HAL
open science

Les hérissons (hedgehogs) : Exposé dans le séminaire de géométrie spinorielle de Nancy-19 juin 2001

Yves Martinez-Maure

To cite this version:

Yves Martinez-Maure. Les hérissons (hedgehogs) : Exposé dans le séminaire de géométrie spinorielle de Nancy-19 juin 2001. 2022. hal-03558969

HAL Id: hal-03558969

https://hal.science/hal-03558969

Preprint submitted on 5 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les hérissons (Hedgehogs).

Nancy le, 19 juin 2001.
Yves Martinez-Maure

Plan de l'exposé :

- Présentation des hérissons.
- Des exemples d'applications.
- Deux problèmes ouverts.
- Conclusion.

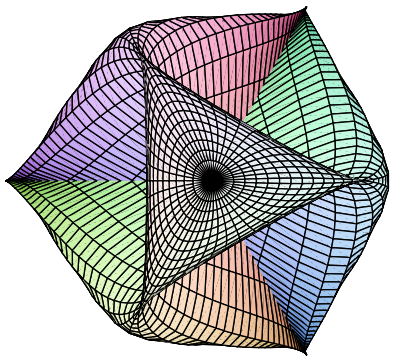


FIG. 1 – *Une version hérisson de la surface romaine de Steiner [5] .*

1 Qu'est-ce qu'un hérisson?

L'ensemble $\mathcal{K}^{n+1}$ des corps convexes de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ peut être muni d'une addition, dite de Minkowski, et d'une multiplication par un scalaire :

$$(i) \quad \forall (K,L) \in \left(\mathcal{K}^{n+1}\right)^2, K+L = \{u+v \,|u \in K, v \in L\};$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall K \in \mathcal{K}^{n+1}, \lambda K = \{\lambda u \,|u \in K\}.$$

Mais, bien sûr, ces lois n'en font pas un espace vectoriel car il est impossible de définir dans $\mathcal{K}^{n+1}$ une soustraction qui soit l'opération inverse de l'addition. Par contre, l'ensemble $\mathcal{H}^{n+1}$ des différences formelles de corps convexes de $\mathbb{R}^{n+1}$, son symétrisé pour l'addition de Minkowski, constitue un espace vectoriel dans lequel $\mathcal{K}^{n+1}$ est un cône. Les hérissons fournissent une représentation géométrique naturelle des éléments de cet espace.

Par souci de simplicité, nous restreignons notre étude aux corps convexes K de classe C^2_+ (i.e. dont le bord ∂K est une hypersurface C^2 à courbure de Gauss > 0). La différence de deux tels corps convexes K et L peut être définie géométriquement comme suit : on associe à tout $p \in \mathbb{S}^n$, le point $x_K(p) - x_L(p)$, où $x_K(p)$ (resp. $x_L(p)$) est le point de ∂K (resp. ∂L) où p est le vecteur normal sortant (cf. figure 2). On obtient ainsi une hypersurface qui peut être singulière. R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg lui ont donné le nom de hérisson (la distribution des vecteurs normaux fait penser aux piquants de l'animal) [LLR]. Les premiers travaux pour étendre la théorie des corps convexes aux hérissons semblent dus à H. Geppert [G].

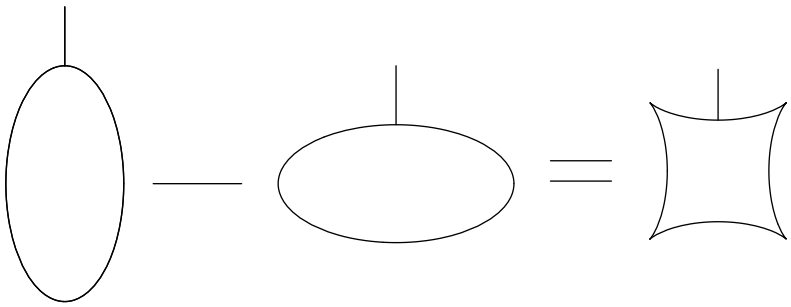


FIG. 2 – *Une différence de corps convexes.*

Soit $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un corps convexe de classe C^2_+ et $h_K : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ sa fonction support : $h_K(p) = \sup(\{\langle x,p\rangle \,|x \in K\})$, où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire standard. Rappelons que cette fonction est de classe C^2 [S2, p. 106]. L'hypersurface ∂K est déterminée par h_K comme enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation

