $\hat{T}^{\theta,0}$ tel que $\beta(s) \in U^1$ pour tout $\beta \in \Sigma_{res}$ (rappelons que U^1 est le groupe des nombres complexes de module 1). On dit qu'une pré-donnée endoscopique est d'ordre fini si elle équivalente à une donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ telle que $\tilde{s} = s\theta$, où s est un élément de $\hat{T}^{\theta,0}$ dont l'image dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ est d'ordre

fini. Une pré-donnée d'ordre fini est s-unitaire.

Remarque. On vérifie aisément qu'une pré-donnée endoscopique est s-unitaire, resp. d'ordre fini, si et seulement si, pour toute pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ qui lui est équivalente, telle que $\tilde{s} = s\theta$, avec $s \in \hat{T}^{\theta,0}$, s vérifie la condition requise ci-dessus : $\beta(s) \in U^1$ pour toute $\beta \in \Sigma_{res}$, resp. l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ est d'ordre fini.

Lemme. *Toute pré-donnée endoscopique elliptique est d'ordre fini, a fortiori s-unitaire.*

Preuve. Nous adaptons au cas tordu la preuve de Langlands, cf. [4] p. 705. On considère une pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ avec $\tilde{s} = s\theta$, où $s \in \hat{T}^{\theta,0}$. Supposons que l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ n'est pas d'ordre fini. On va prouver que la pré-donnée n'est pas elliptique. On utilise les définitions et notations du paragraphe 4. Notons Φ l'ensemble des $\beta \in \Sigma_{res,ind}$ tels que $\beta(s) \in \mu(\mathbb{C})$. D'après la description donnée au paragraphe 4 de l'ensemble $\Sigma(\hat{G}')$, tout élément de cet ensemble est multiple d'un élément de Φ. L'hypothèse que l'image de s dans $\hat{T}^{\theta,0}/Z(\hat{G})^{\theta,0}$ n'est pas d'ordre fini signifie que Φ n'est pas égal à $\Sigma_{res,ind}$ tout entier. Notons $\pi : \Sigma_{res,ind} \to \mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$ l'application qui, à $\beta \in \Sigma_{res,ind}$ associe l'image de $\beta(s)$ dans $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$. Notons A le groupe engendré par l'image de π. Alors A est un sous-groupe de type fini de $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$, non réduit à l'élément neutre. Puisque $\mathbb{C}^\times/\mu(\mathbb{C})$ est sans torsion, A est un groupe abélien libre et on peut en fixer une base $\{a_1, ..., a_n\}$. On a $n \geq 1$. Notons A^M le sous-groupe de A engendré par $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$ et A^P le sous-ensemble de A formé des éléments dont la n-ième coordonnée dans la base $\{a_1, ..., a_n\}$. est positive ou nulle. Notons $\Sigma^M_{res,ind}$, resp. $\Sigma^P_{res,ind}$, l'ensemble des $\beta \in \Sigma_{res,ind}$ telles que $\pi(\beta) \in A^M$, resp. $\pi(\beta) \in A^P$. L'ensemble $\Sigma^P_{res,ind}$ est un sous-ensemble parabolique propre de $\Sigma_{res,ind}$ et $\Sigma^M_{res,ind}$ en est le sous-ensemble de Levi. L'ensemble Φ est inclus dans $\Sigma^M_{res,ind}$. Notons $Z^M_* \subset X_*(\hat{T}^{\theta,0})$ l'annulateur de $\Sigma^M_{res,ind}$, c'est-à-dire l'ensemble des $x_* \in X_*(\hat{T}^{\theta,0})$ tels que $\beta(x_*) = 0$ pour tout $\beta \in \Sigma^M_{res,ind}$. Puisque tout élément de $\Sigma(\hat{G}')$ est multiple d'un élément de Φ, lequel est contenu dans $\Sigma^M_{res,ind}$, Z^M_* est contenu dans $X_*(Z(\hat{G}')^0)$.

L'action galoisienne $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ de W_k sur $\hat{T}^{\theta,0}$ conserve $\Sigma_{res,ind}$. Montrons que

(1) cette action conserve $\Sigma^M_{res,ind}$ et $\Sigma^P_{res,ind}$.

Soit $\sigma \in \Gamma_k$. Il suffit de prouver que $\pi \circ \sigma_{G'}^{-1} = \pi$. Posons $s' = \sigma_{G'}(s)$. Pour $\beta \in \Sigma_{res,ind}$, on a $\sigma_{G'}^{-1}(\beta)(s) = \beta(s')$. En vertu de la définition de π, il suffit de prouver que $\beta(s') \in \mu(\mathbb{C})\beta(s)$ pour tout $\beta \in \Sigma_{res,ind}$. La relation 4(1) entraîne que s'_{ad} appartient à $(1-\theta)(\hat{T}_{ad})s_{ad}$. Puisque s_{ad} et s'_{ad} appartiennent tous deux à $\hat{T}^\theta_{ad}$, on a même $s'_{ad} \in s_{ad}\left((1-\theta)(\hat{T}_{ad}) \cap \hat{T}^\theta_{ad}\right)$. Mais ce groupe $(1-\theta)(\hat{T}_{ad}) \cap \hat{T}^\theta_{ad}$ est fini. Il en résulte que, pour tout $\beta \in \Sigma_{res,ind}$, le quotient $\beta(s')\beta(s)^{-1}$ est une racine de l'unité. C'est la propriété voulue qui démontre (1).

A toute racine $\beta \in \Sigma_{res,ind}$ est associée une coracine $\check{\beta} \in X_*(\hat{T}^{\theta,0})$. Notons $\check{\delta}$ la somme des coracines associées aux éléments $\beta \in \Sigma^P_{res,ind} - \Sigma^M_{res,ind}$. C'est un élément de Z^M_* qui n'appartient pas à $X_*(Z(\hat{G})^0)$. La propriété (1) entraîne que $\check{\delta}$ est fixé par l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$. Puisque $Z^M_* \subset X_*(Z(\hat{G}')^0)$, on obtient que $\check{\delta}$ est un élément de $X_*(Z(\hat{G}')^{\Gamma_k,0})$ qui n'appartient pas à $X_*(Z(\hat{G})^{\theta,\Gamma_k,0})$. Donc la pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ n'est pas elliptique. Cela achève la preuve. $\square$

6 Constructions immobilières

Pour ce paragraphe et les suivants jusqu'en 13, on suppose que $\hat{G}$ est adjoint.

Notons e l'ordre de θ. Fixons un nombre premier $p > e$ et une puissance q de p telle que $q \equiv 1 \, mod \, e\mathbb{Z}$. Fixons un corps local F non-archimédien de caractéristique nulle dont le corps résiduel est $\mathbb{F}_q$. On peut fixer une extension galoisienne totalement ramifiée E/F de sorte que $\Gamma_{E/F} \simeq \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. On fixe un générateur $\gamma \in \Gamma_{E/F}$. Il existe à isomorphisme près un unique groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini et quasi-déployé sur F de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées. Fixons une paire de Borel épinglée $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (\mathbf{B}, \mathbf{T}, (\mathbf{E}_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de $\mathbf{G}$ conservée par l'action galoisienne. Alors il existe des isomorphismes en dualité $X_*(\hat{T}) \simeq X_*(\mathbf{T})$ et $X^*(\hat{T}) \simeq X^*(\mathbf{T})$ qui font se correspondre les coracines, resp. racines, de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$ et de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$, ainsi que les coracines, resp. racines, simples relativement à $\hat{B}$, resp. $\mathbf{B}$ (c'est pourquoi nous avons noté par anticipation Δ l'ensemble commun de racines simples). Par ces isomorphismes, l'action de θ sur Δ correspond à l'action de $\gamma \in \Gamma_{E/F}$. On notera encore θ l'action algébrique sur $\mathbf{T}$ déduite de l'action de γ, ou encore transportée par les isomorphismes précédents de l'action de θ sur $\hat{T}$. Le groupe $\mathbf{G}$ est adjoint et de même type que $\hat{G}$. On note encore Σ l'ensemble commun de racines de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$ ou de $\hat{T}$ dans $\hat{G}$. De l'action du groupe Γ_k sur $\hat{G}$ se déduit une action sur Σ qui préserve Δ. Elle se transporte donc en une action de Γ_k sur $\mathbf{G}$ par automorphismes algébriques qui conservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et commutent à l'action de γ. On note $\sigma \mapsto \sigma_G$ cette action.

Introduisons les immeubles de Bruhat-Tits $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$ sur E et F. Au tore $\mathbf{T}$ est associé un appartement $App_E(\mathbf{T})$ dans $Imm_E(\mathbf{G})$. A la paire de Borel épinglée $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est associée une alcôve $C \subset App_E(\mathbf{T})$.

Supposons un instant que $\mathbf{G}$ est simple (sur E). Notons α_0 l'opposée de la racine de plus grande longueur de Σ (relativement à la base Δ) et posons $\Delta_a = \Delta \cup \{\alpha_0\}$. Notons $\bar{C}$ l'adhérence de C. Alors Δ_a s'identifie à l'ensemble des sommets du simplexe $\bar{C}$. On note $\alpha \mapsto s_\alpha$ cette bijection. L'appartement $App_E(\mathbf{T})$ s'identifie à $X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, le sommet s_{α_0} s'identifiant à 0. Revenons au cas général où $\mathbf{G}$ n'est pas supposé simple. Notons

$$\mathbf{G} = \prod_{i \in I(\mathbf{G})} \mathbf{G}_i$$

la décomposition de $\mathbf{G}$ en composantes simples. Les objets introduits ci-dessus qui ne dépendent que de la structure de $\mathbf{G}$ sur E ont des analogues pour chaque $\mathbf{G}_i$ et on affecte ces analogues d'un indice i. On a

$$App_E(\mathbf{T}) = \prod_{i \in I(\mathbf{G})} App_E(\mathbf{T}_i) \simeq \prod_{i \in I(\mathbf{G})} X_*(\mathbf{T}_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},$$

et $C = \prod_{i \in I(\mathbf{G})} C_i$. On pose $\Delta_a = \sqcup_{i \in I(\mathbf{G})} \Delta_{a,i}$.

Notons $\mathbf{T}^{nr}$ le plus grand sous-tore de $\mathbf{T}$ qui est déployé sur F. On a $X_*(\mathbf{T}^{nr}) = X_*(\mathbf{T})^{\Gamma_{E/F}} = X_*(\mathbf{T})^\theta$. Le groupe $\Gamma_{E/F}$ agit sur $Imm_E(\mathbf{G})$ et $Imm_F(\mathbf{G})$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de cette action (parce que l'extension E/F est modérément ramifiée). En particulier, l'appartement $App_F(\mathbf{T}^{nr})$ s'identifie à l'ensemble des points fixes de l'action naturelle de θ dans $App_E(\mathbf{T})$, ou encore à $X_*(\mathbf{T}^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Posons

$$\mathbf{A}^{nr} = App_F(\mathbf{T}^{nr}) = X_*(\mathbf{T}^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Notons C^{nr} l'ensemble des points fixes dans C pour l'action de θ. C'est une alcôve dans $\mathbf{A}^{nr}$. Toute racine $\beta \in \Sigma_{res}$ définit une forme linéaire sur $\mathbf{A}^{nr}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $\beta[\lambda]$ la fonction affine $x \mapsto \beta(x) + \lambda$ sur $\mathbf{A}^{nr}$. Bruhat et Tits définissent l'ensemble des

racines affines de cet appartement. Pour tout $\beta \in \Sigma_{res}$, il existe un sous-ensemble discret $\Lambda(\beta) \subset \mathbb{Q}$ de sorte que l'ensemble des racines affines soit égal à $\{\beta[\lambda]; \beta \in \Sigma_{res}, \lambda \in \Lambda(\beta)\}$. Rappelons la description de cet ensemble, cf. [2] 2.2.7. On a les égalités

$\Lambda(\beta) = \frac{1}{e(\beta)}\mathbb{Z}$, si β est indivisible ;

$\Lambda(\beta) = \frac{1}{e(\beta)}(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$, si β est divisible.

