



**HAL**  
open science

## **Multiplicación de números complejos : más que un tratamiento algebraico**

Macarena Flores González, Mónica Illanes, Constanza Uribe

► **To cite this version:**

Macarena Flores González, Mónica Illanes, Constanza Uribe. Multiplicación de números complejos : más que un tratamiento algebraico. Jornadas de Educación Matemática, Sociedad chilena de educación matemática; Universidad de Santiago de Chile, Nov 2014, Santiago, Chile. pp.668-674. <hal-03580874>

**HAL Id: hal-03580874**

**<https://hal.science/hal-03580874v1>**

Submitted on 18 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



## **P093.- MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS: MÁS QUE UN TRATAMIENTO ALGEBRAICO**

Macarena Flores – Mónica Illanes – Constanza Uribe  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile  
prof.macarena.flores@gmail.com

Nivel educativo: Media – Categoría: Visualización en Matemática

### **Resumen**

La representación de la multiplicación en el sistema numérico de los Números Complejos suele presentarse con un fuerte énfasis en lo algebraico lo que lleva a una comprensión superficial de esta propiedad. A partir de lo anterior, en el presente trabajo se investiga y estudia sobre aprendizaje de la multiplicación de los números complejos, con el objetivo de enseñar este contenido privilegiando el registro gráfico y el registro de lenguaje natural a partir de la teoría de Registros de Representación Semiótica. Esta investigación de corte cualitativo, se ha implementado una propuesta de aprendizaje con 34 estudiantes de primer año universitario de ingeniería (18-19 años), donde se evidencia a partir de los resultados, que al momento de realizar tratamientos y conversiones entre los registros semióticos mencionados anteriormente, existe una mejor comprensión del objeto matemático en cuestión.

### **Sistema de Números Complejos: el problema con la algebrización**

La experiencia en el aula mediante la práctica final que realizamos, pudimos observar y estudiar los mecanismos que se utilizan para abordar la operatoria de los números complejos, da cuenta del problema existente en el aprendizaje de ellos, ya que no se ve un razonamiento por parte de los estudiantes que sustente una comprensión del objeto en cuestión.

Bajo la perspectiva semiótica de Duval (1995) se reconoce la necesidad de las distintas representaciones que pueda tener un objeto matemático para lograr un aprendizaje acabado de este mismo. En base a lo anterior, se considera que para estudiar los números complejos no basta con saber las operaciones algebraicas y aritméticas que ellos cumplen, sino que también las distintas representaciones que estas operaciones poseen. Desde lo señalado, surge la necesidad de crear una propuesta de enseñanza referente al aprendizaje de la multiplicación de los números complejos, intencionando un cambio de registro semiótico, de tal manera que se desafíe al estudiante no sólo a utilizar este conocimiento, sino que mas bien, sea él mismo quien lo pueda construir y organizar.

Dentro de los trabajos de investigación referentes a la enseñanza de números complejos, se encuentra a Martínez y Antonio (2009) quienes realizan una investigación a alumnos entre 15 y 18 años de México, referente a la construcción del significado del número complejo; en este se diseñó una secuencia de actividades donde los estudiantes pudieron ver que a pesar de que las raíces cuadradas de números negativos no existen, se puede operar con ellos, y de esa manera se pudo construir un significado en el plano operacional. El trabajo de Canal (2012) propone ciertos lineamientos para la enseñanza de los números complejos en secundaria, en éste hace énfasis en cómo utilizar la aproximación epistemológica y el uso de software.



Por otra parte, haciendo referencia al curriculum nacional Chileno, los números complejos son tratados en tercer año medio, donde se ve privilegiado el registro algebraico, lo anterior queda de manifiesto cuando al momento de representarlos gráficamente sólo se representa el resultado de la algebrización, es decir, no se realiza tratamiento en el registro gráfico, pudiendo hacerlo gracias a los conocimientos previos de los estudiantes (herramientas para construcciones geométricas y plano cartesiano).

Finalmente, en la historia de los números complejos, se puede notar con claridad que los mismos matemáticos han tenido problemas para trabajar con ellos, un ejemplo de esto es la definición que entrega Euler (siglo XVIII) de unidad imaginaria, dice que  $i = \sqrt{-1}$ ; con los años esa convención cambió porque había problemas trabajar con ella, llegando a ser con el paso de los años  $i^2 = -1$ . Sin embargo hoy se sigue incurriendo en el mismo error o mejor, dicho abuso de lenguaje presentado en algunos textos escolares, lo que lleva a errores en el aprendizaje de los números complejos.