$$\langle x,p\rangle = h_K(p)$$

($h_K(p)$ est la distance signée de l'hyperplan tangent de vecteur normal sortant p à l'origine $0_{\mathbb{R}^{n+1}}$; elle est < 0 si p pointe dans le demi-espace contenant $0_{\mathbb{R}^{n+1}}$) : à tout $p \in \mathbb{S}^n$ correspond l'unique solution du système

$$\begin{cases} \langle x,p\rangle = h_K(p) \\ \langle x,X\rangle = (dh_K)_p(X) \text{ pour tout } X \in T_p\mathbb{S}^n \end{cases},$$

soit $x_{h_K}(p) = h_K(p)\,p + (\nabla h_K)(p)$. Lorsqu'on effectue comme précédemment la différence $K - L$ de deux corps convexes de classe C^2_+, on obtient l'hypersurface paramétrée par

$$x_h : \begin{array}{l} \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \\ u \mapsto h(u)u + (\nabla h)(u) \end{array},$$

où $h = h_K - h_L \in C^2(\mathbb{S}^n;\mathbb{R})$, enveloppe la famille d'hyperplans d'équation

$$\langle x,p\rangle = h(p).$$

Cette hypersurface $\mathcal{H}_h = x_h(\mathbb{S}^n)$ est appelée le **hérisson** de fonction support h. Chaque partie régulière de $\mathcal{H}_h$ a une orientation transverse pour laquelle $p \in \mathbb{S}^n$ n'est autre que le vecteur normal en $x_h(p)$; x_h s'interprète donc comme l'inverse de l'application de Gauss de $\mathcal{H}_h$. Un hérisson de fonction support C^2 est donc une enveloppe admettant exactement un hyperplan support coorienté de vecteur normal donné (cf. figure 3).

Plus généralement, on peut associer un hérisson à toute différence formelle de corps convexes de $\mathbb{R}^{n+1}$ (cf. [9] pour le cas $n = 1$) et considérer, par exemple, des polygones ou des polyèdres hérissons [9, RR]. On peut naturellement considérer des hérissons qui ne sont modelés que sur une partie de $\mathbb{S}^n$ comme, par exemple, les hérissons minimaux (i.e. de courbure moyenne nulle) : les hérissons minimaux sont les surfaces minimales (branchées ou non branchées) de $\mathbb{R}^3$ qui ont au plus un plan tangent coorienté dans chaque direction, comme la caténoïde ou la surface de Enneper. On peut aussi considérer

