



**HAL**  
open science

# Orbites hétérocliniques au voisinage d'une bifurcation de Poincaré dégénérée pour les champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$

Rene-Louis Clerc, Christian Hartmann, Boniface Razafimandimby

## ► To cite this version:

Rene-Louis Clerc, Christian Hartmann, Boniface Razafimandimby. Orbites hétérocliniques au voisinage d'une bifurcation de Poincaré dégénérée pour les champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . Monatshefte für Mathematik, 1989. hal-03577350

**HAL Id: hal-03577350**

**<https://hal.science/hal-03577350>**

Submitted on 16 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Orbites Hétéroclines au Voisinage d'une Bifurcation de Poincaré Dégénérée pour les Champs de Vecteurs de  $\mathbb{R}^2$**

Par

**René-Louis Clerc, Christian Hartmann et Boniface Razafimandimby,**  
 Toulouse

*(Reçu le 14 Mars 1988; en forme révisé 16 Décembre 1988)*

**Abstract. Heteroclinic Orbits Near a Degenerate Poincaré-Bifurcation for  $\mathbb{R}^2$  Vector Fields.** We consider a  $\mathbb{R}^2$ -ordinary differential equation, where the fixed point  $(0, 0)$  presents a degenerate Poincaré-bifurcation of resonance  $k (= 2k')$  and dominance  $d (= k - 1)$ . We prove the existence of a 2-dimensional linear manifold  $V$  in the parameter space  $\mathcal{A}$ , on which the perturbed dominant differential system (SD) possesses heteroclinic orbits between fixed points. The numerical continuation of the local stable or unstable manifolds of the saddle fixed points shows that for any neighborhood, in  $\mathcal{A}$ , of a point of  $V$  corresponding to a saddle heteroclinic orbit, there exists only one stable (resp. unstable) periodic orbit close to the stable — in the Andronov sense [1] — (resp. unstable) heteroclinic orbit. Applications are given for  $k = 4$  and  $k = 6$ .

**1. Propriétés analytiques de SD**

L'analyse d'une bifurcation de Poincaré de résonance  $k (= 2k')$  et de dominance  $d (= k - 1)$  conduit, pour le problème perturbé, à l'étude du système différentiel (SD) (cf. par exemple [2] chap. 5):

$$\dot{K} = \sum_{p=0}^{k'-1} \alpha_{2p} (K \bar{K})^p K + \beta_0 \bar{K}^{k-1}, \quad K \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

On appelle  $\mathcal{A}$ , l'espace des paramètres  $\{\alpha_{2p}, \beta_0\}$  ( $\mathcal{A} \simeq \mathbb{R}^{k+2}$ ). On note:

$$K = K' + iK'';$$

$$\alpha_{2p} = \alpha'_{2p} + i\alpha''_{2p}, \quad p = 0, 1, \dots, k' - 1;$$

$$\beta_0 = \beta'_0 + i\beta''_0;$$

$$s = \exp(2i\pi r/k), \quad k \geq 4, \quad r < k \quad (r \text{ et } k \text{ premiers entre eux}).$$

### 1.1 Propriétés de SD

P1: Si  $K$  est une solution de SD,  $sK$  est aussi solution.

P2: SD est invariant sous les transformations dans  $\mathbb{C} \times \Lambda$ :

$$g: \begin{cases} K \rightarrow K^* = h \sigma K, h \in \mathbb{R}_+^*, \sigma = \exp(i\varphi), \varphi \in \mathbb{R}, \\ \alpha_{2p} \rightarrow \alpha_{2p}^* = \alpha_{2p}/h^{2p}, \\ \beta_0 \rightarrow \beta_0^* = \beta_0 \sigma^k/h^{k-2}. \end{cases}$$

**Théorème.** *Il existe dans  $\Lambda$  une sous-variété linéaire  $V$  de dimension 2 sur laquelle SD possède des connexions entre points fixes. Cette sous-variété est définie par les équations<sup>1</sup>:*

$$\sum_{p=j}^{k'-1} \alpha'_{2p} C_p^j = (-1)^{j+1} \beta'_0 C_{2k'-1}^{2j}; j = 0, \dots, k'-1, \quad (1.2)$$

$$\sum_{p=j}^{k'-1} \alpha''_{2p} C_p^j = (-1)^j \beta''_0 C_{2k'-1}^{2j+1}, \quad (1.3)$$

dont la solution est:

$$\alpha'_{2p} = (-1)^{p+1} \beta'_0 \sum_{l=p}^{k'-1} C_{2k'-1}^{2l} C_l^p; p = 0, \dots, k'-1, \quad (1.4)$$

$$\alpha''_{2p} = (-1)^p \beta''_0 \sum_{l=p}^{k'-1} C_{2k'-1}^{2l+1} C_l^p. \quad (1.5)$$