Notons Θ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{G}$ engendré par θ. Ce groupe Θ agit naturellement sur $I(\mathbf{G})$. On note $I(\mathbf{G})/\Theta$ l'ensemble d'orbites. Supposons un instant qu'il n'y a qu'une orbite. Pour $\beta \in \Delta_{res}$, on a $0 \in \Lambda(\beta)$ et on pose $\beta^{aff} = \beta[0]$. Il existe une unique racine $\beta_0 \in \Sigma_{res}$ et un unique élément $\lambda_0 \in \Lambda(\beta_0)$ tels qu'en posant $\beta_0^{aff} = \beta_0[\lambda_0]$ et $\Delta_a^{nr} = \Delta_{res} \cup \{\beta_0\}$, C^{nr} soit le sous-ensemble des $x \in \mathbf{A}^{nr}$ tels que $\beta^{aff}(x) > 0$ pour tout $\beta \in \Delta_a^{nr}$. De plus, il existe d'uniques coefficients réels $(d_\beta)_{\beta \in \Delta_a^{nr}}$ de sorte que l'on ait l'égalité

$$(1) \qquad \sum_{\beta \in \Delta_a^{nr}} d_\beta \beta^{aff}(x) = 1$$

pour tout $x \in \mathbf{A}^{nr}$. Ces coefficients sont en fait des entiers strictement positifs. L'adhérence $\bar{C}$ est un simplexe dont les sommets sont en bijection avec Δ_a^{nr}, on note $\beta \mapsto s_\beta$ cette bijection. Revenons au cas général où l'on ne suppose plus que $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément. Pour $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$, posons $\mathbf{G}_j = \prod_{i \in j} \mathbf{G}_i$. Ce groupe est défini sur F et les objets introduits ci-dessus conservent un sens pour lui. On les affecte d'indices j. On a $\mathbf{A}^{nr} = \prod_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbf{A}_j^{nr}$, $C^{nr} = \prod_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} C_j^{nr}$ et on pose $\Delta_a^{nr} = \sqcup_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \Delta_{a,j}^{nr}$.

Les objets intervenant dans les descriptions ci-dessus sont indépendants des corps F et E.

Le groupe W agit linéairement sur $App_E(\mathbf{T})$ et W^θ agit linéairement sur $\mathbf{A}^{nr}$. Bruhat et Tits définissent un groupe de Weyl affine W^{aff} qui agit par transformations affines sur $\mathbf{A}^{nr}$ et qui est produit semi-direct de W^θ et d'un groupe de translations que nous notons R. Ce groupe de translations est un sous-groupe de $\mathbf{A}^{nr}$. Il contient le groupe $X_*(\mathbf{T}^{nr})$ comme sous- groupe d'indice fini. On note $p_{W^\theta} : W^{aff} \to W^\theta$ la projection naturelle. Remarquons que W^θ intervient à la fois comme sous-groupe et comme quotient de W^{aff}.

En fait, on peut définir différents groupes de Weyl affines et celui que nous considérons est le plus gros possible. Il contient comme sous-groupe d'indice fini un sous-groupe W_{sc}^{aff} qui est engendré par les symétries associées aux racines affines mais, en général, il ne lui est pas égal. On note Ω^{nr} le sous-groupe des éléments de W^{aff} qui conservent l'alcôve C^{nr}. C'est un groupe abélien fini. On a la décomposition en produit semi-direct $W^{aff} = W_{sc}^{aff} \rtimes \Omega^{nr}$, cf. [1] lemme 14. Introduisons les diagrammes de Dynkin $\mathcal{D}^{nr}$ et $\mathcal{D}_a^{nr}$ associés aux ensembles de racines Δ_{res} et Δ_a^{nr}. Notons $Aut(\mathcal{D}^{nr})$ et $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$ leurs groupes finis d'automorphismes. Le groupe $Aut(\mathcal{D}^{nr})$ est égal au sous-groupe des éléments de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$ qui permutent les points du diagramme associés aux racine $\beta_{0,j}$ pour $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Le groupe Ω^{nr} s'identifie à un sous-groupe de $Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$. Il s'avère que $Aut(\mathcal{D}_a^{nr}) = \Omega^{nr} \rtimes Aut(\mathcal{D}^{nr})$.

Notons $Out(\mathbf{G})$ l'ensemble des automorphismes algébriques de $\mathbf{G}$ qui conservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Notons $Out(\mathbf{G})^\theta$ le sous-ensemble de ceux qui commutent à θ. Le groupe $Out(\mathbf{G})$ agit sur $App_E(\mathbf{T})$ en conservant C. Il s'en déduit une action sur le diagramme de Dynkin $\mathcal{D}$ associé à l'ensemble de racines simples Δ. En fait, $Out(\mathbf{G})$ s'identifie au groupe des automorphismes de $\mathcal{D}$. Le groupe $Out(\mathbf{G})^\theta$ permute les groupes $\mathbf{G}_j$ pour $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Il agit sur $\mathbf{A}^{nr}$ en conservant C^{nr} et Δ^{nr}. On en déduit un homomorphisme $Out(\mathbf{G})^\theta \to Aut(\mathcal{D}^{nr})$. Cette application est bijective si $\theta = 1$. En tout cas, on obtient un homomorphisme $\Gamma_k \to Aut(\mathcal{D}^{nr}) \subset Aut(\mathcal{D}_a^{nr})$, que l'on note encore $\sigma \mapsto \sigma_G$.

Soit $x \in \mathbf{A}^{nr}$. Notons $\Sigma^{aff}(x)$ l'ensemble des racines affines $\beta[\lambda]$ telles que $\beta[\lambda](x) = 0$. Notons $W_{sc}(x)$ le sous-groupe de W_{sc}^{aff} engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma^{aff}(x)$. L'action de $W_{sc}(x)$ sur $\mathbf{A}^{nr}$ fixe x. Supposons $x \in \bar{C}^{nr}$. Montrons que

(2) l'application $v \mapsto v(C^{nr})$ est une bijection de $W_{sc}(x)$ sur l'ensemble des alcôves $C_\dagger^{nr}$ de $\mathbf{A}^{nr}$ telles que $x \in \bar{C}_\dagger^{nr}$.

Preuve. Bruhat et Tits ont associé à x un groupe réductif connexe $\mathbf{G}_x$ défini sur $\mathbb{F}_q$. Du tore $\mathbf{T}^{nr}$ est issu un sous-tore maximal $\mathbf{T}_x$ de $\mathbf{G}_x$ qui est défini sur $\mathbb{F}_q$ et maximalement déployé. En fait, nos hypothèses impliquent que $\mathbf{G}_x$ est déployé : l'action galoisienne de $\Gamma_{E/F}$ sur $\mathbf{G}$ se fait par θ et devient triviale sur $\mathbf{T}^{nr}$. En particulier, $\mathbf{T}_x$ est déployé. Le groupe $W_{sc}(x)$ s'identifie au groupe de Weyl de $\mathbf{G}_x$ relativement à $\mathbf{T}_x$. Notons $\mathcal{B}_x$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}_x$ qui contiennent $\mathbf{T}_x$. L'ensemble des alcôves $C_\dagger^{nr}$ de $\mathbf{A}^{nr}$ telles que $x \in \bar{C}_\dagger^{nr}$ correspond bijectivement à $\mathcal{B}_x$. En particulier, C^{nr} correspond à un groupe $\mathbf{B}_x \in \mathcal{B}_x$. On sait bien que l'application $v \mapsto v(\mathbf{B}_x)$ est une bijection du groupe de Weyl de $\mathbf{G}_x$ sur $\mathcal{B}_x$. Cela prouve (2). $\square$

Supposons $x \in \bar{C}^{nr}$. Notons $S(x)$ l'ensemble des $\beta \in \Delta_a^{nr}$ telles que $\beta^{aff}(x) = 0$ et $S^{aff}(x) = \{\beta^{aff}; \beta \in S(x)\}$. On a

(3) $\Sigma^{aff}(x)$ est l'ensemble des racines affines qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de $S^{aff}(x)$.

Preuve. Il est clair que toute telle combinaison linéaire annule x. Inversement, on introduit le groupe $\mathbf{G}_x$ et ses sous-groupes $\mathbf{T}_x$ et $\mathbf{B}_x$ de la preuve précédente. D'après Bruhat et Tits, l'ensemble $\Sigma^{aff}(x)$ s'identifie à celui des racines de $\mathbf{T}_x$ dans $\mathbf{G}_x$ tandis que $S^{aff}(x)$ s'identifie à celui des racines simples relativement au Borel $\mathbf{B}_x$, cf. [8] 3.5.1, 3.5.2. Donc tout élément de $\Sigma^{aff}(x)$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de $S^{aff}(x)$. $\square$

7 L'ensemble *Endo*

Considérons l'ensemble <u>*Endo*</u> des couples $(\omega_\star, x)$ tels que

$\omega_\star$ est une application continue de Γ_k dans Ω^{nr} telle que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star := \omega_\star(\sigma)\sigma_G$ soit un homomorphisme (à valeurs dans le groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}^{nr}$) ;

x est un élément de $\bar{C}^{nr}$;

on a $\sigma_\star(x) = x$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

Deux éléments $(\omega_\star, x)$ et $(\omega_{\star'}, x')$ de <u>*Endo*</u> sont dits équivalents s'il existe $\omega \in \Omega^{nr}$ de sorte que $\omega(x') = x$ et $\sigma_{\star'} = \omega\sigma_\star\omega^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. On note *Endo* l'ensemble des classes d'équivalence.

Le groupe $\Theta \times \Gamma_k$ agit naturellement sur $I(\mathbf{G})$ et Γ_k agit sur $I(\mathbf{G})/\Theta$. Notons $I(\mathbf{G})/(\Theta \times \Gamma_k)$ l'ensemble commun d'orbites et $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$ son nombre d'éléments. Soit $(\omega_\star, x) \in$ <u>*Endo*</u>. De l'action $\sigma \mapsto \sigma_\star$ de Γ_k sur $\mathbf{A}^{nr}$ se déduit une action algébrique de Γ_k sur $\mathbf{T}^{nr}$ (on remplace $\omega_\star(\sigma)$ par $p_{W^\theta}(\omega_\star(\sigma))$). On note cette action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$. Cette action conserve Δ_a^{nr} et $S(x)$. Montrons que

(1) le nombre d'orbites de cette action dans $\Delta_a^{nr} - S(x)$ a au moins $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$ éléments.

Notons $\xi : \Delta_a^{nr} \to I(\mathbf{G})/\Theta$ l'application qui, à $\beta \in \Delta_a^{nr}$, associe l'élément $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$ tel que $\beta \in \Delta_{a,j}^{nr}$. Munissons Δ_a^{nr} de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ de Γ_k et $I(\mathbf{G})/\Theta$ de l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$. Alors ξ est équivariante pour ces actions. Décomposons x en $x = \prod_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} x_j$ où $x_j \in \bar{C}_k^{nr}$. Pour tout j, l'ensemble $\Delta_{a,j}^{nr} - S(x_j)$ n'est pas vide. Donc la restriction de ξ à $\Delta_a^{nr} - S(x)$ est surjective. L'assertion (1) en résulte.

On dit que $(\omega_\star, x)$ est elliptique si le nombre d'orbites de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ dans $\Delta_a^{nr} - S(x)$ est égal à $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$. On note $\underline{Endo}_{ell}$ l'ensemble des couples elliptiques et $Endo_{ell}$ l'ensemble de leurs classes d'équivalence.

8 Un lemme préliminaire

Puisque $\hat{G}$ est adjoint, $\hat{T}^\theta$ est connexe et égal à $X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$. Notons $\hat{T}_u^\theta$ le sous-groupe des éléments unitaires de $\hat{T}^\theta$, c'est-à-dire $\hat{T}_u^\theta = X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} U^1$. L'homomorphisme $z \mapsto e^{2\pi i z}$ identifie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à U^1. On en déduit des isomorphismes

$$\hat{T}_u^\theta \simeq (X_*(\hat{T})^\theta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/X_*(\hat{T})^\theta \simeq (X_*(\mathbf{T}^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/X_*(\mathbf{T}^{nr}) = \mathbf{A}^{nr}/X_*(\mathbf{T}^{nr}).$$

L'intersection $(1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ est finie, contenue dans $\hat{T}_u^\theta$. On a introduit au paragraphe 6 un sous-groupe R de $\mathbf{A}^{nr}$, qui contient $X_*(\mathbf{T}^{nr})$.