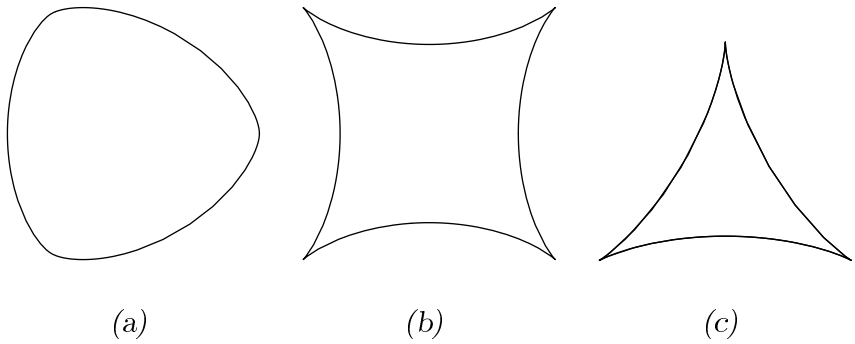


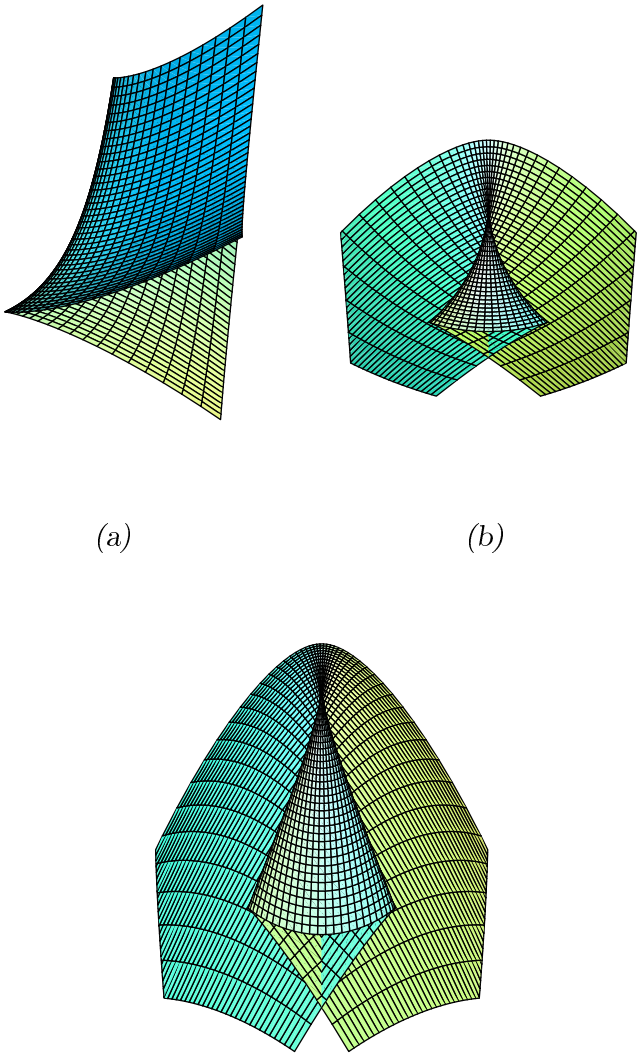
FIG. 3 – *Trois types de hérissons plans: (a) convexe régulier, (b) de largeur moyenne nulle, (c) projectif.*

des hérissons de fonction support C^1, mais un tel hérisson ne représente pas nécessairement une différence de corps convexes et peut être fractal [12]. On peut enfin considérer des "N-hérissons", enveloppes de famille d'hyperplans coorientés de $\mathbb{R}^{n+1}$ comprenant exactement N hyperplans de vecteur normal donné. Les hérissons sont simplement les 1-hérissons.

La restriction à $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ de la 1-forme $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i dy_i$ sur $(\mathbb{R}^{n+1})^2$, où $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}; y_1, \ldots, y_{n+1})$, définit une structure de contact qui fait de $\pi : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ une fibration de Legendre. Les hérissons $x_h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ sont des applications de Legendre de ce fibré et ils forment un ouvert parmi ces applications. Les travaux d'Arnold [Ar1] fournissent ainsi la classification des singularités génériques des hérissons de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour tout $n \leq 5$ [1]. Pour $n = 1$, ce sont les points de rebroussement de 1ère espèce et pour $n = 2$, les arêtes de rebroussement et les queues d'aronde (on en distingue deux types selon le signe de la courbure sur la "queue") [1, LLR] : voir la figure 4.

2 Quelques applications des hérissons.

Si l'on peut considérer au premier abord que tous les corps convexes de classe C^2_+ se ressemblent, il est manifeste que les hérissons de fonction support C^2 présentent une très grande variété de formes et notamment de lieux singuliers. C'est pourquoi de très nombreux problèmes de la théorie des corps convexes peuvent être résolus plus aisément quand ils sont reformulés en termes de hérissons. En voici un exemple :



(a) *(b)*

(c)

FIG. 4 – *Les singularités génériques dans* $\mathbb{R}^3$.

L'énoncé suivant était conjecturé depuis fort longtemps :

(C) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface fermée convexe de classe C^2_+. Si ses courbures principales K_1, K_2 vérifient l'inégalité $(K_1 - c)(K_2 - c) \leq 0$ pour une constante c, alors S est une sphère de rayon $r = c^{-1}$.

La conjecture avait été établie dans les cas particuliers suivants : surfaces analytiques (A.D. Aleksandrov [A1, A2], H.F. Münzner [M2]), de révolution (H.F. Münzner [M2]) ou dont une projection orthogonale est circulaire (D. Koutroufiotis [K], R. Schneider [S1]) ; mais elle restait ouverte dans le cas général...

En retranchant à S la sphère $S(0_{\mathbb{R}^3}; r)$, de centre l'origine $0_{\mathbb{R}^3}$ et de rayon r, elle peut être reformulée comme suit en termes de hérissons :

(H) Si $\mathcal{H}_h$ est un hérisson à fonction de courbure (i.e. inverse de la courbure de Gauss) $R_h = 1/K_h \leq 0$, alors $\mathcal{H}_h$ est réduit à un point.

