



HAL
open science

Hitchcock, F. L., 1941, The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. Version bilingue et commentée

Frank Lauren Hitchcock, Laurent Beauguitte, Pierre Beauguitte

► To cite this version:

Frank Lauren Hitchcock, Laurent Beauguitte, Pierre Beauguitte. Hitchcock, F. L., 1941, The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities. Version bilingue et commentée. 2022. hal-03565874

HAL Id: hal-03565874

<https://hal.science/hal-03565874>

Submitted on 11 Feb 2022


HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.


Hitchcock, F. L., 1941, The Distribution of a
Product from Several Sources to Numerous
Localities. *Journal of Mathematics and Physics*

20(1-4): 224-30.

Version bilingue et commentée

groupe f.m.r.


Février 2022

groupe f.m.r.


Version traduite et commentée par Laurent Beauguitte (CNRS, UMR Géographie-cités) et Pierre Beauguitte.

Présentation

Cet article du mathématicien nord-américain Frank Lauren Hitchcock (1875-1957) est l'un des articles fondateurs des études d'optimisation linéaire. Cherchant à résoudre un problème classique (trouver la ou les solutions les moins coûteuses pour faire circuler des produits entre des lieux), il propose une solution basée sur la résolution d'un ensemble d'équations linéaires.

Si l'auteur emploie un vocabulaire qui peut rappeler la théorie des graphes (*vertex*, *edge*), cette dernière n'est pas mobilisée ici. L'hybridation entre théorie des graphes et optimisation linéaire se réalise progressivement dans les années 1950, notamment avec les travaux de Ford et Fulkerson au sein de la *RAND Corporation* (voir par exemple Fulkerson, 1956 et Ford et Fulkerson, 1956).

La solution décrite ici a été formulée de façon indépendante par Tjalling C. Koopmans (1910-1985), d'où la formule parfois utilisée de problème de Hitchcock-Koopmans. Le mathématicien russe Leonid Kantorovich (1912-1986) a également proposé une solution équivalente dès 1939 (voir la page wikipedia [Linear programming](#)).

Références

L. R. Ford et D. R. Fulkerson, 1956, Solving the Transportation Problem, *Management Science*, 3(1) : 24-32.

D. R. Fulkerson, 1956, *Hitchcock Transportation Problem*, RAND Corporation. [En ligne](#).

T. C. Koopmans et S. Reiter, 1951, A Model of Transportation, *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission Monograph 13.

Les numéros entre crochets dans la version anglaise correspondent à la pagination de l'article paru en 1941. Toutes les notes en bleu dans la traduction française sont des traducteurs.

The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities

Frank L. Hitchcock

1. Statement of the problem. When several factories supply a product to a number of cities we desire the least costly manner of distribution. Due to freight rates and other matters the cost of a ton of product to a particular city will vary according to which factory supplies it, and will also vary from city to city.

Denote the cost of one ton of product from the i^{th} factory to the j^{th} city by a_{ij} and the number of tons shipped in each case by x_{ij} . The total cost y will then be

$$y = \sum a_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

summed for $i = 1, 2, \dots, m$ and $j = 1, 2, \dots, n$ if there are m factories and n cities.

Let the total product shipped from the i^{th} factory to the n cities be f_i ; this means we have the equations

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &= f_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &= f_2 \\ \dots\dots\dots & \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &= f_m \end{aligned} \tag{F}$$

which may be called the F-equations for convenience.

Let also the total product consumed by the j^{th} city be c_j tons; this means we have the equations

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} &= c_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} &= c_2 \\ \dots\dots\dots & \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} &= c_n \end{aligned} \tag{C}$$

which may be called the C-equations.

The F-equations and the C-equations taken together form a system of $m + n$ equations which must be satisfied by the mn unknowns x_{ij} . But since the total shipped by factories equals total consumed by cities the sum of the F-equations equals the sum of the C-equations whence [225] the equations are not independent. It can easily be shown that any *one* equation may be omitted and the rest solved for a properly chosen set of $m + n - 1$ of the x 's in terms of the other x 's as parameters. If the results are substituted in (1) we shall have an expression for y in terms of $mn - (m + n - 1)$ parameters.