Lemme. *L'isomorphisme ci-dessus $\hat{T}_u^\theta \simeq \mathbf{A}^{nr}/X_*(\mathbf{T}^{nr})$ envoie $(1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ sur $R/X_*(\mathbf{T}^{nr})$.*

Preuve du lemme. Notons val_F la valuation usuelle de F et prolongeons-la en une valuation de $\bar{F}$ à valeurs dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. On a $val_F(E^\times) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$. Pour $\alpha \in \Delta$, notons E_α le sous-corps de E formé des points fixes par $\gamma^{e(\alpha)}$. On a $[E_\alpha : F] = \frac{1}{e(\alpha)}$ et $val_F(E_\alpha^\times) = \frac{1}{e(\alpha)}\mathbb{Z}$.

De la valuation val_F se déduit un homomorphisme

$$val_{\mathbf{T}} : \mathbf{T}(\bar{F}) = X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F}^\times \to X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Cet homomorphisme est équivariant pour les actions de Γ_F, donc l'image de $\mathbf{T}(F) = \mathbf{T}(\bar{F})^{\Gamma_F}$ est contenue dans $\mathbf{A}^{nr}$. D'après Bruhat et Tits, R est égal à cette image, cf. [8] 1.2. Introduisons la base $(\check{\varpi}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de $X_*(\mathbf{T})$ duale de Δ. L'automorphisme θ agit encore sur cette base. Pour $\alpha \in \Delta$, on pose $\check{\varpi}_{\alpha_{res}} = \sum_{n=1,\dots,e(\alpha)} \check{\varpi}_{\theta^n(\alpha)}$. Alors $(\check{\varpi}_\beta)_{\beta\in\Delta_{res}}$ est la base de $X_*(\mathbf{T}^{nr})$ duale de Δ_{res}. Puisque $\mathbf{T}$ est déployé sur E, on a $\mathbf{T}(E) = X_*(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} E^\times$. Soit $t = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(t_\alpha) \in \mathbf{T}(E)$, avec des coefficients $t_\alpha \in E^\times$. On a $t \in \mathbf{T}(F)$ si et seulement si $\gamma(t_\alpha) = t_{\theta(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Cela entraîne $t_\alpha \in E_\alpha^\times$. Inversement, la condition peut être réalisée pour tout $t_\alpha \in E_\alpha^\times$, en supposant que $t_{\theta^n(\alpha)} = \gamma^n(t_\alpha)$ pour $n = 1, \dots, e(\alpha) - 1$. Il s'en déduit que l'image $val_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}(F))$, c'est-à-dire R, est égale à $\oplus_{\beta\in\Delta_{res}} \frac{1}{e_\beta}\mathbb{Z}\check{\varpi}_\beta$. Soit maintenant $z = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z_\alpha)$ un élément de $\hat{T}$, avec des $z_\alpha \in \mathbb{C}^\times$. Il appartient à $(1-\theta)(\hat{T})$ si et seulement s'il existe $z' = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z'_\alpha)$ tel que $z = (1-\theta)(z') = \prod_{\alpha\in\Delta} \check{\varpi}_\alpha(z'_\alpha z'^{-1}_{\theta^{-1}(\alpha)})$. Cela équivaut à ce que, pour tout $\alpha \in \Delta$, on ait $\prod_{n=0,\dots,e(\alpha)-1} z_{\theta^n(\alpha)} = 1$. D'autre part, z appartient à $\hat{T}^\theta$ si et seulement si $z_{\theta^n(\alpha)} = z_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $n = 1, \dots, e(\alpha) - 1$. Donc $z \in (1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta$ si et seulement si, outre cette dernière condition, on a de plus $z_\alpha \in \mu_{e(\alpha)}(\mathbb{C})$. Autrement dit, $t = \prod_{\beta\in\Delta_{res}} \check{\varpi}_\beta(z_\beta)$ avec des $z_\beta \in \mu_{e(\beta)}(\mathbb{C})$. En comparant avec le calcul de R, on obtient le lemme. $\square$

Il se déduit du lemme un isomorphisme

$$\iota : \hat{T}_u^\theta/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta) \to \mathbf{A}^{nr}/R.$$

Les groupes W^θ et Γ_k agissent naturellement sur ces deux groupes et ι entrelace ces actions. Notons $p_{\mathbf{A}^{nr}} : \mathbf{A}^{nr} \to \mathbf{A}^{nr}/R$ la projection naturelle. Le groupe W^{aff} agit sur $\mathbf{A}^{nr}$ et W^θ agit sur $\mathbf{A}^{nr}/R$. On a la relation $p_{\mathbf{A}^{nr}}(v(x)) = (p_{W^\theta}(v))(p_{\mathbf{A}^{nr}}(x))$ pour tous $x \in \mathbf{A}^{nr}$ et $v \in W^{aff}$. On note $p_{\hat{T}^\theta} : \hat{T}_u^\theta \to \hat{T}_u^\theta/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$ la projection naturelle.

9 Construction de pré-données endoscopiques

Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$. Fixons $s \in \hat{T}_u^\theta$ tel que $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s) = p_{\mathbf{A}^{nr}}(x)$ et posons $\tilde{s} = s\theta$. Pour $\sigma \in \Gamma_k$, posons $u(\sigma) = p_{W^\theta}(\omega_\star(\sigma))$. Relevons l'application $\sigma \mapsto u(\sigma)$ en une application continue $n : \Gamma_k \to Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. Pour $\sigma \in \Gamma_k$, l'égalité $\sigma_\star(x) = x$ et les propriétés d'entrelacement de l'isomorphisme ι et de nos différentes projections impliquent l'égalité $u(\sigma)\sigma_G(s) \in s(1-\theta)(\hat{T})$. Donc $n(\sigma)\sigma_G(s)n(\sigma)^{-1} \in s(1-\theta)(\hat{T})$. Fixons une application continue $t : \Gamma_k \to \hat{T}$ de sorte que $n(\sigma)\sigma_G(s)n(\sigma)^{-1} = st(\sigma)^{-1}\theta(t(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Posons $\tilde{s} = s\theta$ et $g(\sigma) = t(\sigma)n(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Les applications $\sigma \mapsto n(\sigma), g(\sigma)$ etc... se prolongent continûment au groupe de Weil W_k. Parce que $n(w) \in \hat{G}^\theta$, l'égalité $n(w)w_G(s)n(w)^{-1} = st(w)^{-1}\theta(t(w))$ équivaut à

(1) $\tilde{s}(g(w), w) = (g(w), w)\tilde{s}$ pour tout $w \in W_k$.

Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})^0$ et définissons $\mathcal{G}' = \{hg(w), w); w \in W_k, h \in \hat{G}'\}$. Cet ensemble ne dépend pas des choix de $n(w)$ et $t(w)$. En effet $n(w)$ est uniquement déterminé modulo $\hat{T}^\theta \subset \hat{G}'$ et $t(w)$ l'est aussi car l'élément $(1-\theta)(t(w))$ est uniquement déterminé.

Lemme. *Le couple $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est une pré-donnée endoscopique s-unitaire.*

Preuve. On voit que les éléments $n(1)$ et $t(1)$ appartiennent à $\hat{T}^\theta$, donc à $\hat{G}'$. D'où aussi $g(1) \in \hat{G}'$. Cela entraîne $\mathcal{G}' \cap \hat{G} = \hat{G}'$. D'après (1), on a la relation clé

(2) $\tilde{s}(g, w) = (g, w)\tilde{s}$ pour tout $(g, w) \in \mathcal{G}'$.

Il reste à prouver que $\mathcal{G}'$ est un groupe et que la projection $\mathcal{G}' \to W_k$ admet une section qui soit un homomorphisme continu. Le fait que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un homomorphisme implique que, pour $\sigma, \sigma' \in \Gamma_k$, on a $n(\sigma)\sigma(n(\sigma')) \in \hat{T}^\theta n(\sigma\sigma')$. Il en résulte que, pour $w, w' \in W_k$, on a la relation $g(w)w(g(w')) \in \hat{T}g(ww')$. Ecrivons $g(w)w(g(w')) = t_2(w, w')g(ww')$, avec $t_2(w, w') \in \hat{T}$. Parce que $(g(w), w)$, $(g(w'), w')$ et $(g(ww'), ww')$ vérifient tous les trois la relation (2), on a $t_2(w, w') \in \hat{T}^\theta$. Alors $(g(w), w)(g(w'), w') = (t_2(w, w')g(ww'), ww')$ appartient à $\mathcal{G}'$. Un argument analogue prouve que $(g(w), w)^{-1}$ appartient à $\mathcal{G}'$. D'autre part, la relation (2) implique que tout élément de $\mathcal{G}'$ normalise $\hat{G}'$. De ces propriétés résulte que $\mathcal{G}'$ est un groupe. L'application $w \mapsto (g(w), w)$ est une section continue de la projection $\mathcal{G}' \to W_k$. Ce n'est pas forcément un homomorphisme. Définissons une action de Γ_k sur $\hat{T}$ par $\sigma \mapsto \sigma_{G'} = u(\sigma) \circ \sigma_G$. Elle conserve $\hat{T}^\theta$. L'application $(w, w') \mapsto t_2(w, w')$ définie ci-dessus est par construction un 2-cocycle pour cette action, qui provient d'un 2-cocycle continu défini sur Γ_k. On a vu qu'elle prenait ses valeurs dans $\hat{T}^\theta$. Parce que ce groupe est un tore, ce cocycle est trivial, cf. [4] lemme 4. On peut donc choisir une application continue $w \mapsto t'(w)$ de W_k dans $\hat{T}^\theta$ dont le cobord soit t_2. L'application $w \mapsto (t(w)'^{-1}g(w), w)$ est alors un homomorphisme continu qui scinde la projection $\mathcal{G}' \to W_k$. Cela achève la démonstration. $\square$.

La pré-donnée que l'on a construite dépend du choix de s. On montrera que sa classe d'équivalence n'en dépend pas.

10 Identification du groupe $W^{\hat{G}'}$

Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$. Construisons une donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ comme dans le paragraphe précédent, dont nous utilisons les notations. On a défini le sous-groupe $W_{sc}(x) \subset W^{aff}$ au paragraphe 6. La projection $p_{W^\theta} : W^{aff} \to W^\theta$ est injective sur $W_{sc}(x)$. En effet, si $v, v' \in W_{sc}(x)$ vérifiént $p_{W^\theta}(v) = p_{W^\theta}(v')$, il existe $r \in R$ tel que $v' = rv$. Or v et v' fixent x et la seule translation qui fixe un point de $\mathbf{A}^{nr}$ est 0. Donc $r = 0$ et $v = v'$. On a aussi défini le sous-groupe $W^{\hat{G}'} \subset W^\theta$.

Lemme. *Le groupe $W^{\hat{G}'}$ est égal à l'image de $W_{sc}(x)$ par p_{W^θ}.*

Preuve. Le groupe $W_{sc}(x)$ est engendré par les symétries associées aux racines affines appartenant à $\Sigma^{aff}(x)$, cf. paragraphe 6. Notons $p_{\Sigma_{res}}$ l'application qui, à une racine affine $\beta[\lambda]$, associe la racine $\beta \in \Sigma_{res}$. Pour la même raison que ci-dessus, la restriction à $\Sigma^{aff}(x)$ de cette application est injective . On note $\Sigma(x)$ l'image de cette application. Cet ensemble $\Sigma(x)$ est celui des $\beta \in \Sigma_{res}$ pour lesquelles $\beta(x)$ appartient à $\Lambda(\beta)$. L'image de $W_{sc}(x)$ par p_{W^θ} est le sous-groupe de W^θ engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma(x)$. D'autre part, $W^{\hat{G}'}$ est le sous-groupe de W^θ engendré par les symétries associées aux éléments de $\Sigma(\hat{G}')$. Il suffit donc de prouver

(1) $\Sigma(x) = \Sigma(\hat{G}')$.

