



HAL
open science

Stabilité d'un écoulement cisailé modélisant la crème de vase

Alice Harang, Olivier Thual, Pierre Brancher, Thomas Bonometti

► **To cite this version:**

Alice Harang, Olivier Thual, Pierre Brancher, Thomas Bonometti. Stabilité d'un écoulement cisailé modélisant la crème de vase. *Revue Paralia*, 2010, 3, pp.8.1-8.12. 10.5150/revue-paralia.2010.008 . hal-03545819

HAL Id: hal-03545819

<https://hal.science/hal-03545819v1>

Submitted on 27 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Open Archive TOULOUSE Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in : <http://oatao.univ-toulouse.fr/>
Eprints ID : 11802

To link to this article : DOI: 10.5150/revue-paralia.2010.008
<http://dx.doi.org/10.5150/revue-paralia.2010.008>

To cite this article Harang, Alice and Thual, Olivier and Brancher, Pierre and Bonometti, Thomas *Stabilité d'un écoulement cisaillé modélisant la crème de vase*. (2010) Revue Paralia, vol. 3 . pp. 8.1-8.12. ISSN 1760-8716

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: staff-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Stabilité d'un écoulement cisailé modélisant la crème de vase

Alice HARANG^{1,2}, Olivier THUAL^{1,2},
Pierre BRANCHER^{1,2}, Thomas BONOMETTI^{1,2}

1. Université de Toulouse, INPT, UPS, IMFT, Allée Camille Soula,
F-31400 Toulouse, France.

2. CNRS, IMFT, F-31400 Toulouse, France.

harang@imft.fr ; thual@imft.fr ; brancher@imft.fr ; thomas.bonometti@imft.fr

Résumé :

Afin d'améliorer la compréhension de la mise en suspension de la vase au fond des estuaires, une étude paramétrique de la stabilité d'un écoulement bidimensionnel cisailé modélisant deux couches fluides miscibles de masse volumique et de viscosité dynamique différentes. Le code de simulation numérique directe JADIM de l'IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse) est utilisé pour calculer l'évolution temporelle de ces écoulements. Le modèle est initialisé à l'aide de profils verticaux continus de type erf(z) pour toutes les grandeurs considérées. Cette étude est ensuite complétée par une étude de stabilité linéaire réalisée avec le code LiSa développé à l'IMFT. Un nombre de Richardson critique proche de 0,25 est observé. De forts rapports de viscosité entre les deux fluides modifient les caractéristiques du mode le plus instable mais aussi la localisation de cette instabilité dans l'interface. Cette étude de stabilité est de nature à déboucher sur de nouvelles paramétrisations pour la modélisation réaliste des estuaires.

1. Introduction

Les modèles numériques des estuaires tels que, par exemple, TELEMAC_3D ou SIAM-3D, sont utilisés pour de nombreuses applications comme la gestion de la pollution ou les aménagements côtiers. Pour ce qui concerne la mise en suspension au niveau du fond de l'estuaire, de nombreux modèles reposent sur les paramétrisations proposées par PARTHENIADES (1965) ou par PARCHURE & METHA (1985). Cependant, ces modèles peuvent être améliorés par une étude plus approfondie de l'interface au niveau de la crème de vase comme le propose LE NORMAND (1995) après implémentation de ces modèles dans le code TELEMAC_3D. Dans cet esprit, nous proposons ici une étude bidimensionnelle de la stabilité de cette interface. La stabilité et le mélange d'écoulements cisailés et stratifiés ont été étudiés par CAULFIELD & PELTIER (2000). ERN *et al.* (2003) ont étudié les écoulements cisailés et stratifiés en viscosité. KRANENBURG & WINTERWERP (1997) proposent un modèle, validé expérimentalement, de mise en suspension de la crème de vase par la turbulence créée par le vent ou advectée par l'écoulement. Comme expliqué dans PHAM VAN BANG *et al.* (2007), la crème de vase a un comportement très complexe, thixotrope, évoluant en fonction du temps et des forçages, ce qui rend sa modélisation très difficile. Pour la présente étude, nous choisissons une modélisation de type fluide newtonien miscible avec une forte variation spatiale de la viscosité, afin de constituer une première approche de la réponse du système à une rhéologie complexe. D'après le modèle de distribution proposé par MEHTA *et al.* (1989), l'épaisseur du profil de cisaillement peut être plus importante que celle du profil de densité ce qui pourrait entraîner, d'après HOGG & IVEY (2003), le développement d'instabilités de type Holmboe à l'interface eau – crème de vase. Néanmoins, nous choisissons ici une même épaisseur pour les profils de vitesse, de densité et de viscosité afin de nous concentrer sur l'étude des instabilités de type Kelvin-Helmoltz.

2. Modélisation de la crème de vase

2.1 Equations du modèle

Notre étude est basée sur le système d'équations suivant :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \underline{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \left[\mu (\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u}) \right] \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \underline{u}) = 0, \quad (1.b)$$

$$\rho = \rho_0(1 - \Phi) + \rho_1 \Phi, \quad \mu = \mu_0(1 - \Phi) + \mu_1 \Phi \quad (1.c)$$

qui couple les équations de Navier-Stokes incompressibles (1.a), où \underline{g} est le vecteur gravité, à l'équation de transport (1.b) d'une fraction volumique Φ qui contrôle, à travers les relations (1.c), le mélange cinématique de particules fluides de masse

volumique ρ et de viscosité dynamique μ inhomogènes. La diffusion moléculaire des sédiments est négligée (voir DEARDORFF & WILLIS, 1982).