### **Objetivos: General y Específicos**

En cuanto a la enseñanza actual de los números complejos, existe un fuerte énfasis en la algebrización de las operaciones que satisfacen, por lo tanto nos proponemos enseñar este sistema numérico utilizando distintos registros de representación privilegiando el registro gráfico. A la luz de la problemática planteada, nuestro objetivo general es: *Enseñar la multiplicación del sistema de los números complejos con un énfasis gráfico.*

Objetivos Específicos: *Diseñar una propuesta donde distintos registros puedan enlazarse mediante conversiones y Analizar cambios de registros en la multiplicación de los números complejos a partir de la propuesta de aprendizaje.*

Al utilizar la teoría de registros semióticos, intencionaremos una propuesta de enseñanza de tal manera que se evidencien al menos dos cambios de registros de la multiplicación de los números complejos; en este sentido nos preguntamos ¿Qué elementos interfieren en los cambios de registros de representación en la multiplicación de números complejos?

### **Elementos metodológicos**

En este trabajo se efectuó una investigación de tipo cualitativa con un enfoque explorativo y reposa sobre una situación de aprendizaje diseñada para un contexto de una implementación sin intervención docente.

En cuanto a la metodología, esta se basó en la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Para ello, se realizaron las 4 fases correspondientes:

En los *análisis preliminares* se consideró un estudio del hábitat curricular (los programas de estudios vigentes por el Ministerio de Educación y programas de estudio de Álgebra de primer año de Universidad), estudios de antecedentes (investigaciones relacionadas al objeto matemático, problemática y objetivos de la investigación).

Respectivamente, en las *concepciones y análisis a priori*, se dio énfasis al instrumento didáctico, conocimientos previos necesarios, respuesta experta, posibles estrategias, posibles errores, organización de la implementación y recursos a utilizar. Refiriéndose a la *experimentación*, la secuencia de aprendizaje se aplicó a un curso de primer año de universidad, en una carrera de Ingeniería, este curso pertenece al ranking de las cinco mejores Universidades Chilenas a nivel nacional. La implementación se hizo a cargo del



profesor del curso y se realizó a 34 estudiantes, a cada uno de ellos se les entregó la impresión de la situación, hojas de respuesta y hojas de papel milimetrado. Finalmente en el *análisis a posteriori y validación* se consideró las estrategias utilizadas por los alumnos, errores evidenciados y para terminar la confrontación entre análisis a priori y el análisis a posteriori. De forma conjunta, se realizaron los análisis anteriormente mencionados a la luz del marco teórico escogido “Teoría de Registros de Representación Semiótica”.

### **Marco Teórico: Teoría de Registros de Representación Semiótica**

Duval (1995) menciona que en matemáticas es de vital importancia evitar la confusión de objetos matemáticos con las distintas representaciones de este, de lo contrario se realiza una pérdida de comprensión del objeto; es decir, “no puede haber comprensión si no se distingue un objeto de su representación” (Ibid, p.14). Para conocer los registros de representación semiótica es necesario definir semiosis y noésis; la primera hace alusión a cualquier conducta o proceso que involucre signos, y la segunda se refiere a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto. Según lo anterior, Duval plantea una ley elemental del funcionamiento cognitivo del pensamiento: “no existe noésis sin semiosis” (Ibid, p.16).

Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, se deben poder realizar las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis. La primera actividad concierne a la formación de una representación, la segunda al tratamiento, y la tercera es la conversión, ésta última es definida como la transformación de la representación inicial en otro registro de representación, conservando el contenido que en ella está inserta (Ibid, p.42-47). Es el estudio de la última, lo que permite comprender la naturaleza del ceñido lazo entre semiosis y noésis. Habitualmente la actividad de conversión es menos inmediata de lo que se tiende a pensar; para poder vislumbrar lo anterior es necesario analizar la congruencia entre las representaciones que se quiere realizar la conversión con una segmentación comparativa, donde se debe diferenciar entre unidades significantes simples o combinaciones de unidades simples. Se definen entonces, tres criterios de congruencia. El primero es la correspondencia semántica: a cada unidad significativa simple de una de las representaciones se puede asociar una unidad significativa elemental; el segundo a la univocidad semántica terminal: a cada unidad significativa elemental de la representación de salida, le corresponde una única significativa elemental en el registro de representación de llegada; y el tercero es la organización de las unidades significantes: las unidades en correspondencia semántica son aprehendidas en el mismo orden en ambas representaciones. Entonces la dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada.