Remarquons que, pour $\beta \in \Sigma_{res}$, l'homomorphisme $\beta^{n_\beta} : \hat{T}_u^\theta \to U^1$ se descend en un homomorphisme encore noté β^{e_β} sur $\hat{T}_u^\theta/((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$. En effet, soit $\alpha \in \Sigma$ tel que $\alpha_{res} = \beta$. Alors β^{e_β} coïncide sur $\hat{T}^\theta$ avec $\prod_{n=1,\dots,e(\alpha)} \theta^n(\alpha)$. Il est clair que cet homomorphisme est trivial sur $(1-\theta)(\hat{T})$. Cela prouve l'assertion. Via l'isomorphisme $\hat{T}_u^\theta \simeq \mathbf{A}^{nr}/X_*(\mathbf{T}^{nr})$, β correspond à la composée de la racine $\beta : \mathbf{A}^{nr} \to \mathbb{R}$ et de la projection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons $\beta_{mod\mathbb{Z}}$ cette composée. Via la remarque précédente, l'application $e_\beta\beta_{mod\mathbb{Z}}$ se descend en un homomorphisme $e_\beta\beta_{mod\mathbb{Z}} : \mathbf{A}^{nr}/R \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En vertu de la définition $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s) = p_{\mathbf{A}^{nr}}(x)$, on a alors les équivalences

$$\beta(s)^{e(\beta)} = 1 \iff e_\beta\beta(x) \in \mathbb{Z},\ \beta(s)^{e(\beta)} = -1 \iff e_\beta\beta(x) \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Il suffit alors de comparer la description de $\Sigma(\hat{G}')$ donnée au paragraphe 4 et celle de l'ensemble $\Lambda(\beta)$ donnée au paragraphe 6 pour constater que $\beta \in \Sigma(\hat{G}')$ si et seulement si $\beta(x)$ appartient à $\Lambda(\beta)$, autrement dit $\beta \in \Sigma(x)$. Cela prouve (1) et le lemme. $\square$

11 Equivalences

Soient $(\mathcal{G}_1', \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}_2', \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques. Notons $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ l'ensemble des $g \in \hat{G}$ tels que $g\tilde{s}_1 g^{-1} = \tilde{s}_2$. Notons $Isom(\mathcal{G}_1', \tilde{s}_1; \mathcal{G}_2', \tilde{s}_2)$ l'ensemble des $g \in Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ tels que $g\mathcal{G}_1' g^{-1} = \mathcal{G}_2'$. Dans le cas où les deux pré-données sont égales, notons-les simplement $(\mathcal{G}', \tilde{s})$. Alors $Isom(\tilde{s}; \tilde{s}) = Z_{\hat{G}}(\tilde{s})$ et on note $Aut(\mathcal{G}', \tilde{s}) = Isom(\mathcal{G}', \tilde{s}; \mathcal{G}', \tilde{s})$. On a l'inclusion $\hat{G}' \subset Aut(\mathcal{G}', \tilde{s})$. Revenons au cas général où les pré-données ne sont pas supposées égales. Si $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, resp $Isom(\mathcal{G}_1', \tilde{s}_1; \mathcal{G}_2', \tilde{s}_2)$, est non vide, c'est un torseur à gauche sous le groupe $Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_2)$, resp. $Aut(\mathcal{G}_2', \tilde{s}_2)$.

Soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}$. Notons $\Omega^{nr}(x_1; x_2)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega^{nr}$ tels que $\omega(x_1) = x_2$. Notons $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega^{nr}(x_1; x_2)$ tels que $\omega\sigma_{\star,1}\omega^{-1} = \sigma_{\star,2}$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Dans le cas où $(\omega_{\star,1}, x_1) = (\omega_{\star,2}, x_2)$, notons simplement $(\omega_\star, x)$ cet élément. On pose $\Omega^{nr}(x) = \Omega^{nr}(x; x)$ et $Aut(\omega_\star, x) = Isom(\omega_\star, x; \omega_\star, x)$. Revenons au cas général où les deux éléments ne sont pas supposés égaux. Si $\Omega^{nr}(x_1; x_2)$, resp. $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$, n'est pas vide, c'est un torseur à gauche sous le groupe $\Omega^{nr}(x_2)$, resp $Aut(\omega_{\star,2}, x_2)$.

Proposition. *(i) Soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}$ et soient $(\mathcal{G}_1', \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}_2', \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques. Supposons que, pour $i = 1, 2$, $(\mathcal{G}_i', \tilde{s}_i)$ soit construite à partir de $(\omega_{\star,i}, x_i)$ comme dans le paragraphe 9. Alors il existe une bijection entre les ensembles $\hat{G}_2' \backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ et $\Omega^{nr}(x_1; x_2)$, qui se restreint en une bijection entre les ensembles $\hat{G}_2' \backslash Isom(\mathcal{G}_1', \tilde{s}_1; \mathcal{G}_2', \tilde{s}_2)$ et $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$.*

(ii) Soient $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$ et $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique construite à partir de $(\omega_\star, x)$ comme dans le paragraphe 9. Alors il existe un isomorphisme de groupes de $\hat{G}'\backslash Z_{\hat{G}}(\tilde{s})$ sur $\Omega^{nr}(x)$, qui se restreint en un isomorphisme de $\hat{G}'\backslash Aut(\mathcal{G}', \tilde{s})$ sur $Aut(\omega_\star, x)$.

Preuve. On se place dans la situation de (i). Pour simplifier la notation, on pose $\boldsymbol{\mathcal{G}}'_i = (\mathcal{G}'_i, \tilde{s}_i)$ et $\mathbf{E}_i = (\omega_{\star,i}, x_i)$ pour $i = 1, 2$. On reprend les notations du paragraphe 9 en y ajoutant des indices i. Notons $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ l'ensemble des $u \in W^\theta$ tels que $u(s_1) \in s_2((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$. Notons $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ l'ensemble des $u \in W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ tels que $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1} \in W^{\hat{G}'_2} u_2(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Montrons que

(1) le groupe $W^{\hat{G}'_2}$ agit à gauche sur $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ en conservant $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$; cette actions est libre si $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ n'est pas vide ; il existe une bijection entre les ensembles $W^{\hat{G}'_2}\backslash W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ et $\hat{G}'_2\backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, qui se restreint en une bijection de $W^{\hat{G}'_2}\backslash W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ sur $\hat{G}'_2\backslash Isom(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Posons $N = Norm_{\hat{G}}(\hat{T}^\theta)$. Puisque $\hat{T}^\theta$ est un sous-tore maximal de $\hat{G}'_i$ pour $i = 1, 2$, on a l'égalité $Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) = \hat{G}'_2(N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2))$. Il en résulte une bijection

$$\hat{G}'_2\backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) \simeq Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta)\backslash(N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)).$$

Deux éléments de $N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, resp. $Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta)$, ont même image dans W^θ si et seulement s'ils diffèrent par multiplication à gauche par un élément de $\hat{T}^\theta$. En notant $\underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ l'image de $N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ dans W^θ, on en déduit que $W^{\hat{G}'_2}$ agit à gauche sur $\underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, que cette action est libre si cet ensemble n'est pas vide et que l'on a une bijection

$$\hat{G}'_2\backslash Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) \simeq W^{\hat{G}'_2}\backslash \underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2).$$

De même, notons $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ l'image dans W^θ de $N \cap Isom(\mathcal{G}'_1; \mathcal{G}'_2)$. On a une bijection

$$\hat{G}'_2\backslash Isom(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1; \mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2) \simeq W^{\hat{G}'_2}\backslash \underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1, \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2).$$

Alors (1) résulte des deux assertions suivantes

(2) on a l'égalité $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2) = \underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$;

(3) on a l'égalité $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2) = \underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Soit $u \in W^\theta$, relevons u en un élément $n \in Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. On a alors $n\tilde{s}_1 n^{-1} = u(s_1)\theta$. L'élément u appartient à $\underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ si et seulement s'il existe $t \in \hat{T}$ tel que $tn \in Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$. Cette dernière relation équivaut à $tn\tilde{s}_1 n^{-1}t^{-1} = \tilde{s}_2$, ou encore à $u(s_1)t\theta(t)^{-1} = s_2$. Donc u appartient à $\underline{W}(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ si et seulement si $u(s_1) \in s_2(1-\theta)(\hat{T})$. Puisque s_2 et $u(s_2)$ appartiennent à $\hat{T}^\theta$, cela équivaut à $u(s_1) \in s_2((1-\theta)(\hat{T}) \cap \hat{T}^\theta)$, c'est-à-dire $u \in W(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$. Cela prouve (2).

Grâce à (2), les deux ensembles $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ et $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ sont en tout cas contenus dans $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$. Pour prouver (3), on peut supposer que $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ n'est pas vide. Soit $u \in W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$. Relevons u en un élément $n \in N \cap Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$. Alors u appartient à $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$ si et seulement s'il existe $t \in \hat{T}$ tel que, d'une part $tn \in Isom(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, d'autre part $tng_1(\sigma)\sigma_G(tn)^{-1} \in \hat{G}'_2 g_2(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Puisque n lui-même appartient à $Isom(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$, la première condition équivaut à $t \in \hat{T}^\theta$ et la deuxième condition est insensible à la multiplication par un tel élément. Celle-ci est donc : pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, il existe $h(\sigma) \in \hat{G}'_2$ tel que $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1} = h(\sigma)g_2(\sigma)$. Puisque tous ces éléments, excepté peut-être $h(\sigma)$, normalisent $\hat{T}^\theta$, il en est de même de $h(\sigma)$. En projetant dans W^θ, on obtient l'égalité $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1} \in W^{\hat{G}'_2} u_2(\sigma)$. Donc $u \in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Inversement, supposons $u \in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Alors, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, il existe $u'(\sigma) \in Norm_{\hat{G}'_2}(\hat{T}^\theta)$ et

$t(\sigma) \in \hat{T}$ de sorte que $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1} = t(\sigma)u'(\sigma)g_2(\sigma)$. La conjugaison par le membre de gauche envoie $\sigma_G(s_2)\theta$ sur $\tilde{s}_2$ et il en est de même de la conjugaison par $u'(\sigma)g_2(\sigma)$. Donc la conjugaison par $t(\sigma)$ fixe $\tilde{s}_2$, donc $t(\sigma) \in \hat{T}^\theta \subset \hat{G}'_2$. Alors $ng_1(\sigma)\sigma_G(n)^{-1} \in \hat{G}'_2 g_2(\sigma)$ et, comme on l'a dit, u appartient à $\underline{W}(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Cela prouve (3), d'où (1).

Notons $W^{aff}(x_1; x_2)$ l'ensemble des $v \in W^{aff}$ tels que $v(x_1) = x_2$ et $W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$ le sous-ensemble des $v \in W^{aff}(x_1; x_2)$ tels que, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, on ait la relation $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1} \in W_{sc}(x_2)\omega_{\star,2}(\sigma)$. La projection p_{W^θ} est injective sur $W^{aff}(x_1; x_2)$ car le seul élément de R qui fixe un point de $\mathbf{A}^{nr}$ est 0. On a déjà prouvé au paragraphe 10 que $p_{W^\theta}(W^{\hat{G}'_2}) = W_{sc}(x_2)$. Montrons que

(4) $p_{W^\theta}(W^{aff}(x_1; x_2)) = W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, $p_{W^\theta}(W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)) = W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$.

Puisque $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s_i) = p_{\mathbf{A}^{nr}}(x_i)$ pour $i = 1, 2$, un élément u appartient à $W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$ si et seulement si $u(x_1) \in x_2 + R$. Cela équivaut à ce que u soit la projection dans W^θ d'un élément de $W^{aff}(x_1; x_2)$. D'où la première égalité de (4). Soit $u \in W(\tilde{s}_1; \tilde{s}_2)$, relevons u en son unique antécédant $v \in W^{aff}(x_1; x_2)$. Si $v \in W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$, on a $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1} \in W_{sc}(x_2)\omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. En projetant dans W^θ, on obtient $uu_1(\sigma)\sigma_G(u)^{-1} \in W^{\hat{G}'_2}u_2(\sigma)$, donc u appartient à $W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. Réciproquement, supposons que $u \in W(\boldsymbol{\mathcal{G}}'_1; \boldsymbol{\mathcal{G}}'_2)$. En relevant dans W^{aff} la relation précédente, on voit qu'il existe $r(\sigma) \in R$ et $v_x(\sigma) \in W_{sc}(x_2)$ de sorte que $v\omega_{\star,1}(\sigma)\sigma_G(v)^{-1} = r(\sigma)v_x(\sigma)\omega_{\star,2}(\sigma)$. Le membre de gauche envoie $\sigma_G(x_2)$ sur x_2 et il en est de même de $v_x(\sigma)\omega_{\star,2}(\sigma)$. Donc $r(\sigma)$ fixe x_2, d'où $r(\sigma) = 0$. Alors v appartient à $W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$, ce qui démontre (4).

