



**HAL**  
open science

# Démonstration géométrique et lois physiques : le cas de la dioptrique et de la statique dans l'Antiquité et au Xe siècle

Philippe Abgrall

► **To cite this version:**

Philippe Abgrall. Démonstration géométrique et lois physiques : le cas de la dioptrique et de la statique dans l'Antiquité et au Xe siècle. 2022. hal-03576355

**HAL Id: hal-03576355**

**<https://hal.science/hal-03576355>**

Preprint submitted on 16 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Démonstration géométrique et lois physiques : le cas de la dioptrique et de la statique dans l'Antiquité et au X<sup>e</sup> siècle

Ph. Abgrall

Centre Gilles Gaston Granger (UMR 7304 – CNRS / AMU)  
Marseille - Aix en Provence

L'optique – et plus particulièrement sa partie sur la dioptrique et la catoptrique –, la statique, sont des domaines appliqués des mathématiques, et plus particulièrement de la géométrie, depuis l'antiquité ; il suffit de considérer les travaux d'Archimède,<sup>1</sup> et peut-être d'Euclide<sup>2</sup> pour la seconde, ceux d'Euclide encore,<sup>3</sup> de Dioclès et d'Anthémios<sup>4</sup> puis de Ptolémée<sup>5</sup> pour la première. Dans ces deux domaines, les démonstrations géométriques tiennent une place principale, et les mathématiciens de langue arabe, héritiers directs de leurs prédécesseurs hellénistiques, ont poursuivi et largement développé ces traditions. Néanmoins, le contexte physique de ces disciplines appliquées, a donné lieu à des lois dont le principe a pu échapper à la pure géométrie. Nous pensons à la loi de l'égalité des angles que font les rayons incident et réfléchi avec la normale à la surface de réflexion, dans le domaine de la catoptrique ; à la loi de la réfraction, connue aujourd'hui sous le nom de Descartes ou Snellius, en dioptrique ; ou encore, pour la statique, à la loi des leviers. Le but de cette réflexion que nous engageons ici, est d'examiner les postulats sur lesquels des mathématiciens du X<sup>e</sup> siècle se sont appuyés pour établir la connaissance de ces lois, de comprendre comment ils ont tenté de les démontrer, au sens géométrique, et quelles discussions cela a pu entraîner.

Considérons, pour commencer, la loi de la réfraction. R. Rashed, dans une étude devenue classique maintenant, a mis en évidence la manière dont Ibn Sahl exprime et utilise cette loi, dans son *Livre sur les instruments ardents* rédigé dans la seconde moitié du X<sup>e</sup> siècle,<sup>6</sup> grâce à un certain rapport de segments de droites, caractéristique d'un dioptre air-cristal. Ibn Sahl étudie, d'une manière générale, l'embrasement par réfraction, « par une lumière qui traverse l'instrument ». <sup>7</sup> Aucune trace ici, bien évidemment, d'une considération d'un rayon visuel, l'étude d'Ibn Sahl se situant dans le domaine de l'optique géométrique. Pour caractériser la réfraction air-cristal, il commence par considérer le trajet de la lumière traversant un tel dioptre plan : « Déterminons deux droites telles que la lumière traverse le cristal suivant l'une

---

1. Archimède, *De l'Équilibre des figures planes*, éd. et trad. Ch. Mugler, Paris, 1971, vol. II.

2. On connaît un fragment attribué à Euclide retrouvé dans une version arabe, F. Woepcke, « Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide », *Journal Asiatique*, sept-oct 1851, p.217-247, réimpr. in F. Woepcke, *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*, Francfort, 1986, vol. 1, p. 17-47.

3. Euclide, *L'Optique et la catoptrique*, éd. et trad. P. Ver Eecke, Paris, 1959.

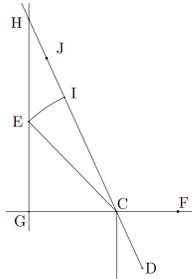
4. R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, Paris, 2000.

5. *L'Optique de Claude Ptolémée dans la version latine d'après l'arabe de l'émir Eugène de Sicile* : édition critique et exégétique augmentée d'une traduction française et de compléments par A. Lejeune, Leyde (New York, Copenhague, Cologne), 1989.

6. R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique au X<sup>e</sup> siècle – Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, Paris, 1993, p.1-52 ; ce texte est repris, avec une traduction anglaise, dans R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, Londres, 2005, p. 75-142.

7. Rashed, *Géométrie et Dioptrique*, p. 23 (l. 11 pour le texte arabe).

d'elles, soit  $CD$ , et qu'elle se réfracte suivant l'autre dans l'air, soit  $CE$ . »<sup>8</sup>  
La figure 1 reproduit en coupe ce dioptre.