Nous considérons le mélange des deux fluides suivants : l'eau, de masse volumique $\rho_0=1000 \text{ kg m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\mu_0=10^{-3} \text{ Pa s}$, et la crème de vase, de masse volumique $\rho_1=1360 \text{ kg m}^{-3}$ (MEHTA *et al.* 1989) et de viscosité dynamique $\mu_1=1 \text{ Pa s}$. Ces deux entités sont ensuite mélangées et suivies par le taux de présence de crème de vase dans le fluide, Φ . Ainsi, dans ces simulations, la masse volumique et la viscosité sont fonctions linéaires du taux de présence et ont donc des évolutions parallèles.

2.2 Configuration de base

Afin de modéliser les profils verticaux des grandeurs étudiées au voisinage de l'interface entre la vase et l'eau, nous considérons la famille des fonctions $F(\lambda, Z)$ définies par :

$$F(\lambda, Z) = \begin{cases} \lambda \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\lambda}\right) \right] & \text{si } Z \leq 0, \\ 1 - (1 - \lambda) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{1 - \lambda}\right) \right] & \text{si } Z \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

où Z est la coordonnée verticale adimensionnelle spécifiée ensuite, dont l'origine est situé à l'interface, le paramètre λ contrôle l'asymétrie des domaines situés de part et d'autre du point d'inflexion, avec continuité du profil et de sa dérivée autour de ce point. Les caractéristiques de cette famille de profils sont décrites par la figure 1. La fonction $\operatorname{erf}(z)$ a été choisie comme fonction de base, de manière empirique, pour modéliser qualitativement un cisaillement simple. Dans certains cas, ce profil peut être vu comme décrivant une réponse transitoire à un gradient imposé en présence de diffusion turbulente.

On considère alors les profils verticaux de vitesse horizontale $u(z)$, de masse volumique $\rho(z)$ et de viscosité dynamique $\mu(z)$ donnés par les relations :

$$u(z) = U_1 F\left(\lambda, \frac{z - h}{\delta_u}\right), \quad (3)$$

$$\rho(z) = (\rho_0 - \rho_1) F\left(\lambda, \frac{z - h}{\delta_\rho}\right) + \rho_1, \quad \mu(z) = (\mu_0 - \mu_1) F\left(\lambda, \frac{z - h}{\delta_\mu}\right) + \mu_1,$$

où δ_u , δ_ρ et δ_μ sont des épaisseurs respectivement associées aux profils $u(z)$, $\rho(z)$ et $\mu(z)$. Nous considérons ici le cas où ces trois épaisseurs sont égales à $\delta=0,3 \text{ m}$. Les frontières du domaine de la simulation étant définies par les équations $z=0$ et $z=3h$, le choix d'une hauteur $h=1 \text{ m}$ permet de les situer suffisamment loin de l'interface d'équation $z=h$. D'autre part, nous avons choisi $\lambda=0,1$, en considérant que la diffusion supposée plus importante dans l'eau que dans la vase. Nous obtenons alors les profils présentés sur la figure 2.

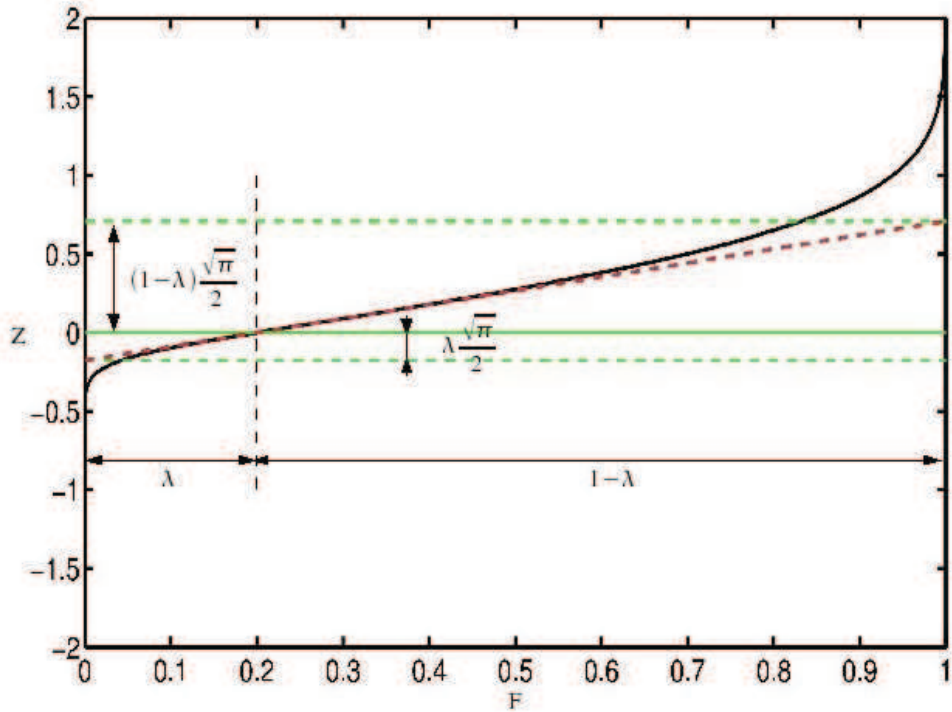


Figure 1. Représentation du profil en Z de la fonction $F(\lambda, Z)$ avec $\lambda=0,2$.

