



**HAL**  
open science

## D'un cadre d'analyse de l'action instrumentée en géométrie à l'élaboration d'un dispositif de travail en dyade au cycle 3

Édith Petitfour, Thomas Barrier

### ► To cite this version:

Édith Petitfour, Thomas Barrier. D'un cadre d'analyse de l'action instrumentée en géométrie à l'élaboration d'un dispositif de travail en dyade au cycle 3. 19e école d'été de didactique des mathématiques, ARDM, Aug 2017, Paris, France. pp.329-349. hal-03586515

**HAL Id: hal-03586515**

**<https://hal.science/hal-03586515>**

Submitted on 2 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# D'UN CADRE D'ANALYSE DE L'ACTION INSTRUMENTÉE EN GÉOMÉTRIE À L'ÉLABORATION D'UN DISPOSITIF DE TRAVAIL EN DYADE AU CYCLE 3

Édith Petitfour\*, Thomas Barrier\*\*

## RÉSUMÉ

Ce travail prolonge une recherche analysant les difficultés rencontrées par les élèves dyspraxiques en géométrie et proposant un dispositif visant à y remédier (Petitfour, 2015). Nous nous situons cette fois dans le contexte de l'enseignement ordinaire. En appui sur un cadre d'analyse de l'action instrumentée en géométrie, la finalité de ce travail est d'étudier le potentiel d'un dispositif de travail en dyade autour de tâches de reproduction de figures (Perrin-Glorian & Godin, 2014, à paraître), avec un élève instructeur et un autre constructeur, pour les apprentissages en géométrie. Dans la première partie du texte, nous présentons notre cadre d'analyse élaboré à partir de diverses ressources en sciences cognitives et en didactique : l'approche instrumentale de Rabardel (1995), l'analyse du développement du geste en neuropsychologie de Mazeau et Pouhet (2014) et la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990). Dans une seconde partie, nous procédons à une étude de cas avec deux élèves de sixième travaillant en dyade mais sans contraintes particulières sur la forme des échanges : nous cherchons alors à dégager ce que pourraient être des caractéristiques pertinentes pour de tels dispositifs.

Mots clefs : action instrumentée, travail en dyade, géométrie, conceptualisation, analyse logique

## ABSTRACT

This work draws on a research analyzing dyspraxic students' difficulties in geometry and suggesting a dyadic design for enabling learning (Petitfour, 2015). We are here rather dealing with that dyadic design in an ordinary context. Resting on a framework elaborated to analyse action with geometrical instruments, the purpose of the paper is to study the potential of dyadic designs for figure reproduction tasks (Perrin-Glorian & Godin, 2014, to appear), a student giving instructions and another drawing, for geometrical learning. In the first part of the text, we introduce our analysis framework elaborated from several resources: the instrumental approach (Rabardel, 1995), gesture development in neuropsychology (Mazeau & Pouhet, 2014) and the theory of conceptual fields (Vergnaud, 1990). In the second part, we proceed to a case study with two sixth grade students working in a dyadic frame but without any specific constraint on the shape of the exchanges: we are then looking for what could be pertinent features for such designs.

Key words: action with instrument, work in pair, geometry, conceptualization, logic analysis

## INTRODUCTION

Ce travail prolonge une recherche analysant les difficultés rencontrées par les élèves dyspraxiques en géométrie et proposant un dispositif visant à y remédier (Petitfour, 2015). Dans le TD dont nous rendons compte dans ce texte, nous nous sommes détachés de ce contexte spécifique de la dyspraxie pour aborder la question plus générale de la pertinence des dispositifs de travail en dyade, avec un élève instructeur formulant des consignes de tracé et un autre constructeur les mettant en œuvre à l'aide d'instruments, dans l'enseignement de la géométrie. Nous nous situons au niveau des dernières années de l'enseignement primaire et de la première année du secondaire, en amont des enjeux liés à l'introduction au raisonnement déductif, c'est-à-dire à ce que l'on appelle aujourd'hui en France le cycle 3 (grades 4-5-6). Les éléments empiriques du travail sont issus d'une classe de sixième (1<sup>re</sup> année de l'enseignement secondaire). Nous nous intéressons aux situations de construction géométrique, et en particulier aux situations de restauration ou de reproduction de figures (Perrin-Glorian & Godin, 2014) avec deux idées directrices :

---

\* LDAR(EA4434), UA, UCP, UPD, UPEC, Université Rouen Normandie

\*\* Université libre de Bruxelles, Centre de Recherche en Sciences de l'Éducation (CRSE)

1) Conformément aux nouveaux programmes du cycle 3 (MEN, 2015), et à divers travaux de recherche en didactique des mathématiques, nous considérons que ces situations sont susceptibles d'une part de contribuer à l'enseignement des concepts géométriques – voir par exemple Barrier, Hache et Mathé (2014) pour un exemple autour de la notion de droites perpendiculaires) – et d'autre part au développement du regard géométrique (Duval, 2005 ; Duval & Godin, 2005).

2) Dans la perspective d'un enseignement cohérent de la géométrie de l'école primaire jusqu'au collège, nous considérons ces situations comme des moyens pertinents pour préparer le mode d'appréhension des figures qui sera en jeu dans le cadre de la pratique de la géométrie déductive (Mangiante & Perrin-Glorian, 2017 ; Perrin-Glorian & Godin, à paraître), par la mise en place d'invariants opératoires partagés entre pratiques instrumentées et pratiques déductives (Barrier, Durand-Guerrier & Mesnil, en révision).

En somme, cette recherche se situe dans la tradition de travaux en didactique de la géométrie dudit « groupe du Nord » dont une description plus fine que nous ne pouvons le faire ici pourra être trouvée dans le cours de Mathé et Mithalal dans les actes de cette même école d'été. Par ailleurs, ce texte s'inscrit dans une perspective sémiotique qui conçoit les apprentissages comme émergeant d'interactions sociales (Radford, 2006). Ce choix théorique, que nous ne discuterons pas dans ce texte, nous conduit à nous intéresser aux dispositifs de travail en dyade non pas comme pis-aller pour des élèves rencontrant des difficultés motrices indépassables au niveau des tracés, mais comme de « bons » objets en eux-mêmes qui associent problématisation et socialisation des concepts mathématiques ou pour le dire à la manière de Bulf, Mathé et Mithalal (2014) qui associent les dimensions d'adaptation et d'acculturation des processus d'enseignement et d'apprentissage. Notre objectif dans ce texte est de chercher à dégager quelques caractéristiques pertinentes pour les dispositifs de travail en dyade dans le cadre de situations de restauration ou reproduction de figures.

Pour cela, nous commençons dans la première partie de ce texte à présenter un cadre théorique pour l'analyse des actions instrumentées selon diverses composantes : sémiotique, technico-figurale, manipulatoire et organisationnelle. Pour son élaboration, nous nous sommes appuyés sur plusieurs ressources dont l'approche instrumentale de Rabardel (1995) et l'analyse du développement du geste en neuropsychologie de Mazeau et Pouhet (2014). La fonctionnalité de ce cadre est illustrée par l'analyse *a priori* d'une tâche de construction géométrique en sixième. L'objectif de cette première partie est de se donner les moyens analytiques d'identifier ce qui est en jeu dans une action instrumentée en géométrie, et notamment ce qui, dans une action instrumentée, est effectivement porteur d'enjeux géométriques. Ce cadre sera mobilisé dans la seconde partie du texte dans laquelle nous procédons à une étude de cas avec deux élèves de sixième travaillant en dyade autour d'une tâche de restauration d'une figure. Nous avons fait le choix de proposer aux participants du TD l'étude du fonctionnement d'un dispositif peu contraint, c'est-à-dire dans lequel les modalités de communication entre les deux élèves n'avaient pas fait l'objet d'un cadrage particulier. L'objectif sera alors d'identifier ce qui semble favorable à l'activité géométrique et ce qui semble la freiner dans la perspective de dégager ce que pourraient être des caractéristiques pertinentes pour de tels dispositifs.

### CADRE D'ANALYSE DE L'ACTION INSTRUMENTÉE

Nous présentons d'abord un cadre d'analyse de l'action instrumentée tel que Petitfour (2015) l'a élaboré en appui sur les travaux de Rabardel (1995) et de Mazeau et Pouhet (2014). Nous proposons ensuite une appropriation de ce cadre avec l'analyse *a priori* d'une tâche de construction instrumentée dans un contexte donné en sixième. Cette analyse *a priori* sera ensuite complétée en prenant des outils d'analyse logique des concepts (Barrier, Chesnais & Hache, 2014) élaborés à partir des travaux de Vergnaud (1990).

### 1. Présentation du cadre d'analyse de l'action instrumentée

Nous définissons d'abord ce que nous entendons par *action instrumentée* dans le cadre de la géométrie après une brève exposition des concepts empruntés aux sciences cognitives. Nous présentons ensuite les connaissances et compétences en jeu dans la réalisation d'une action instrumentée en lien d'une part avec l'intention d'agir et l'intention motrice du sujet (Mazeau & Pouhet, 2014) et d'autre part avec la notion psychologique d'instrument (Rabardel, 1995). La lecture de la présentation pourra être accompagnée du schéma de synthèse figurant à la fin de cette sous-partie 1 (figure 1).