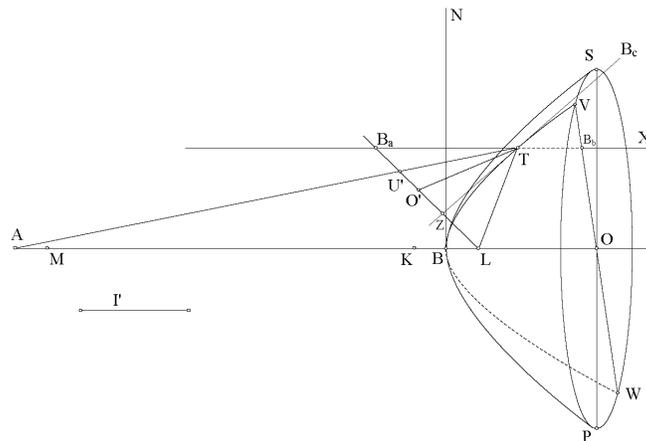
Figure 1<sup>9</sup>

La surface plane du cristal est représentée par la droite  $GF$ . Ibn Sahl affirme que  $\widehat{ECG} < \widehat{DCF} < \text{Angle droit}$ .<sup>10</sup> Il prolonge alors la droite  $DC$  jusqu'en un point  $H$ , duquel il mène la perpendiculaire  $GH$ , à la droite  $GF$ , et pose le point  $E$  sur cette perpendiculaire (à l'intersection avec  $CE$ ). Il en déduit que  $CE < CH$ , construit sur  $CH$  le point  $I$  tel que  $CI = CE$ , puis le point  $J$ , milieu de  $IH$ .

Avec cette construction, Ibn Sahl caractérise le dioptre cristal-air, par le rapport  $\frac{CE}{CH}$  qui est aussi  $\frac{CI}{CH}$  et qui est le rapport des sinus des angles que font les rayons incident et réfracté avec la normale.<sup>11</sup>

Ibn Sahl résout alors le problème de l'embrasement en un point à distance finie, à partir d'une source lumineuse suffisamment éloignée pour considérer qu'elle émet des rayons lumineux parallèles, en donnant pour instrument ce que nous appelons aujourd'hui une lentille plan-convexe.

Il veut montrer que les rayons issus d'une source éloignée, parallèlement à un axe  $AB$ , se rejoignent au point  $A$ , après avoir traversé l'instrument. Pour déterminer son instrument, il utilise la construction décrite précédemment par la Figure 1, et place sur l'axe  $AB$ , les points  $A, K, B$ , tels que  $\frac{AK}{AB} = \frac{CI}{CJ}$ , puis le point  $L$  tel que  $BL = BK$  (Figure 2). Il détermine alors une hyperbole, à la manière d'Apollonius, par son axe  $BM$ , c'est-à-dire que les points  $B$  et  $M$  sont ses sommets, et par son côté droit  $BN$ , tel que  $BN \times BM = 4BL \times LM$ . Cette hyperbole a donc pour foyers les points  $A$  et  $L$ . Puis, prenant l'arc  $BS$  de cette hyperbole, il pose  $O$  le pied de la perpendiculaire à  $AB$  issue de  $S$ , et définit le solide engendré par la rotation de la figure formée de l'arc d'hyperbole  $BS$  et les segments  $SO$  et  $BO$ . Il obtient ainsi son instrument : un hyperboloïde de sommet  $B$  et de base le cercle de centre  $O$  et passant par  $S$ .

Figure 2<sup>12</sup>

8. *Ibid.* p. 23 (p. 23 l. 11 à p. 24 l. 1 pour le texte arabe).

10. Ibn Sahl n'emploie évidemment pas ces notations, il écrit : « les deux angles  $DCF$  et  $ECG$  sont aigus, le plus petit d'entre eux est l'angle  $ECG$  » (Rashed, *Géométrie et Dioptrique*, p. 24). Ce résultat est à rapprocher de l'étude que l'auteur poursuit dans un autre de ses textes, intitulé *Preuve que la sphère n'est pas d'une transparence extrême* (édité et traduit par R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique*, p. 53-56), dans lequel Ibn Sahl renvoie explicitement au livre V de *L'Optique* de Ptolémée, pour déterminer la position relative des rayons lumineux incident et réfracté, par rapport à la normale à la surface du dioptre au point de réfraction. C'est ce même résultat qu'il utilise ici.

11. En employant un langage moderne, on a  $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\frac{GC}{CH}}{\frac{GC}{CE}} = \frac{CE}{CH}$ .

12. Nous avons ici reproduit par nous-mêmes la figure de R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique*, figure 13 p. 30.