From the nature of the problem none of the unknowns x_{ij} can be negative, and no x_{ij} can exceed the smaller of the two numbers f_i and c_j .

2. Geometrical interpretation. A geometrical picture will be helpful. If the mn unknowns x_{ij} are rectangular coordinates in mn dimensions, then since we have $m + n - 1$ independent equations relating these variables, the region corresponding to possible values of the x 's will be of $mn - (m + n - 1)$ dimensions in agreement with the number of parameters found above. Since the possible values of the x 's are bounded, on the one hand by zero, on the other by f_i or c_j whichever is smaller, the region of possibilities is a closed region in the space of mn dimensions. This region in which meaningful values of the x 's occur will be called for brevity the X-region.

The cost y is, by (1), a linear function of position in the X-region. The least value of y will occur at some point on the *boundary* of the X-region, since a linear function cannot attain its least value in free space.

At any point on the boundary of the X-region at least one of the x 's must be zero. For at least one of the x 's must have one of its extreme values, otherwise the point would not be on the boundary. And if one of the x 's has its maximum value one or more other x 's must be zero, by the form of the F-equations and C-equations.

Since the X-region is of dimensions $mn - m - n + 1$, a portion of its boundary over which one of the x 's is zero will be of dimensions $mn - m - n$. Taking a point on this part of the boundary of the X-region we may move in a direction of diminishing y until we come to a point where some *other* x reaches a limiting value, and there at least one other x must be zero. The region where two x 's are zero will be of dimensions $mn - m - n - 1$. Proceeding in this way we shall eventually reach a point where $mn - m - n + 1$ of the x 's are zero, i.e. a fixed point on the boundary of the X-region which may be called a *vertex*.

The value of y at a vertex is not necessarily its least value, but the least value must occur at *some* vertex, which may be called conveniently a *best vertex*. If the particular set of $mn - m - n + 1$ x 's which are [226] zero at a vertex are taken as parameters and the other x 's eliminated from (1), the expression for y will take the form

$$y = M + \sum kx \tag{2}$$

where M is a constant and $\sum kx$ denotes a linear combination of the parametric x 's. *If none of the coefficients k in this result is negative the vertex is a "best vertex" and M is the required minimum cost.* For $y = M$ at the vertex, and if any parametric x is different from zero the cost y is increased.

The method will be to find a vertex and form the expression for y in terms of the x 's which are zero at this vertex. It can be seen by inspection whether we have a "best vertex". If not, we can always pass easily to a better

vertex, i.e. one giving a smaller value of y , and continue in this way until we have a best vertex.

3. Finding a vertex. A vertex can always be quickly found in the following manner. Let the F-equations and the C-equations, taken together, be condensed in form according to the scheme

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{11} + & x_{12} & \dots & x_{1n} & f_1 & \\
 x_{21} + & x_{22} & \dots & x_{2n} & f_2 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \text{(FC)} \\
 x_{m1} + & x_{m2} & \dots & x_{mn} & f_m & \\
 c_1 & c_2 & \dots & c_n & &
 \end{array}$$

wherein the sum of the x 's in a row equals the f on the right and the sum of the x 's in a column equals the c at the bottom. We may suppose the factories and the cities to be so numbered that no f is less than any f above it, and no c is less than any c on its left. We now set all the x 's of the first row equal to zero except x_{1n} which then equals f_1 ; *or else* we take all x 's of the first column zero except x_{m1} which then equals c_1 . *One* of these two procedures is always possible. Suppose the first case, i.e. $x_{1n} = f_1$. We now discard the first row, replacing c_n at the bottom by $c_n - f_1$ assumed to be positive. If this quantity is negative the first procedure is impossible and instead we take $x_{m1} = c_1$, drop the first column, and replace f_m by $f_m - c_1$ which is surely not negative if $c_n - f_1$ is negative as is easily seen.

We have thus reduced the original array to a smaller array, corresponding to one less factory or else one less city, as the case may be. We then continue in just the same way until we have made $mn - m - n + 1$ of the x 's zero and so have a vertex.