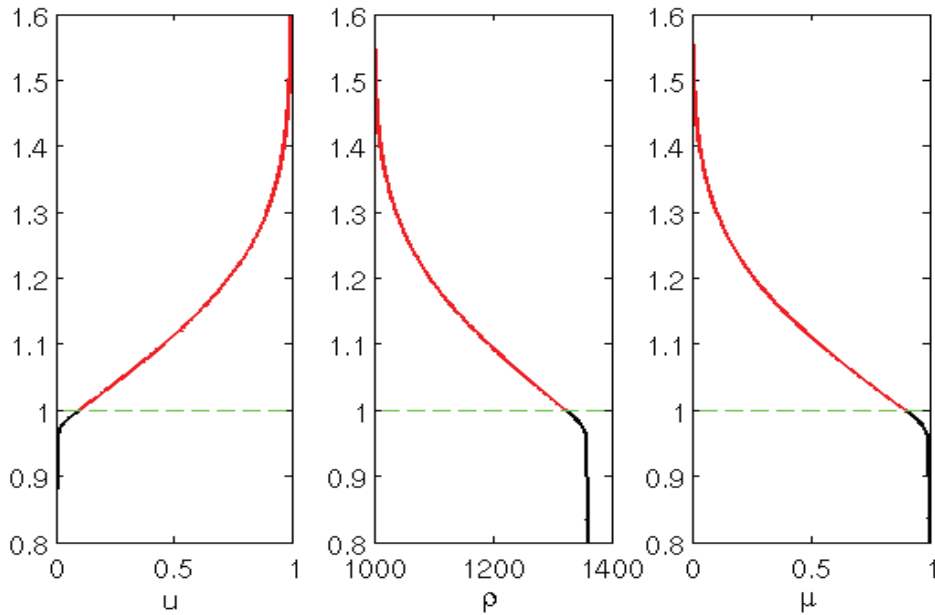


Figure 2. Profils initiaux $u(z)$, $\rho(z)$ et $\mu(z)$ sur une portion $z \in [0,8 \text{ m}, 1,6 \text{ m}]$ du domaine $z \in [0, 3 h]$, avec $h=1 \text{ m}$, $\delta=0,3 \text{ m}$ et $\lambda=0,1$.

2.3 Paramètres de contrôle

Nous nous plaçons tout d'abord dans des configurations où le nombre d'Atwood $At=(\rho_1-\rho_0)/(\rho_1+\rho_0)$ est de l'ordre de 0,15. Les trois autres nombres adimensionnels pertinents pour ce problème sont définis par :

$$Re = \frac{U_0 \delta}{\mu_0/\rho_0}, \quad Ri = \frac{g (\rho_0 - \rho_1) \delta \sqrt{\pi}}{\rho_h 2 U_0^2} \quad \text{et} \quad W = \log_{10} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} \right), \quad (4)$$

Où $\rho_h = \rho(h) = (\rho_0 - \rho_1) \lambda + \rho_1$ est la masse volumique à l'interface, le nombre de Reynolds Re est basé sur la viscosité de l'eau, le nombre de Richardson Ri est basé sur le maximum du gradient de masse volumique situé à l'interface $z=h$, et où nous avons choisi d'exprimer le rapport des viscosités entre la vase et l'eau par son logarithme décimal W .

2.4 Description des programmes de DNS et d'analyse de stabilité linéaire utilisés

Le code de simulation numérique directe (DNS) développé au sein de l'IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse), JADIM, résout les équations de Navier-Stokes pour des fluides incompressibles pouvant comporter différentes phases. Les équations sont écrites en variables primitives (vitesse, pression) et la méthode des volumes finis est utilisée. Les schémas utilisés confèrent au code une précision d'ordre 2 en espace et en temps grâce à un avancement en temps de type Runge-Kutta d'ordre 3 et une résolution des termes diffusifs semi-implicite de type Crank-Nicolson. Les équations sont discrétisées en utilisant un schéma centré de deuxième ordre avec maillage décalé (CALMET & MAGNAUDET, 1996 ; LEGENDRE, 1996). La version utilisée dans cette étude résout le système d'équations (1) et fut validée pour un gradient de viscosité par ERN *et al.* (2003) et pour le gradient de masse volumique par HALLEZ (2007).

En complément du code JADIM, un code de stabilité linéaire, LiSa (ANTKOWIAK & BRANCHER, 2004 ; 2007) est utilisé afin d'obtenir une vision plus globale du problème. Ce code résout le système d'équations (1) linéarisé autour de l'écoulement de base (3). A partir d'un état de base de type écoulement parallèle, d'une perturbation (déterminée par son vecteur d'onde) et de paramètres numériques spécifiques, LiSa fournit le spectre des valeurs propres du système et les modes associés, en utilisant une résolution spectrale par projection sur les polynômes de Chebyshev. Nous pouvons donc obtenir pour chaque longueur d'onde choisie le mode le plus instable et son taux de croissance.