Il commence par étudier le cas particulier du rayon qui suit l'axe  $AB$  proprement dit, puis il considère un rayon issu de la source selon  $XT$ , et va montrer qu'il se réfracte, à la sortie du cristal, selon  $TU'$ , dans le plan  $BLT$ , dont l'intersection avec l'hyperboloïde est le segment d'hyperbole  $VBW$ . La droite  $TZ$ , bissectrice de l'angle  $\widehat{ATL}$ , est la tangente à l'hyperbole  $VBW$  en  $T$ , et le plan contenant cette tangente et perpendiculaire au plan  $BLT$ , est le plan tangent à la surface de l'hyperboloïde en  $T$ . Puisque  $BN \times BM = 4BL \times LM$ , alors  $AT - LT = BM$ . En plaçant le point  $U'$  sur  $AT$ , tel que  $AU' = BM$ , Ibn Sahl en déduit que  $TU' = TL$ , et donc que  $(ZU') \perp (TZ)$ , c'est-à-dire, précise-t-il, que  $ZU'$  est la normale à la surface de l'hyperboloïde au point  $T$ .<sup>13</sup> Il définit alors la droite  $I'$  par la proportion  $\frac{TZ}{I'} = \frac{CE}{CH}$ .

Quelle est l'origine de ce postulat implicite selon lequel le rapport  $\frac{CE}{CH}$  ne dépend que des deux milieux ? La réponse à cette question est à chercher du côté de la place de l'expérience dans la constitution de cette loi. Lorsqu'il décrit la construction géométrique de son instrument ardent par réfraction, Ibn Sahl précise que « le solide est de la même substance que celle avec laquelle nous avons expérimenté », <sup>14</sup> mais il n'en dit pas plus. On comprend implicitement que le rapport  $\frac{CE}{CH}$  est le même si la substance est la même, mais les données qui l'ont conduit à induire cette loi ne sont pas visibles. La poursuite de cette réflexion, conduit au travail d'Ibn al-Haytham sur *La Sphère ardente*, <sup>15</sup> accompagné du commentaire du XIII<sup>e</sup> siècle qu'en a fait al-Fārisī, <sup>16</sup> pour comprendre chez ces auteurs, le rôle des résultats expérimentaux dans l'établissement de cette loi de réfraction. <sup>17</sup>

La situation est différente pour la statique, mais il me semble qu'on peut, de la même façon, envisager la place de la loi des leviers par rapport à l'expérience, et les principes sur lesquels elle s'établit. Si l'on suit Maryam Rozhanskaya, « les principaux problèmes de statique traités dans l'Orient médiéval concernaient son axiomatique, ainsi que les concepts de force, de poids et de pesanteur, les théories du levier et du centre de gravité, de l'équilibre et de sa stabilité, et enfin l'hydrostatique ». <sup>18</sup>

Depuis les travaux de E. A. Moody et M. Clagett sur l'histoire de la statique, <sup>19</sup> deux traditions grecques ont été clairement mises en évidence.

L'une repose sur la théorie du mouvement d'Aristote et relève des notions de la dynamique (force, vitesse). L'un des textes initiateurs de cette première tradition est attribué à Aristote, sous le nom de *Problèmes Mécaniques*. Il est établi que sa majeure partie a été transmise par d'autres ouvrages tels que *Les Mécaniques* de Héron d'Alexandrie. Cependant, on ne connaît aucune traduction arabe ou latine de l'ouvrage d'origine.

La seconde tradition prend sa source dans les écrits attribués à Euclide sur la balance (notamment le *Maqāla li-Uqlīdis fī al-Mizān*, et le *liber de canonio*, tous deux anonymes), et surtout dans les travaux d'Archimède sur la statique, notamment *De l'Équilibre des plans* et *La Méthode*. Cette tradition, au contraire de la première, traite des notions de distances et de poids. C'est une tradition de statique théorique, qui repose sur la théorie des centres de gravité provenant d'Archimède et la rigueur euclidienne des démonstrations géométriques. En fait, selon F. Bancel et M. Rozhanskaya, ces deux traditions ne doivent pas être considérées comme se développant en parallèle, mais plutôt comme des étapes d'une évolution. Si, même dans certains ouvrages antiques, on trouve la double influence, ce fait devient encore

13. « la droite  $ZU'$  est perpendiculaire au plan tangent à la surface  $B$  au point  $T$  », Rashed, *Géométrie et Dioptrique*, p. 28 (l. 20-21 pour le texte arabe).

14. R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique*, p. 26.

15. Rashed, *Géométrie et Dioptrique*, p. 111-132.

16. Rashed, *Géométrie et Dioptrique*, p. 133-158.

17. Il serait également utile ici de comparer cela aux expériences de Ptolémée sur la réfraction.

18. M. M. Rozhanskaya (avec la coll. d'I. S. Levinova), « La statique », dans R. Rashed (éd.) *Histoire des Sciences Arabes*, Paris, 1997, vol. 2, p. 263-291.

19. M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, Madison, 1959 et E. A. Moody et M. Clagett, *The Medieval Science of Weights*, Madison, 1952.

---

plus patent dans les travaux des savants arabes à partir de Thābit ibn Qurra.

La statique se basait sur le principe du levier, qui se réduisait lui-même au problème de l'équilibre d'un système de deux corps : le système est en équilibre si le point d'appui est à des distances des deux corps inversement proportionnelles aux poids de ces corps.