#### *Action instrumentée*

Selon l'approche neuropsychologique de Mazeau et Pouhet (2014), une action, ou enchaînement de gestes, est un ensemble intentionnel de mouvements coordonnés dans le temps et dans l'espace, défini par l'intention de son auteur qui en décide l'exécution en fonction de sa finalité. L'action comporte un versant cognitif et un versant moteur. La phase cognitive de l'action comprend ses aspects préparatoires : l'intention d'agir (le sujet se représente le but poursuivi), l'intention motrice qui comprend deux phases imbriquées, à savoir la planification (organisation temporelle de l'action) et la programmation (organisation spatiale et motrice), des régulations (simulations anticipatrices de l'action et ajustements suite à la réalisation de l'action) et la prise de décision du passage à l'acte. La phase motrice de l'action découle de la prise de décision du sujet : le processus moteur se déroule, avec la mise en route des organes effecteurs, sensoriels et moteurs et le résultat prévu se produit.

Selon l'approche instrumentale de Rabardel (1995), un artefact, objet matériel ou symbolique avec des caractéristiques permettant d'assurer l'accomplissement de buts spécifiques, devient un instrument au cours d'un processus de genèse instrumentale qui consiste en l'élaboration de schèmes d'utilisation de cet artefact. Les schèmes (Vergnaud, 1990) constituent l'organisation invariante de la conduite du sujet pour une classe de situations, sur le plan de l'action tout comme sur celui de l'activité symbolique. Ils comportent des règles de production des actions, ainsi que des anticipations des effets à obtenir. Au sein de ces schèmes d'utilisation, les schèmes d'action instrumentée sont relatifs aux tâches principales pour lesquelles l'artefact est un moyen de réalisation, et les schèmes d'usage sont orientés vers des tâches secondaires, relatives à la gestion des caractéristiques de l'artefact et qui peuvent dans certains cas comprendre des buts propres.

Nous considérons une action instrumentée comme une action d'un sujet qui, dans son environnement de travail, utilise un objet technique soit pour produire un objet graphique représentant un objet géométrique (ou des objets géométriques et leurs relations), soit pour analyser une propriété graphique d'un objet graphique traduisant une relation géométrique. Dans l'environnement papier-crayon, on peut avoir par exemple les actions suivantes pour la production d'un objet graphique :

- tracer un trait passant par un point dans une direction perpendiculaire à une droite avec l'équerre,
- tracer une ligne circulaire (représentant un arc de cercle ou un cercle) avec le compas,
- tracer un trait droit (représentant un segment, une droite ou une demi-droite) avec la règle,
- reporter une longueur de  $x$  cm avec la règle graduée.
- Et on peut avoir les actions suivantes pour l'analyse d'une propriété graphique :
- comparer un angle avec l'angle droit de l'équerre,
- comparer la longueur d'un segment à une longueur donnée par l'écartement du compas,
- vérifier un alignement avec la règle,
- mesurer la longueur d'un segment avec la règle graduée.

L'exécution d'action instrumentée est le résultat de l'activation de relations entre objets géométriques, objets graphiques, objets techniques, corps du sujet, sujet et environnement. Pour une action instrumentée, nous distinguons alors quatre composantes, qui rendent compte chacune d'un aspect de l'action en répondant à une visée spécifique :

- la composante sémiotique est relative aux relations entre objets géométriques et objets graphiques,
- la composante technico-figurale aux relations entre objets techniques et objets graphiques,
- la composante manipulatoire aux relations entre le corps du sujet et les objets techniques,
- la composante organisationnelle aux relations entre le sujet et des éléments de son environnement.

### *Intention d'agir - Connaissances et compétences en jeu*

Une action instrumentée est engendrée par une intention d'agir. Son but, représenter un objet géométrique par un objet graphique ou identifier une relation géométrique à partir des objets graphiques, répond à une visée sémiotique de l'action instrumentée. Il est centré sur les effets de l'action, indépendamment de l'environnement de travail et des objets techniques qui seront utilisés. Par exemple, le sujet peut avoir l'intention de représenter une droite passant par deux points  $A$  et  $B$  donnés ou encore celle de vérifier l'alignement d'un point  $C$  avec deux points  $A$  et  $B$ , les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  étant donnés.

L'intention d'agir conduit à un projet d'actions élémentaires, reposant sur le choix d'un objet technique (choix « indéfini » : il s'agit à ce stade de déterminer le type d'objet qui sera utilisé) : projet de positionnement par rapport aux objets graphiques et projet de tracé ou de prélèvement d'une propriété. Ce projet correspond à une visée technico-figurale de l'action instrumentée. Le sujet élabore une manière de réaliser l'objet graphique ou une manière d'identifier une relation géométrique sur des objets graphiques avec un objet technique sans tenir compte des aspects pratiques de mise en œuvre relatifs à ses capacités corporelles et aux caractéristiques des objets techniques matériels. Par exemple, pour représenter la droite  $(AB)$ , les deux points étant donnés, le sujet envisage de prendre *une* règle avec le projet d'en placer un bord droit sur les points  $A$  et  $B$ , en laissant une partie de la règle de part et d'autre des points, puis de tracer un trait droit le long de la règle, en commençant avant un point et en allant au-delà de l'autre. Pour vérifier l'alignement d'un point  $C$  donné avec les deux points  $A$  et  $B$ , le sujet peut par exemple, une fois le bord de la règle placée sur les points  $A$  et  $B$ , regarder s'il passe aussi par le point  $C$  ou non.

Dans l'intention d'agir, les objets techniques considérés sont idéaux : on ne tient pas compte des caractéristiques des objets techniques matériels qui seront concrètement utilisés (longueur, épaisseur, opacité, etc.).

Plusieurs types de connaissances sont en jeu au niveau de l'intention d'agir :

- des connaissances techniques, relatives à la fonction de l'objet technique et à ses schèmes d'utilisation construits dans les processus de genèse instrumentale (Rabardel, 1995). Par exemple pour la règle, une fonction est celle de permettre le tracé de traits droits, une autre celle de vérifier des alignements. Pour le tracé de la droite  $(AB)$ , on fixe la règle sur le lieu du tracé souhaité et on trace le long de la règle avec le crayon.
- des connaissances graphiques, relatives aux informations graphiques pertinentes à prélever visuellement sur un objet graphique et à leur interprétation géométrique. Elles sont aussi relatives aux symboles et aux notations. Par exemple, pour le tracé de la droite  $(AB)$ , il faut savoir qu'un point isolé est représenté par une croix à côté de laquelle est écrit son nom et que le point se situe graphiquement à l'intersection des branches de la croix. Il faut savoir qu'une droite est représentée par un trait droit dont la longueur n'a pas d'importance et que ce qui caractérise ce trait comme représentant d'une droite (plutôt

que d'un segment) est qu'il peut être prolongé comme l'on veut. Il faut savoir enfin que pour représenter une droite passant par deux points, les extrémités du trait tracé doivent aller de part et d'autre des deux points.

- des connaissances géométriques, relatives à la définition des objets géométriques et aux relations qui peuvent exister entre eux (appartenance, perpendicularité, alignement, etc.). Par exemple, pour le tracé de la droite ( $AB$ ), il faut savoir que deux points distincts suffisent à caractériser une droite et aussi qu'une droite est infinie (ce qui justifie certaines caractéristiques de l'objet graphique).

Plusieurs types de compétences sont sollicitées au niveau de l'intention d'agir :

- des compétences visuo-spatiales avec un repérage des objets graphiques et au besoin le recours à un processus de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005), par exemple le repérage d'un point comme extrémité d'un segment, sommet d'un polygone ou intersection de lignes. Il s'agit également de repérer des positions relatives d'objets graphiques à mettre en lien avec des propriétés portant sur des objets géométriques, comme par exemple de repérer un alignement possible de trois points.
- des compétences organisationnelles avec une planification des actions élémentaires (d'abord choisir l'objet technique, ensuite le positionner et enfin tracer ou analyser).

#### *Intention motrice. Compétences en jeu*

L'intention d'agir engendre une intention motrice au sein de laquelle l'exécution corporelle de l'action instrumentée avec des objets techniques matériels est programmée (organisation motrice et spatiale) et planifiée (organisation temporelle) en fonction du contexte et du but de l'action à réaliser. La visée manipulatoire de l'action instrumentée correspond à sa programmation, c'est-à-dire aux aspects corporels et spatiaux envisagés pour la manipulation de l'objet technique (ouverture et position des mains, vitesse de tracé, lieu des appuis, etc.). Elle dépend des capacités corporelles du sujet ainsi que des caractéristiques des objets matériels (opacité de l'objet technique, épaisseur de la mine du crayon, dimension de la feuille, etc.). La visée organisationnelle de l'action correspond à sa planification. Dans un premier niveau, il s'agit de hiérarchiser les séquences de mouvements – simultanés ou successifs – nécessaires à l'action, de les organiser temporellement (par exemple, planification des mouvements qui préfigurent la saisie d'une règle avec une ouverture progressive de la main et un déplacement simultané du bras en direction de la règle). Dans un second niveau, il s'agit de concevoir l'organisation des actions périphériques à l'action principale, comme se procurer les objets techniques, les apprêter, apprêter la surface de travail (par exemple chercher une règle dans ses affaires, tailler le crayon ou rendre la surface de travail plane).