P3: Sur  $V$ , si  $\beta_0 \neq 0$ ,  $\beta''_0/\beta'_0$  étant noté  $\gamma$ , l'ensemble de tous les points fixes de SD, de cardinal  $(k-1)^2$ , est classé en deux familles:

1)  $k(k-1) + 1$  points fixes de coordonnées indépendantes de  $\gamma$ :

$$P_0 = (0, 0),$$

$$P_1^{(q)} = (c_{l+2q}/c_l, s_{l+2q}/c_l);$$

$$l = 1, \dots, k'-1 \quad q = 0, \dots, k-1$$

où

$$c_l = \cos(l\pi/k), s_l = \sin(l\pi/k).$$

Ces points  $P_1^{(q)}$  sont situés sur des cercles de centre  $P_0$  de rayons  $R_l = 1/c_l$ .

<sup>1</sup>  $C_p^j = \frac{p!}{j!(p-j)!}$

2)  $k(k' - 1)$  points fixes de coordonnées dépendantes de  $\gamma$ :

$$M_0^{(q)} = (c_{2q} - \gamma s_{2q}, s_{2q} + \gamma c_{2q}), \quad q = 0, \dots, k - 1,$$

situés sur un cercle de centre  $P_0$  de rayon  $(1 + \gamma^2)^{1/2}$ ,

$$M_l^{(q)} = (R_l^* \cos \theta_l^{(q)}, R_l^* \sin \theta_l^{(q)}) \quad l = 1, \dots, k' - 2 \quad \text{et} \quad q = 0, \dots, k - 1,$$

(où  $\theta_l^{(q)} = \varphi_\beta/k' + (2q + 1)\pi/k$ ,  $\varphi_\beta = \text{Arctg } \gamma$ ).

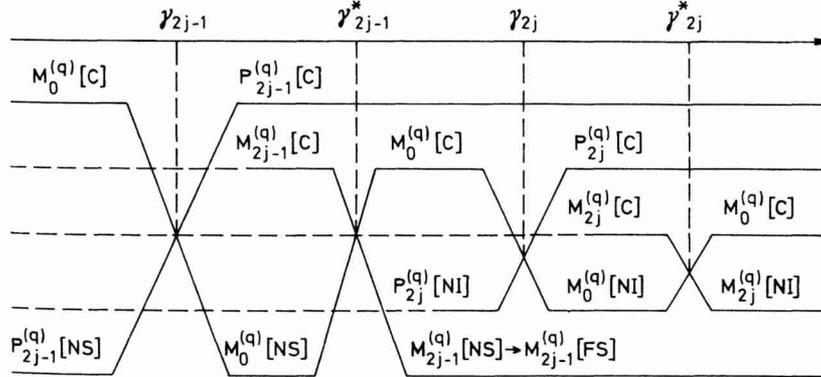
Ces points  $M_l^{(q)}$  sont situés sur des cercles de centre  $P_0$ , de rayons  $R_l^*$  fixes tels que:

$$R_l^* = (l + \text{tg}^2(l\pi/2(k' - 1)))^{1/2}, \quad R_l < R_l^* < R_{l+1}.$$

**1.2. Bifurcations de SD sur  $V$ .**

Pour  $\beta'_0 < 0$ , on a  $\alpha'_0 > 0$  et  $P_0$  est un foyer instable.

L'ensemble des bifurcations sur  $V$  de tous les points fixes de SD est décrit par le diagramme suivant quand  $\gamma \in [0, +\infty[$ :



Notations: C = col; NS = nœud stable; NI = nœud instable, FS = foyer stable

Les bifurcations de  $M_0^{(q)}$  avec  $P_l^{(q)}$  (resp.  $M_l^{(q)}$ ) se produisent sur des demi-droites  $\Pi_l$  (resp.  $\Pi_l^*$ ) issues de l'origine de pentes  $\gamma_l$  (resp.  $\gamma_l^*$ ):

$$\gamma_l = \text{tg}(l\pi/k), \quad l = 1, \dots, k' - 1,$$

$$\gamma_l^* = \text{tg}(l'\pi/(k - 2)), \quad l' = 1, \dots, k' - 2.$$

Ce diagramme montre que les seules bifurcations des points fixes sont des bifurcations de type échange de stabilité.