[227] To illustrate, take an example of four cities and three factories with the array

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & 25 & \\
 x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 25 & \text{(3)} \\
 x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 50 & \\
 15 & 20 & 30 & 35 & &
 \end{array}$$

Either of the procedures mentioned above is possible. Adopting the first we set $x_{11} = x_{12} = x_{13} = 0$, $x_{14} = 25$, drop the first row and replace 35 at the bottom by $35 - 25$ or 10. This gives an array like that for two factories and four cities, namely

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 25 & \\
 x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 50 & \\
 15 & 20 & 30 & 10 & &
 \end{array}$$

Since the largest number at the bottom is 30, the third column will now play the part of a right hand column but it is hardly necessary to rewrite the array. We merely set $x_{21} = x_{22} = x_{24} = 0$, $x_{23} = 25$. This entails $x_{31} = 15$, $x_{32} = 20$, $x_{33} = 5$, and $x_{34} = 10$. The whole process may be carried out on the original array (3),

$$\begin{array}{ccccc}
 (x_{11})0 & (x_{12})0 & (x_{13})0 & (x_{14})25 & 25 \\
 \hline
 [x_{21}]0 & [x_{22}]0 & [x_{23}]25 & [x_{24}]0 & 25 \\
 x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 50 \\
 15 & 20 & [30]5 & (35)10 &
 \end{array}$$

where, in the first row, the values to the right of each x are those to be used, the parentheses referring to the first step of the process. In the second row also, the values to the right of each x are to be used, and the brackets refer to the second stage of the work. Finally the values remaining at the bottom are those of the x 's of the last row. The whole clearly checks, as is seen by adding rows and columns. The method is perfectly general and may be used in any case to find a vertex.

We now choose the x 's which were set equal to zero to be parameters, express the other x 's in terms of these, and substitute in the cost expression (1). This is a simple calculation and we find

$$x_{14} = 25 - x_{11} - x_{12} - x_{13} \quad (4)$$

$$x_{23} = 25 - x_{21} - x_{22} - x_{24} \quad (5)$$

$$x_{31} = 15 - x_{11} - x_{21} \quad (6)$$

$$x_{32} = 20 - x_{12} - x_{22} \quad (7)$$

$$x_{33} = 5 - x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{24} \quad (8)$$

$$x_{34} = 10 - x_{24} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \quad (9)$$

[228] equations which show by their form that a vertex is obtained when the x 's on the right are zero, since the others are left with possible values. The configuration of the X-region and the number of its vertices depend on the constants f and c , not on the costs a_{ij} .

Suppose now the respective costs to be

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11} = 10, & a_{12} = 5, & a_{13} = 6, & a_{14} = 7, \\
 a_{21} = 8, & a_{22} = 2, & a_{23} = 7, & a_{24} = 6, \\
 a_{31} = 9, & a_{32} = 3, & a_{33} = 4, & a_{34} = 8.
 \end{array} \quad (10)$$

Substituting from (4)-(10) into the cost expression (1) we find

$$y = 645 + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} - 4x_{21} - 4x_{22} - 5x_{24} \quad (11)$$

showing a cost 645 at the vertex where the six parametric x 's are zero, not a best vertex since the x 's with negative coefficients might be given positive values.

4. Finding a better vertex. We may now let x_{21} increase from zero to its maximum value 15, keeping the other five parameters zero. Inspection of (6) shows then $x_{31} = 0$, i.e. we pass along an edge of the X-region to a new vertex where x_{31} is zero instead of x_{21} . Eliminating x_{21} by aid of (6) we obtain the new system

$$x_{14} = 25 - x_{11} - x_{12} - x_{13} \quad (12)$$

$$x_{23} = 10 - x_{22} - x_{24} + x_{11} + x_{31} \quad (13)$$

$$x_{21} = 15 - x_{11} - x_{31} \quad (14)$$

$$x_{32} = 20 - x_{12} - x_{22} \quad (15)$$

$$x_{33} = 20 - x_{11} - x_{13} - x_{31} + x_{22} + x_{24} \quad (16)$$

$$x_{34} = 10 - x_{24} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \quad (17)$$

and

$$y = 585 + 6x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{31} - 4x_{22} - 5x_{24} \quad (18)$$

[229] showing that at the new vertex the cost is 585 or 60 less than at the first vertex.