Plusieurs types de compétences sont sollicitées au niveau de l'intention motrice :

- des compétences manipulatoires relatives à la capacité à coordonner ses mouvements et ajustements posturaux réalisés avec l'objet technique dans l'espace et à la capacité à manipuler l'objet technique avec précision et de manière efficace tant sur le plan matériel que sur le plan corporel dans l'espace de travail. Pour le tracé de la droite ( $AB$ ) à la règle, il faudra par exemple une posture du corps adaptée, un certain dosage dans les appuis et la vitesse de tracé.
- des compétences organisationnelles, concernant la capacité à planifier ses actions en en concevant l'organisation selon un plan déterminé.
- des compétences visuo-spatiales, concernant la capacité à réaliser une analyse visuelle pour prélever des informations spatiales (repérage d'entités graphiques, repérage de parties de l'objet technique, repérage de parties corporelles, repérage d'éléments de l'espace extracorporel). Elles concernent aussi la capacité à se représenter des relations spatiales et à les interpréter (anticiper la position relative de l'objet technique, des objets graphiques et du corps, anticiper la production graphique finale sur le support). Pour le

tracé de la droite ( $AB$ ) par exemple, il faut repérer les deux points  $A$  et  $B$ , anticiper le lieu du tracé pour placer la règle, effectuer des choix pour pouvoir réaliser le tracé dans une position confortable (par exemple éviter un croisement de mains pour tracer).

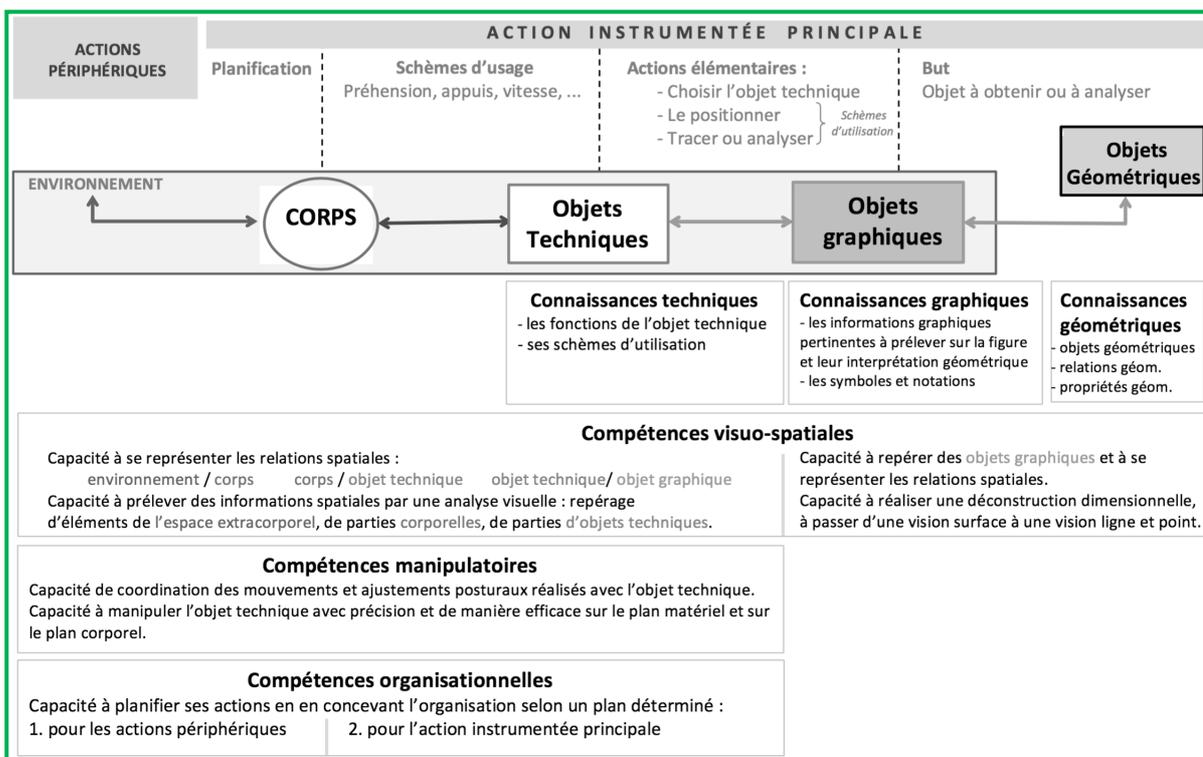


Figure 1. – Cadre d'analyse de l'action instrumentée

## 2. Analyse a priori d'une tâche de construction instrumentée

Nous proposons maintenant une appropriation du cadre d'analyse avec l'analyse *a priori* d'une tâche de construction instrumentée dans un contexte donné (figure 2). Plus précisément, nous utilisons le cadre d'analyse présenté dans le paragraphe précédent pour identifier les connaissances et compétences en jeu pour la tâche et le contexte en question : connaissances techniques, graphiques et géométriques ; compétences visuo-spatiales, manipulatoires et organisationnelles.

**Tâche :** Placer un point  $M$  n'appartenant pas à la droite  $d$ , puis construire le symétrique du point  $M$  par rapport à la droite  $d$ .

**Contexte :**  
 Environnement papier-crayon  
 Classe de sixième  
 Élève gaucher, dispose d'une équerre graduée dans son sac et d'un crayon de papier.  
 La feuille de tracé est collée sur son cahier.  
 La droite  $d$  est représentée.

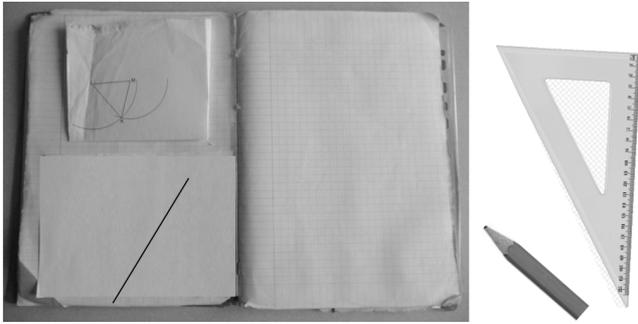


Figure 2. – Tâche de construction instrumentée et contexte

La tâche de construction peut être réalisée en suivant le programme de construction suivant :

- Placer un point  $M$  n'appartenant pas à la droite  $d$
- Construire la droite  $d'$  perpendiculaire à la droite  $d$  passant par le point  $M$
- Construire le point  $M'$  sur la droite  $d'$ , distinct de  $M$  et situé à la même distance de la droite  $d$  que le point  $M$

Avec une équerre graduée et un crayon comme instruments, on obtient alors un programme de tracé se décomposant en l'enchaînement des cinq actions instrumentées suivantes :

n°0 : Placer un point  $M$  n'appartenant pas à la droite  $d$  avec le crayon

n°1 : Tracer un trait dans une direction perpendiculaire à la droite  $d$  passant par le point  $M$  avec l'angle droit de l'équerre

n°2 : Prolonger ce trait de l'autre côté de la droite  $d$  avec un côté rectiligne de l'équerre

n°3 : Mesurer la distance du point  $M$  à la droite  $d$  avec les graduations de l'équerre

n°4 : Placer le point  $M'$  à cette même distance de la droite  $d$

Nous précisons maintenant les connaissances et compétences en jeu pour l'exécution de la tâche.

Les connaissances géométriques en jeu sont relatives aux objets droite et point et aux relations d'appartenance, de perpendicularité, de la distance d'un point à une droite et de symétrie ponctuelle relativement à une droite.

Les connaissances graphiques en jeu concernent les représentations graphiques d'une droite (trait droit que l'on peut prolonger), d'un point isolé (croix à côté de laquelle on écrit le nom du point), d'une droite perpendiculaire à une autre droite (marquage de la relation de perpendicularité par un petit carré sur un des quatre angles droits formés par les deux droites), d'un point sur une droite (petit trait coupant la droite à côté duquel on écrit le nom du point).

Les connaissances techniques en jeu sont relatives aux schèmes d'utilisation de l'angle droit de l'équerre, d'un de ses côtés rectilignes pour réaliser un prolongement et de ses graduations pour réaliser un report de longueur.

Des compétences manipulatoires sont sollicitées pour le positionnement de l'angle droit de l'équerre (action n°1), pour le glissement d'un côté de l'équerre le long de la ligne à prolonger (action n°2) et pour le positionnement des graduations de l'équerre (actions n°3 et n°4). La main qui maintient l'équerre ne doit pas gêner les actions de tracés et de lectures de mesure (les doigts ne doivent pas dépasser des bords). Un bon maintien de l'équerre se fait avec plusieurs doigts écartés sur le bord de l'équerre. Pour que le trait tracé passe bien par le point  $M$ , il faut tenir compte de l'épaisseur de la mine du crayon en décalant un peu l'équerre du centre de la croix qui représente le point  $M$ .