**1.3. Ensembles invariants de SD sur  $V$ .** Les variétés invariantes issues de points fixes  $P_j^{(q)}$  sont:

$$\{c_{2q}K' + s_{2q}K'' - 1 = 0\} \text{ et } \{c_{2(j+q)}K' + s_{2(j+q)}K'' - 1 = 0\}$$

$$j = 1, \dots, k' - 1; q = 0, \dots, k - 1.$$

Des réunions de tels arcs invariants issues des  $P_j^{(q)}$  peuvent définir des boucles hétérocliniques.

Pour tout  $k (\geq 4)$  SD possède sur  $V$  un *polygone régulier convexe invariant*, dont la frontière  $C$  est la boucle hétéroclinique:

$$C = C[P_1^{(0)} - P_1^{(1)} - \dots - P_1^{(k-1)} - P_1^{(0)}].$$

Par ailleurs SD possède sur  $V$  un *ensemble de polygones convexes invariants*  $D_j^q$ , dont les frontières  $C_j^q$ , constituées par des connexions hétérocliniques entre points fixes, sont des boucles hétérocliniques définies par:

$$C_1^q = C[P_2^{(q)} - P_1^{(q+1)} - P_1^{(q)} - P_2^{(q)}],$$

$$C_j^q = C[P_{j+1}^{(q)} - P_j^{(q+1)} - P_{j-1}^{(q+1)} - P_j^{(q)} - P_{j+1}^{(q)}],$$

$$j = 2, \dots, k' - 2; q = 0, \dots, k - 1.$$

Les triangles (isocèles)  $C_1^q$  existent pour tout  $k \geq 6$  et les quadrilatères (de type rhomboïde ou cerf-volant)  $C_j^q$  existent pour tout  $k \geq 8$ .

L'analyse de SD sur  $V$  en terme du paramètre  $\gamma \in [0, +\infty[$  conduit aux remarques suivantes:

— Si  $\gamma = 0$ , SD est associé à un champ de vecteurs irrotationnel (c.a.d. SD est un champ de gradient)

$$\gamma = 0 \Rightarrow \dot{K}' = \partial_{K'} \Phi, \dot{K}'' = \partial_{K''} \Phi,$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[ \sum_{p=0}^{k'-1} \alpha'_{2p} (K \bar{K})^{p+1} / (p+1) + \beta'_0 (K^k + \bar{K}^k) / k \right],$$

où  $\alpha'_{2p}$  est défini par (1.4).

— Si  $\gamma \in [0, \gamma_j^*]$ , alors  $M_j^{(q)} \in D_{j+1}^{q-1}$  et  $M_j^{(q)}$  est col.

— Si  $\gamma = \gamma_j^*$ , alors  $M_j^{(q)}$  appartient à l'arc invariant joignant  $P_j^{(q)}$  et  $P_{j+1}^{(q)}$ .

— Si  $\gamma > \gamma_j^*$ , alors  $M_j^{(q)} \in D_j^q$ .

— Si  $\gamma > \gamma_{k'-1}$ , alors les frontières  $C_j^q$  sont des boucles col hétérocliniques et les  $D_j^q$  contiennent un unique point fixe  $M_j^{(q)}$  de type foyer (stable pour  $j$  impair et instable pour  $j$  pair).

— Si  $\gamma = +\infty$ , SD est associé à un champ de vecteurs conservatif (c.a.d. à divergence nulle):

$$\begin{aligned} \gamma = +\infty &\Rightarrow \dot{K}'' = \partial_{K''} \Psi, \quad \dot{K}' = -\partial_{K'} \Psi, \\ \Psi &= -\frac{1}{2} \left[ \sum_{p=0}^{k'-1} \alpha''_{2p} (K \bar{K})^{p+1} / (p+1) + \beta''_0 (K^k + \bar{K}^k) / k \right], \end{aligned}$$

où  $\alpha''_{2p}$  est défini par (1.5).

#### 1.4. Propriété de non errance pour $k = 4$

Pour  $k = 4$ , le système SD sur  $V$  s'écrit ( $K = x + iy$ )

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -4(\beta'_0 x + \beta''_0 y)(1 - x^2) \\ \dot{y} &= 4(\beta''_0 x - \beta'_0 y)(1 - y^2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

La fonction

$$H = (1 - x^2)(1 - y^2) \quad (1.7)$$

vérifie ( $r^2 = x^2 + y^2$ )

$$\dot{H} = 8\beta'_0 H r^2, \quad (1.8)$$

ce qui entraîne ( $\beta'_0$  étant négatif):

*P4:* L'adhérence de la trajectoire, quand  $t \rightarrow +\infty$ , de toute condition initiale  $(x_0, y_0)$  dans  $\mathbb{R}^2 - \{H = 0\} \cup \{H = 1\}$  est contenue dans  $H = 0$ .