Continuing in the same way we next eliminate x_{22} and introduce x_{23} as parameter, using (13). At the same time, for brevity, we can eliminate x_{24} and introduce x_{34} , using (17). We obtain

$$x_{14} = 25 - x_{11} - x_{12} - x_{13} \quad (19)$$

$$x_{22} = x_{31} + x_{34} - x_{12} - x_{13} - x_{23} \quad (20)$$

$$x_{21} = 15 - x_{11} - x_{31} \quad (21)$$

$$x_{32} = 20 - x_{31} - x_{34} + x_{13} + x_{23} \quad (22)$$

$$x_{33} = 30 - x_{23} - x_{13} \quad (23)$$

$$x_{24} = 10 - x_{34} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \quad (24)$$

and

$$y = 535 + x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 4x_{23} + x_{34}. \quad (25)$$

The absence of negative signs in the last equation shows that we have a "best vertex" by setting the parametric x 's equal to zero, and the required minimum cost is 535. The problem is therefore solved.

The method is quite general and can always be used in such problems. This example, however, presents some interesting features. First we note the absence of the parameter x_{31} from the cost expression (25). It follows that there is some latitude in the manner of distribution. For, keeping the other five parameters zero, we can vary x_{31} from zero to its maximum 15, with consequent changes in x_{22} , x_{21} , and x_{32} , seen from (20), (21), and (22), without altering the cost from 535. The cost is constant all along an edge of the X-region.

Moreover setting $x_{31} = 15$, still keeping the other five parameters zero, will entail $x_{21} = 0$, by (21). We have arrived at an extremity of the edge along which y is constant, and have another “best vertex” with, of course, the same cost. That is to say, a “best vertex” need not be unique.

Another interesting feature of this example is that, setting the six parametric x 's of (19)-(25) equal to zero we *also* have $x_{22} = 0$, that is we have *seven* of the x 's zero at this best vertex. Since *any six* of these could be used as parameters, we have various ways for expressing y at this vertex. Suppose we decide to use x_{22} as parameter instead of x_{34} , which we can eliminate by aid of (20). We get

$$y = 535 + x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 5x_{23} + x_{22} - x_{31}. \quad (26)$$

[230] We might at first think that, by giving to x_{31} a positive value, we could obtain a cost less than 535, contradicting previous results. But if the other five parameters in (26) are kept zero we cannot increase x_{31} because by (20), this would entail a negative value for x_{34} . In other words the *absence* of negative signs in the expression for y at a vertex is sure sign of a “best vertex” but the *presence* of a negative is not sure proof of the contrary. The test, as just illustrated, is whether we are able to *increase* a parameter having a negative coefficient.

La distribution d'un produit de plusieurs sources à de nombreuses localités

Frank L. Hitchcock

Énoncé du problème. Lorsque plusieurs usines fournissent un produit à un certain nombre de villes, nous recherchons le mode de distribution le moins coûteux. En raison des taux de fret et d'autres facteurs, le coût d'une tonne de produit dans une ville donnée varie en fonction de l'usine qui la fournit et varie également d'une ville à l'autre.

Soit le coût d'une tonne de produit de l'usine i dans la ville j noté a_{ij} et le nombre de tonnes expédiées noté x_{ij} . Le coût total y sera alors :

$$y = \sum a_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

additionnés pour $i = 1, 2, \dots, m$ et $j = 1, 2, \dots, n$ s'il y a m usines et n villes.

Soit f_i le produit total expédié de l'usine i vers les n villes ; cela signifie que nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} &= f_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} &= f_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} &= f_m \end{aligned} \tag{F}$$

que l'on peut appeler par commodité les équations F.