Le groupe $W_{sc}(x_2)$ agit à gauche sur $W^{aff}(x_1; x_2)$. Cette action préserve $W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$: l'action $\sigma_{\star,2}$ préservant x_2, elle conserve $W_{sc}(x_2)$. Prouvons que

(5) $W_{sc}(x_2)\backslash W^{aff}(x_1; x_2) \simeq \Omega^{nr}(x_1; x_2)$ et $W_{sc}(x_2)\backslash W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) \simeq Isom(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$.

D'après 6(2), on a $\Omega^{nr} \cap W_{sc}(x_2) = \{1\}$. On voit que $\Omega^{nr}(x_1; x_2) = \Omega^{nr} \cap W^{aff}(x_1; x_2)$ et $Isom(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2) = \Omega^{nr} \cap W^{aff}(\mathbf{E}_1; \mathbf{E}_2)$. Il suffit alors de prouver que $W^{aff}(x_1; x_2) \subset W_{sc}(x_2)\Omega^{nr}$. Soit $v \in W^{aff}(x_1; x_2)$. Alors v envoie C^{nr} sur une alcôve dont l'adhérence contient x_2. D'après 6(2), il existe donc $v_x \in W_{sc}(x_2)$ tel que $v_x v$ conserve C^{nr}, c'est-à-dire $v_x v \in \Omega^{nr}$. Cela prouve (5).

Le (i) de l'énoncé proposition résulte de (1), (4) et (5).

Le (ii) est le cas particulier de (i) où $(\omega_{\star,1}, x_1) = (\omega_{\star,2}, x_2)$ et $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1) = (\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$. On affirme en plus que les bijections sont des homomorphismes de groupes. Mais c'est clair sur leurs constructions. □

12 La classification des pré-données endoscopiques s-unitaires pour $\hat{G}$ adjoint

Notons $\mathcal{E}ndo_u$ l'ensemble des classes d'équivalence de pré-données endoscopiques s-unitaires et notons $\mathcal{E}ndo_{ell}$ l'ensemble des classes de pré-données endoscopiques elliptiques. On a $\mathcal{E}ndo_{ell} \subset \mathcal{E}ndo_u$ d'après le lemme 5. Dans le paragraphe 9, on a associé une pré-donnée endoscopique s-unitaire à tout élément de $\underline{Endo}$. Il résulte du (i) de la proposition 11 que cette construction se descend en une application injective $\delta : Endo \to \mathcal{E}ndo_u$. Par abus de notations, on notera aussi δ l'application composée $\underline{Endo} \to Endo \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}ndo_u$.

Théorème. *(i) L'application $\delta : Endo \to \mathcal{E}ndo_u$ est bijective.*

(ii) L'image de $Endo_{ell}$ par δ est égale à $\mathcal{E}ndo_{ell}$.

Preuve. Prouvons la surjectivité de δ. Considérons une pré-donnée endoscopique s-unitaire $(\mathcal{G}', \tilde{s})$. On suppose $\tilde{s} = s\theta$, avec $s \in \hat{T}^\theta$ et on utilise les constructions et notations

du paragraphe 4. Fixons $y \in \mathbf{A}^{nr}$ tel que $p_{\mathbf{A}^{nr}}(y) = \iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s)$. Choisissons un élément $v \in W^{aff}$ tel que $v(y) \in \bar{C}^{nr}$. Posons $x = v(y)$. Soit $\sigma \in \Gamma_k$. La relation 4(2) entraîne que $u(\sigma)\sigma_G(y) \in y+R$. Il existe donc un unique élément $r(\sigma) \in R$ tel que $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G(y) = y$. Posons $v(\sigma) = vr(\sigma)u(\sigma)\sigma_G(v)^{-1}$. Alors $v(\sigma)\sigma_G(x) = x$. L'action de $v(\sigma)\sigma_G$ sur $\mathbf{A}^{nr}$ envoie C^{nr} sur une alcôve dont l'adhérence contient x. D'après 6(2), il existe un unique $v_x(\sigma) \in W_{sc}(x)$ tel que $v_x(\sigma)v(\sigma)\sigma_G$ conserve C^{nr}. Posons $\omega_\star(\sigma) = v_x(\sigma)v(\sigma)$. Puisque $v_x(\sigma)$ fixe x, on a encore $\omega_\star(\sigma)\sigma_G(x) = x$. Puisque $\omega_\star(\sigma)\sigma_G$ conserve C^{nr} et que σ_G conserve aussi cette alcôve, $\omega_\star(\sigma)$ la conserve aussi, donc $\omega_\star(\sigma) \in \Omega^{nr}$. Montrons que

(1) le couple $(\omega_\star, x)$ appartient à <u>*Endo*</u>.

Les termes v et y étant fixés, il y a un unique choix pour les autres termes. Puisque l'application $\sigma \mapsto u(\sigma)$ est continue, l'application $\sigma \mapsto \omega_\star(\sigma)$ l'est aussi. Posons $\sigma_\star = \omega_\star(\sigma)\sigma_G$. Il reste à prouver que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un homomorphisme. Soient $\sigma, \sigma' \in \Gamma_k$. Par construction, on a $u(\sigma)\sigma_G u(\sigma')\sigma'_G = u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. Il en résulte qu'il existe $r_1(\sigma, \sigma') \in R$ de sorte que $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G = r_1(\sigma, \sigma')r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. Mais $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G$ et $r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$ fixent y et le seul élément de R qui fixe un point de l'appartement est 0. Donc $r_1(\sigma, \sigma') = 0$ et $r(\sigma)u(\sigma)\sigma_G r(\sigma')u(\sigma')\sigma'_G = r(\sigma\sigma')u(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. Il en résulte que $v(\sigma)\sigma_G v(\sigma')\sigma'_G = v(\sigma\sigma')(\sigma\sigma')_G$. On en déduit que

$$(2) \qquad \sigma_\star\sigma'_\star = v_x(\sigma, \sigma')(\sigma\sigma')_\star,$$

où $v_x(\sigma, \sigma') = v_x(\sigma)\sigma_\star(v_x(\sigma'))v_x(\sigma\sigma')^{-1}$. Parce que l'action $\sigma_\star$ fixe x, elle conserve le groupe $W_{sc}(x)$ canoniquement attaché à x. Il en résulte que $v_x(\sigma, \sigma')$ appartient à $W_{sc}(x)$. D'autre part, l'égalité (2) et les propriétés de l'action $\sigma \mapsto \sigma_\star$ entraînent que $v_x(\sigma, \sigma')$ conserve C^{nr}. Or 1 est l'unique élément de $W_{sc}(x)$ qui conserve cette alcôve. Donc $v_x(\sigma, \sigma') = 1$ et la relation (2) montre que l'application $\sigma \mapsto \sigma_\star$ est un homomorphisme. Cela prouve (1).

Montrons que

(3) la classe d'équivalence de $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est égale à $\delta(\omega_\star, x)$.

Construisons une pré-donnée endoscopique associée à $(\omega_\star, x)$. Puisque la notation $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est déjà utilisée, on note cette pré-donnée $(\mathcal{G}'_\star, \tilde{s}_\star)$ et on affecte d'un indice $\star$ les objets utilisés dans sa construction. Reprenons les notations de la construction ci-dessus de $(\omega_\star, x)$ et posons $u = p_{W^\theta}(v)$, $u_x(\sigma) = p_{W^\theta}(v_x(\sigma))$. Par définition, $s_\star$ est un élément de $\hat{T}^\theta_u$ tel que $\iota \circ p_{\hat{T}^\theta}(s_\star) = p_{\mathbf{A}^{nr}}(x)$. On voit que l'on peut choisir $s_\star = u(s)$. Soit $\sigma \in \Gamma_k$. Par définition, $u_\star(\sigma)$ est l'image de $\omega_\star(\sigma)$ par p_{W^θ}. On voit que $u_\star(\sigma) = v_x(\sigma)uu(\sigma)\sigma_G(u)^{-1}$. Relevons $v_x(\sigma)$ et u en des éléments $m(\sigma)$ et n appartenant à $Norm_{\hat{G}^\theta}(\hat{T}^\theta)$. Par définition, $n_\star(\sigma)$ est un élément de ce groupe qui relève $u_\star(\sigma)$. On peut choisir $n_\star(\sigma) = m(\sigma)nn(\sigma)\sigma_G(n)^{-1}$. Posons $h_\star(\sigma) = nt(\sigma)n^{-1}m(\sigma)^{-1}t_\star(\sigma)^{-1}$. Par un calcul simple, l'égalité précédente équivaut à

$$(4) \qquad h_\star(\sigma)g_\star(\sigma) = ng(\sigma)\sigma_G(n)^{-1}.$$

Remarquons que, puisque $n \in \hat{G}^\theta$, l'égalité $s_\star = u(s)$ équivaut à $n\tilde{s}_\star n^{-1} = \tilde{s}$. Les actions $ad_{g(\sigma)} \circ \sigma_G$, resp. $ad_{g_\star(\sigma)} \circ \sigma_G$, fixent $\tilde{s}$, resp. $\tilde{s}_\star$. Il résulte de (4) que $ad_{h_\star(\sigma)}$ fixe $\tilde{s}_\star$. Autrement dit, $h_\star(\sigma) \in Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_\star)$. On se rappelle que $v_x(\sigma)$ appartient à $W_{sc}(x)$. En appliquant le lemme 10, on a $u_x(\sigma) \in W^{\hat{G}'_\star}$. On peut donc relever $u_x(\sigma)$ en un élément $m_\star(\sigma) \in Norm_{\hat{G}'_\star}(\hat{T}^\theta)$. Alors $m(\sigma) \in \hat{T}m_\star(\sigma)$ et on en déduit $h_\star(\sigma) \in \hat{T}m_\star(\sigma)^{-1}$. Soit $\tau(\sigma) \in \hat{T}$ tel que $h_\star(\sigma) = \tau(\sigma)m_\star(\sigma)^{-1}$. Puisque $h_\star(\sigma)$ et $m_\star(\sigma)$ appartiennent à $Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_\star)$, il en est de même de $\tau(\sigma)$. Alors $\tau(\sigma) \in \hat{T} \cap Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_\star) = \hat{T}^\theta$. Mais alors $h_\star(\sigma)$ appartient

à $\hat{G}'_\star$. L'égalité (4), vraie pour tout σ, implique que $\mathcal{G}'_\star = n\mathcal{G}'n^{-1}$. Donc n définit une équivalence entre les données $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ et $(\mathcal{G}'_\star, \tilde{s}_\star)$. Cela prouve (3).

L'assertion (3) entraîne la surjectivité de δ. Cela achève la preuve du (i) de l'énoncé.

Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$, construisons une pré-donnée $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ qui lui est associée. On utilise les notations du paragrephe 9. On identifie $X_*(\hat{T}^\theta)$ à $X_*(\mathbf{T}^{nr})$. On dispose de l'action linéaire $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ de Γ_k sur $X_*(\mathbf{T}^{nr})$, cf. paragraphe 6. On dispose d'autre part de l'action $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ de W_k sur $X_*(\hat{T}^\theta) = X_*(\mathbf{T}^{nr})$. Comparons-les. Il faut prendre garde au fait que les termes $g(\sigma)$, $n(\sigma)$ etc... du paragraphe 9 ne sont pas ceux ainsi notés associés à $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ au paragraphe 4. En effet, l'action de $ad_{g(\sigma)} \circ \sigma_G$ préserve $\hat{G}'$ et $\hat{T}^\theta$ mais pas forcément $\hat{B} \cap \hat{G}'$. Mais, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, on peut choisir un élément $h(\sigma) \in Norm_{\hat{G}'}(\hat{T}^\theta)$ tel que $ad_{h(\sigma)g(\sigma)} \circ \sigma_G$ préserve ce groupe de Borel. En notant $u_h(\sigma)$ la projection de $h(\sigma)$ dans $W^{\hat{G}'}$, il résulte alors des définitions que l'on a l'égalité $\sigma_{G'} = u_h(\sigma)\sigma_{\star,alg}$. Cela entraîne que les deux actions $\sigma \mapsto \sigma_{G'}$ et $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ coïncident sur $X_*(Z(\hat{G}')^0)$. Munissons $X_*(\mathbf{T}^{nr})$ de la deuxième action. Que $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ soit elliptique équivaut à l'égalité $X_*(Z(\hat{G}')^0)^{\Gamma_k} = 0$, ou encore à $X^*(Z(\hat{G}')^0)^{\Gamma_k} = 0$. Le groupe $X_*(Z(\hat{G}')^0)$ est l'annulateur de $\Sigma(\hat{G}')$ dans $X_*(\mathbf{T}^{nr})$. En vertu de 10(1) et de 6(3), c'est aussi l'annulateur de $S(x)$. Pour tout $\mathbb{Z}$-module Y, notons $Y_\mathbb{Q} = Y \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$. Pour tout ensemble fini A, notons $\mathbb{Q}[A]$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base A. Si A est un sous-ensemble linéairement indépendant de Y, on a $\mathbb{Q}[A] \subset Y_\mathbb{Q}$. Le groupe $X^*_\mathbb{Q}(Z(\hat{G}')^0)$ s'identifie à $X^*_\mathbb{Q}(\mathbf{T}^{nr})/\mathbb{Q}[S(x)]$. Pour tout $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$, on a une surjection naturelle

$$\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_{a,j}] \to X^*_\mathbb{Q}(\mathbf{T}^{nr}_j).$$

Son noyau est la droite portée par l'élément $l_j = \sum_{\beta \in \Delta^{nr}_{a,j}} d(\beta)\beta$, cf. 6(1). En sommant les applications ci-dessus, on obtient la suite exacte

$$0 \to \oplus_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbb{Q}[l_j] \to \mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a] \to X^*_\mathbb{Q}(\mathbf{T}^{nr}) \to 0.$$

L'action $\sigma \mapsto \sigma_{\star,alg}$ permute les éléments de Δ^{nr}_a donc définit une action sur $\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]$. Les homomorphismes de la suite ci-dessus sont équivariants pour les actions galoisiennes. On déduit de la suite ci-dessus une suite

$$0 \to \oplus_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbb{Q}[l_j] \to \mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]/\mathbb{Q}[S(x)] \to X^*_\mathbb{Q}(\mathbf{T}^{nr})/\mathbb{Q}[S(x)] \to 0.$$

Cette suite reste exacte. En effet, le seul point à vérifier est que le premier homomorphisme est injectif. Décomposons x en $x = \prod_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} x_j$. On a $S(x) = \sqcup_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} S(x_j)$ et il suffit de vérifier que, pour tout j, l_j n'appartient pas à $\mathbb{Q}[S(x_j)]$. C'est clair car $\Delta^{nr}_{a,j} - S(x_j)$ n'est pas vide.

Que $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ soit elliptique équivaut à l'égalité $(X^*_\mathbb{Q}(\mathbf{T}^{nr})/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k} = 0$. D'après la suite ci-dessus, cela équivaut à l'égalité

$$dim((\oplus_{j \in I(\mathbf{G})/\Theta} \mathbb{Q}[l_j])^{\Gamma_k}) = dim((\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k}).$$

L'action de Γ_k permute les éléments l_j donc la première dimension vaut $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k)$. On a l'égalité $\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]/\mathbb{Q}[S(x)] = \mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a - S(x)]$ et l'action galoisienne permute les éléments de $\Delta^{nr}_a - S(x)$. En notant $i(x)$ le nombre d'orbites de cette action dans $\Delta^{nr}_a - S(x)$, on a donc $dim((\mathbb{Q}[\Delta^{nr}_a]/\mathbb{Q}[S(x)])^{\Gamma_k}) = i(x)$. Donc $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ est elliptique si et seulement si $i(\mathbf{G}, \theta \times \Gamma_k) = i(x)$, autrement dit si et seulement si $(\omega_\star, x)$ est elliptique. Cela prouve le (ii) de l'énoncé. $\square$.

13 Equivalence presque partout

On suppose que k est un corps de nombres. Une pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ définie sur k se localise pour toute place $v \in V_k$ en une pré-donnée endoscopique $(\mathcal{G}'_v, \tilde{s})$ définie sur k_v. Notons plus précisément $\underline{Endo}_k$ et $\underline{Endo}_{k_v}$ les ensembles notés précédemment $\underline{Endo}$ relatifs au corps k, resp. k_v. Alors un élément $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}_k$ se localise en un élément $(\omega_{\star,v}, x)$ de $\underline{Endo}_{k_v}$.

Rappelons que l'on suppose que $\hat{G}$ est adjoint.

Théorème. *Soit $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques s-unitaires définies sur k. Supposons que, pour presque tout $v \in V_k$, les pré-données $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ soient équivalentes. Alors $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sont équivalentes.*

Preuve. Grâce au (i) du théorème 12, l'énoncé équivaut à l'assertion suivante :

(1) soient $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ deux éléments de $\underline{Endo}_k$; supposons que, pour presque tout $v \in V_k$, $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ soient équivalents ; alors $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ sont équivalents.

On va d'abord procéder à trois réductions. On a introduit l'ensemble d'orbites $I(\mathbf{G})/(\Theta\times\Gamma_k)$ de l'action de Γ_k dans $I(\mathbf{G})/\Theta$. Pour $J \in I(\mathbf{G})/(\Theta \times \Gamma_k)$, posons $\mathbf{G}_J = \prod_{j\in J} \mathbf{G}_j$, c'est-à-dire que j parcourt les éléments de $I(\mathbf{G})/\Theta$ dans l'orbite J. Ce groupe est défini sur F et est stable par l'action de Γ_k. On a $\mathbf{G} = \prod_{J\in I(\mathbf{G})/(\Theta\times\Gamma_k)} \mathbf{G}_J$ et tous nos objets se décomposent conformément. Précisons nos notations en notant $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$ l'ensemble noté jusqu'ici $\underline{Endo}_k$. On a alors $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) = \prod_{J\in I(\mathbf{G})/(\Theta\times\Gamma_k)} \underline{Endo}_k(\mathbf{G}_J)$ et on voit qu'il suffit de démontrer l'assertion analogue à (1) pour chaque groupe $\mathbf{G}_J$. Cela nous ramène au cas où l'action de Γ_k dans $I(\mathbf{G})/\Theta$ n'a qu'une seule orbite, ce que l'on suppose désormais.

Fixons un élément $j_0 \in I(\mathbf{G})/\Theta$ et introduisons l'extension k_0 de k telle que Γ_{k_0} soit le fixateur de j_0 dans Γ_k. L'action de Γ_{k_0} conserve $\mathbf{G}_{j_0}$ et on peut définir les ensembles $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$ et $Endo_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$. On a les égalités $\bar{C}^{nr} = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} \bar{C}^{nr}_j$ et $\Omega^{nr} = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} \Omega^{nr}_j$. Soit $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Posons $x = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} x_j$ et, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, $\omega_\star(\sigma) = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} \omega_{\star,j}(\sigma)$. Notons $\omega_{\star,j_0,k_0}$ la restriction de $\omega_{\star,j_0}$ à Γ_{k_0}. Alors le couple $(\omega_{\star,j_0,k_0}, x_{j_0})$ appartient à $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$. On a ainsi défini une application $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$. Montrons que

(2) cette application se quotiente en une bijection $Endo_k(\mathbf{G}) \to Endo_{k_0}(\mathbf{G}_0)$.

Il s'agit d'un cas d'isomorphisme de Shapiro. Nous nous contenterons de donner la construction de l'application en sens opposé $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_0) \to \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$, en laissant le lecteur prouver que les deux applications se descendent en des isomorphismes réciproques entre $Endo_k(\mathbf{G})$ et $Endo_{k_0}(\mathbf{G}_0)$. Soit $(\omega_{\star,j_0,k_0}, x_{j_0}) \in \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$. Puisque $I(\mathbf{G})/\Theta$ forme une unique orbite sous l'action de Γ_k, on peut fixer pour tout $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$ un élément $\sigma_j \in \Gamma_k$ tel que $\sigma_j(j_0) = j$. Alors $\sigma_{j,G}$ transporte $\mathbf{G}_{j_0}$ et tous les objets qui lui sont associés sur $\mathbf{G}_j$ et tous les mêmes objets qui lui sont associés. L'ensemble $\{\sigma_j; j \in I(\mathbf{G})/\Theta\}$ est un ensemble de représentants du quotient Γ_k/Γ_{k_0}. Pour tout j, posons $x_j = \sigma_{j,G}(x_{j_0})$. Posons $x = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} x_j$. Soient $\sigma \in \Gamma_k$ et $j \in I(\mathbf{G})/\Theta$. Il existe d'uniques $j' \in I(\mathbf{G})/\Theta$ et $\sigma' \in \Gamma_{k_0}$ tels que $\sigma\sigma_{j'} = \sigma_j\sigma'$. Posons $\omega_{\star,j}(\sigma) = \sigma_{j,G}(\omega_{\star,j_0,k_0}(\sigma'))$. C'est un élément de Ω^{nr}_j. Posons $\omega_\star(\sigma) = \prod_{j\in I(\mathbf{G})/\Theta} \omega_{\star,j}(\sigma)$. On vérifie que le couple $(\omega_\star, x)$ appartient à $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Cela définit l'application cherchée $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_0) \to \underline{Endo}_k(\mathbf{G})$. Comme on l'a dit, on laisse le lecteur achever la preuve de (2).

Soit $v_0 \in V_{k_0}$ et notons v la place de k au-dessous de v_0. On a encore une application

$\underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{j_0})$ qui s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{Endo}_k(\mathbf{G}) & \to & \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) & \to & \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{j_0}) \end{array}$$

L'application $\underline{Endo}_{k_v}(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{j_0})$ ne vérifie pas forcément l'analogue de (2) car $I(\mathbf{G})/\Theta$ n'est pas forcément une unique orbite sous Γ_{k_v}. Il est toutefois clair que cette application se quotiente en une application $Endo_{k_v}(\mathbf{G}) \to Endo_{k_{0,v_0}}(\mathbf{G}_{j_0})$. Dans la situation de (1), ces considérations impliquent que les images de $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ par l'application $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}) \to \underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$ sont encore localement équivalentes presque partout. Si nous supposons démontrée l'assertion (1) pour l'ensemble $\underline{Endo}_{k_0}(\mathbf{G}_{j_0})$, ces images sont équivalentes et l'assertion (2) nous dit que les données initiales $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ le sont aussi. On est ramené à démontrer (1) dans le cas où $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément, ce que nous supposons désormais.

Fixons $i_0 \in I(\mathbf{G})$. Soit n le plus petit entier strictement positif tel que $\theta^n(i_0) = i_0$. C'est un diviseur de l'ordre e de θ. Posons $e_0 = \frac{e}{n}$. L'automorphisme θ^n conserve $\mathbf{G}_{i_0}$ et on note θ_{i_0} sa restriction à ce groupe. L'automorphisme θ_{i_0} est d'ordre e_0. Notons F_0 le sous-corps de E fixé par γ^n. L'action de Γ_{F_0} conserve $\mathbf{G}_{i_0}$ et γ^n agit sur $X_*(\mathbf{T}_{i_0})$ comme θ_{i_0}. L'appartement $\mathbf{A}^{nr}$ s'identifie à l'appartement similaire relatif au groupe $\mathbf{G}_{i_0}$ muni de son action de Γ_{F_0}. Puisque $I(\mathbf{G})/\Theta$ est réduit à un unique élément, on a $I(\mathbf{G}) = \{\theta^m(i_0); m = 0, ..., n-1\}$. Puisque l'action de Γ_k commute à θ, il existe un homomorphisme $a : \Gamma_k \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\sigma_G(i_0) = \theta^{a(\sigma)}(i_0)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. L'automorphisme $\sigma_G\theta^{-a(\sigma)}$ conserve $\mathbf{G}_{i_0}$. On note $\sigma_{G_{i_0}}$ sa restriction à $\mathbf{G}_{i_0}$. Alors l'application $\sigma \mapsto \sigma_{G_{i_0}}$ munit $\mathbf{G}_{i_0}$ d'une action de Γ_k qui commute à θ_{i_0}. Alors les ensembles $\underline{Endo}_k(\mathbf{G}_{i_0})$ et $Endo_k(\mathbf{G}_{i_0})$ sont bien définis et il est immédiat qu'ils sont égaux à $\underline{Endo}_k(\mathbf{G})$ et $Endo_k(\mathbf{G})$. Remarquons qu'ici, contrairement à la deuxième réduction ci-dessus, ces égalités persistent quand on remplace k par un localisé k_v puisque c'est le corps F qui a changé, pas le corps k. Il nous suffit donc de démontrer l'assertion (1) pour le groupe $\mathbf{G}_{i_0}$. Cela nous ramène au cas où $\mathbf{G}$ est absolument simple, ce que l'on suppose désormais.