En particulier pour  $|\gamma| > 1$ , la connexion col est stable au sens d'Andronov ([1]) et il n'existe dans  $\mathbb{R}^2 - \{H = 0\} \cup \{H = 1\}$  aucun ensemble non-errant.

## 2. Applications

Nous envisageons, dans  $\mathcal{A}$ , des perturbations, suivant des chemins transverses à la sous-variété linéaire  $V$ , pour étudier l'évolution des portraits de phase de SD, au voisinage d'un point de  $V$ . Les portraits de phase des systèmes perturbés sont obtenus par prolongement numérique des germes de variétés invariantes issues des cols.

Notons  $\lambda$  un point de  $\mathcal{A}$  et  $\mu$  le paramètre de perturbation ( $0 < \mu \ll 1$ ).

**2.1 Cas d'une résonance 4 de dominance 3.**

$$\dot{K} = \alpha_0 K + \alpha_2 K^2 \bar{K} + \beta_0 \bar{K}^3 \tag{2.1}$$

$\lambda_0 \in V$  avec  $\overrightarrow{0\lambda_0} = \beta'_0 \vec{u} + \beta''_0 \vec{v}$ ,

$$\vec{u} = (-4, 0, 3, 0, 1, 0); \vec{v} = (0, 4, 0, -1, 0, 1).$$

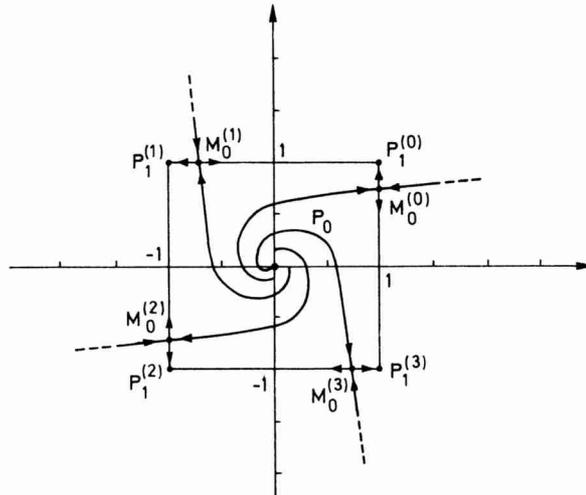


Fig. 1.  $\overrightarrow{0\lambda} = \overrightarrow{0\lambda_0}$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ ;  $k = 4$

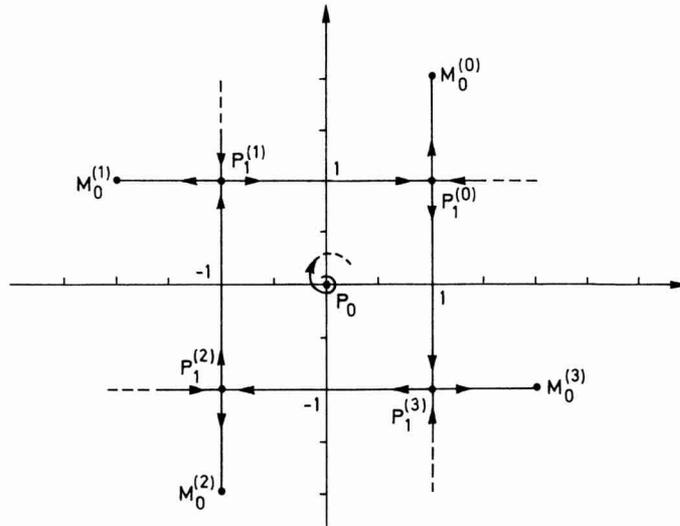


Fig. 2.  $\overrightarrow{0\lambda} = \overrightarrow{0\lambda_0}$ ,  $\gamma > 1$ ;  $k = 4$