3. Résultats

On choisit de conserver, dans les simulations, les valeurs de masse volumique de l'eau et de la vase. Nous faisons alors varier la vitesse afin de modifier le nombre de Richardson Ri et le nombre de Reynolds Re , ainsi que la viscosité de la vase pour faire varier W . Pour ces simulations, le nombre de Reynolds est de l'ordre de 10^5 .

3.1 Paramètres bidimensionnels

Dans un premier temps, des simulations bidimensionnelles, proches de l'écoulement observable au fond des estuaires sont réalisées en DNS avec le code numérique JADIM. Le choix de cette configuration bidimensionnelle a été justifié par l'exploration de configurations 3D durant lesquelles nous avons observé le développement d'instabilités dans le plan de l'écoulement. Des instabilités à composante longitudinale ne peuvent cependant pas être exclues par le Théorème de Squire, comme dans le cas d'écoulements homogènes.

Les simulations 2D sont réalisées sur un domaine de calcul périodique selon la direction de l'écoulement, de dimension $L=3,4$ m et $H=3$ m, respectivement, 340×300 mailles, et avec une condition limite d'adhérence au fond et de glissement en haut du domaine. À l'instant initial, l'écoulement parallèle est perturbé par un champ de vitesse verticale localisé autour de l'interface $z=h$ modélisé par un bruit blanc d'amplitude $w_m=10^{-2}$ m s⁻¹.

3.2 Développement typique d'une instabilité

Nous présentons ici une campagne numérique de simulations 2D réalisée avec le code JADIM en faisant varier le nombre de Richardson gradient Ri et le rapport de viscosité W .

Nous observons le développement des instabilités de cisaillement de grande amplitude pour des nombres de Richardson inférieurs à une valeur critique proche de 0,25, pour toutes les valeurs de W étudiées ici.

Concernant la variation du gradient de viscosité, nous observons que, comme présenté sur les figures 3 et 4 pour un nombre de Richardson $Ri=0,15$, une augmentation du gradient de viscosité (caractérisé par W) entraîne un déplacement de l'instabilité de cisaillement vers le haut de l'interface, donc vers l'eau, la phase la moins visqueuse. Ce déplacement de l'instabilité a pour conséquence une diminution de la quantité de matière remise en suspension. En effet, pour un rapport de viscosité important, le mélange s'effectue entre de l'eau et de la crème de vase déjà partiellement mélangée de l'interface, de concentration intermédiaire.

3.3 Analyse de stabilité linéaire

Après avoir déterminé l'impact des paramètres de contrôle sur la stabilité de l'interface, une analyse de stabilité a été menée grâce au programme LiSa développé à l'IMFT. Le taux de croissance du mode le plus instable a été calculé pour une centaine de nombres d'onde adimensionnés de perturbation k^* et présenté pour différents W et pour $Ri=0,15$ sur la figure 5 et pour différents Ri et $W=3$ sur la figure 6. Nous avons choisi d'adimensionner le nombre d'onde par la demi-épaisseur de l'interface : $k^*=k \times \delta \times (\sqrt{\pi})/4$; la vitesse de phase par $U_0/2$; le taux de croissance est donc normalisé par $\sigma^*=\sigma \times (\delta \times (\sqrt{\pi})/2) / U_0$.

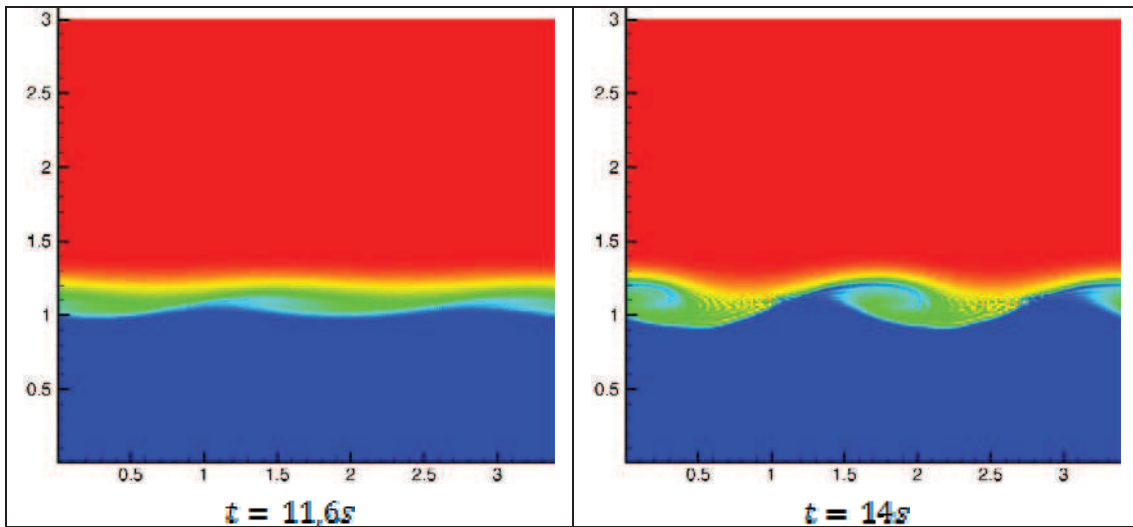


Figure 3. Configuration $Ri=0,15$, $L=3,4$ m, $W=0$. Champ de masse volumique $\rho(x, z)$ à différents instants séparés de $2,3$ s (■ : $\rho_0=1000$ kg m⁻³, ■ : $\rho_1=1360$ kg m⁻³).