Dans les œuvres qui nous sont parvenues, Archimède s'est seulement occupé du levier idéal en équilibre, représenté au moyen d'un segment de droite fixé en l'un de ses points et à l'extrémité duquel sont suspendus quelques poids. Le principe d'Archimède est donc directement lié au concept de centre de gravité, au sens moderne du barycentre.

Une autre formulation (position) de la théorie du levier remonte à la tradition de la Mécanique du pseudo-Aristote, et consiste en l'étude d'un levier en rupture d'équilibre. Dans ce cas, la démonstration du principe du levier repose sur le fait que, si l'équilibre du levier se rompt, en vertu de la loi du mouvement d'Aristote, l'extrémité décrit un arc de cercle dont la longueur est inversement proportionnelle au poids suspendu.<sup>20</sup>

C'est pourquoi je vais, à présent, m'intéresser plus précisément à la démonstration du principe des leviers, et suivre les différentes versions que l'on trouve de cette démonstration, ou de son évocation, ou de sa vérification ou de sa réfutation, dans différents textes.

Le premier de ces textes, est un petit traité attribué à Euclide, inconnu en grec, mais dont on trouve une version arabe dans le célèbre manuscrit de Paris, écrit de la main même d'al Sijzi.<sup>21</sup> F. Woepcke a publié en 1851, dans le *Journal Asiatique*, le texte arabe et la traduction en français de ce traité, qui n'est pas signalé par les biobibliographes Ibn al-Nadīm, et al-Qiftī.

Il s'intitule *Le Livre d'Euclide sur la balance* et développe en quatre propositions la démonstration de la loi, ou du principe, du levier.

Avant cela, une sorte de préambule présente une définition du poids : « le poids est la mesure (*qiyās*) de la pesanteur et de la légèreté, de l'une comparativement à l'autre, déterminée au moyen de la balance ».<sup>22</sup> Puis deux énoncés sont posés sans démonstration, tels des principes. Le premier est : « Lorsque deux poids égaux sont suspendus aux deux extrémités d'un fléau droit, d'épaisseur uniforme, et que le fléau à son tour est suspendu au point qui se trouve au milieu entre les deux poids, à un arbre de balance, le fléau sera parallèle au plan de l'horizon ».<sup>23</sup>

Puis le second : « Lorsque deux poids égaux ou inégaux sont appliqués aux deux extrémités d'un fléau, celui-ci étant suspendu à un arbre de balance, en un de ses points, de telle sorte que les deux poids maintiennent le fléau parallèle à l'horizon ; qu'ensuite l'un des deux poids est laissé à sa place à l'extrémité du fléau ; que l'on mène de l'autre extrémité du fléau une droite, renfermant avec celui-ci un angle droit, de quel côté on voudra ; et qu'on suspend l'autre poids en un point quelconque de cette droite, le fléau sera parallèle au plan de l'horizon comme auparavant. »<sup>24</sup>

On peut, en suivant Woepcke, parler ici d'axiomes, au sens de ces notions communes que l'on trouve au début du livre 1 des *Éléments* d'Euclide. Mais je pencherai plutôt pour l'appellation de postulat, dans la mesure où il s'agit d'une proposition indémontrable, dans le système étudié, propre au système, et non commune au sens de l'analogie, tels l'axiome comme le caractérise Aristote dans les *Seconds Analytiques*. De plus, si l'on renvoie à Archimède ce premier principe est une « demande » ; ce point fera du reste l'objet d'une critique exprimée par Geminus, selon le témoignage d'Eutocius et rejoint par lui pour dire qu'Archimède a tort de nommer postulat ce qui constitue un axiome.

---

20. F. Bancel et M. Rozhanskaya, « Statica », in *Storia della Scienza*, Sandro Petruccioli (ed.), Istituto della Enciclopedia Italiana, 10 vol., Rome, 2001-2004, vol. III, R. Rashed (éd.), *La civiltà islamica*, 2003, p. 610-624.

21. Manuscrit Ar 2458 de la Bibliothèque Nationale de Paris.

22. Traduit par Woepcke, « Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide », p. 225.

23. *Ibid.* p. 225-226.

24. *Ibid.* p. 226.

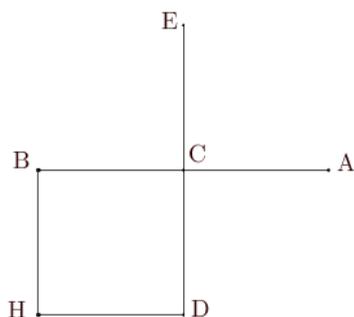


Figure 3

L'auteur conclut que le poids en  $H$  remplace à lui seul les deux poids supposés être appliqués en  $B$  et en  $D$ .

Il n'est pas nécessaire que  $EC = CB$ , il suffit que  $BCDH$  soit un rectangle et que  $C$  soit le milieu de  $ED$ . Cette remarque, faite par Woepcke en note de sa traduction, prendra son importance à la proposition suivante.