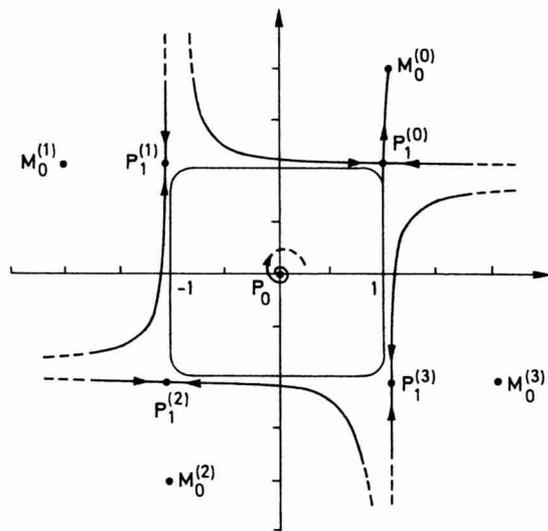


Fig. 3.  $\vec{0}\lambda = \vec{0}\lambda_0 - \mu \vec{w}$ ,  $\mu = .02$ ,  $\gamma = 2$ ;  $k = 4$

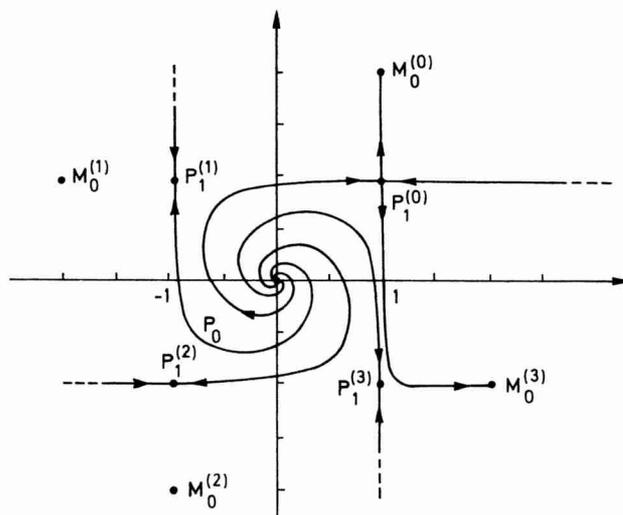


Fig. 4.  $\vec{0}\lambda = \vec{0}\lambda_0 + \mu \vec{w}$ ,  $\mu = .02$ ,  $\gamma = 2$ ;  $k = 4$

Les figures 1 et 2 montrent les schémas des portraits de phase sur  $V$ . Le cas qui nous intéresse est la destruction (à la traversée de  $V$ ) d'une connexion hétéroclinique entre cols ( $\gamma > 1$ ). Soit  $\vec{w} = (0, .25, 0, 1, 0, 0)$  un vecteur orthogonal à  $V$ . Si on fait des perturbations suivant  $-\vec{w}$ , on obtient, dans l'espace des phases, un cycle limite stable issu de la destruction de  $C[P_1^{(0)} - P_1^{(1)} - P_1^{(2)} - P_1^{(3)} - P_1^{(0)}]$  (fig. 3); le domaine

d'influence de chaque nœud stable  $M_0^{(q)}$  est délimité par la variété stable issue de  $P_1^{(q)}$ . Si on fait des perturbations suivant  $\vec{w}$ , le plan de phase est subdivisé en 4 régions (fig. 4) délimitées par les variétés stables issues de  $P_1^{(q)}$ , dont une branche tend vers  $P_0$  et l'autre vers l'infini; chaque région est le domaine d'influence du nœud stable  $M_0^{(q)}$  qui s'y trouve.

*Remarque.* Par une transformation  $g$ , on peut ramener (2.1) à la forme d'Arnold (cf. [2], p. 290):

$$\dot{K} = \varepsilon K + A K |K|^2 + \bar{K}^3$$

avec

$$\beta_0 = h^2 [\cos 4\varphi - i \sin 4\varphi]; \quad \alpha_0 = \varepsilon; \quad \alpha_2 = h^2 A$$

d'où

$$\varepsilon = -4h^2 [\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi]; \quad A = 3 \cos 4\varphi + i \sin 4\varphi.$$

Les résultats analytiques précédents [ $0 < \gamma < 1$  ou  $\gamma > 1$ ] confirment les remarques d'Arnold sur les portraits de phase (cf. fig. 1, 2) pour les cas  $|\operatorname{Re} A| > 1$ ,  $|\operatorname{Re} A| < 1$  et  $|A| > 1$  (cf. [2] p. 293).