### **Principales Resultados**

Utilizando el marco teórico se construyó un protocolo de análisis donde se establecieron diez indicadores que se refieren a los registros de representación semiótica, luego de esto se crearon categorías referentes a sus conversiones y tratamientos, los cuales se dividieron en producciones correctas e incorrectas. A continuación se presentan las categorías mas relevantes de acuerdo a cada uno de los ítems.

**Ítem I:** Dado el complejo  $w = a + bi$ . Analice qué sucede con la gráfica de dicho complejo al multiplicarlo por el complejo  $v_1 = c + 0i$

1) *El estudiante realiza conversión desde registro algebraico al registro natural*

De los 34 estudiantes que participaron de la aplicación del instrumento, 6 trabajaron este cambio de registro. De las producciones incorrectas, que corresponden a 2 de las 6 producciones, se realizó un trabajo algebraico pero su **conversión al lenguaje natural no es correcta.**

2) *El estudiante realiza conversión desde registro algebraico al registro gráfico y del registro gráfico al registro de lenguaje natural*

De los 34 estudiantes, un total de 19 trabajó en este cambio de registro. De ellos 15 respondieron correctamente. En su totalidad los estudiantes fundamentan desde lo algebraico, representan sus resultados en el registro gráfico y posteriormente describen lo que sucede en lenguaje natural.

Las producciones incorrectas fueron 4, en la mayoría de estas se realiza una conversión del registro algebraico al gráfico de manera correcta, pero al realizar la **conversión al lenguaje natural se describe de forma errónea** lo que sucede con la multiplicación de  $(a + bi) \cdot (c + 0i)$ .

**Ítem II- a):** Dado el complejo  $w = a + bi$ . Analice qué sucede con la gráfica de dicho complejo al multiplicarlo por las potencias de  $i$ .

1) *El estudiante realiza conversión desde registro algebraico al registro natural.* De los 34 estudiantes que participaron de la aplicación del instrumento, 6 trabajaron este cambio de registro. De ellos 3 estudiantes respondieron de forma errónea y

se presenta el mismo error: los estudiantes no responden a la pregunta del instrumento, es decir, **la conversión al registro natural no es correcta.**

2) *El estudiante realiza conversión desde registro algebraico al registro gráfico y del registro gráfico al registro de lenguaje natural.* En este cambio de registro, de los 34 estudiantes, trabajó un total de 16. De ellos 14 respondieron correctamente. En su totalidad los estudiantes fundamentan desde lo algebraico, representan sus resultados en el registro gráfico y posteriormente describen lo que sucede en lenguaje natural como se muestra en la siguiente figura:

a)  $w = a + bi$   
 $i(a + bi) = ai - b = -b + ai$   
 $i^2(a + bi) = -a - bi = -a - bi$   
 $i^3(a + bi) = -ai + b = b - ai$   
 $i^4(a + bi) = a + bi = a + bi$

b) ... - - - - -

Resulta que al multiplicar un complejo con las respectivas potencias de  $i$ , se va obteniendo un cambio de dirección (rotación) de la gráfica obtenida inicialmente por  $a + bi$ , en donde se observa una regularidad de cambio de cuadrante, ya que la parte real se va cambiando con la parte Imaginaria.

- $i^n$  se puede graficar luego resulta al multiplicar un complejo con las respectivas potencias de  $i$ , ya que se obtienen otro complejo.
- Al igual que al multiplicar un número complejo con un  $ci$ , ya que también resulta otro complejo.

Resulta que al multiplicar un complejo con las respectivas potencias de  $i$ , se va obteniendo un cambio de dirección (rotación) de la gráfica obtenida inicialmente por  $a + bi$ , en donde se observa una regularidad de cambio de cuadrante, ya que la parte real se va cambiando con la parte imaginaria.

\* Y sí se puede graficar lo que sucede al multiplicar un complejo con las respectivas potencias de  $i$ , ya que se obtiene otro complejo.



Figura 1. Producción de estudiante E12

De las 16 producciones sólo 2 son incorrectas. Ambos realizan la conversión del registro algebraico al registro gráfico correctamente, pero realizan de manera errónea la conversión del registro gráfico al registro de lenguaje natural.

**Ítem II- b)** Dado el complejo  $w = a + bi$ . Analice qué sucede con la gráfica de dicho complejo al multiplicarlo por el complejo  $v_2 = 0 + ci$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .

1) *El estudiante realiza conversión desde registro algebraico al registro gráfico y del registro gráfico al registro de lenguaje natural.* En esta conversión de registros trabajó un total de 14 estudiantes de los 34, y de ellos 9 respondieron correctamente. En las respuestas incorrectas, que corresponden a 5 de las 14 producciones, se observa que los errores más recurrentes se encuentran en las conversiones del registro gráfico al registro de lenguaje natural. Sin embargo, los procedimientos algebraicos realizados son correctos.

### Conclusiones

De acuerdo a las producciones obtenidas a partir de la aplicación del instrumento y el levantamiento de las categorías, es pertinente señalar lo que ocurre en los primeros dos ítems; en las categorías de “El estudiante realiza conversión desde el registro algebraico al registro gráfico y del registro gráfico al registro de lenguaje natural”, son la mayoría y casi en su totalidad respuestas correctas. Lo anterior no es casualidad, ya que existe un grado de congruencia establecida en estas conversiones (y en el mismo sentido que se plantean) como se estudió en el análisis a priori realizado, bajo los tres criterios de congruencia. No obstante, es de interés indicar que las respuestas de todos los estudiantes que trabajaron en un solo registro fueron incorrectas; esto es consecuente al planteamiento de la secuencia de aprendizaje, pues para poder considerar la respuesta correcta era necesario realizar a lo menos una conversión.

De las producciones que pertenecen a las categorías en que se realizó una sola conversión, en su mayoría lo hicieron en el mismo sentido que fue previsto en el análisis a priori y de forma correcta, estas fueron del registro algebraico al gráfico o del registro gráfico al registro de lenguaje natural. Estas conversiones surgen de manera espontánea en los alumnos, al igual que las conversiones anteriores, lo cual reafirma lo que se predijo antes de la implementación. Los alumnos restantes realizaron la conversión del registro algebraico al registro de lenguaje natural, donde el nivel de no-congruencia es más alto que el de las conversiones mencionadas anteriormente, ya que el criterio de congruencia referente a la univocidad semántica no se cumple; es por la misma razón que esta conversión se destaca dentro de los errores más frecuentes. La falta de respuesta por parte de los estudiantes en el proceso inverso de estas conversiones, estuvo contemplada antes de la implementación al igual que en el caso anterior, debido a la escasa congruencia que existe en la dirección contraria de las conversiones.

Para el tercer ítem, la primera parte correspondía a la conversión de la representación algebraica a la representación gráfica, donde la gran mayoría responde de manera correcta; sin embargo no dieron respuesta a las preguntas donde debían realizar el cambio de registro gráfico al registro natural. Además, en la segunda parte y final, solo cuatro de los estudiantes respondieron a la multiplicación de dos números complejos cualesquiera, pero



de manera errónea, evidenciando conflictos en la conversión de registros, en el tiempo dispuesto para concluir la actividad y la complejidad de lo pedido.

Mediante las conclusiones anteriormente señaladas, queda evidenciada la problemática de este trabajo de investigación, dado que casi la totalidad de los estudiantes trabajó la conversión del registro algebraico al registro gráfico, pero un gran número no supo realizar la conversión del registro gráfico al registro de lenguaje natural. Consideramos que lo anterior ocurre a causa de que los alumnos se encuentran más familiarizados al trabajar en el registro algebraico, y estos resultados los llevan a la gráfica sin tener un análisis profundo de lo que ocurre.

El objetivo general de esta investigación correspondía a “Enseñar la multiplicación del sistema de los números complejos con un énfasis gráfico”, y por otra parte los objetivos específicos correspondían a “Diseñar una propuesta donde distintos registros puedan enlazarse mediante conversiones” y “Analizar cambios de registros en la multiplicación de los números complejos a partir de la propuesta de aprendizaje”; estos objetivos fueron abordados completamente, es decir, se diseñó una propuesta (basada en la teoría de registros de representación semiótica) que enlazara registros de representación del objeto matemático, donde los estudiantes tuvieran que realizar conversiones. Se realizaron también los análisis respectivos antes y después de la implementación. Cabe destacar que las unidades significativas fueron elementos fundamentales para responder a la pregunta de investigación sobre los elementos que interfieren en los cambios de registro en la multiplicación de números complejos.