Dans la proposition 2, l'auteur du texte démontre que si une ligne  $TH$  est mise en équilibre, c'est-à-dire parallèle à l'horizon, par deux poids suspendus à ses extrémités, et par un point d'appui en son milieu  $C$ , alors si l'on déplace le poids de  $T$  en  $W$ , sur le segment  $TC$ , et que l'on ajoute un poids égal (à chacun des deux poids initiaux) au point  $Z$  du segment  $TC$ , tel que  $CZ = TW$ , la ligne  $TH$  reste parallèle à l'horizon.

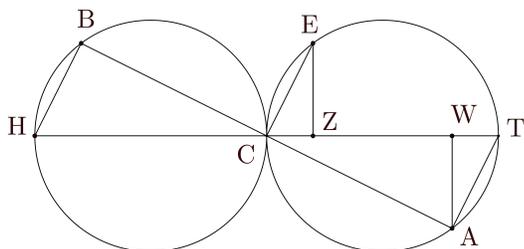


Figure 4

Pour cela il construit les deux cercles de diamètres respectifs  $HC$  et  $CT$ , puis il mène les lignes  $ZE$  et  $WA$  perpendiculairement à  $HT$ , sur le cercle. Il obtient les points  $E$  et  $A$ . Il prolonge  $AC$  jusqu'à l'autre cercle en  $B$ , et il joint les droites  $TA$ ,  $CE$  et  $BH$ .

En appliquant trois poids égaux en  $A$ ,  $E$  et  $H$ , il se retrouve alors dans la configuration de la proposition 1, avec la ligne  $AB$  pour fléau (à la remarque près faite tout à l'heure, dans la mesure où l'on a bien  $CE = BH$ , mais  $CE \perp BC$ , le résultat reste vrai, car la démonstration reste

valide avec un rectangle  $BCDH$ , au lieu d'un carré). Donc le plan des deux cercles est parallèle à l'horizon. Si l'on ramène à présent les deux poids  $A$  et  $E$  respectivement en  $W$  et  $Z$ , l'équilibre ne change pas, du point de vue de la ligne  $HT$ , en vertu du postulat 2.

Dans la troisième proposition, l'auteur "généralise" en quelque sorte le résultat de la proposition 2, en divisant les deux moitiés de son fléau, en parties égales.

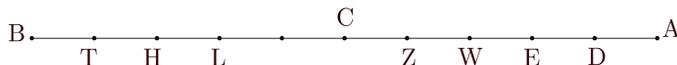


Figure 5

Il prend comme point de départ la configuration où trois poids égaux sont appliqués en  $D$ ,  $Z$  et  $B$ . Il explique que l'excès de  $CB$  sur  $CD$ , par lequel le poids  $B$  l'emporte sur  $D$ , puisqu'il faut un autre poids

en  $Z$  pour faire l'équilibre, est  $TB = CZ$ , en longueur. Il est donc évident, dit-il, que  $ZC$  est l'équivalent de  $TB$  « en puissance de poids » (*quwwa al-thiql*). et montre alors que le déplacement simultané des poids  $D$  et  $B$  d'une division vers le milieu, ne change pas l'équilibre. En laissant le poids en  $Z$ , si l'on applique les deux autres en  $E$  et  $T$ , le fléau reste parallèle à l'horizon (en effet, de la même manière que précédemment il montre que l'excès de  $TC$  sur  $CE$  est  $TH = ZC$ , et  $ZC$  est l'équivalent en puissance de poids de  $TH$ , donc  $TB$  est égal à  $TH$  en puissance de poids). Il parvient ainsi à « quantifier » par subdivision, les longueurs des deux bras. Des segments de même longueur sont équivalents en puissance de poids.

Il en arrive à la quatrième et dernière proposition, de ce qui n'est peut-être au'un fragment, proposition connue sous le nom de loi des leviers. Si l'on considère un fléau  $AB$ , divisé au point  $C$  en deux parties inégales, et si l'on suspend en  $A$  et en  $B$ , deux poids tels que le poids  $A$  soit au poids  $B$  comme  $CB$  est à  $CA$ , alors le fléau sera parallèle à l'horizon.

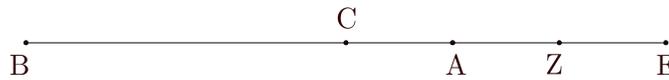


Figure 6

Il démontre cette loi dans le cas où  $BC$ , pris supérieur à  $CA$ , est un multiple de  $CA$ , ici le triple. Il prolonge le fléau du côté de  $A$  jusqu'en  $E$ , de manière que  $CE = BC$ . Alors d'après la proposition 3, le fléau sera en équilibre s'il applique trois poids égaux en  $B$ ,  $A$  et  $Z$  tel que  $ZE = CA$ . Si l'on déplace le poids de  $Z$  en  $A$ , la puissance de poids de  $ZA$  est la même que celle de  $CA$ , donc pour maintenir l'équilibre, il faut ajouter un poids égal en  $A$ . Ainsi, trois poids égaux appliqués en  $A$  font équilibre avec un poids appliqué en  $B$  et la distance  $CB$  est le même multiple de la distance  $AC$  que la somme des poids appliqués au point  $A$  l'est du poids appliqué en  $B$ . D'où le résultat.