Soit le produit total consommé par la j^e ville égal à c_j tonnes ; nous avons donc les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} &= c_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} &= c_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} &= c_n \end{aligned} \tag{C}$$

que l'on peut appeler les équations C.

Les équations F et les équations C forment ensemble un système de $m+n$ équations qui doivent être satisfaites par les mn inconnues x_{ij} . Mais, puisque le total expédié par les usines est égal au total consommé par les villes, la somme des équations F est égale à la somme des équations C, ce qui fait que les équations ne sont pas indépendantes. On peut facilement montrer que l'on peut omettre *n'importe quelle* équation et résoudre le reste pour un ensemble correctement choisi de $m+n-1$ x paramètres en fonction des autres paramètres x . Si les résultats sont substitués dans (1), nous aurons une expression pour y définie par $mn - (m+n-1)$ paramètres.

De par la nature du problème, aucune des inconnues x_{ij} ne peut être négative, et aucune x_{ij} ne peut dépasser le plus petit des deux nombres f_i et c_j .

2. Interprétation géométrique. Une image géométrique sera utile. Si les mn inconnues x_{ij} sont des coordonnées cartésiennes dans un espace à mn dimensions, puisque nous avons $m + n - 1$ équations indépendantes reliant ces variables, la région correspondant aux valeurs possibles des x sera de $mn - (m + n - 1)$ dimensions en accord avec le nombre de paramètres trouvé ci-dessus. Puisque les valeurs possibles des x sont limitées par zéro d'une part et par f_i ou c_j d'autre part, la région des possibilités est une région fermée dans l'espace à mn dimensions. Cette région dans laquelle les valeurs significatives des x se produisent sera appelée, par souci de concision, la région X.

Le coût y est, d'après (1), une fonction linéaire de la position dans la région X. La plus petite valeur de y se produira en un point quelconque de la *frontière* de la région X, puisqu'une fonction linéaire ne peut atteindre sa plus petite valeur dans l'espace libre¹.

En tout point de la frontière de la région X, au moins un des x doit être nul. Au moins un des x doit avoir une de ses valeurs extrêmes sinon le point ne serait pas sur la frontière. Et si l'un des x a sa valeur maximale, un ou plusieurs autres x doivent être nuls, par la forme des équations F et des équations C.

Puisque la région X est de dimension $mn - m - n + 1$, une partie de sa frontière sur laquelle l'un des x est nul sera de dimension $mn - m - n$. En prenant un point sur cette partie de la frontière de la région X, nous pouvons nous déplacer dans une direction en diminuant y jusqu'à ce que nous arrivions à un point où un *autre* x atteint une valeur limite, et là au moins un autre x doit être nul. La région où deux x sont nuls sera de dimension $mn - m - n - 1$. En procédant de cette manière, nous finirons par atteindre un point où $mn - m - n + 1$ x sont nuls, c'est-à-dire un point fixe sur la frontière de la région X qui peut être appelé un *sommet*.

La valeur de y à un sommet n'est pas nécessairement sa plus petite valeur mais la plus petite valeur doit se trouver à un sommet *donné* qui peut être appelé un *sommet optimal*². Si l'ensemble des $mn - m - n + 1$ x qui sont nuls à un sommet sont pris comme paramètres et les autres x éliminés de (1), l'expression de y prendra la forme suivante :

$$y = M + \sum kx \tag{2}$$

où M est une constante et $\sum kx$ une combinaison linéaire des x paramètres. *Si aucun des coefficients k de ce résultat n'est négatif, le sommet est un « sommet optimal » et M est le coût minimum requis.* Car $y = M$ au sommet, et si un quelconque paramètre x est différent de zéro, le coût y est plus élevé.

1. L'expression *free space* a sans doute une traduction mathématique plus satisfaisante que celle indiquée ici.

2. Nous traduisons *best vertex* par *sommet optimal* et *better vertex* par *meilleur sommet*.

La méthode consiste à trouver un sommet et à former l'expression de y en fonction des x qui sont nuls à ce sommet. On peut voir par inspection si nous avons un « sommet optimal ». Si ce n'est pas le cas, on peut toujours passer facilement à un meilleur sommet, c'est-à-dire un sommet donnant une plus petite valeur de y et continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait un sommet optimal.