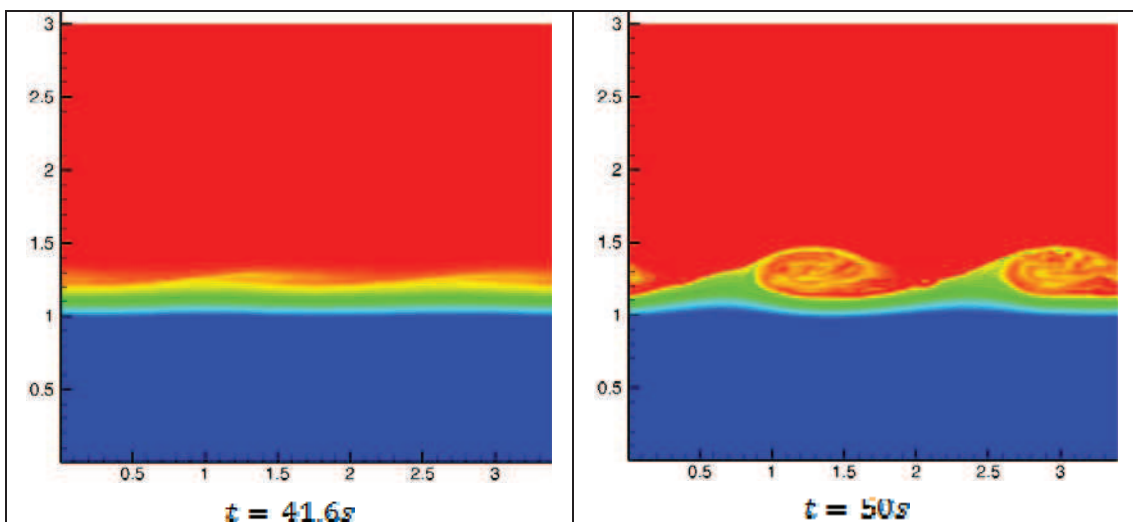


Figure 4. Configuration $Ri=0,15$, $L=3,4$ m, $W=3$. Champ de masse volumique $\rho(x, z)$ à différents instants séparés de 8 s (■ : $\rho_0=1000$ kg m⁻³, ■ : $\rho_1=1360$ kg m⁻³).

Nous observons sur la figure 5 des comportements similaires pour les différents rapports de viscosité testés. Cependant de légères différences sont observables pour $W=3$, correspondant à une viscosité dynamique de la crème de vase 1000 fois plus importante que celle de l'eau. D'une part, nous pouvons remarquer que le taux de croissance est plus important ($\sim 10\%$); d'autre part, le nombre d'onde le plus instable est différent ($0,456$ pour $W=0$ contre $0,480$ pour $W=3$).

Cette différence de taux de croissance et de nombre d'onde le plus instable entre les différents W présentés est susceptible d'avoir des conséquences sur le mélange à l'interface et donc la quantité de sédiments remis en suspension.

Sur la figure 6, nous pouvons clairement observer, lorsque Ri diminue, une augmentation du taux de croissance, ainsi qu'une légère augmentation du nombre d'onde le plus instable. On observe aussi pour cette configuration ($W=3$) une subsistance d'instabilités de très faible taux de croissance au-delà du Richardson critique conventionnel situé autour de 0,25.