#### *Mejoras a la enseñanza a partir de la propuesta diseñada*

Para poder evidenciar la comprensión de los números complejos no basta con que el alumno conozca su escritura algebraica, sino más bien, debe conocer las distintas representaciones que posee este objeto matemático; una vez hecho esto, el estudiante debe ser capaz de realizar la conversión entre los registros que conozca, de manera casi “natural”. En definitiva, la representación gráfica aporta considerablemente en el aprendizaje de este objeto matemático, ya que mientras más registros se conozca del objeto, mayor será la comprensión de este. Por otro lado podemos decir que el marco teórico utilizado para esta investigación, fue el adecuado, pues todos los análisis fueron facilitados a partir de la teoría de representación semiótica que Duval proporciona, principalmente lo que se establece entre diversos registros y criterios de congruencias.

Si bien la problemática tiene solución por medio del instrumento construido, es relevante mencionar la importancia que se le debiese dar a las representaciones en el contexto escolar, donde se hace mayor énfasis a un cálculo aritmético que a la representación e interpretación gráfica. Junto con lo anterior, pensamos que el instrumento diseñado puede ser mejorado, y esta mejora consiste en la parcelación del cuestionario, separándolo en dos momentos o dos sesiones, una primera parte donde se presenten los dos primeros ítems, y una segunda parte exclusivamente para el tercero. Se piensa que con esta modificación los alumnos tendrían más tiempo para poder resolver el problema de la multiplicación de dos números complejos cualesquiera, y por otro lado, se podría agregar una nueva pregunta al cuestionario que encamine hacia la representación gráfica de la multiplicación de estos dos números.

#### **Referencias Principales**



- Aburto, L. & Johnson, R. (1991). *Algebra, geometría analítica, trigonometría*. Valparaíso, Chile: Editorial Instituto de matemática. Universidad Católica de Valparaíso.
- Artigue, M. Douady, R. & Moreno, L. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2004). *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Segunda Edición. Edición en castellano. Santiago de Cali. Colombia.
- Mena Lorca, A. (2005). *Elementos de Matemática 2*. Valparaíso, Chile: Editorial Instituto de Matemática. Universidad Católica de Valparaíso.

## Anexo

### Secuencia de aprendizaje: Multiplicación de Números Complejos

Objetivo: Realizar gráficamente la multiplicación de los números complejos.

- I) Dado el complejo  $w = a + bi$ . Analice qué sucede con la gráfica de dicho complejo al multiplicarlo por el complejo  $v_1 = c + 0i$  (Analizar para distintos valores de  $c$ ).
  - ¿Se podrá describir gráficamente lo que sucede al multiplicar un complejo cualquiera por un escalar sin la necesidad de realizar un procedimiento algebraico? ¿Por qué?
- II)
  - a) Dado el complejo  $w = a + bi$ . Analice qué sucede con la gráfica de dicho complejo al multiplicarlo por las potencias de  $i$ . ¿Observa alguna regularidad?
  - b) Dado el complejo  $w = a + bi$ . Analice qué sucede con la gráfica de dicho complejo al multiplicarlo por el complejo  $v_2 = 0 + ci$ , con  $c \in \mathbb{R}$ .
    - ¿Se podrá describir gráficamente lo que sucede al multiplicar un complejo cualquiera por una potencia de  $i$ , sin la necesidad de realizar un procedimiento algebraico? ¿Por qué?
    - ¿Se podrá describir gráficamente lo que sucede al multiplicar un complejo cualquiera por un  $ci$ , sin la necesidad de realizar un procedimiento algebraico? ¿Por qué?
- III) a) Sean  $a = 2 + 3i$ ,  $b = 3 + 3i$  y  $c = 4 + 5i$ .
  - i. Represente gráficamente  $a$ ,  $b$  y  $a \cdot b$
  - ii. Represente gráficamente  $a$ ,  $c$  y  $a \cdot c$
  - iii. Represente gráficamente  $b$ ,  $c$  y  $b \cdot c$
 Para cada caso anterior:
  - ¿Existe alguna relación entre los módulos de los complejos?
  - ¿Existe alguna relación entre los argumentos de los números complejos?
 b) Dado el complejo  $w = a + bi$ . Analice qué sucede con la gráfica de dicho complejo al multiplicarlo por el complejo  $v = c + di$ , con  $c, d \in \mathbb{R}$ .
  - ¿Se podrá describir gráficamente lo que sucede al multiplicar un complejo cualquiera por otro complejo cualquiera, sin la necesidad de realizar un procedimiento algebraico? ¿Por qué?