3. Trouver un sommet. Un sommet peut toujours être trouvé rapidement de la manière suivante. Soit les équations F et les équations C considérées simultanément sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{11} + & x_{12} & \dots & x_{1n} & f_1 & \\
 x_{21} + & x_{22} & \dots & x_{2n} & f_2 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \text{(FC)} \\
 x_{m1} + & x_{m2} & \dots & x_{mn} & f_m & \\
 c_1 & c_2 & \dots & c_n & &
 \end{array}$$

où la somme des x en ligne est égale au f de droite et la somme des x en colonne est égale au c du bas. Nous pouvons supposer que les usines et les villes sont numérotées de telle sorte qu'aucun f n'est inférieur à tout f au-dessus de lui, et qu'aucun c n'est inférieur à tout c à sa gauche. On prend maintenant tous les x de la première ligne égaux à zéro sauf x_{1n} qui est alors égal à f_1 ou bien on prend tous les x de la première colonne égaux à zéro sauf x_{m1} qui est alors égal à c_1 . Un de ces deux procédés est toujours possible. Supposons le premier cas, c'est-à-dire $x_{1n} = f_1$. On écarte maintenant la première ligne en remplaçant c_n en bas par $c_n - f_1$ supposé positif. Si cette quantité est négative, la première procédure est impossible et on prend $x_{m1} = c_1$, on laisse tomber la première colonne et on remplace f_m par $f_m - c_1$ qui n'est pas négatif si $c_n - f_1$ est négatif comme on le voit facilement.

Nous avons ainsi réduit le tableau initial à un tableau plus petit, correspondant à une usine de moins ou à une ville de moins, selon le cas. On continue ensuite de la même manière jusqu'à ce que l'on ait rendu nul $mn - m - n + 1$ des inconnues x et que l'on ait ainsi un sommet.

Pour illustrer, prenons l'exemple de quatre villes et trois usines avec le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & 25 & \\
 x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 25 & \text{(3)} \\
 x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 50 & \\
 15 & 20 & 30 & 35 & &
 \end{array}$$

L'une ou l'autre des procédures mentionnées ci-dessus est possible. En adoptant la première, on fixe $x_{11} = x_{12} = x_{13} = 0$, $x_{14} = 25$, on laisse tomber la première ligne et on remplace 35 en bas par $35 - 25$ ou 10. On obtient un tableau comme celui-ci pour deux usines et quatre villes, à savoir :

$$\begin{array}{ccccc}
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 25 \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 50 \\
15 & 20 & 30 & 10 &
\end{array}$$

Comme le plus grand nombre en bas est 30, la troisième colonne jouera maintenant le rôle d'une colonne de droite mais il n'est guère nécessaire de réécrire le tableau. On se contente de fixer $x_{21} = x_{22} = x_{24} = 0$ et $x_{23} = 25$. Il en résulte $x_{31} = 15$, $x_{32} = 20$, $x_{33} = 5$ et $x_{34} = 10$. L'ensemble du processus peut être réalisé sur le tableau original (3) :

$$\begin{array}{ccccc}
(x_{11})0 & (x_{12})0 & (x_{13})0 & (x_{14})25 & 25 \\
\hline
[x_{21}]0 & [x_{22}]0 & [x_{23}]25 & [x_{24}]0 & 25 \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 50 \\
15 & 20 & [30]5 & (35)10 &
\end{array}$$

où, dans la première ligne, les valeurs à droite de chaque x sont celles à utiliser, les parenthèses faisant référence à la première étape du processus. Dans la deuxième ligne, les valeurs à droite de chaque x sont celles à utiliser, les parenthèses faisant référence à la deuxième étape du travail. Enfin, les valeurs qui restent en bas sont celles des x de la dernière rangée. L'ensemble se vérifie aisément comme on peut le constater en additionnant les lignes et les colonnes. La méthode est générique et peut être utilisée dans tous les cas pour trouver un sommet.