Des compétences visuo-spatiales sont en jeu pour le repérage de la droite  $d$  sur le support, celui du point  $M$  et celui du point d'intersection des droites  $d$  et  $d'$ . Concernant la lisibilité des tracés, des contraintes graphiques sont à prendre en compte : la lettre «  $M$  » doit être écrite à proximité de la croix qui représente le point  $M$  mais pas entre le point  $M$  et la droite  $d$  pour éviter que la lettre soit sur le tracé de la droite  $d'$ . Le placement du point  $M$  par rapport à la droite  $d$  sollicite également des compétences visuo-spatiales avec la capacité à se représenter la place qu'occupera la construction finale sur le support d'une part, et les positions relatives entre les mains et l'équerre lors des tracés et lectures de mesure d'autre part. Un choix est en effet à réaliser pour que la production graphique soit matériellement réalisable, lisible et précise. Tout d'abord, le point  $M$  ne doit pas être distant de la droite  $d$  de plus de la longueur d'un bord de l'angle droit de l'équerre, il ne doit pas non plus être trop proche sans quoi placement de l'équerre et prise de mesure seront imprécis. Ensuite, le point  $M$  doit être positionné de telle sorte que son symétrique par rapport à la droite  $d$  ne sorte pas des limites du cahier. Enfin, un placement du point  $M$  à droite de  $d$  rendrait instable le positionnement de l'équerre sur le cahier étant donné la proximité de la droite  $d$  par rapport à la tranche du cahier. Il est donc préférable de placer le point  $M$  à gauche de  $d$ , l'élève gaucher devra alors mettre en jeu ses compétences

organisationnelles en tournant son cahier d'un demi-tour : cela lui permettra de maintenir l'équerre avec sa main non dominante et de tracer avec sa main dominante dans une position stable et confortable. Des compétences organisationnelles sont également sollicitées dans la planification des actions instrumentées et celle des actions élémentaires qui les composent. Concernant les actions périphériques, il s'agira de sortir l'équerre du sac et de tailler le crayon.

### *3. Outils d'analyse logique et conceptualisation*

Dans cette troisième sous-partie, nous proposons un complément à la description précédente en intégrant des éléments de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990) et notamment l'approche des schèmes par les invariants opératoires. Cet apport est opérationnalisé par l'intermédiaire d'une analyse logique des concepts au sens de Barrier, Durand-Guerrier et Mesnil (en révision) à laquelle la description qui suit est pour l'essentiel empruntée. Ce type d'analyse se focalise sur la question du nombre et de la nature des objets mathématiques qui sont mis en jeu en situation, y compris au niveau de la dimension opératoire de la connaissance (Vergnaud, 2002). Il s'agit de se donner les moyens de décrire l'activité géométrique des élèves en se posant la question du mode de structuration logique de la réalité géométrique (Barrier, Chesnais & Hache, 2014) et des éventuelles variations et ruptures associées qui peuvent apparaître au cours des apprentissages.

#### *Notions de schème et d'invariants opératoires*

La Théorie des Champs Conceptuels de Vergnaud (1990) définit la notion de concept à partir de trois ensembles. Le premier comprend les situations dans lesquelles le concept est susceptible d'être utilisé, le second comprend les invariants sur lesquels repose l'action des sujets et le troisième les représentations permettant les manipulations symboliques. Du côté de la description du comportement des sujets et de la conceptualisation, la notion centrale est celle de schème. Il s'agit de rendre compte d'une forme de régularité dans la conduite des sujets pour une classe de situations données. Au cœur des schèmes se trouvent ce que Vergnaud appelle les invariants opératoires :

Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets – arguments. (Vergnaud, 1990, p. 145)

Le système des invariants opératoires est ce qui permet de penser le réel, il est au fondement des schèmes au sens où il ne peut y avoir d'organisation de l'action sans découpages (quels objets ?) et points de vue sur la situation (quelles relations entre ces objets ?), autrement dit sans énoncés tenus pour vrais par le sujet, au moins en acte (des jugements). Ces invariants opératoires sont, selon Vergnaud, de trois types logiques fondamentaux : des propositions – les formules fermées possédant une valeur de vérité – qui sont implicitement universellement quantifiées puisque portant sur des classes de situations et qui permettent de décrire les théorèmes-en-acte ; des fonctions propositionnelles – les formules ouvertes susceptibles d'être ou non satisfaites par divers objets – qui permettent de décrire les concepts-en-acte ; des arguments, c'est à dire les objets susceptibles d'être caractérisés ou d'être mis en relation via les fonctions propositionnelles. Vergnaud suggère donc de décrire le système des invariants opératoires sur lequel repose les actions des sujets par le langage des prédicats.

Le processus de conceptualisation est un processus long, qui peut s'étendre sur plusieurs années, du fait de la variété des situations, des invariants et des signes qui peuvent être rencontrés. Le recours au langage des prédicats, à l'analyse « interne » des propositions en termes de relation entre objets, est un moyen d'envisager les ruptures potentielles dans les invariants opératoires et dans la manière dont la culture scolaire envisage d'organiser la réalité.

Prenons l'exemple de la symétrie, elle peut se définir comme une relation ternaire entre deux figures (ou deux points) et un axe de symétrie, comme une relation binaire entre une figure et un axe, comme une relation binaire entre deux figures, comme une propriété d'une figure ou encore comme un objet dont les propriétés et relations peuvent être étudiées.

### *Complément d'analyse a priori*

Dans le cas qui nous intéresse, c'est la notion de symétrie comme relation ternaire entre deux points et un axe qui est en jeu. Focalisons-nous sur le tracé de la droite perpendiculaire à  $d$  et passant par le point  $M$  que nous supposons déjà placé. Au niveau de l'intention agir, il s'agit de produire une trace graphique d'un objet  $d'$  vérifiant un énoncé du type «  $d$  est perpendiculaire à  $d'$  ET  $M$  appartient à  $d'$  » ou plus formellement «  $P(d, d')$  ET  $A(M, d')$  ». La finalité est donc de traduire au niveau graphique des contraintes s'exprimant par des relations portant sur des objets géométriques. Du point de vue des connaissances techniques, il s'agit de positionner un côté de l'angle droit de l'équerre le long de  $d$ , puis de positionner le point  $M$  sur l'autre côté de l'angle droit (tout en maintenant la première contrainte). Il faut ensuite tracer un trait le long de ce dernier côté de l'angle droit de l'équerre. Alors que du point de vue des connaissances géométriques, les relations en jeu portaient sur les objets géométriques, elles relèvent cette fois de contraintes spatiales portant sur des parties de l'instrument à mettre en relation avec des objets graphiques. Les relations mathématiques  $P$  et  $A$  sont portées par l'équerre [ $P(d, d')$  : un premier côté de l'angle droit de l'équerre étant positionné sur la représentation de  $d$ , la trace est produite sur l'autre côté de l'angle droit de l'équerre ;  $A(M, d')$  : un côté de l'équerre étant positionné sur la représentation de  $M$ , la trace est produite sur ce même côté)]. La conjonction ET trouve sa contrepartie dans la simultanéité des contraintes spatiales au cours du tracé.

Ceci suppose à son tour que soient repérées et mises en relation traces graphiques et parties de l'instrument, ceci reposant sur des compétences visuo-spatiales. Revenons à la problématique des schèmes et des invariants opératoires. L'action instrumentée est réalisée à l'équerre. Nous pouvons distinguer deux schèmes d'utilisation bien distincts pour cet instrument, au sens de la mobilisation d'invariants opératoires de natures différentes, mais toujours en lien avec des questions d'orthogonalité. Dans un premier cas, l'orthogonalité est considérée comme une propriété d'un secteur angulaire. Le schème d'utilisation consiste à faire coïncider à la fois le sommet de l'angle droit de l'équerre avec le sommet du secteur angulaire et un côté de l'angle droit avec un côté du secteur angulaire, puis à réaliser le tracé ou l'observation sur l'autre côté. Il faut ici remarquer qu'il s'agit en quelque sorte d'une contrainte de positionnement « double » dans la mesure où les deux éléments de l'instrument qu'il faut faire coïncider avec les deux éléments de la représentation du secteur angulaire relèvent d'une même unité spatiale (le sommet de l'angle droit est aussi une extrémité du côté de l'angle droit etc.). Du point de vue des invariants opératoires, le point est donc conçu comme une extrémité de quelque chose, typiquement comme le sommet d'un polygone. Il s'agit du fonctionnement de l'équerre par exemple lorsqu'il s'agit de vérifier les angles droits d'un rectangle. Il s'agit du schème d'utilisation de l'équerre dans le paradigme d'une vision de type surface au sens de Perrin-Glorian et Godin (à paraître). Dans le second cas, l'orthogonalité n'est plus considérée comme une propriété d'un objet (de dimension 2). Elle s'exprime par la relation de perpendicularité en deux objets de dimension 1. Les schèmes d'utilisation de l'équerre s'enrichissent d'une nouvelle approche à l'image de celle décrite plus haut : il faut cette fois utiliser les deux côtés de l'angle droit de l'équerre, mais plus son sommet. Les deux contraintes sont spatialement séparées. Le premier schème décrit est antérieur au second dans l'enseignement primaire, il fait parfois obstacle au second (Barrier, Hache & Mathé, 2014). On pourrait s'attendre dans la tâche analysée à ce que des élèves cherchent à positionner le sommet de l'angle droit sur le point  $M$ .