## 2.2. Cas d'une résonance 6 de dominance 5

$$\dot{K} = \alpha_0 K + \alpha_2 K^2 \bar{K} + \alpha_4 K^3 \bar{K}^2 + \beta_0 \bar{K}^5 \quad (2.2)$$

$\lambda_0 \in V$  avec  $\vec{0}\lambda_0 = \beta'_0 \vec{u} + \beta''_0 \vec{v}$ ,

$$\vec{u} = (-16, 0, 20, 0, -5, 0, 1, 0); \quad \vec{v} = (0, 16, 0, -12, 0, 1, 0, 1).$$

Pour  $\gamma > \sqrt{3}$ , SD présente des orbites hétérocliniques entre cols (fig. 5). Soient  $\lambda_0 \in V$ , correspondant à  $\gamma (> \sqrt{3})$ , et  $\vec{w} = (0, 0, .25, 0, 1, 0, 0, 0)$  un vecteur orthogonal à  $V$ . Si on fait des perturbations suivant  $-\vec{w}$ , on obtient dans l'espace des phases 6 cycles limites instables (issus de la destruction de  $C[P_2^{(q)} - P_1^{(q+1)} - P_1^{(q)} - P_2^{(q)}]$ ,  $q = 0, \dots, k-1$ ) et un cycle limite stable (issu de la destruction de  $C[P_1^{(0)} - P_1^{(1)} - P_1^{(2)} - P_1^{(3)} - P_1^{(4)} - P_1^{(5)} - P_1^{(0)}]$ ) (fig. 6). Si on fait des perturbations suivant  $\vec{w}$  on obtient une connexion entre  $P_1^{(q)}$  (cols) et  $M_1^{(q)}$  (foyers stables) pour  $q = 0, \dots, k-1$ :

$$C[P_1^{(0)} - M_1^{(0)} - P_1^{(1)} - \dots - M_1^{(k-1)} - P_1^{(0)}]$$

et un cycle limite instable issu de la destruction de:

$C[P_2^{(0)} - P_1^{(1)} - P_2^{(1)} - P_1^{(2)} \dots P_2^{(5)} - P_1^{(0)} - P_2^{(0)}]$  (fig. 7).

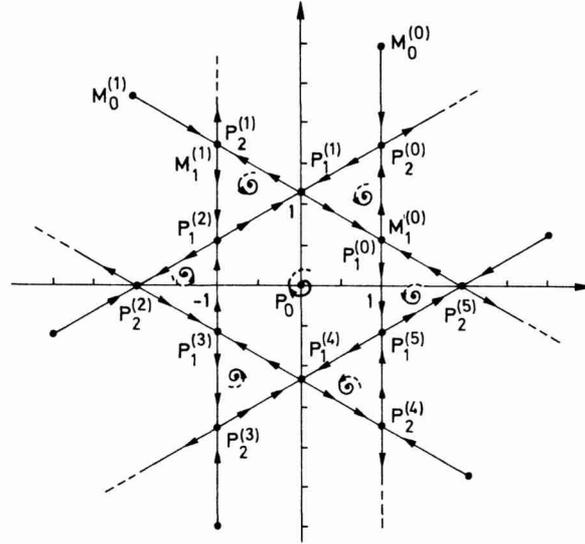


Fig. 5.  $\vec{0}\lambda = \vec{0}\lambda_0$ ,  $\gamma = 3$ ;  $k = 6$

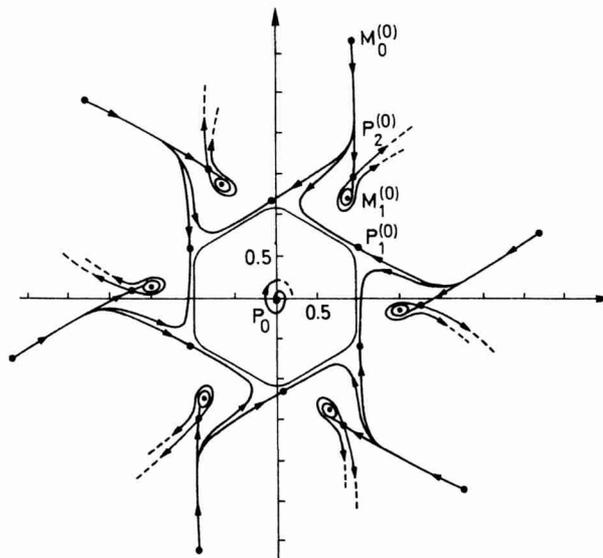


Fig. 6.  $\vec{0}\lambda = \vec{0}\lambda_0 - \mu \vec{w}$ ,  $\mu = .05$ ,  $\gamma = 3$ ;  $k = 6$