Dans le traité bien connu d'Archimède, *De l'Équilibre des figures planes* (qui porte pour sous-titre *De l'Équilibre ou des centres de gravité des figures planes*), où le savant pose les principes fondamentaux de la statique et où il détermine la position des centres de gravité des figures planes de base, avant de s'intéresser à celui du segment de parabole, dans ce traité donc, on retrouve une démonstration de cette loi des leviers. Si l'ouvrage est dans la même tradition évoquée au début de cette exposé, que le texte précédent, il n'est en rien comparable lorsque l'on considère sa portée et les notions fondamentales de la statique que son auteur introduit. La plus importante étant celle de centre de gravité. Archimède commence en énonçant sept postulats : on retrouve pour le premier, le même que dans le texte du pseudo-Euclide, mais il le complète en précisant ce qui se produit si les poids égaux sont suspendus à des distances inégales (il y a inclinaison du côté de la longueur la plus grande). Le deuxième postulat concerne ce qui se passe si l'on augmente l'un des deux poids en équilibre (quelque soit les longueurs des bras, égales ou inégales) et le troisième, si l'on diminue l'un de ces poids, en termes d'inclinaison. Les postulats 4, 5 et 7 concernent les centres de gravité des figures. Il reste le sixième postulat qui concerne directement la question qui nous intéresse ici, et dont nous donnons ici la traduction de Ch. Mugler : « si des grandeurs s'équilibrent à certaines distances, des grandeurs équivalentes à ces grandeurs (au sens de la quantité, égales à elles) s'équilibreront à leur tour aux mêmes distances ».

proposition 1 : des poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux entre eux. (postulats 1 et 3)

proposition 2 : des poids inégaux suspendus à des distances égales ne s'équilibrent pas, il y a inclinaison du côté du plus lourd (postulats 1 et 2)

proposition 3 : des poids inégaux s'équilibrent à des distances inégales, le plus grand poids se trouvant à la plus petite distance (postulats 1 et 3)

proposition 4 : la grandeur composée de deux grandeurs égales, différemment situées, a pour centre de gravité le milieu du segment joignant les centres de gravité des deux grandeurs (postulat 1, passage au centre de gravité)

proposition 5 : généralisation de la proposition 4 à trois grandeurs, à laquelle s'ajoutent deux corollaires pour un nombre impair de grandeurs et un nombre pair.

C'est alors aux propositions 6 pour le cas commensurable et à la proposition 7 pour le cas incommensurable, qu'Archimède énonce et démontre la loi des leviers : « des grandeurs commensurables s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids. »<sup>25</sup> Archimède formule l'équilibre en termes de centres de gravité. Il considère deux poids  $A$  et  $B$ , et une longueur  $ED$ . L'expression géométrique de sa solution sous-entend en fait que le centre de gravité  $A$  de la grandeur  $A$  s'applique en  $E$  et le centre de gravité  $B$  de la grandeur  $B$  s'applique en  $D$ . Il veut montrer que si la longueur  $ED$  est divisé au point  $G$ , telle que le rapport de  $DG$  à  $GE$  est comme le rapport de  $A$  à  $B$ , alors le centre de gravité de la grandeur composée de  $A$  et de  $B$  est le point  $G$ .

Comparé au texte attribué à Euclide, on le voit, Archimède emploie un style plus géométrique, dans la tradition de la théorie des proportions appliquée aux grandeurs-poids, tout en introduisant cette notion de centre de gravité. Cette notion, rappelons-le, n'est pas définie par lui, ce qui lui vaut un certain nombre de critiques.

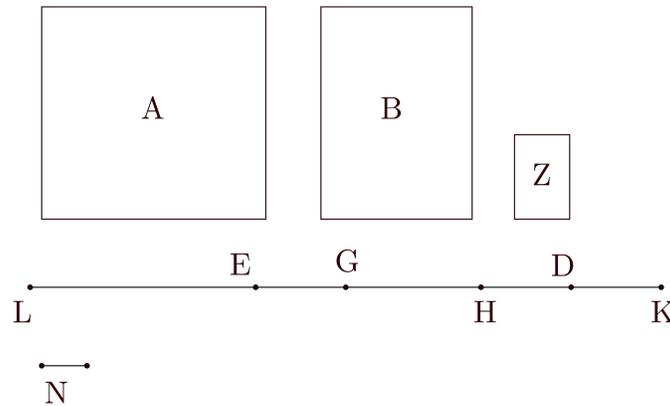


Figure 7

Il développe sa démonstration en introduisant une commune mesure,  $N$ , aux segments  $GD$  et  $GE$  (cas commensurable,  $GD = nN$  et  $GE = mN$ ). Il construit les segments  $DH$  et  $DK$  égaux tout deux à  $EG$ , et  $EL$  égal à  $DG$ . Donc  $DG = EH = EL$ . Ainsi  $LH = 2DG$  et  $HK = 2GE$ , donc  $\frac{LH}{HK} = \frac{DG}{GE} = \frac{A}{B}$ .