Ceci nous permet de compléter l'analyse *a priori* des compétences visuo-spatiales en jeu. En tant qu'invariant opératoire, le point  $M$  doit être repéré non pas en tant qu'extrémité ou sommet dans le cadre d'une vision surface mais comme un point appartenant à la droite  $d'$  à tracer, dans le cadre d'une vision ligne (Perrin-Glorian & Godin, à paraître), ce que nous avons exprimé par la relation  $A(M, d')$  dans la description de la finalité de l'intention d'agir.

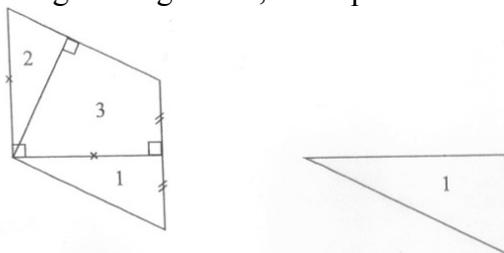
### INTERACTIONS AUTOUR D' ACTIONS INSTRUMENTÉES

À la suite d'autres chercheurs (Mangiante & Perrin-Glorian, 2017 ; Perrin-Glorian & Godin, à paraître), nous faisons l'hypothèse que les situations de construction aux instruments peuvent permettre de favoriser la transition vers la géométrie déductive du collège en contribuant notamment à établir un « rapport aux figures » adéquat (voir aussi le cours de Mathé et Mithalal dans les actes de cette même école d'été). Ce rapport aux figures consiste en une appréhension dynamique des figures via une décomposition en points et droites (vs. les seuls éléments de surface) autorisant des réorganisations perceptives (Duval, 2005).

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux interactions autour d'actions instrumentées dans le cadre de dispositifs de travail en dyade, avec un élève instructeur formulant des consignes de tracé et un autre constructeur les mettant en œuvre à l'aide d'instruments. Nous nous situons en effet dans une perspective sémiotique et dans une conception de l'apprentissage dans laquelle la formation des concepts mathématiques peut se réaliser à travers des interactions sociales (Radford, 2006). À partir d'une transcription d'un travail en dyade et à l'aide du cadre d'analyse de l'action instrumentée que nous venons de présenter, nous analyserons l'activité des élèves avec comme observables leurs actions avec les instruments, les productions graphiques, le langage et les gestes produits dans les échanges. Dans le dispositif que nous proposons d'étudier, la seule consigne qui a été donnée aux élèves concernant la forme de la communication est de n'avoir recours qu'au langage verbal. Il n'est donc par exemple implicitement pas possible pour l'instructeur de pointer par des gestes déictiques des objets graphiques ou des parties d'instrument. Pour autant le cadre de la communication verbale reste souple. Notre intention est de chercher à dégager à partir de nos analyses d'une situation « peu élaborée » des caractéristiques potentiellement intéressantes pour l'organisation des échanges au sein des dyades.

#### 1. Présentation de la tâche et des modalités de travail

La tâche consiste à reproduire une figure à partir d'une amorce (figure 3) avec comme instruments à disposition une règle non graduée, une équerre et un compas.



**Figure 3.** – Figure à reproduire (à gauche) à partir du triangle rectangle 1 (à droite)

La tâche est à réaliser au sein d'un travail en dyade : un instructeur a accès à la figure et doit donner des instructions à un constructeur pour qu'il la reproduise à partir du triangle rectangle (présenté comme tel) donné comme amorce. L'instructeur doit communiquer par le langage verbal uniquement, de plus, il voit ce que fait le constructeur. Seul le constructeur peut utiliser les instruments (règle non graduée, équerre et compas) pour réaliser ce que lui demande l'instructeur.

## 2. Analyse a priori

Dans l'analyse *a priori* de la tâche, nous déterminons d'abord différentes techniques de construction pouvant être mises en œuvre par des élèves de sixième avec comme instruments la règle non graduée, l'équerre et le compas. Nous exposons ensuite les connaissances et compétences en jeu concernant l'intention d'agir de sujets qui auraient à réaliser cette tâche de reproduction dans un travail en dyade. Nous faisons le choix de nous focaliser sur cette dimension de l'action instrumentée dans la mesure où notre analyse théorique montre que c'est à ce niveau que les principaux enjeux d'apprentissage se situent dans la perspective d'une articulation avec la géométrie déductive du collège pour laquelle la réalisation effective des tracés prendra moins de place.

### Techniques de construction

Nous détaillons ici différentes techniques de construction des points  $D$ ,  $E$  et  $F$  à partir du triangle  $ABC$  rectangle en  $C$  (cf. figure 4 pour le codage de la figure).

Le point  $D$  peut être obtenu par une intersection de lignes : soit un cercle (centre  $C$  et rayon  $BC$ ) et une droite (prolongement du segment  $[BC]$  à la règle ou perpendiculaire à  $(AC)$  au point  $C$  à l'équerre), soit deux cercles (centre  $C$  et rayon  $BC$  – centre  $A$  et rayon  $AB$ ). Le point  $F$  peut être obtenu par l'intersection d'un cercle (centre  $A$  et rayon  $AF$ ) et d'une droite (perpendiculaire à  $[AC]$  au point  $A$ ). Le point  $E$  peut être obtenu par l'intersection de deux droites (droite  $(FD)$  et droite perpendiculaire à  $(FD)$  passant par  $A$ ). Les points  $D$  et  $F$  peuvent également être construits comme extrémité d'un segment d'une longueur donnée, le point  $F$  et le point  $E$  comme extrémité d'un « segment perpendiculaire ».

	Intersection de lignes (droite – cercle)	Intersection de lignes (cercle – cercle)	Extrémité d'un segment	Intersection de lignes (droite – droite)
D				
F				
E				

Figure 4. – Différentes techniques de construction

### *Connaissances et compétences en jeu*

L'instructeur, dans son analyse de la figure, doit mettre en jeu des compétences visuo-spatiales. Ainsi, il doit repérer des relations spatiales sur l'objet graphique (perpendicularité, parallélisme, alignement de points, égalité de longueurs). Pour reproduire cette figure, il est souvent efficace, voire nécessaire, de percevoir les points à construire comme des intersections de lignes (vision lignes), ces dernières étant obtenues par des prolongements des côtés des polygones, des tracés de cercles déduits des égalités de longueurs et des tracés de droites perpendiculaires. Les points ne peuvent être conçus seulement comme des sommets de polygone (vision surface). Prenons le cas de la construction du point  $E$ , ce point ne peut être obtenu par report de longueur. Sa construction nécessite le tracé d'une droite  $d$  perpendiculaire à la droite  $(FD)$ , il doit être perçu par la mise en relation de ces deux droites ( $E$  appartient à  $d$  ET  $E$  appartient à  $(FD)$ ). En tant qu'invariant opératoire, il fonctionne comme une intersection de lignes. Ces compétences visuo-spatiales sont associées à des connaissances géométriques.

L'instructeur doit aussi mettre en jeu des connaissances graphiques pour identifier les propriétés de la figure. Il doit interpréter différents signes graphiques, à savoir les numéros qui permettent de nommer des surfaces juxtaposées (1 : triangle  $ABC$ , 2 : triangle  $AEF$  et 3 : quadrilatère  $AEDC$ ), les signes identiques (les petites croix et les paires de traits parallèles) placés sur les segments qui donnent une information sur une égalité de longueurs (il ne s'agit pas de points, ces signes n'ont pas à être reproduits à l'identique au même endroit), le codage des angles droits (en  $A$  dans  $FAC$ , en  $E$  dans  $AED$  et en  $C$  dans  $ACD$ ). L'instructeur doit savoir que ni l'égalité apparente des longueurs  $AF$  et  $BD$ , ni le parallélisme apparent des droites  $(AF)$  et  $(BD)$  ne peuvent être exploités comme des données. Enfin, l'instructeur doit savoir qu'il peut nommer les points clés de la figure pour faciliter la formulation des instructions et qu'il peut demander la réalisation de traits de construction ne figurant pas sur le modèle à reproduire.

Afin de communiquer ses instructions, l'instructeur doit mettre en jeu des compétences organisationnelles. Il détermine des étapes pour la construction : d'abord le point  $D$  ou le point  $F$  (peu importe l'ordre) et le point  $E$  pour terminer (construit à partir des points  $F$  et  $D$ ).

Des compétences langagières sont en jeu pour l'instructeur et pour le constructeur. Le premier doit communiquer les étapes de la construction dans un langage adapté, le second doit traduire les instructions langagières en actions avec les instruments. Différents types de langage peuvent être employés lors de la communication :

- le langage géométrique, relatif aux objets, relations ou propriétés géométriques et utilisant des termes lexicaux et des tournures syntaxiques spécifiques. Par exemple, l'instructeur demande de tracer « la droite perpendiculaire à la droite  $(FD)$  passant par le point  $A$  ».
- le langage technique géométrique, relatif à la manipulation des instruments en lien avec des propriétés géométriques, sans mention de ces propriétés. Par exemple, l'instructeur demande de placer un côté de l'angle droit de l'équerre le long de la droite  $(FD)$  et l'autre côté de l'angle droit sur le point  $A$ , puis de tracer le long de ce côté.