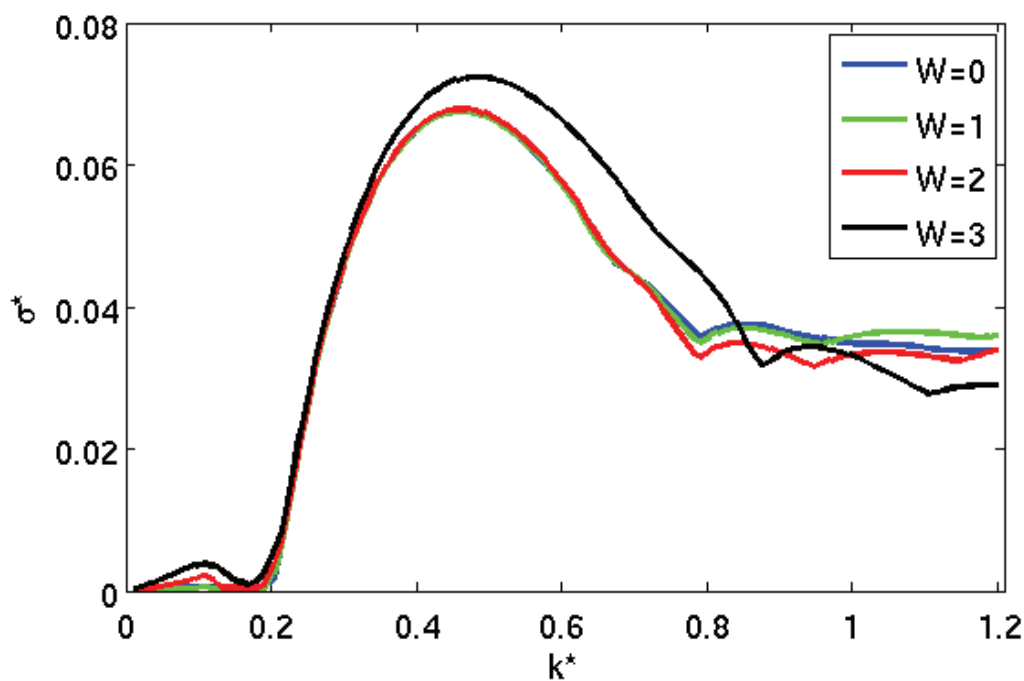


Figure 5. Représentation du taux de croissance normalisé σ^* en fonction du nombre d'onde adimensionnel k^* pour un nombre de Richardson $Ri=0,15$.

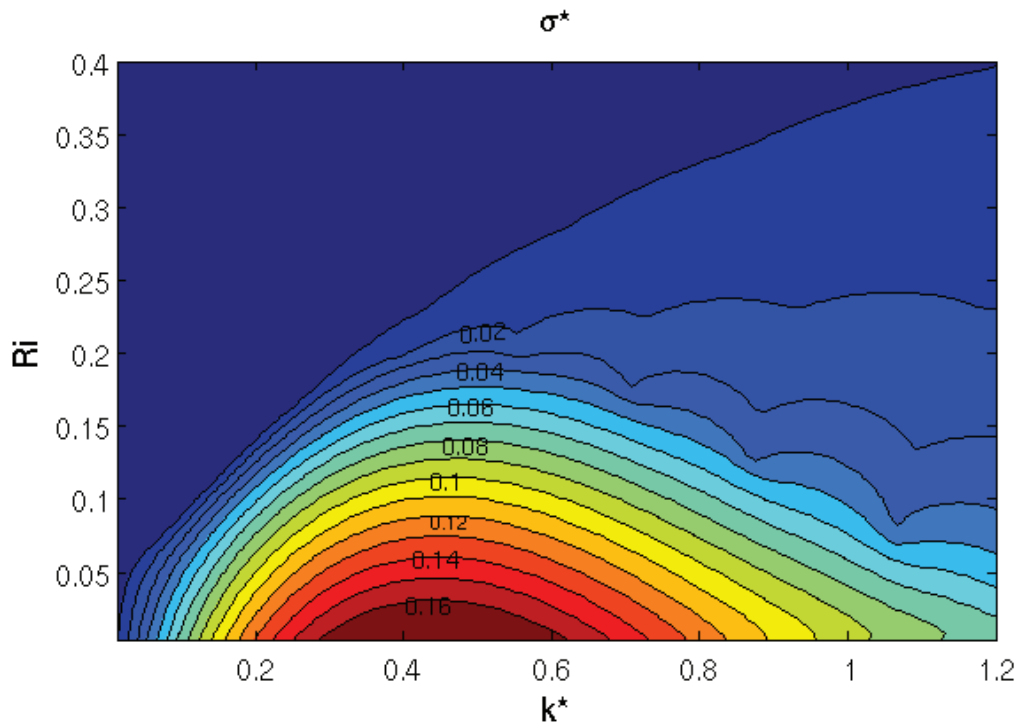


Figure 6. Isocontours du taux de croissance normalisé σ^* en fonction du nombre d'onde adimensionnel k^* et du nombre de Richardson Ri , pour $W=3$.

4. Conclusions

Nous avons modélisé l'interface entre la crème de vase et l'eau par l'écoulement cisailé de fluides newtoniens miscibles présentant de fortes variations de masse volumique et de viscosité. Nous avons étudié ces écoulements en 2D pour en déduire une limite de stabilité proche de la limite théorique connue $Ri=1/4$ pour les écoulements cisailés stratifiés de viscosité homogène. Nos résultats montrent que le gradient de viscosité influe sur déclenchement de l'instabilité, en modifiant le nombre de Richardson critique ainsi que le nombre d'onde du mode le plus instable et sur la localisation de l'instabilité dans l'interface. Le rapport de viscosité doit donc être pris en compte dans la paramétrisation du déclenchement de mélange à l'interface par instabilité de cisaillement.

Ces résultats prédisent, au niveau de l'interface, la masse volumique d'un fluide homogène, issu du mélange d'un modèle de crème de vase et d'eau, en fonction des caractéristiques de l'écoulement. Nous avons pour objectif de traduire ensuite cette masse volumique en concentration afin de fournir une condition limite de remise en suspension. Ces résultats suggèrent aussi de nouvelles recherches, dont notamment la comparaison avec des simulations réalisées avec une rhéologie plus réaliste de la vase de type Bingham ou complexe (PHAM VAN BANG, 2007).

5. Remerciements



Ce travail bénéficie du soutien financier de la Délégation Générale de l'Armement (DGA) à travers une bourse de thèse attribuée à l'un des auteurs. Cette étude a pu être réalisée grâce aux moyens de calcul du CICT et du CINES.