Il est clair que tout hérisson à fonction de courbure ≤ 0 est dans l'enveloppe convexe de ses singulatités. L'idée directrice est que chaque singularité nécessite une telle place à la souce $\mathbb{S}^2$ que le hérisson ne peut en admettre plus d'une et qu'il se réduit donc à un point. L'étude des projections orthogonales de $\mathcal{H}_h$ permet de préciser la représentation sphérique de ses singularités. Cette approche permet de redémontrer tous les résultats partiels connus, d'établir la conjecture pour les surfaces convexes de largeur constante et surtout d'infirmer la conjecture dans sa généralité. Elle révèle en effet l'existence de hérissons à fonction de courbure ≤ 0 dont les singularités ont une représentation sphérique réduite à un demi-cercle. La surface définie par $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u,v) \longmapsto (x,y,z) = r^4(u,1,uv)$, où $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ peut être vue comme un tel hérisson : la représentation sphérique de sa singularité de type bonnet croisé (cf. figure 5) se réduit à un demi-cercle. Ce hérisson n'est modelé que sur $\mathbb{S}^2$ privée du demi-cercle $z = 0$, $x \leq 0$, mais il permet d'imaginer un exemple de hérisson à fonction de courbure ≤ 0 infirmant la conjecture dans sa forme générale. On peut en effet construire une surface fermée formée de 4 bonnets croisés et lui donner une forme de selle de cheval propre à faire disparaître la courbure positive (voir [13] pour plus de détails). Par dualité projective, il s'ensuit qu'une 2-sphère peut être C^2-plongée dans $\mathbb{S}^3$ avec une courbure extrinsèque ≤ 0 sans être totalement géodésique.

Les méthodes volumiques jouent un rôle important dans la théorie des corps convexes. Le volume (algébrique) d'un hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^{n+1}$ peut être défini par

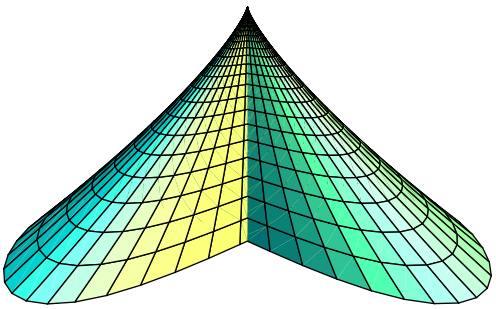


FIG. 5 – *Une singularité hérisson de type bonnet croisé.*

$$v(h) = \frac{1}{n+1} \int_{\mathbf{S}^n} h.R_h \, d\sigma,$$

où R_h est la fonction de courbure de $\mathcal{H}_h$. Géométriquement, il s'interprète comme l'intégrale sur $\mathbb{R}^{n+1} - \mathcal{H}_h$ de l'indice $i_h(x)$, nombre algébrique d'intersections d'une demi-droite orientée d'origine x avec le hérisson $\mathcal{H}_h$ munie de son orientation transverse (indépendant de la demi-droite pour un ouvert dense de directions). Pour les corps convexes de $\mathbb{R}^{n+1}$, les principales inégalités géométriques résultent de l'inégalité d'Alexandrov-Fenchel

$$v(K_1,...,K_{n+1})^2 \geq v(K_1,K_1,K_3,...,K_{n+1})\, v(K_2,K_2,K_3,...,K_{n+1}),$$

entre volumes mixtes [S2]. Cette inégalité s'étend partiellement aux hérissons [8]. On en déduit une série d'inégalités géométriques dont une inégalité de type Brünn-Minkowski pour deux hérissons associés à $n-1$ corps convexes. Depuis W. Blaschke [B], on cherche la meilleure inégalité de la forme $V \geq f(S,M)$, où V, S et M sont respectivement le volume, l'aire et l'intégrale de la courbure moyenne d'un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^3$. L'extension partielle de l'inégalité d'Alexandrov-Fenchel a permis d'établir une inégalité de ce type pour certains corps convexes. On peut munir certains espaces de hérissons de produits scalaires définis en termes d'aire. Par exemple, $h \mapsto \sqrt{aire\,[x_h(S)]}$ est une norme associée à un produit scalaire sur l'espace des hérissons minimaux définis (à translation près) sur un domaine compact $S \subset \mathbb{S}^2$ (cela s'étend à des aires asymptotiques de bouts plongés) [3].