Dans une visée sémiotique, l'instructeur peut remplacer des termes géométriques par des termes de la langue courante (par exemple le terme « trait » utilisé à la place de « droite » ou de « segment », le terme « croix » utilisé à la place de « point »). Enfin, l'instructeur peut se placer dans une visée manipulative en décrivant des mouvements d'instruments ou des relations corps-instrument (par exemple « décale un peu l'équerre vers le haut », « appuie bien sur l'équerre »).

Nous présentons dans les tableaux suivants les connaissances techniques, graphiques et géométriques mises en jeu par l'instructeur et/ou le constructeur selon l'instruction donnée pour les différentes sortes d'actions instrumentées à accomplir dans cette reproduction de figure : le tracé d'une demi-droite par prolongement d'un segment, le tracé d'un arc de cercle (ou d'un cercle) qui coupe une demi-droite (ou une droite), le tracé d'une demi-droite perpendiculaire,

le tracé d'un segment déterminé par une extrémité, sa direction et sa longueur ou par ses deux extrémités. Nous instancions chaque sorte d'actions sur un exemple.

Connaissances techniques	Connaissances graphiques	Connaissances géométriques
<b><i>Demi-droite [CD] par prolongement de [BC]</i></b>		
<p>La règle permet de tracer un trait droit</p> <p>On place la règle sur le segment [BC] en laissant une partie du côté de C et on trace le long de la règle</p>	<p>Une demi-droite est représentée par un trait droit limité d'un côté et prolongeable de l'autre (autant que l'on veut)</p> <p>Un angle droit se code par un petit carré placé en son sommet</p>	<p>B, C et D sont alignés. En effet, l'angle BCD est un angle plat, le triangle BCA étant rectangle en C et le triangle ACD rectangle en D</p> <p>Demi-droite, triangle rectangle, angle droit</p>
<b><i>Arc de cercle de centre C et de rayon BC qui coupe [CD] en D</i></b>		
<p>Le compas permet de tracer un arc de cercle / un cercle</p> <p>On place la pointe sur le centre C, la mine sur le point B du cercle et on trace</p> <p style="text-align: center;">ou bien</p> <p>On prend l'écartement BC, puis on pointe sur C et on trace</p>	<p>Un point d'intersection de deux lignes se représente par des lignes qui se coupent avec une partie des lignes de part et d'autre du point.</p> <p>Le sommet d'un polygone est le point commun des deux traits représentant des côtés consécutifs</p> <p>On écrit le nom d'un point à proximité de ce point, en lettre capitale</p>	<p>Les points d'un cercle sont équidistants de son centre.</p> <p>Un cercle est défini par la donnée de son centre et d'un de ses points</p> <p>Un cercle est défini par la donnée de son centre et de son rayon</p>
<b><i>Demi-droite perpendiculaire à la droite (AC) passant par le point C</i></b>		
<p>L'équerre permet de tracer un angle droit à partir d'un côté</p> <p>On place un côté de l'angle droit de l'équerre sur (AC) avec le sommet de l'angle droit sur C et on trace le long de l'autre côté de l'angle droit à partir du point C</p>	<p>Une demi-droite est représentée par un trait droit limité d'un côté et prolongeable de l'autre (autant que l'on veut)</p>	<p>Demi-droite, perpendicularité, angle droit</p>
<b><i>Segment de direction (BC), d'extrémités C et un point du cercle distinct de B</i></b>		
<p>La règle permet de tracer un trait droit</p> <p>On place la règle sur le segment [BC] en laissant une partie du côté de C et on trace le long jusqu'au cercle</p>	<p>Un segment est représenté par un trait droit limité des deux côtés</p>	<p>Un segment est défini par une extrémité, une direction et sa longueur</p>

<i>Segment d'extrémités F et D</i>		
La règle permet de tracer un trait droit On place la règle sur les points <i>F</i> et <i>D</i> et on trace de <i>F</i> à <i>D</i> le long de la règle	Un segment est représenté par un trait droit limité des deux côtés	Un segment est défini par ses deux extrémités

### 3. Analyse a posteriori

L'analyse porte sur un travail en dyade de deux élèves de sixième ayant à réaliser la tâche de reproduction présentée précédemment. L'élève M a le rôle de l'instructeur et l'élève Bm celui du constructeur. La tâche est réalisée en 4 minutes et 25 secondes, la transcription des échanges entre les deux élèves est en annexe 1.

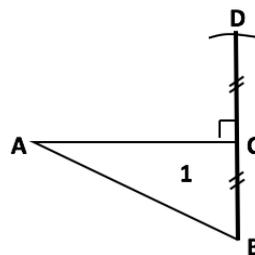
#### Analyse des échanges

Dans ses instructions, l'élève M exploite des propriétés spatiales et graphiques des objets graphiques et non des propriétés géométriques. Tout d'abord, l'utilisation d'indicateurs spatiaux lui est nécessaire pour communiquer puisqu'elle ne nomme pas les points pour donner ses instructions à l'élève Bm. Elle utilise le numéro de la figure, le 1, pour en parler et emploie tout du long de ses instructions des indications spatiales (1. « debout », 5. « bien droit », 3. 13. 15. 19. 52. « en haut », 67. « en bas », 17. « au milieu », 67. « à côté »), qu'elle complète à terme par des gestes de pointage, enfreignant ainsi la règle donnée dans la consigne de n'avoir recours qu'au langage verbal, lorsqu'elle n'arrive pas à se faire comprendre. L'élève Bm répond aux imprécisions de l'élève M par de nombreuses demandes de confirmation sur les segments ou les points considérés, par des gestes et termes déictiques et elle finit par informer l'élève M du problème, au moment où celle-ci semble excédée de ne pas se faire comprendre (46. Bm : « Ben oui, mais tu précises pas aussi hein »).

Ensuite, pour la construction du segment  $[DC]$ , une fois un arc de cercle de centre  $C$  et de rayon  $BC$  tracé, l'élève M utilise la verticalité de l'alignement des points  $B$ ,  $C$  et  $D$  (5. « Bon, et là tu relies l'arc de cercle au trait bien droit »). L'indication « bien droit » est en effet relative à la verticalité du segment  $[BC]$  sur le support. L'élève Bm effectue alors un prolongement de ce segment pour tracer  $[DC]$ . Suite à ce tracé, l'élève M lui demande un placement de l'équerre sur « le trait du 1 » suivi du codage de l'angle droit en  $C$  dans le triangle  $ACD$ , traduisant ainsi le codage de l'angle droit par une nécessité de vérifier un angle droit à l'équerre, plutôt que par la possibilité d'utiliser l'équerre pour le construire.

L'élève M semble chercher à faire réaliser le même objet graphique que son modèle, en donnant autant d'importance à chacune de ses caractéristiques graphiques et propriétés spatiales. Peut-être est-ce d'ailleurs pour cela qu'elle ne s'autorise pas à nommer les points. Ainsi, l'élève M donne des instructions spatiales à propos de certains codages. Pour le codage d'égalité de longueurs par exemple, elle demande à l'élève Bm de mettre le même symbole (une petite croix) sur le côté  $[AC]$  du triangle. Elle semble ignorer que le symbole choisi n'a pas d'importance, tout comme sa localisation sur le segment :

13. M : Mets une petite croix sur le bord du 1, en haut.
14. Bm : Là ? Elle se place sur le sommet  $A$  du triangle.
15. M : Non, non, le, le segment du haut.
16. Bm : Là ? Elle se place sur le sommet  $C$ .
17. M : Au milieu, au milieu !



L'élève M demande de placer cette petite croix sur le segment  $[AC]$  alors que le segment  $[AF]$  n'est pas encore construit. Cette croix ne peut donc pas être interprétée par l'élève Bm comme signifiant une égalité de longueurs. Celle-ci suppose assez naturellement qu'il s'agit de la représentation d'un point (elle propose d'abord le sommet  $A$ , puis le sommet  $C$ ). Cela conduit l'élève M à apporter une précision sur la localisation de la croix sur  $[AC]$ , elle demande qu'elle soit placée au milieu. L'élève Bm rajoute d'elle-même la croix sur le segment  $[AF]$  suite à son tracé (50) manifestant ainsi des connaissances graphiques relatives au codage de l'égalité de longueurs et des connaissances géométriques relatives à la déduction de cette égalité suite à la construction au compas.

Pour le codage manquant d'un angle droit à la fin de la construction, l'élève M demande à l'élève Bm de « mettre un angle droit en bas du triangle », puis complète son instruction en pointant le point  $A$ . Elle parle vraisemblablement du « bas du triangle 2 ». Or l'angle droit en  $A$  n'est pas un angle de ce triangle, il est l'angle droit du triangle  $FAC$ . L'élève M n'associe donc pas le signe graphique du codage à l'objet géométrique correspondant, elle le localise plutôt spatialement par rapport au triangle 2. L'élève Bm trouve l'angle considéré non pas grâce à l'instruction de l'élève M mais en reconnaissant visuellement cet angle comme étant droit.

Enfin, pour obtenir exactement la même figure que le modèle, l'élève M cherche aussi à ne pas avoir de trait de construction. Cela apparaît lorsqu'elle demande de faire « un mini arc de cercle » et aussi lorsqu'elle demande d'effacer le tracé situé après l'arc de cercle (47. « Trace un arc de cercle, efface le bout qui n'est pas »).