Dans le cas où $\theta = 1$, l'assertion (1) résulte de [5] propositions 1.6 et 2.2. Nous ne traitons ici que le cas $\theta \neq 1$. Le groupe Γ_k agit sur $\mathbf{G}$ par des automorphismes qui préservent $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et commutent à θ. Parce que $\theta \neq 1$ un tel automorphisme est une puissance de θ. En conséquence, l'action de Γ_k est triviale sur tout objet fixé par θ, en particulier l'action $\sigma \mapsto \sigma_G$ est triviale sur $\mathbf{A}^{nr}$. Il en résulte que l'ensemble $Isom(\omega_{\star,1}, x_1; \omega_{\star,2}, x_2)$ défini en 11 est celui des $\omega \in \Omega^{nr}(x_1; x_2)$ tels que $\omega\omega_{\star,1}(\sigma)\omega^{-1} = \omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Mais Ω^{nr} est commutatif. L'équivalence de $(\omega_{\star,1}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2}, x_2)$ équivaut donc à la réunion des conditions suivantes

(3) $\Omega^{nr}(x_1, x_2) \neq \emptyset$;

(4) $\omega_{\star,1}(\sigma) = \omega_{\star,2}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$.

De même, pour $v \in V_k$, l'équivalence de $(\omega_{\star,1,v}, x_1)$ et $(\omega_{\star,2,v}, x_2)$ équivaut à la réunion de (3) et de

(4)(v) $\omega_{\star,1,v}(\sigma) = \omega_{\star,2,v}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \Gamma_{k_v}$.

Puisque $\sigma \mapsto \omega_{\star,i}(\sigma)$ est un homomorphisme continu pour $i = 1, 2$, le théorème de Cebotarev implique que (4) est vérifié si et seulement si (4)(v) l'est pour presque tout v. Cela prouve (1) et le théorème. $\square$

14 Le cas presque simple

Revenons au cas général où le corps k est soit un corps de nombres, soit un corps local de caractéristique nulle. Depuis le paragraphe 6, on a supposé que $\hat{G}$ était adjoint. Modifions ces hypothèses en supposant que $\hat{G}$ est presque simple, c'est-à-dire que $\hat{G}$ est semi-simple et que $\hat{G}_{AD}$ est simple. L'automorphisme θ et l'action de Γ_k sur $\hat{G}$ se descendent en un automorphisme de $\hat{G}_{AD}$ et une action de Γ_k sur ce groupe, que l'on note encore θ et $\sigma \mapsto \sigma_G$. Soit $(\mathcal{G}', \tilde{s})$ une pré-donnée endoscopique pour $(\hat{G}, \theta)$. En écrivant $\tilde{s} = s\theta$, on pose $\tilde{s}_{ad} = s_{ad}\theta$. On pose $\mathcal{G}'_{ad} = \{(g_{ad}, w); (g, w) \in \mathcal{G}'\}$. Alors $(\mathcal{G}'_{ad}, \tilde{s}_{ad})$ est une pré-donnée endoscopique pour $(\hat{G}_{AD}, \theta)$. Il est clair que deux pré-données pour $(\hat{G}, \theta)$ qui sont équivalentes se descendent ainsi en des pré-données pour $(\hat{G}_{AD}, \theta)$ qui sont équivalentes.

Remarque. Si $\theta = 1$, toute pré-donnée endoscopique pour $(\hat{G}_{AD}, \theta)$ provient par ce procédé d'une pré-donnée endoscopique pour $(\hat{G}, \theta)$. Ce n'est pas vrai si $\theta \neq 1$. On donnera un contre-exemple au paragraphe 15.

Théorème. *Supposons que k est un corps de nombres. Si $\hat{G}$ est presque simple, le théorème 13 est vérifié.*

Preuve. Puisqu'on a déjà démontré cette assertion dans [5] quand $\theta = 1$, on suppose $\theta \neq 1$. L'examen de tous les systèmes de racines possibles montre que, sous cette hypothèse $\theta \neq 1$, le groupe Ω^{nr} a au plus deux éléments.

Soient $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ deux pré-données endoscopiques s-unitaires pour $(\hat{G}, \theta)$ définies sur k. On suppose que $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ sont équivalentes pour presque toute place $v \in V_k$. Alors les pré-données $(\mathcal{G}'_{1,ad,v}, \tilde{s}_{1,ad})$ et $(\mathcal{G}'_{2,ad,v}, \tilde{s}_{2,ad})$ sont aussi équivalentes pour presque tout v. En appliquant le théorème 13, les données $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ et $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad})$ sont équivalentes. Fixons $g \in \hat{G}$ tel que g_{ad} conjugue $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad})$ en $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. On ne perd rien en remplaçant $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par sa conjuguée par g. On peut donc supposer

(1) $(\mathcal{G}'_{2,ad}, \tilde{s}_{2,ad}) = (\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$.

On peut aussi supposer que $\tilde{s}_1 = s_1\theta$, avec $s_1 \in \hat{T}^{\theta,0}$. Introduisons des objets comme au paragraphe 4 pour nos deux données pré-endoscopiques, que l'on affecte d'indices 1 et 2 : $g_1(\sigma)$, etc... L'égalité (1) entraîne que $g_{2,ad}(\sigma) \in \hat{T}^{\theta}_{ad} g_{1,ad}(\sigma)$. Cela entraîne que $g_2(\sigma) \in Z(\hat{G})\hat{T}^{\theta,0} g_1(\sigma)$. Puisqu'il est loisible de multiplier $g_2(\sigma)$ à gauche par un élément de $\hat{T}^{\theta,0}$, on peut supposer qu'il existe $z(\sigma) \in Z(\hat{G})$ tel que $g_2(\sigma) = z(\sigma)g_1(\sigma)$. Ce terme $z(\sigma)$ est bien déterminé modulo $Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\theta,0}$. Posons $\mathfrak{Z} = Z(\hat{G})/(Z(\hat{G}) \cap \hat{T}^{\theta,0})$ et notons $\zeta(\sigma)$ l'image de $z(\sigma)$ dans $\mathfrak{Z}$. On obtient une application uniquement déterminée $\sigma \mapsto \zeta(\sigma)$ de Γ_k dans $\mathfrak{Z}$. Remarquons que $\mathfrak{Z}$ est muni d'une unique action galoisienne : les actions $\sigma \mapsto \sigma_G$ et $\sigma \mapsto \sigma_{G'_1} = \sigma_{G'_2}$ y coïncident. Puisque $\mathcal{G}'_1$ et $\mathcal{G}'_2$ sont des groupes, on doit avoir $g_i(\sigma)\sigma_G(g_i(\sigma')) \in \hat{T}^{\theta,0} g_i(\sigma\sigma')$ pour $i = 1, 2$ et tous $\sigma, \sigma' \in \Gamma_k$. Donc l'application ζ est un cocycle. On note $\underline{\zeta}$ son image dans $H^1(\Gamma_k, \mathfrak{Z})$. Nous ignorons si cette classe de cocycle ne dépend que de la classe d'équivalence de $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$. On vérifie toutefois que

(2) soit $z \in Z(\hat{G})$; si on remplace $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ par $(z\mathcal{G}'_2 z^{-1}, \tilde{s}_2)$, la classe de cocycle $\underline{\zeta}$ ne change pas.

Posons $Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})/\hat{G}'_{1,ad}$. Fixons un sous-ensemble fini $\Xi \subset \hat{G}$ tel que la famille $\{\xi_{ad}; \xi \in \Xi\}$ soit un ensemble de représentants dans $Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ de ce groupe $Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. On a déterminé le groupe $Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ au paragraphe 11. Fixons un élément $(\omega_\star, x) \in \underline{Endo}$ tel que la classe de $(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ soit $\delta(\omega_\star, x)$. Alors $Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) \simeq Aut(\omega_\star, x)$. Pour la même raison que dans le paragraphe précédent,

l'hypothèse $\theta \neq 1$ entraîne l'égalité $Aut(\omega_\star, x) = \Omega^{nr}(x)$. Soit $v \in V_k$. Le même calcul s'applique à la pré-donnée $(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$: on a $Out(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) \simeq \Omega^{nr}(x)$, d'où $Out(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) \simeq Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. Mais $Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_1)$ s'injecte naturellement dans $Aut(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. L'isomorphisme ci-dessus implique donc $Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. En conséquence, la famille $\{\xi_{ad}; \xi \in \Xi\}$ est encore un ensemble de représentants de $Aut(\mathcal{G}'_{1,v,ad}, \tilde{s}_{1,ad})/\hat{G}'_{1,ad}$.

Pour $\xi \in \Xi$, posons $\mathcal{G}'_{1,\xi} = \xi \mathcal{G}'_1 \xi^{-1}$. La pré-donnée $(\mathcal{G}'_{1,\xi}, \tilde{s}_1)$ est équivalente à $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$ (car $\xi \tilde{s}_1 \xi^{-1} \in Z(\hat{G})\tilde{s}_1$). Elle ne lui est pas forcément égale. Mais elle vérifie la même condition que (1), c'est-à-dire $(\mathcal{G}'_{1,\xi,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) = (\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. On peut lui appliquer les constructions précédentes, d'où une classe de cocycles $\underline{\zeta}_\xi$. On va prouver

(3) il existe $\xi \in \Xi$ tel que $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_\xi$.

Montrons d'abord que cette assertion implique le théorème. On fixe $\xi \in \Xi$ tel que $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_\xi$. Cela signifie que l'on peut fixer $z \in Z(\hat{G})$ de sorte que, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, on ait $z(\sigma) \in z\sigma(z)^{-1} z_\xi(\sigma)$, où $z_\xi(\sigma)$ est l'analogue de $z(\sigma)$ pour la pré-donnée $(\mathcal{G}'_{1,\xi}, \tilde{s}_1)$. Alors $\mathcal{G}'_2 = z\mathcal{G}'_{1,\xi} z^{-1}$ et z définit une équivalence de $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s}_2)$ sur $(\mathcal{G}'_{1,\xi}, \tilde{s}_1)$. Puisque cette dernière pré-donnée est équivalente à $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s}_1)$, on obtient bien l'énoncé.

Fixons un sous-ensemble $V'_k \subset V_k$ de complémentaire fini, tel que, pour tout $v \in V'_k$, $(\mathcal{G}'_{1,v}, \tilde{s}_1)$ et $(\mathcal{G}'_{2,v}, \tilde{s}_2)$ soient équivalentes. Pour prouver (3), on commence par établir l'assertion locale

(4) pour toute place $v \in V'_k$, il existe $\xi_v \in \Xi$ tel que $\underline{\zeta}_v = \underline{\zeta}_{\xi_v,v}$.

Pour $v \in V'_k$, soit $g_v \in \hat{G}$ tel que $g_v \mathcal{G}'_{1,v} g^{-1} = \mathcal{G}'_{2,v}$ et $g_v \tilde{s}_1 g_v^{-1} \in Z(\hat{G})\tilde{s}_2$. Grâce à (1), on a $g_{v,ad} \in Aut(\mathcal{G}'_{1,ad,v}, \tilde{s}_{1,ad})$. Il existe donc $\xi_v \in \Xi$ tel que $g_{v,ad} \in \xi_{v,ad}\hat{G}'_{1,ad}$, d'où $g_v \in Z(\hat{G})\xi_v \hat{G}'_1$. Il est loisible de multiplier u_v à droite par un élément de $\hat{G}'_1$. On peut donc supposer $g_v \in Z(\hat{G})\xi_v$. En appliquant (2) (qui vaut aussi bien sur le corps de base k_v), on obtient que $\underline{\zeta}_v = \underline{\zeta}_{\xi_v,v}$. Cela démontre (4).