Parmi les problèmes qui peuvent être avantageusement reformulés en termes de hérissons, citons les problèmes qui touchent aux corps convexes de largeur constante, objet de nombreux travaux (voir par exemple [CG]). Un corps convexe $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est de largeur constante r si la distance entre deux

hyperplans support parallèles quelconques est égale à r. Un tel corps K est la somme de la sphère $S\left(0_{\mathbb{R}^{n+1}}; r/2\right)$ et du hérisson qui est formé des milieux de ses diamètres ; ce hérisson, disons $\mathcal{H}_h$, est dit projectif car il est modelé sur $\mathbb{S}^n/$(antipodie) [2]. Naturellement, les propriétés de K sont souvent apparentes dans la géométrie de $\mathcal{H}_h$.

Si K est un corps convexe plan de fonction support C^2, la développée (i.e. le lieu des centres de courbure) de ∂K est le hérisson de fonction support $h'\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$. On établit ainsi que :

Théorème [4, 10]**.** *Si $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ est un hérisson convexe de largeur constante, il existe un point de $\mathbb{R}^2$ par lequel il passe une infinité de normales à $\mathcal{H}_h$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^2$ formé de points par lesquels il passe au moins 6 normales (pour tout $u \in \mathbb{S}^1$, la droite passant par $x_h(u)$ et dirigée par u est considérée comme une normale à $\mathcal{H}_h$). Par ailleurs, $\mathcal{H}_h$ admet au moins 6 sommets pour $h \in C^3\left(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}\right)$.*

Théorème [15]**.** *Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ une courbe convexe de largeur constante de classe C^4_+ dont les sommets sont non dégénérés. Alors : (i) $\mathcal{C}$ admet exactement 6 sommets si, et seulement si, il passe exactement 6 normales par chaque point intérieur de sa développée; (ii) si $\mathcal{C}$ a plus de 6 sommets, son intérieur contient un ouvert formé de points par lesquels il passe au moins 10 normales.*

Le théorème des 4 sommets assure qu'une courbe fermée simple et convexe de $\mathbb{R}^2$ a au moins 4 sommets (voir par exemple [BG] ; l'hypothèse "convexe" n'est pas nécessaire [BF]). Ce théorème et sa variante pour les courbes convexes de largeur constante tiennent essentiellement au théorème de Sturm-Hurwitz [T] :

Théorème de Sturm-Hurwitz. *Toute fonction continue développable en série de Fourier $f(\theta) = \sum_{n \geq N} \left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$ a au moins autant de zéros que sa première harmonique non nulle :*

$$Card\left(\{\theta \in [0,2\pi[\,|f(\theta) = 0\}\right) \geq 2N.$$

En effet, les sommets d'un hérisson convexe $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ de fonction support C^3 correspondent aux singularités de sa développée, c'est-à-dire aux zéros de $R_{h'} = h' + h'''$. Or, on vérifie aisément que pour cette fonction $N \geq 2$ (resp. $N \geq 3$ si le hérisson est de largeur constante car alors toutes les harmoniques

d'ordre pair sont nulles). Au sujet du théorème de Sturm-Hurwitz, V.I. Arnold déclare [Ar2] « There are many proofs of this theorem but all of them are incomprehensible. Of course, I can reproduce them but you get no intuition from these proofs » car il en escompte de fructueuses généralisations (aux quasifonctions, à la dimension supérieure, etc). Or, ce théorème peut s'interpréter en termes de « N-hérissons»>et on peut en déduire une preuve géométrique pour les fonctions C^2 [16]. Dans $\mathbb{R}^2$, les N-hérissons sont définis en associant à toute fonction réelle $2N\pi$-périodique $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, l'enveloppe $\mathcal{H}_h$ de la famille de droites d'équation

$$\langle x,u(\theta)\rangle = h(\theta),$$

où $u(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, c'est-à-dire la courbe paramétrée par :

$$x_h : [0,2\pi N] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \theta \mapsto x_h(\theta) = h(\theta)\, u(\theta) + h'(\theta)\, u'(\theta).$$