Nous choisissons maintenant les x qui ont été fixés à zéro comme paramètres, exprimons les autres x en fonction de ceux-ci et les substituons dans l'expression du coût (1). Il s'agit d'un calcul simple et nous trouvons :

$$x_{14} = 25 - x_{11} - x_{12} - x_{13} \quad (4)$$

$$x_{23} = 25 - x_{21} - x_{22} - x_{24} \quad (5)$$

$$x_{31} = 15 - x_{11} - x_{21} \quad (6)$$

$$x_{32} = 20 - x_{12} - x_{22} \quad (7)$$

$$x_{33} = 5 - x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{24} \quad (8)$$

$$x_{34} = 10 - x_{24} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \quad (9)$$

équations qui montrent par leur forme qu'un sommet est obtenu lorsque les x de droite sont nuls, les autres étant laissés avec des valeurs possibles. La configuration de la région X et le nombre de ses sommets dépendent des constantes f et c et non des coûts a_{ij} .

Supposons maintenant que les coûts respectifs soient :

$$\begin{array}{cccc}
a_{11} = 10, & a_{12} = 5, & a_{13} = 6, & a_{14} = 7, \\
a_{21} = 8, & a_{22} = 2, & a_{23} = 7, & a_{24} = 6, \\
a_{31} = 9, & a_{32} = 3, & a_{33} = 4, & a_{34} = 8.
\end{array} \quad (10)$$

En substituant (4)-(10) dans l'expression du coût (1), on trouve :

$$y = 645 + 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} - 4x_{21} - 4x_{22} - 5x_{24} \quad (11)$$

montrant un coût de 645 au sommet où les six paramètres x sont nuls, ce qui n'est pas le sommet optimal puisque les x à coefficients négatifs pourraient recevoir des valeurs positives.

4. Trouver un meilleur sommet. Nous pouvons maintenant laisser x_{21} augmenter de zéro à sa valeur maximale 15, en gardant les cinq autres paramètres à zéro. L'inspection de (6) montre alors que $x_{31} = 0$, c'est-à-dire que nous passons le long d'une frontière de la région X à un nouveau sommet où x_{31} est zéro au lieu de x_{21} . En éliminant x_{21} à l'aide de (6), on obtient le nouveau système :

$$x_{14} = 25 - x_{11} - x_{12} - x_{13} \quad (12)$$

$$x_{23} = 10 - x_{22} - x_{24} + x_{11} + x_{31} \quad (13)$$

$$x_{21} = 15 - x_{11} - x_{31} \quad (14)$$

$$x_{32} = 20 - x_{12} - x_{22} \quad (15)$$

$$x_{33} = 20 - x_{11} - x_{13} - x_{31} + x_{22} + x_{24} \quad (16)$$

$$x_{34} = 10 - x_{24} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \quad (17)$$

et

$$y = 585 + 6x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{31} - 4x_{22} - 5x_{24} \quad (18)$$

montrant qu'au nouveau sommet le coût est de 585, soit 60 de moins qu'au premier sommet.

En continuant de la même manière, nous éliminons ensuite x_{22} et introduisons x_{23} comme paramètre, en utilisant (13). En même temps, pour des raisons de brièveté, nous pouvons éliminer x_{24} et introduire x_{34} , en utilisant (17). Nous obtenons :

$$x_{14} = 25 - x_{11} - x_{12} - x_{13} \quad (19)$$

$$x_{22} = x_{31} + x_{34} - x_{12} - x_{13} - x_{23} \quad (20)$$

$$x_{21} = 15 - x_{11} - x_{31} \quad (21)$$

$$x_{32} = 20 - x_{31} - x_{34} + x_{13} + x_{23} \quad (22)$$

$$x_{33} = 30 - x_{23} - x_{13} \quad (23)$$

$$x_{24} = 10 - x_{34} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \quad (24)$$

et

$$y = 535 + x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 4x_{23} + x_{34}. \quad (25)$$

L'absence de signe négatif dans la dernière équation montre que nous avons un « sommet optimal » en fixant les x paramètres à zéro et que le coût minimum requis est de 535. Le problème est donc résolu.