Archimède définit alors la  $(2n)^e$  partie  $Z$  de  $A$ ,  $A = 2nZ$  ce qui induit que  $B = 2mZ$  d'après la similitude des rapports. Si le segment  $LH$  est divisé en  $2n$  parties égales à  $N$ , de même la grandeur  $A$  en  $2n$  parties égales à  $Z$  et que l'on place chacune de ces grandeurs au milieu de chacun des segments de  $LH$ , la somme de ces grandeurs sera  $A$  et le centre de gravité en  $E$  car elles sont en nombre pair<sup>26</sup>. De la même manière il répartit les  $2m$  grandeurs  $Z$  formant la grandeur  $B$ , régulièrement sur les milieux des  $2m$  parties de  $HK$ , alors le centre de gravité de cette somme sera situé en  $D$ . Au total on aura  $2(m+n)$  grandeurs égales réparties régulièrement sur le segment  $LK$  et ainsi le centre de gravité de l'ensemble sera au milieu de  $LK$ , autrement dit en  $G$ .

Il me semble qu'ici, contrairement au texte précédent attribué à Euclide, la place des postulats est plus complexe.

25. Toujours dans la traduction de Ch. Mugler

26. cela provient de la prop 5 (corollaire 2)

Ce travail d'Archimède représente nettement un sommet de la contribution antique à la statique traitée géométriquement grâce à la notion de centre de gravité. Il faudra attendre le X<sup>e</sup> siècle pour retrouver une recherche dans ce domaine, d'un niveau mathématique comparable, selon Faiza Bancel.

Avant d'examiner cela, plaçons-nous au IX<sup>e</sup> siècle, chez Thābit ibn Qurra. Ce dernier a rédigé un ouvrage de statique qui a pour titre *Le Livre du Qarastun*. Cet ouvrage a pour objet l'étude de l'équilibre d'une barre homogène, donc pesante, par la détermination du poids à appliquer à l'une de ses extrémités pour établir cet équilibre lorsque la barre est suspendue en l'un quelconque de ses points. Ce problème se résout consécutivement à deux autres dont Thābit s'occupe, en premier lieu, la démonstration de la loi du levier, et en second, le calcul du moment statique de la barre.

Ce livre mêle les deux traditions dynamique et statique.

postulat 1 : il s'agit d'un postulat de dynamique sur les distances parcourues par deux mobiles.

Le rapport de deux distances parcourues par deux mobiles en deux temps égaux, est égal au rapport des forces des deux mobiles.

postulat 2 = postulat 1 du pseudo Euclide = début postulat 1 Archimède.

postulat 3 = postulat 2 du pseudo Euclide, il l'explique en quelque sorte.

Thabit envisage de déplacer les deux poids suspendus aux extrémités le long de deux perpendiculaires à la droite élevées en son extrémité.

Il démontre alors un lemme qui va lui servir dans sa démonstration de la loi des leviers, qui repose sur le mouvement. Il montre que si une droite  $AB$  est divisée en  $G$  en deux segments inégaux,  $G$  étant fixé et si elle se meut autour de ce point, alors elle décrit deux segments circulaires semblables, dont les rayons sont les deux segments. Sa démonstration repose sur la description du mouvement des points  $A$  et  $B$ , situés aux extrémités, et qui décrivent des cercles, et sur l'égalité des angles au centre, du fait même de la situation. A la fin de sa démonstration, il ajoute que le rapport des deux arcs de cercle est égal au rapport des deux segments (rayons). C'est cette égalité de rapport, accompagné du postulat 1, qui vont lui servir à établir, dans la proposition 1, le principe suivant : si les poids appliqués aux extrémités sont proportionnels aux segments, alors la droite sera parallèle à l'horizon.

Il ajoute à la fin de sa démonstration, que ce principe véritable s'applique à un fléau non pesant. Il donne la condition dans le cas d'un fléau pesant, c'est qu'avant d'accrocher les poids, il faut épaissir le petit segment pour obtenir l'équilibre « à vide ».

C'est à peu près un siècle après cette recherche de Thābit ibn Qurra, que l'on va rencontrer, chez Abū Sahl al-Qūhī et son successeur immédiat, Ibn al-Haytham, des travaux dans le domaine de la statique, destinés à fonder cette discipline par une énonciation très complète des principes. Mais ces travaux, en tout cas leur contenu, ne nous sont parvenus que par deux témoins. D'une part, une correspondance qu'il a entretenue avec Al-Ṣabī' et qui nous est en partie parvenue, par laquelle on apprend qu'al-Qūhī a rédigé un grand traité, général, sur les centres de gravité ; et d'al-Ṣabī' qu'à cette époque les savants ne disposent pas d'un tel ouvrage qui soit complet sur la question. De plus, cette correspondance contient un certain nombre d'énoncés de théorèmes établis par al-Qūhī, sur les centres de gravité, mais malheureusement sans démonstration.