Un N-hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ admet donc, pour tout $u \in \mathbb{S}^1$, exactement N droites support de vecteur normal u. Les hérissons sont donc simplement les 1-hérissons. La preuve repose sur le résultat suivant :

Théorème. *Pour tout N-hérisson $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h,\ i_h(x) = N - \tfrac{1}{2} n_h(x),$$

où $i_h(x)$ est l'indice de x par rapport à $\mathcal{H}_h$ et $n_h(x)$ le nombre de droites support coorientées passant par x, c'est-à-dire le nombre de zéros de h_x : $[0,2N\pi[\to \mathbb{R}$, $\theta \longmapsto h(\theta) - \langle x,u(\theta)\rangle$.

Le théorème de Sturm-Hurwitz peut donc s'énoncer comme suit pour les fonctions de classe C^2 :

*Si $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^2$ est un N-*hérisson *tel que $h(N\theta) = \sum_{n\geq N} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$, alors tout $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$ a un indice $i_h(x) \leq 0$ par rapport à $\mathcal{H}_h$.*

Cette dernière propriété est facilement visualisable : le hérisson de la figure 3.a est d'indice partout ≥ 0 car il tourne en chaque point sa concavité vers l'intérieur alors que les hérissons des figures 3.b et 3.c sont d'indice partout ≤ 0 car ils la tournent vers l'extérieur.

3 Deux problèmes ouverts.

a) Le problème de Minkowski.

Pour les corps convexes, il s'agit du problème de la mesure d'aire de surface prescrite ou celui de la courbure de Gauss prescrite si l'on se place dans le cadre de la géométrie différentielle. Ce problème se pose naturellement pour les hérissons :

Quelles conditions nécessaires et suffisantes doit satisfaire une fonction réelle continue R sur $\mathbb{S}^n$ pour être la fonction de courbure d'un hérisson ?

Il est bien connu (voir le panorama de H.Gluck [GI]) qu'une fonction continue et positive K sur $\mathbb{S}^n$ qui vérifie la condition

$$(I) \quad \int_{\mathbb{S}^n} \frac{p}{K(p)}\, d\sigma(p) = 0,$$

est la courbure de Gauss (au sens de Gauss) d'une unique hypersurface convexe fermée H (pas nécessairement C^2). La condition (I) est encore nécessaire dans le cas hérisson (par exemple de par invariance du volume par translation) mais elle ne suffit plus à assurer l'existence d'un hérisson de fonction de courbure $R = 1/K$. Par exemple, une fonction continue R qui vérifie

$$(I) \quad \int_{\mathbb{S}^2} pR(p)d\sigma(p) = 0$$

ne peut être la fonction de courbure d'un hérisson si elle est < 0 sur $\mathbb{S}^2$ (car il n'existe pas de surface à courbure de Gauss < 0 dans $\mathbb{R}^3$). Nous avons vu cependant que la fonction de courbure d'un hérisson peut être ≤ 0 sur $\mathbb{S}^2$ (cf. contre-exemple à la caractérisation conjecturée de la sphère [13]). La condition (I) est insuffisante même si l'on suppose que R est une fonction lisse qui change de signe proprement sur $\mathbb{S}^2$ (i.e. $dR \neq 0$ sur $R = 0$) [11]. La résolution de ce problème aurait une importance considérable pour l'étude des hérissons, mais elle présenterait aussi un très grand intérêt pour l'étude des EDP de Monge-Ampère. En effet, il est bien connu [CY] que le classique problème de Minkowski se ramène à une EDP de Monge-Ampère de type elliptique à laquelle on peut appliquer la méthode de continuité. Dans le cadre hérisson, le problème se ramène encore à une EDP de Monge-Ampère mais qui change de type, or c'est une catégorie d'équations pour lequel on ne dispose à ce jour d'aucun résultat global, mais seulement de résultats locaux [L, Z].

b) Un théorème de Sturm-Hurwitz en dimension supérieure.