6. Références bibliographiques

- ANTKOWIAK A., BRANCHER P. (2004). *Transient energy growth for the Lamb-Oseen vortex*. *Physics of Fluids*, vol. 16(1), pp L1-L4. doi:10.1063/1.1626123
- ANTKOWIAK A., BRANCHER P. (2007). *On vortex rings around vortices: an optimal mechanism*. *Journal of Fluids Mechanics*, vol. 578, pp 295-304. doi:10.1017/S0022112007005198
- CALMET I., MAGNAUDET J. (1996). *Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow*. *Physics of Fluids*, vol. 9(2), pp 438-455. doi:10.1063/1.869138
- CAULFIELD C.P., PELTIER W.R. (2000). *The anatomy of the mixing transition in homogeneous and stratified free shear layers*. *Journal of Fluid Mechanics*, n° 413, pp 1-47. doi:10.1017/S0022112000008284
- DEARDORFF J.W., WILLIS G.E. (1982). *Dependence of mixed-layer entrainment on shear stress and velocity jump*. *Journal of Fluid Mechanics*, n° 115, pp 123-150. doi:10.1017/S0022112082000688
- ERN P., CHARRU F., LUCHINI P. (2003). *Stability analysis of a shear flow with strongly stratified viscosity*. *Journal of Fluid Mechanics*, n° 496, pp 295-312. doi:10.1017/S0022112003006372
- HALLEZ Y. (2007). *Mélange gravitationnel de fluides en géométrie confinée*. Thèse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 140 p. Disponible en ligne sur URL <http://oa.imft.fr/1851/1/hallez2007.pdf>
- HOGG A.McC., IVEY G.N. (2003). *The Kelvin-Helmoltz to Holmboe instability transition in stratified exchange flows*. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 477, pp 339-362. doi:10.1017/S0022112002003397
- KRANENBURG C., WINTERWERP J.C. (1997). *Erosion of fluid mud layers. I: Entrainment model*. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 123, n° 6, pp 504-511. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:6(504)
- LEGENDRE D. (1996). *Quelques aspects des forces hydrodynamiques et des transferts de chaleur sur une bulle sphérique*. Thèse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 266 p. Disponible sur URL <http://ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00000655/>
- LE NORMAND C. (1995). *Modélisation numérique tridimensionnelle des processus de transport des sédiments cohésifs en environnement estuarien*. Thèse, Institut National Polytechnique de Toulouse, 237 p.

- MEHTA A.J., HAYTER E.J., PARKER W.R., KRONE R.B., TEETER A.M. (1989). *Cohesive sediments transport*. Journal of Hydraulic Engineering, vol. 115, n° 8, pp 1076-1112. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1989)115:8(1076)
- PARCHURE T.M., MEHTA A.J. (1985). *Erosion of soft cohesive sediment deposits*. Journal of Hydraulic Engineering, vol. 111(10), pp 1308-1326. doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1985)111:10(1308)
- PARTHENIADES E. (1965). *Erosion and deposition of cohesive soils*. Journal of Hydraulic Division, ASCE, vol. 91(1), pp 105-137.
- PHAM VANG BANG D., OVARLEZ G., TOCQUER L. (2007). *Effets de la densité et de la structuration sur les caractéristiques rhéologiques de la vase*. La Houille Blanche, pp 85-93. doi:10.1051/lhb:2007023

Annexe : Notations

A_0	: grandeur A relative à l'eau
A_1	: grandeur A relative à la crème de vase
A^*	: grandeur A adimensionnée
At	: nombre d'Atwood
F	: fonction
g	: accélération de la pesanteur ($m\ s^{-2}$)
h	: hauteur de l'interface eau – crème de vase (m)
k	: nombre d'onde axial (m^{-1})
L	: longueur de la boîte de simulation (m)
P	: pression (Pa)
Re	: nombre de Reynolds
Ri	: nombre de Richardson gradient
t	: temps (s)
\underline{u}	: vecteur vitesse ($m\ s^{-1}$)
w_m	: amplitude des perturbations de vitesse verticale ($m\ s^{-1}$)
W	: logarithme décimal du rapport de viscosité
x,y,z	: coordonnées horizontales et verticale (m)
Z	: coordonnée verticale (ici $Z=(z-h)/\delta$)
δ	: épaisseur de l'interface (m)
λ	: rapport de forme entre crème de vase et eau
μ	: viscosité dynamique (Pa.s)
ρ	: masse volumique ($kg\ m^{-3}$)
σ	: taux de croissance (s^{-1})
Φ	: fraction volumique de crème de vase dans le fluide

Stability of a stratified shear flow, a model of mud flow

Alice HARANG^{1,2}, Olivier THUAL^{1,2},
Pierre BRANCHER^{1,2}, Thomas BONOMETTI^{1,2}

1. Université de Toulouse, INPT, UPS, IMFT, Allée Camille Soula,
F-31400 Toulouse, France.

2. CNRS, IMFT, F-31400 Toulouse, France.

harang@imft.fr ; thual@imft.fr ; brancher@imft.fr ; thomas.bonometti@imft.fr

Abstract:

To improve the understanding of mud suspension in estuaries, a parametric stability analysis of a two-dimensional shear flow was carried out with a model of two miscible fluid layers of different mass density and dynamic viscosity. The direct numerical simulation code JADIM of IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse) is used to compute the temporal evolution of these flows. This study is completed by a linear stability study realized with the code LiSa developed at IMFT. A critical Richardson number close to 0.25 is observed. Results show that the characteristics of the most unstable modal wave number and the location of the interface instability, depend on the ratio of two fluid viscosity values. The model is initialized with continuous $\text{erf}(z)$ vertical profiles for all quantities. Likely outcomes of this stability study are new parameterizations for realistic modelling of estuaries.