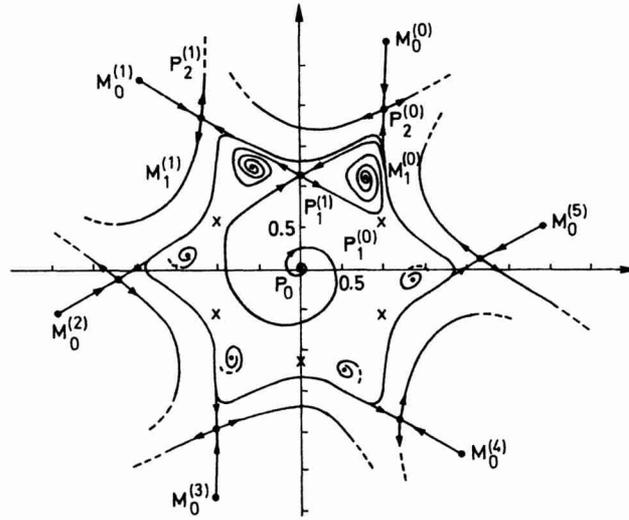


Fig. 7.  $\vec{0}\lambda = \vec{0}\lambda_0 + \mu \vec{w}$ ,  $\mu = .05$ ,  $\gamma = 3$ ;  $k = 6$

### 3. Appendice

*Démonstration du Théorème.*  $K' = 1$  solution invariante est équivalent à

$$\sum_{j=0}^{k'-1} \left[ \sum_{p=j}^{k'-1} \alpha'_{2p} C_p^j + (-1)^j \beta'_0 C_{2k'-1}^{2j} \right] K'^{2j} - \sum_{j=0}^{k'-1} \left[ \sum_{p=j}^{k'-1} \alpha''_{2p} C_p^j - (-1)^j \beta''_0 C_{2k'-1}^{2j+1} \right] K'^{2j+1} = 0,$$

ce qui conduit aux expressions (1.2)—(1.3) qui constituent deux systèmes d'équations triangulaires supérieurs dont les éléments sur la diagonale principale sont égaux à un. On a ainsi deux systèmes de Cramer et les formules (1.4)—(1.5) expriment leur solution qui s'établit par récurrence sur  $p$ .

*Démonstration de P3.* Quand un SD invariant par rotation d'angle  $2\pi/k$  est tronqué en ne gardant que les monômes résonnants de degré inférieur ou égal à  $(k - 1)$ , et quand de plus un tel système possède une droite invariante  $d_0$  (ne passant pas par l'origine), il en résulte que l'on peut calculer analytiquement les coordonnées de tous ses points d'équilibre.

En effet, on voit trivialement que le système possède  $1 + k(k' - 1)$  points fixes:  $(0, 0)$  et les points d'intersections mutuelles des droites  $d_p, d_q$ ,  $p, q \in (1, \dots, k)$  définies par rotation d'angle  $2\pi p/k$  (resp.  $2\pi q/k$ ) à partir de  $d_0$ . Les autres  $k(k' - 1)$  points d'équilibre dépendent de l'unique paramètre  $\gamma = \beta''_0/\beta'_0$  et peuvent être obtenus par le raisonnement suivant. Le système  $SD|_{d_q}$  traduisant la restriction de  $SD$  à  $d_q$  est un système différentiel dans  $\mathbb{R}$  dont le second membre est un polynôme de degré  $(k - 1)$  dont on connaît déjà  $(k - 2)$  racines indépendantes de  $\gamma$ , ce qui permet de trouver sa forme complètement factorisée. On démontre ainsi que les  $k$  points  $M_0^{(q)}$ ,  $q = 0, \dots, k - 1$ , sont points d'équilibre. On montre enfin, en coordonnées polaires, que les  $2k'(k' - 1)$  points fixes restant sont situés sur  $(k' - 1)$  cercles de rayons indépendants de  $\gamma$ . On construit ainsi  $(k - 1)^2$  points fixes solutions d'un système de deux équations polynomiales, de degré  $(k - 1)$ , à deux variables réelles. Ces deux polynômes étant indécomposables, cet ensemble de  $(k - 1)^2$  points fixes constitue l'ensemble de tous les points fixes de  $SD$  sur  $V$ .