Comme V.I. Arnold l'a souligné dans une série d'articles, le théorème de Sturm-Hurwitz a une importance considérable en géométrie. Une extension à la dimension supérieure en aurait naturellement tout autant. Malgré de nombreuses tentatives (cf. [Ar2]), ce problème reste largement ouvert. Or, les hérissons ou leurs généralisations (multihérissons, quasi-hérissons, etc) pourraient bien constituer le bon support géométrique pour aborder cette question. Les résultats de E. Heil constituent un premier pas en direction d'un "théorème de Sturm-Hurwitz" en dimension supérieure [H1, H2] : (1) tout corps convexe non trivial $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ admet un point intérieur par lequel il passe au moins 6 normales ; (2) tout corps convexe $K \subset \mathbb{R}^3$ de largeur constante contient un point par lequel il passe une infinité de normales ou un ouvert formé de points par lesquels il passe au moins 10 normales.

4) Conclusion.

La théorie des hérissons est une "linéarisation" de celle des corps convexes. Elle sert à traiter des problèmes de la théorie des corps convexes par une re-formulation judicieuse dans un cadre géométrique plus riche (exemple : un contre-exemple à une caractérisation de la sphère [13]) ou à en étendre la portée par une formulation plus générale (exemple : l'extension d'inégalités géométriques classiques aux hérissons [8]). La notion de hérisson permet en outre d'étendre les concepts et les outils de la théorie à d'autres sujets (comme les surfaces minimales [3, LLR, RT]) ou de traiter par dualité des problèmes de théorie des singularités (voir les applications au théorème de la balle de Tennis [4, 10]). Les hérissons peuvent également fournir un bon support géométrique pour aborder certaines questions d'analyse : problèmes d'EDP (exemple : le problème de Minkowski étendu hérissons), d'analyse de Fourier (exemple : le théorème de Sturm-Hurwitz et ses extensions), etc. Enfin, les hérissons peuvent fournir des représentations intéressantes du plan projectif dans $\mathbb{R}^3$ ([5] présente une version hérisson de la surface romaine de Steiner), des exemples d'enveloppes fractales [12], etc.

Références de l'auteur.

[1] Thèse de doctorat de 3ème cycle, Feuilletages des surfaces et hérissons dans $\mathbb{R}^3$, Université Paris 7 (1985).

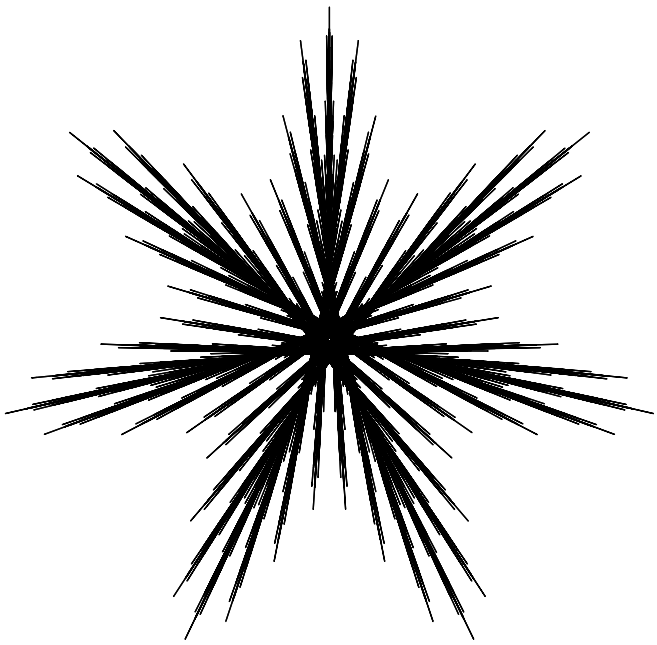


FIG. 6 – *Le hérisson fractal de fonction support* $h(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{8^n} \sin(7^n \theta)$.

[2] Hérissons projectifs et corps convexes de largeur constante, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 321 (1995), 439-442.

[3] Hedgehogs and area of order 2, Arch. Math. 67 (1996), 156-163.

[4] A Note on the Tennis Ball Theorem, Amer. Math. Monthly 103 (1996), 338-340.

[5] Sur les hérissons projectifs (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss) Bull. Sci. Math. 121 (1997), 585-601.

[6] Hedgehogs of constant width and equichordal points, Ann. Polon. Math. 67 (1997), 285-288.

[7] Geometric inequalities for plane hedgehogs, Demonstratio Math.32 (1999), 177-183.

[8] De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons, Arch. Math. 72 (1999) 444-453.

[9] Étude des différences de corps convexes plans, Ann. Polon. Math. 72 (1999) 71-78.