De cette façon, les points  $D$  et  $F$  ne sont pas représentés graphiquement comme points d'intersection d'une ligne droite et d'un arc de cercle, la ligne droite n'allant pas de part et d'autre de l'arc. L'élève M assimile l'arc de cercle au point lui-même. En effet, pour le tracé du segment  $[FD]$ , elle demande de « relier les deux arcs de cercle » et pour le tracé du segment  $[DC]$  de « relier l'arc de cercle au trait bien droit ». Elle considère donc des objets géométriques de dimension 1 (arc de cercle et trait) à la place des points (point d'intersection et extrémité de segment).

Le langage utilisé par l'élève M pour donner ses instructions est globalement très imprécis. Elle utilise parfois les termes « segment » ou « côté », mais beaucoup plus ceux de la langue courante avec « trait », « bord » et « bout ». Elle parle aussi de « coin » pour dénommer un sommet du triangle. Il y a également beaucoup d'implicites dans ce qu'elle demande. Ils sont bien décodés par l'élève Bm pour le tracé du segment  $[DC]$ , mais ne le sont plus du tout pour le tracé de la perpendiculaire à  $[AC]$  en  $A$  et celui de la perpendiculaire à  $[FD]$  passant par  $A$ . L'élève M utilise un langage à visée manipulatoire pour indiquer le placement de l'équerre, en effectuant un guidage simultané des mouvements à réaliser avec l'instrument : il s'agit juste de « tourner » ou de « retourner » l'équerre, aucun lien n'est exprimé entre les parties de l'équerre et les objets graphiques présents. Six essais sont nécessaires avant d'aboutir au placement voulu. L'élève M procède de la même façon pour obtenir l'angle droit au point  $E$  mais elle finit par placer elle-même approximativement l'équerre après quatre tentatives de l'élève Bm. Les imprécisions dans les instructions ainsi données par l'élève M conduisent l'élève Bm à faire des propositions de positionnement de l'équerre ou des hypothèses sur les objets géométriques considérés. Dans les échanges entre les deux élèves, on dénombre quatorze demandes de la part de l'élève Bm du type « Là ? Comme ça ? ». Des implicites existent encore, une fois l'équerre placée, lorsque l'élève M demande de « tracer le trait ».

### *Potentialités du travail en dyade*

Dans le travail en dyade que nous venons d'analyser, nous identifions plusieurs freins à l'acquisition des connaissances et compétences que nous avons décrites lors de l'analyse *a priori*.

L'usage de termes spatiaux et un partage d'implicites entre les deux élèves permettent l'obtention de tracés voulus par l'élève M mais ne permettent pas aux élèves d'identifier les objets et propriétés géométriques qui seraient à considérer dans une perspective d'apprentissage. Par exemple l'instruction 3 de l'élève M (« tu vas piquer en haut, tu vas faire un mini arc de cercle ») conduit l'élève Bm au tracé de l'arc de cercle voulu. Or, le centre de l'arc n'est pas mentionné (comme sommet de l'angle droit du triangle ou par son nom suite à une instruction de nommer les sommets du triangle donné) et l'arc de cercle que trace l'élève Bm (4) montre qu'elle anticipe le report de longueur attendu, même s'il n'a pas été annoncé. L'instruction suivante (« tu relies l'arc de cercle au trait bien droit ») conduit l'élève Bm à faire un prolongement du côté  $[BC]$  du triangle alors que cela ne lui a pas été formulé explicitement.

Les instructions données par l'élève M pour le positionnement de l'équerre (de 26 à 40. « tourne-la, tourne-la dans l'autre sens, tourne-la, retourne-la, retourne-la, tourne-la, tourne-la » et de 54 à 58. « pas comme ça, tu vas la tourner, tourne-la encore, encore, non pas comme ça ») sont à visée manipulative. Ces instructions ne sont ni explicites, ni efficaces. Les difficultés langagières qui émergent ici pour l'élève M ne permettent pas d'aboutir à un positionnement d'instrument qu'elle sait faire dans l'action, au moins de façon approximative (60). Par ailleurs, ces instructions à visée manipulative mettent l'élève Bm dans une position d'exécutante, elles sont sans enjeux pour elle du point de vue géométrique. Remarquons enfin qu'un tel travail en dyade ne fonctionnerait pas non plus, supposant que l'élève M donne ses instructions en langage géométrique (par exemple « trace la perpendiculaire à la droite ( $FD$ ) passant par  $A$  »), si l'élève Bm n'était pas en mesure de l'interpréter pour le convertir en une action instrumentée.

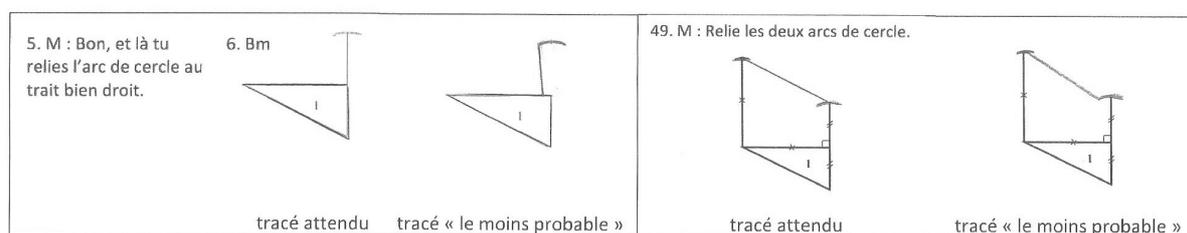
Ces observations nous ont conduits à identifier plusieurs caractéristiques potentiellement souhaitables dans la perspective d'un travail en dyade orienté vers les apprentissages géométriques (au sens large des enjeux de l'intention d'agir en contexte dyadique : connaissances géométriques, techniques, graphiques, compétences visuo-spatiales, organisationnelles, compétences langagières)

D'abord, en plus de la non manipulation des instruments, il paraît nécessaire de proposer des règles explicites relatives au registre de langage qu'il est possible d'utiliser pour l'instructeur. Ces règles auraient pour objectif d'écartier l'usage des termes spatiaux tels « en haut » ou « à gauche », des termes déictiques accompagnés de gestes tels « ici » ou « là » ou encore du guidage manipulative du type « avance », « tourne », « stop ». Le recours au langage géométrique n'étant pas un objectif du type de situation considéré – nous les considérons comme des situations d'action au sens de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et non comme des situations de formulation – nous proposons que l'instructeur donne au constructeur les étapes d'un programme de tracé, toujours au fur et à mesure, mais dans le registre de langage technique géométrique. Ce langage utilise des termes de la langue géométrique pour dénommer des objets géométriques (par exemple « point », « droite », « segment »). Il utilise également la langue technique, d'une part pour nommer les objets techniques et leurs parties à mettre en relation avec les objets graphiques (par exemple « équerre », « sommet de l'angle droit de l'équerre »), d'autre part pour exprimer des actions relatives aux fonctions des objets techniques et aux actions élémentaires associées (par exemple « prolonger » un segment, « piquer » la pointe du compas sur le point  $A$ ). Ainsi, nous nous appuyons sur l'hypothèse de la pertinence de l'introduction du langage technique géométrique dans l'enseignement, langage qui permet de décrire les relations instruments-figures au plus près des actions instrumentées, lorsque le langage géométrique n'est pas encore maîtrisé par les élèves. Par ailleurs, comme nous avons pu l'analyser dans le complément d'analyse logique de la première partie de ce texte autour de la question du tracé d'une droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point extérieur à la droite, ce sont les mêmes arrière-plans logiques qui structurent les expressions en langage géométrique et en langage technique. Cette remarque nous fait penser que le passage par le langage technique pourrait aussi être un appui

dans la perspective d'un enseignement du langage géométrique en réduisant le saut entre l'exécution d'une action instrumentée et sa formulation en langage géométrique.

Ensuite, un deuxième élément qui nous paraît pertinent dans le cadre de ces situations de construction instrumentée en dyade tient dans le fait que la construction est réalisée au fur et à mesure de l'énoncé des étapes du programme de tracé. Ceci permet à l'instructeur de bénéficier de façon immédiate de rétroactions données par les actions du constructeur. L'instructeur a ainsi l'opportunité d'améliorer ses instructions en levant les implicites non décodés ou en clarifiant les ambiguïtés.

Enfin, afin de renforcer cette opportunité, nous avons identifié une dernière règle pour le constructeur, celle qui consiste à « faire le moins probable » tout en respectant l'instruction donnée. Ainsi, par exemple, l'instruction 5 de l'élève M, « tu relies l'arc de cercle au trait bien droit », n'aboutirait pas au prolongement voulu, de même que l'instruction 49 « Relie les deux arcs de cercle » (cf. figure 5).



**Figure 5.** – Exemples de tracé suivant la règle : « faire le moins probable »

Cette dernière règle a aussi pour objectif de ne pas cantonner le constructeur à une position d'interprète et d'exécutant. La dimension critique de cette position, très ordinaire dans une communauté scientifique, est susceptible de contribuer au questionnement géométrique des élèves en donnant de l'épaisseur à la question de la bonne caractérisation des objets géométriques dont il faut produire une trace graphique.