La méthode est assez générique et peut toujours être utilisée dans de tels problèmes. Cet exemple présente cependant quelques caractéristiques intéressantes. On note tout d'abord l'absence du paramètre x_{31} dans l'expression du coût (25). Il s'ensuit qu'il existe une certaine latitude dans le mode de distribution. En effet, en gardant les cinq autres paramètres à zéro, nous pouvons faire varier x_{31} de zéro à son maximum 15, avec des changements conséquents dans x_{22} , x_{21} , et x_{32} , vus de (20), (21) et (22), sans altérer le coût de 535. Le coût est constant tout le long d'une frontière de la région X.

De plus, en fixant $x_{31} = 15$, tout en gardant les cinq autres paramètres nuls, on obtient $x_{21} = 0$, par (21). Nous sommes arrivés à une extrémité de l'arête le long de laquelle y est constant, et nous avons un autre « sommet optimal » avec, bien sûr, le même coût. En d'autres termes, un « sommet optimal » n'est pas forcément unique.

Une autre caractéristique intéressante de cet exemple est que, en fixant les six x paramètres de (19)-(25) à zéro, nous avons aussi $x_{22} = 0$, c'est-à-dire que nous avons *sept* des x à zéro à ce sommet optimal. Puisque *six* d'entre eux peuvent être utilisés comme paramètres, nous avons plusieurs façons d'exprimer y à ce sommet. Supposons que nous décidions d'utiliser x_{22} comme paramètre au lieu de x_{34} , que nous pouvons éliminer à l'aide de (20). Nous obtenons :

$$y = 535 + x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 5x_{23} + x_{22} - x_{31}. \quad (26)$$

On pourrait d'abord penser qu'en donnant à x_{31} une valeur positive, on pourrait obtenir un coût inférieur à 535, ce qui contredit les résultats précédents. Mais si les cinq autres paramètres de (26) sont maintenus nuls, nous ne pouvons pas augmenter x_{31} car avec (20), cela impliquerait une valeur négative pour x_{34} . En d'autres termes, l'*absence* de signes négatifs dans l'expression de y à un sommet est un signe certain d'un « sommet optimal » mais la *présence* d'un signe négatif n'est pas une preuve certaine du contraire. Le test, comme nous venons de l'illustrer, est de savoir si nous sommes capables d'augmenter un paramètre ayant un coefficient négatif.

groupe f.m.r.



La collection « [textes](#) » du groupe fmr (flux, matrices, réseaux) propose des rééditions bilingues d'articles consacrés à l'analyse de réseaux.

Disponibles en ligne

- L. Beauguitte, P. Beauguitte et P. Gourdon, 2021, « [William L. Garrison, 1960, Connectivity of the Interstate Highway System](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Joseph B. Kruskal, 1956, On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [E.W. Dijkstra, 1959, A Note on Two Problems in Connexion with Graphs](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1951, Application of Matrix Algebra to Communications Nets](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Alfonso Shimbel, 1953, Structural Parameters of Communication Networks](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Z. Prihar, 1956, Topological Properties of Telecommunication Networks](#) ».
- L. Beauguitte et M. Maisonobe, 2021, « [Alex Bavelas, 1948, A Mathematical Model for Group Structures](#) ».
- L. Beauguitte et J. Fen-Chong, 2021, « [Alex Bavelas, 1950, Communication Patterns in Task-Oriented Groups](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [Forrest R. Pitts, 1965, A Graph Theoric Approach to Historical Geography](#) ».
- L. Beauguitte, 2021, « [M. L. Northway, 1940, A method for depicting social relationships obtained by sociometric testing](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2021, « [John D. Nystuen and Michael F. Dacey, 1961, A Graph Theory Interpretation of Nodal Regions](#) ».
- F. Bahoken et L. Beauguitte, 2022, « [Edward L. Ullman, 1949, Mapping the world's ocean trade : A research proposal](#) ».
- L. et P. Beauguitte, 2022, « [F. L. Hitchcock, 1941, The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities](#) ».