[10] Indice d'un hérisson : étude et applications, Publ. Mat. 44 (2000) 237-255.

[11] Hedgehogs and zonoids, Advances in Math. 158 (2001) 1-17.
[12] A fractal projective hedgehog, Demonstratio Math. 34 (2001) 59-63.
[13] Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 332 (2001), 41-44.
[14] Voyage dans l'univers des hérissons, dans Ateliers Mathematica, Vuibert (2001).
[15] Sommets et normales concourantes des courbes convexes de largeur constante et singularités des hérissons, à paraître dans Arch. Math.
[16] Les multihérissons et le théorème de Sturm-Hurwitz, à paraître dans Arch. Math.

Autres références.

[A1] A.D. Aleksandrov, On uniqueness theorem for closed surfaces (Russe), Doklady Akad. Nauk SSSR 22 (1939), 99-102.
[A2] A.D. Aleksandrov, On the curvature of surfaces (Russe), Vestnik Leningrad. Univ. 21 n°19 (1966), 5-11.
[Ar1] V.I. Arnold, Critical points of smooth functions, Proc. Int. Cong. Math., vol. 1, Vancouver, (1974), 19-39.
[Ar2] V.I. Arnold, Topological Problems in Wave Propagation Theory and Topological Economy Principle in Algebraic Geometry, Proceedings in honour to V. I. Arnold for his 60th birthday, AMS Fields Inst. Commun. 24 (1999), 39-54.
[B] W. Blaschke, Eine Frage über konvexe Körper, Jahresber. Deutsh. Math.-Verein., 25, 1916.
[BG] M. Berger et B. Gostiaux, Géométrie différentielle : Variétés, Courbes et Surfaces, Presses Univ. France, 1987.
[BF] M. Barner und F. Flohr, Der Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen, Der Mathematikunterricht, heft, 4/58, 43-73.
[CG] G.D. Chakerian et H. Groemer, Convex bodies of constant width, in: Convexity and its applications, Collect. Surv. (1983), 49-96.
[CY] S.Y. Cheng and S.T. Yau, On the regularity of the n-Dimensional Minkowski Problem, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 495-516.
[G] H. Geppert, Über den Brunn-Minkowskischen Satz, Math. Z. 42 (1937), 238-254.
[Gl] H. Gluck, Manifolds with preassigned curvature - a survey. Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 313-329.
[H1] E. Heil, Existenz eines 6-Normalenpunktes in einem konvexen Körper, Arch. Math. 32 (1979), 412-416.
[H2] E. Heil, Korrectur zu: "Existenz eines 6-Normalenpunktes in einem konvexen Körper", Arch. Math. 33 (1979-80), 496.

[K] D. Koutroufiotis, On a conjectured characterization of the sphere. Math. Ann. 205 (1973), 211-217.
[LLR] R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg, Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss), in: Singularities, Banach Center Publ. 20, 245-253, Warsaw 1988.
[L] C.S. Lin, The Local Isoperimetric Embedding in $\mathbb{R}^3$ of Two-Dimensional Riemannian Manifolds with Gaussian Curvature Changing Sign Cleanly, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1986) 867-887.
[M1] H.F. Münzner, Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten und analoge Singularitäten in der zentroaffinen Flächentheorie, Comment. Math. Helv. 41, (1966-67), 88-104.
[M2] H.F. Münzner, Über Flächen mit einer Weingartenschen Ungleichung. Math. Zeitschr. 97 (1967), 123-139.
[RR] L. Rodriguez and H. Rosenberg, Rigidity of certain polyedra in $\mathbb{R}^3$, Comment. Math. Helv. 75 (2000), 478-503.
[RT] H. Rosenberg et E. Toubiana, Complete minimal surfaces and minimal herissons, J. Differential Geom. 28 (1988), 115-132.
[S1] R. Schneider, Remark on a conjectured characterization of the sphere, Ann. Polon. Math. 31 (1975), 187-190.
[S2] R. Schneider, Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge : Cambridge University Press (1993).
[T] S. Tabachnikov, Around four vertices, Russian Math. Surveys 45 (1990), 229-230.
[Z] C. Zuily, Existence locale de solutions C^∞ pour des équations de Monge-Ampère changeant de type, Comm. Partial Differential Equations 14 (1989) 691-697.

Yves Martinez-Maure
martinez@esiea.fr