On peut supposer que 1 appartient à Ξ. Les définitions entraînent que $\underline{\zeta}_1 = 1$, c'est-à-dire que $\underline{\zeta}_1$ est la classe du cocycle trivial. Pour la même raison que dans le paragraphe précédent, l'hypothèse $\theta \neq 1$ entraîne que l'automorphisme σ_G de $\hat{G}$ est une puissance de θ pour tout $\sigma \in \Gamma_k$. Puisque θ est d'ordre au plus 3. Il existe donc une extension cyclique k_0 de k de degré au plus 3 de sorte que l'action de Γ_{k_0} soit triviale. Montrons que

(5) pour tout $\xi \in \Xi$, l'image de $\underline{\zeta}_\xi$ dans $H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$ est triviale.

On peut supposer $\xi \neq 1$. Parce que $Aut(\omega_\star, x) = \Omega^{nr}(x)$, la proposition 11 entraîne l'égalité $Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$. Le quotient $\hat{G}'_{1,ad} \backslash Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad}) \simeq Out(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad})$ est isomorphe à un sous-groupe de Ω^{nr}, lequel a au plus deux éléments. Il en résulte les égalités

$$Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad}) = Aut(\mathcal{G}'_{1,ad}, \tilde{s}_{1,ad}) = \hat{G}'_{1,ad} \sqcup \hat{G}'_{1,ad}\xi_{ad}.$$

Puisque ξ_{ad} fixe $\tilde{s}_{1,ad}$, ξ normalise $Z_{\hat{G}}(\tilde{s}_1)$ et aussi sa composante neutre $\hat{G}'_1$. Puisque $s_1 \in \hat{T}^\theta$, s_1 est fixé par Γ_k. Il en résulte que $g_1(\sigma)_{ad} \in Z_{\hat{G}_{AD}}(\tilde{s}_{1,ad})$. Donc $g_1(\sigma) \in Z(\hat{G})\hat{G}'_1 \sqcup Z(\hat{G})\hat{G}'_1\xi$. Alors $\xi g_1(\sigma)\xi^{-1} \in \hat{G}' g_1(\sigma)$. Mais, pour $\sigma \in \Gamma_{k_0}$, cela équivaut à $\xi g_1(\sigma)\sigma_G(\xi)^{-1} \in \hat{G}'_1 g_1(\sigma)$. Il en résulte que les images réciproques de W_{k_0} dans $\mathcal{G}'_1$ et dans $\mathcal{G}'_{1,\xi}$ sont égales. L'assertion (5) résulte alors de la définition de $\underline{\zeta}_\xi$.

D'après (4) et (5), l'image de $\underline{\zeta}$ dans $H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$ est localement triviale en presque toute place de k_0. Puisque Γ_{k_0} agit trivialement sur $\mathfrak{Z}$, les éléments de $H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$ sont simplement des homomorphismes de Γ_{k_0} dans $\mathfrak{Z}$ et un homomorphisme localement trivial en presque toute place est trivial. Donc l'image de $\underline{\zeta}$ dans $H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$ est triviale. On a

la suite exacte

$$1 \to H^1(\Gamma_{k_0/k}, \mathfrak{Z}) \to H^1(\Gamma_k, \mathfrak{Z}) \to H^1(\Gamma_{k_0}, \mathfrak{Z})$$

donc $\underline{\zeta} \in H^1(\Gamma_{k_0/k}, \mathfrak{Z})$. De même $\underline{\zeta}_\xi \in H^1(\Gamma_{k_0/k}, \mathfrak{Z})$ pour tout $\xi \in \Xi$. Puisque $\Gamma_{k_0/k}$ est cyclique, il existe $v \in V_k'$ tel que v soit inerte dans k_0 et $\Gamma_{k_{0,v}/k_v} = \Gamma_{k_0/k}$. L'égalité $\underline{\zeta}_v = \underline{\zeta}_{\xi_v,v}$ entraîne alors $\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_{\xi_v}$. Cela démontre (3) et le théorème. $\square$

15 Exemples

Exemple 1.

Considérons le corps $k = \mathbb{Q}_p$ pour un nombre premier $p \geq 3$ tel que -1 ne soit pas un carré dans k. Soit $\hat{G} = SL(4, \mathbb{C})$, muni de l'action triviale de Γ_k. On définit l'automorphisme habituel θ de $\hat{G}$ par $\theta(g) = J^t g^{-1} J^{-1}$, où J est la matrice antidiagonale de coefficients alternés 1 et -1 (les coefficients $J_{m,n}$ sont nuls pour $m + n \neq 5$ et valent $(-1)^m$ pour $m + n = 5$). Soit s l'élément diagonal dont les coefficients $s_{m,m}$ valent i (la racine carrée de -1 dans $\mathbb{C}$) pour $m = 1, 2$ et $-i$ pour $m = 3, 4$. Notons u_{ad} l'image dans $\hat{G}_{AD} = PGL(4, \mathbb{C})$ de la symétrie élémentaire $\mathbf{u} \in GL(4, \mathbb{C})$ qui échange les deux vecteurs de base standard centraux : $\mathbf{u}_{m,n} = 1$ si $m = n = 1, 4$ ou $(m, n) = (2, 3)$ ou $(m, n) = (3, 2)$, les autres coefficients sont nuls. Soit k' une extension quadratique ramifiée de k. Posons $\hat{G}' = Z_{\hat{G}}(s\theta)^0$ et notons $\mathcal{G}'_{ad}$ l'ensemble des $(g_{ad}, w) \in {}^L G_{AD}$ tels que $g_{ad} \in \hat{G}'_{ad}$ si $w \in W_{k'}$ et $g_{ad} \in \hat{G}'_{ad} u_{ad}$ si $w \in W_k - W_{k'}$. Le couple $(\mathcal{G}'_{ad}, s_{ad}\theta)$ est une donnée pré-endoscopique pour $(\hat{G}_{AD}, \theta)$. Montrons que

(1) cette pré-donnée ne se relève pas en une pré-donnée pour $(\hat{G}, \theta)$.

Le groupe $\hat{T}^\theta$ est connexe. On a $Z(\hat{G}) \simeq \mu_4(\mathbb{C})$ et $\hat{T}^\theta \cap Z(\hat{G}) \simeq \mu_2(\mathbb{C})$.Le groupe $\mathfrak{Z}$ du paragraphe 14 est $\mu_4(\mathbb{C})/\mu_2(\mathbb{C}) \simeq \{\pm 1\}$. Fixons une racine primitive 8-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$ que l'on note ρ. Notons u le produit de $\mathbf{u}$ et de la matrice diagonale de coefficients ρ. Alors u est un relèvement de u_{ad} dans $\hat{G}$. Supposons que $(\mathcal{G}'_{ad}, s_{ad}\theta)$ se relève en une pré-donnée $(\mathcal{G}', s\theta)$ de $(\hat{G}, \theta)$. Alors il existe une application continue $z : W_k \to Z(\hat{G})$ telle que

$$\mathcal{G}' = \{(z(w)h, w); w \in W_{k'}, h \in \hat{G}'\} \cup \{(z(w)hu; w \in W_k - W_{k'}, h \in \hat{G}'\}.$$

Notons ζ l'application composée $W_k \xrightarrow{z} Z(\hat{G}) \to \mathfrak{Z} = \{\pm 1\}$. L'application ζ est bien déterminée. Puisque $\mathcal{G}'$ est un groupe et que u^2 est la matrice diagonale de coefficients ρ^2, laquelle s'envoie sur $-1 \in \mathfrak{Z}$ on doit avoir

(2) $\zeta(ww') = \zeta(w'w) = \zeta(w')\zeta(w)$ pour tous $w \in W_k$ et $w' \in W_{k'}$;

(3) $\zeta(w^2) = -\zeta(w)^2 = -1$ pour tout $w \in W_k - W_{k'}$.

En particulier, la restriction de ζ à $W_{k'}$ est un caractère et la fonction ζ tout entière se factorise par le noyau de celui-ci. Donc ζ se factorise par le groupe de Weyl relatif $W_{k'/k}$. Notons $N_{k'/k} : k'^\times \to k^\times$ la norme. Fixons un élément $a \in k^\times - N_{k'/k}(k'^\times)$. On sait qu'il y a une suite exacte

$$1 \to k'^\times \to W_{k'/k} \to \Gamma_{k'/k} \to 1$$

et que l'on peut relever l'élément non trivial de $\Gamma_{k'/k}$ en un élément $w_0 \in W_{k'/k}$ tel que $w_0^2 = a$. La relation (2) implique non seulement que la restriction de ζ à $k'^\times$ est un caractère, mais aussi que celui-ci est invariant par l'action galoisienne de $\Gamma_{k'/k}$. Il se factorise donc par la norme, c'est-à-dire qu'il existe un caractère quadratique χ du groupe $N_{k'/k}(k'^\times)$ tel que $\zeta(w) = \chi \circ N_{k'/k}(w)$ pour $w \in k'^\times$. La relation (3) appliquée à

w_0 dit que $\zeta(a) = -1$, donc $\chi(a^2) = \chi \circ N_{k'/k}(a) = -1$. Mais nos hypothèses impliquent que $-1 \notin N_{k'/k}(k'^{\times})$. On peut donc choisir $a = -1$ et on obtient $\chi(1) = -1$, ce qui est impossible. Cela prouve (1).

Exemple 2.

Considérons maintenant le corps $k = \mathbb{Q}$. D'après [7] exemple 5.6 page 35, on peut trouver un tore T défini sur k tel que le noyau $ker^1(\Gamma_k, T)$ de l'homomorphisme

$$H^1(\Gamma_k, T) \to \prod_{v \in V_k} H^1(\Gamma_{k_v}, T)$$

ait deux éléments. Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k. On a la suite exacte

$$T(\mathbb{A}) \to H^0(\mathbb{A}/k, T) \to ker^1(\Gamma_k, T) \to \{1\},$$

avec les notations de [3] appendice D.1. Donc $H^0(\mathbb{A}/k, T)/im(T(\mathbb{A}))$ a aussi deux éléments. Il en est de même du noyau de l'homomorphisme

$$Hom_{cont}(H^0(\mathbb{A}/k, T), \mathbb{C}^{\times}) \to Hom_{cont}(T(\mathbb{A}), \mathbb{C}^{\times}).$$

D'après [3] lemme D.2.A, cela entraîne que le noyau l'homomorphisme

$$H^1(W_k, \hat{T}) \to \prod_{v \in V_k} H^1(W_{k_v}, \hat{T})$$

a aussi deux éléments. Notons t_1 et t_2 des cocycles représentant les deux éléments du noyau. Munissons $\hat{T}$ de l'automorphisme θ défini par $\theta(t) = t^{-1}$. Posons $\tilde{s} = \theta$ et définissons les deux sous-groupes $\mathcal{G}'_i = \{(t_i(w), w); w \in W_k\}$ de ${}^LT$ pour $i = 1, 2$. On montre aisément que les couples $(\mathcal{G}'_1, \tilde{s})$ et $(\mathcal{G}'_2, \tilde{s})$ sont deux pré-données endoscopiques elliptiques pour $(\hat{T}, \theta)$ qui sont localement équivalentes en toute place de k mais ne sont pas équivalentes.

Références

[1] T. Haines, M. Rapoport : *On parahoric subgroups*, appendice à G.Pappas, M. Rapoport *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. in Math. 219 (2008), p. 118-198

[2] T. Kaletha, G. Prasad : *Bruhat-Tits theory : a new approach*, Lavoisier, New Math. Monographs Series, à paraître

[3] R. Kottwitz, D. Shelstad : *Fundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[4] R. Langlands : *Stable conjugacy : definitions and lemmas*, Canad. J. Math. 31 (1979), p. 700-725

[5] B. Lemaire, J.-L. Waldspurger : *Sur les données endoscopiques d'un groupe réductif connexe*, Canad. J. Math. 73 (2021), p. 1074-1094

[6] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Stabilisation de la formule des traces tordue, volume 1* , ,Progress in Math. 316, Birkhäuser 2016

[7] J.-L. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. für d. reine and ang. Math. 327 (1981), p. 12-80

[8] J. Tits : *Reductive groups over local fields*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Symp. in Pure Math. XXXIII, part 1, AMS (1979), p. 29-69

CNRS Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
jean-loup.waldspurger@imj-prg.fr