1) Les points fixes de coordonnées indépendantes de  $\gamma$  sont  $P_0 = (0, 0)$  et les points  $P_l^{(q)}$  d'intersection des droites invariantes par  $SD$ . Celles-ci sont obtenues à partir de  $K' = 1$  en utilisant P1:

$$P_l^{(0)} = \{K' - 1 = 0\} \cap \{c_{2l}K' + s_{2l}K'' - 1 = 0\}, \quad l = 1, \dots, k' - 1.$$

Avec

$$P_l^{(0)} = (R_l \cos(\theta_l^{(0)}), R_l \sin(\theta_l^{(0)}), R_l = 1/\cos(\theta_l^{(0)}),$$

on obtient

$$\theta_l^{(0)} = l\pi/k, \quad l = 1, \dots, k' - 1$$

d'où

$$P_l^{(q)} = (c_{l+2q}/c_l, s_{l+2q}/c_l).$$

2) La restriction de  $SD$  à  $K' = 1$  s'écrit:

$$\dot{K}'' = \beta'_0(\gamma - K'') \sum_{j=0}^{k'-1} (-1)^j C_{2k'}^{2j+1} K''^{2j}.$$

On en déduit le point fixe  $M_0^{(0)} = (1, \gamma)$  ainsi que les  $M_0^{(q)}$ ,  $q = 1, \dots, k - 1$ . En utilisant les identités suivantes:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k'-2} (-1)^j C_{2(k'-1)}^{2j+1} \operatorname{tg}^{2j}(l\pi/2(k'-1)) &= 0, \\ \sum_{j=0}^{k'-1} (-1)^j C_{2k'-1}^{2j+1} \operatorname{tg}^{2j}(l\pi/2(k'-1)) &= \\ &= -(1 + \operatorname{tg}^2(l\pi/2(k'-1))) \sum_{j=0}^{k'-2} (-1)^j C_{2k'-3}^{2j+1} \operatorname{tg}^{2j}(l\pi/2(k'-1)), \end{aligned}$$

on peut vérifier que, quel que soit  $k'$ , les  $R_l^{*2}$ ,  $l = 1, \dots, k' - 2$  sont racines de l'équation algébrique

$$\gamma^2 \left[ \left( \sum_{p=0}^{k'-1} b_{2p} X^p \right)^2 - (X^{k'-1})^2 \right] + \left[ \left( \sum_{p=0}^{k'-1} a_{2p} X^p \right)^2 - (X^{k'-1})^2 \right] = 0,$$

$\alpha_{2p} = \beta'_0(a_{2p} + i\gamma b_{2p})$ ,  $p = 0, \dots, k' - 1$ ;  $\beta_0 = \beta'_0(1 + i\gamma)$ , qui donne le carré du module du rayon vecteur d'un point fixe de SD.

On détermine  $\theta_l^{(q)}$  par la relation:

$$(1 + i\gamma) R_l^{*2k'} \exp(2ik'\theta_l^{(q)}) = - \sum_{p=0}^{k'-1} (a_{2p} + i\gamma b_{2p}) R_l^{*2(p+1)},$$

et on obtient:

$$\theta_l^{(q)} = \varphi_\beta/k' + (2q + l)\pi/k, \quad \varphi_\beta = \operatorname{Arctg} \gamma,$$

d'où

$$M_l^{(q)} = (R_l^* \cos \theta_l^{(q)}, R_l^* \sin \theta_l^{(q)}), \quad q = 1, \dots, k' - 2.$$

*Démonstration de P4:* pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 - \{\Pi = 0\} \cup \{\Pi = 1\}$  tel que  $x_0^2 + y_0^2 \geq r_0^2 > 0$  on a

$$0 < \frac{\Pi(t)}{\Pi(t_0)} \leq \exp[8\beta'_0 r_0^2(t - t_0)];$$

comme  $\beta'_0 < 0$ , il vient  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(t) = 0$ . Pour  $\beta'_0 > 0$ , on a un théorème analogue pour  $t \rightarrow -\infty$ , la connexion est alors instable et contient l'unique point fixe foyer stable à l'origine.

**References**

[1] ANDRONOV, A. A., LEONTOVICH, E. A., GORDON, I. I., MAIER, A. G.: *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. New York–Toronto: Halsted Press. 1971.

[2] ARNOLD, V. I.: *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*. (Chap. 5 et 6) Moscow: Mir. 1980.

R.-L. CLERC, C. HARTMANN, B. RAZAFIMANDIMBY  
Université Paul Sabatier  
Laboratoire d'Analyse et Calcul des Modeles Evolutifs  
U. F. R. Math.  
118, route de Narbonne  
F-31062 Toulouse Cédex, France