D'autre part, nous trouvons un autre témoin, plus tardif, des recherches menées en statique à la fin du X<sup>e</sup> siècle. Il s'agit du livre de *La Balance de la Sagesse*, rédigé en 1121 par Abd al-Rahman al-Khāzin<sup>27</sup>. Faiza Bancel a établi la fidélité des citations de cet auteur, dont l'ouvrage nous fournit des témoignages précieux de textes perdus et elle a analysé attentivement le contenu de ce livre, dont le premier chapitre du premier livre est consacré aux fondements que les deux auteurs, dont il est très difficile de séparer la part de chacun.

27. à ne pas confondre avec le géomètre du X<sup>e</sup> s. al-Khāzin

On y trouve les définitions de la pesanteur et du corps pesant, les propriétés des corps pesants, les principes admis ou non, et il est difficile de le savoir, car al-Khāzinī ne nous livre que les énoncés. On y trouve notamment l'énoncé de la loi dans la neuvième et dernière section :

Quels que soient deux corps qui s'équilibrent par rapport à un point donné, le rapport du poids de l'un au poids de l'autre est comme le rapport inverse des deux parties de la droite qui passe par ce point et par leurs deux centres de gravité, l'une à l'autre.

Pour terminer, je voudrais revenir à la manière dont est traitée la loi des leviers dans la correspondance. Dans la troisième des quatre lettres dont nous disposons, al-Ṣabī' remet en question l'universalité de cette loi, en donnant un contre exemple, lui semble-t-il, qui impose selon lui certaines conditions restrictives à l'application du principe du levier. Il emploie le terme de « prémisses » (*muqaddima*) « le rapport du poids au poids est égal au rapport inverse de la distance à la distance ». Il dit que, d'après la prémisses,  $P$  est le centre de gravité de la réunion mais en imaginant un crochet en  $P$  pour soulever l'ensemble, il affirme que le tout penchera du côté de  $AB$ , plus lourd. Selon lui, puisque les poids ne changent pas, les distances non plus ne doivent pas changer.

Al-Qūhī envisage-t-il l'expérience au sens d'Ibn al-Haytham ? A mon avis non.

En conclusion, il resterait à affiner la comparaison entre les situations des deux disciplines « appliquées », la statique et la dioptrique, sur la présence de lois admises ou démontrées, mais rapportées à certains postulats.

La recherche de démonstrations de certaines lois a conduit les savants à manipuler ou même à définir certains concepts nouveaux, comme le moment d'un poids.

La place de l'expérience dans l'énonciation des lois : l'expérience peut-elle jouer le rôle de ce qu'Archimède dit, à propos de sa méthode : « [...] il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance ». <sup>28</sup> Attention, ici Archimède ne parle pas d'expérience, mais de l'usage de la mécanique pour découvrir certaines propriétés qu'il s'agit ensuite de démontrer par la géométrie. Mais sa mécanique est déjà construite à la manière de la géométrie, quasiment de manière axiomatique. En d'autres termes, l'expérience a-t-elle été utilisée pour vérifier une intuition ?

Vérifier a différents sens, mais en sciences, le sens qui nous intéresse ici, ou plutôt l'orientation, est le suivant : « confronter un énoncé avec les faits ». <sup>29</sup>

Est-ce bien ce que fait al-Qūhī, par exemple, dans sa correspondance lorsqu'il parle du principe des leviers ?

Ce n'est pas certain, il s'agit peut-être d'une idéalisation de l'expérience, ou d'une expérience de pensée. Il est coutumier du fait avec son compas parfait par exemple, ou ses critiques à la théorie du mouvement d'Aristote. Granger rapporte ce sens du verbe vérifier, « à une question gnoséologique générale concernant le rapport d'adéquation au vécu, à l'expérience, du symbolisme dans lequel s'exprime une connaissance ». <sup>30</sup>

Le principe du levier semble faire partie de ces connaissances dont la vérité peut être établie définitivement, c'est-à-dire sans restriction et dans des conditions complètement déterminées. En ce sens, al-Qūhī, traite la question en mathématicien, et son recours à l'expérience reste formel et en pensée. Ce que fait al-Qūhī relève-t-il de la démonstration ou de la vérification ? A mon sens, il ne démontre pas, dans le cas des deux rectangles d'al-Ṣabī', que le centre de gravité est bien  $P$ . Il applique la loi et son exemple du triangle est un résultat connu qui fonctionne comme une analogie. On conçoit que si l'on considère cette loi des leviers comme un énoncé expérimental, alors « la détermination complète et exacte des conditions

28. Archimède, *La Méthode*, trad. de Ch. Mugler, p. 84.

29. G.-G. Granger, *La Vérification*, Paris, 1992, p. 9.

30. *Ibid.*, p. 9.

---

de vérité est alors, le plus souvent, une tâche infinie ».<sup>31</sup>

---

31. *Ibid.* p. 11.