## CONCLUSION

Dans ce texte, nous avons rendu compte d'un TD s'inscrivant dans une approche de l'enseignement de la géométrie tel qu'avancée par Perrin-Glorian et Godin (à paraître). Les situations de construction instrumentée et plus particulièrement les situations de reproduction ou de restauration de figures sont identifiées comme intéressantes dans la perspective d'un enseignement cohérent depuis l'école primaire jusqu'au collège. L'originalité du travail présenté est d'avoir cherché à étudier le fonctionnement de ce type de situation dans le contexte d'un travail en dyade qui ne soit pas pour autant une situation de formulation au sens de la théorie des situations de Brousseau (1998), au sens où les enjeux d'apprentissage ne relèvent pas prioritairement des pratiques langagières les plus avancées de la discipline, en l'occurrence des verbalisations en langage géométrique. Dans le cadre des situations d'action, la position d'Elève ou d'Actant, qu'il ne faut selon pas confondre avec un élève individuel, n'a que peu été étudiée dans sa dimension sociale et langagière. Ce travail propose un pas dans cette direction.

Afin d'étudier les potentialités d'une version dyadique d'une situation de restauration de figures, nous avons commencé par proposer un cadre pour l'analyse des actions instrumentées issu de Petitfour (2015) et complété par des considérations relatives à l'analyse logique des concepts mathématiques. Ce cadre nous permet de repérer quels sont les enjeux d'apprentissage géométrique pour de telles situations. Nous l'avons ensuite mobilisé pour étudier ce qui pouvait constituer des freins à ces apprentissages dans un contexte dyadique. Nous en avons dégagé trois règles qui nous semblent pertinentes : le recours à un langage technique géométrique qui

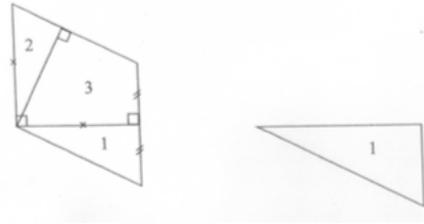
permette l'émergence des enjeux géométriques, sans pour autant trop s'éloigner de la nature même de la tâche (situation d'action) ; le fait d'alterner instruction « simple » et exécution afin de ne pas trop retarder les rétroactions du milieu ; et enfin la règle du « moins probable » afin d'impliquer au mieux le constructeur et d'éviter la connivence avec l'instructeur.

#### RÉFÉRENCES

- BARRIER T., CHESNAIS A., & HACHE C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – revue de recherche en éducation*, 54, 175-193.
- BARRIER T., HACHE C., & MATHÉ A.-C. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves. *Grand N*, 93, 13-37.
- BARRIER T., DURAND-GUERRIER V. & MESNIL C. (en révision). L'analyse logique comme outil pour les études didactiques en mathématiques. *Education & Didactique*.
- BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BULF, C., MATHÉ, A.-C. & MITHALAL, J. (2015). Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(1), 7-36.
- DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 10, 5-55.
- DUVAL R., & GODIN M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-77.
- MANGIANTE, C. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2017). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes – Denain. In T. Barrier & C. Chambris (ed), *Actes du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques de l'année 2016*, Paris : IREM de Paris.
- MAZEAU M., & POUHET A. (2014). *Neuropsychologie et troubles des apprentissages chez l'enfant. Du développement typique aux « dys »*. 2<sup>e</sup> édition. Elsevier Masson.
- MEN (2015). *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4)*. Bulletin officiel spécial n°10 du 19 novembre 2015.
- PERRIN-GLORIAN M.-J., & GODIN M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, 222, 26-36.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J., & GODIN, M. (à paraître). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. In CORFEM *Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée*. Une version préliminaire est en ligne <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document>
- PETITFOUR E. (2015). Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème. Thèse de l'Université Paris 7.
- RABARDEL P. (1995). Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin.
- RADFORD L. (2006). Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133-170.
- VERGNAUD, G. (2002). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. Portugais (ed), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation* (pp. 6-27). Montréal : Université de Montréal.

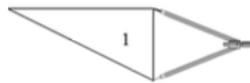
## ANNEXE 1

L'élève M a le document ci-contre.  
Elle donne des instructions pour que l'élève Bm réalise les figures 2 et 3 à partir de la figure 1 tracée sur le support de l'élève Bm.  
Instruments autorisés : équerre, règle non graduée et compas



1. M : Alors Bm, tu prends l'écartement du côté de 1 debout.

2. Bm



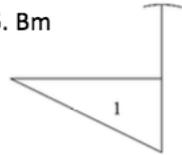
3. M : Euh, tu vas piquer en haut. Tu vas faire un mini arc de cercle, un mini !

4. Bm



5. M : Bon, et là tu relies l'arc de cercle au trait bien droit.

6. Bm



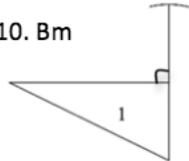
7. M : Prends l'équerre, mets là sur le trait du 1.

8. Bm :  
Là ?



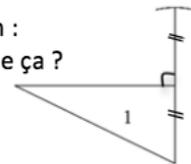
9. M : Oui. Euh mets que c'est un angle droit.

10. Bm



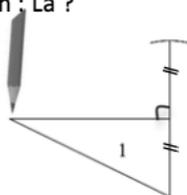
11. M : Et t'as oublié de coder au 1.

12. Bm :  
Comme ça ?



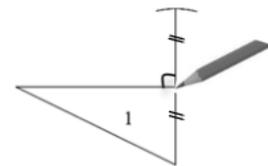
13. M : Voilà. Après, qu'est-ce qu'on peut faire ? Mets une petite croix sur le bord du 1, en haut.

14. Bm : Là ?



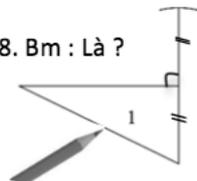
15. M :  
Non, non, le, le segment du haut.

16. Bm : Là ?



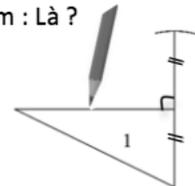
17. M : Au milieu, au milieu

18. Bm : Là ?



19. M : Non, le segment du haut.

20. Bm : Là ?

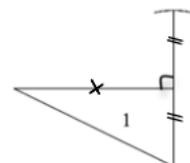


21. M : Oui

22. Bm : Ben, j'

23. M : Mets une petite croix.

24. Bm



25. M :  
Après ...  
  
Prends ton  
équerre.



27. M :  
  
Tourne-la.



29. M :  
  
Tourne-la dans  
l'autre sens



31. M :  
  
Tourne la.



33. M :  
  
Retourne la.



35. M :  
  
Retourne la



37. M : Tourne la  
38. Bm : Ben ??!!!

39. M :  
Tourne la !



Comme ça ?

41. M :  
Oui !  
Bon, trace le  
trait.



43. M :  
  
Oui, oui, le  
trait là



45. M : Ouiiii

46. Bm : Ben oui, mais tu précises pas aussi hein. *Elle trace.*

47. M : Euh, prends ton compas. Prends la, le segment où il y a la petite croix,

    pique où il y a ton crayon de papier (1), trace un mini arc de cercle,  
    efface le bout qui n'est pas

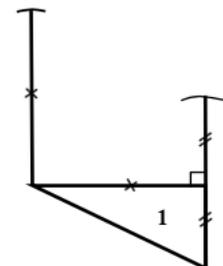


(1)

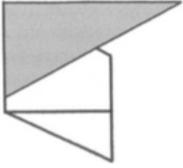
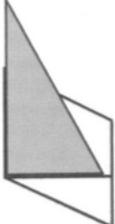
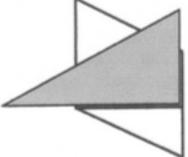
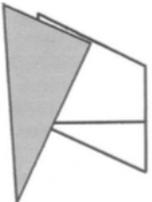
48. Bm *trace un arc qui coupe le tracé précédent et efface le trait au dessus de l'arc*

49. M : Relie les deux arcs de cercle.

50. Bm *relie et rajoute également la croix, codage d'égalité de longueur.*



51. M : Prends ton équerre, pose la contre le trait du haut.

<p>52. M : Prends ton équerre, pose la contre le trait du haut.</p> <p>53. Bm</p> 	<p>54. M : Pas comme ça, tu vas la tourner.</p> <p>55. Bm</p> 	<p>56. M : Tourne-la encore</p> <p>57. Bm</p> 	<p>58. M : Encore ?</p> <p>59. Bm : Comme ça ?</p> 	<p>60. M : Non, pas comme ça.</p> <p><i>Elle place l'équerre approximativement.</i></p> 
---	---	---	---	---

61. M : Et essaye de la mettre pour que ce soit au point de 1. Au coin.

62. Bm : Ah au coin, j'ai cru au point

63. M : Et là, dès qu'c'y est, tu traces.

64. Bm trace de A à E et code l'angle droit.

65. M : Voilà. Alors dans le triangle, tu mets un 2.

66. Bm : Là ?

67. M : Hm. Dans la forme d'à côté, mets un 3. Mets un angle droit en bas du triangle.

68. Bm : Là ? *pointe en D.* Ben il y est là

69. M *pointe l'angle en A.* Là

70. Bm : Ah. Ben non

71. M : Si

72. Bm : Ah si

73. M : Et, on a fini.