Keywords:

Estuary – Mixing – Stratification – Fluid mud – Sediment transport

1. Introduction

Numerical models of estuaries, such as TELEMAC_3D or SIAM-3D for example, are used to deal with pollution or coastal settlement. Concerning erosion at the bottom of the estuary, these models are often based on the parameterization proposed by PARTHENIADE (1963) or PARCHURE & METHA (1985). However, these models can be improved by a more specific study of the interface between mud flow and water as proposed by LE NORMAND (1995) after coding TELEMAC_3D. In this way, we present a bi-dimensional study of the stability of the interface. Stability and mixing of stratified shear flow have been studied by CAULFIELD & PELTIER (2000). ERN *et al.* (2003) concentrate on shear flows with strongly stratified viscosity. KRANENBURG & WINTERWERP (1997) present a model validated by experiments, computing mud flow erosion by turbulence produced by wind or convected from other locations in the flow. As observations of the mud flow show its high viscosity, a highly viscous and very dense Newtonian fluid has been chosen to model mud flow. As explained in PHAM VAN BANG *et al.* (2007), mud flows are very complex to model because of the effect of time, forcing, thixotropy. For the present study, we have chosen a Newtonian fluid model with strong density and viscosity variations to get a first understanding of the response of the system to complex rheology. According to the model of mud flow vertical distribution proposed by MEHTA *et al.* (1989), the thickness of the shear profile can be much bigger than the density profile, and according to HOGG and IVEY (2003), Holmboe instabilities can develop at the interface between water and mud flows. However, we choose here the same thickness for the shear, density and viscosity profiles, in order to focus on the study of Kelvin-Helmoltz instabilities.

2. Model of mud flow

2.1 Model equations

Our study is based on the following equations:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad \frac{d\underline{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \underline{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \left[\mu \left(\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u} \right) \right] \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \underline{u}) = 0, \quad (1.b)$$

$$\rho = \rho_0(1 - \Phi) + \rho_1 \Phi, \quad \mu = \mu_0(1 - \Phi) + \mu_1 \Phi \quad (1.c)$$

which link incompressible Navier-Stokes equations (1.a), where \underline{g} is the acceleration of gravity, to the transport equation (1.b) of a volume fraction Φ which controls, through relations (1.c), the kinematic mixing of fluid particles of non-homogeneous density ρ and dynamic viscosity μ . Molecular diffusion of sediments is neglected here (see DEARDORFF & WILLIS, 1982)

The mixing of the two following fluids is considered: water, of density $\rho_0=1000 \text{ kg m}^{-3}$ and dynamic viscosity $\mu_0=10^{-3} \text{ Pa s}$, and the mud flow, of density $\rho_1=1360 \text{ kg m}^{-3}$ (MEHTA *et al.* 1989) and dynamic viscosity $\mu_1=1 \text{ Pa s}$. Both entities are then mixed and followed through the volume fraction of mud flow in the fluid, Φ . So, in these simulations, density and viscosity are linear functions of the volume fraction and then vary in the same way.

2.2 Base flow

To model vertical profiles of the concerned quantity near the water-mud flow interface, we consider the group of functions $F(\lambda, Z)$ defined by:

$$F(\lambda, Z) = \begin{cases} \lambda \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\lambda}\right) \right] & \text{if } Z \leq 0, \\ 1 - (1 - \lambda) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{1 - \lambda}\right) \right] & \text{if } Z \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

where Z is the non-dimensional vertical coordinate to be specified later, the origin of which being located at the interface the parameter λ controls the asymmetry of the fields located on both sides of the inflexion point, with continuity of the profile and its derivative around this point. The characteristics of this group of functions are described on figure 1. The function $\operatorname{erf}(z)$ is chosen as base function, in an empirical way, to qualitatively model a simple shear. In some cases, this profile can be seen as describing a transient response to an imposed gradient in the presence of turbulent diffusion.

We consider the vertical profiles of longitudinal velocity $u(z)$, density $\rho(z)$ and dynamic viscosity $\mu(z)$ given by the relations:

$$\begin{aligned} u(z) &= U_1 F\left(\lambda, \frac{z-h}{\delta_u}\right), \\ \rho(z) &= (\rho_0 - \rho_1) F\left(\lambda, \frac{z-h}{\delta_\rho}\right) + \rho_1, \quad \mu(z) = (\mu_0 - \mu_1) F\left(\lambda, \frac{z-h}{\delta_\mu}\right) + \mu_1, \end{aligned} \quad (3)$$

where δ_u , δ_ρ and δ_μ are the thicknesses respectively associated to the profiles $u(z)$, $\rho(z)$ and $\mu(z)$. We consider here the case where these three thicknesses are equal to $\delta=0.3 \text{ m}$. The boundaries of the simulation field are defined by equations $z=0$ and $z=3h$, the height $z=h=1 \text{ m}$ being the interface location. In addition, we have chosen $\lambda=0.1$, since diffusion is assumed to be greater in water than in mud flow. The corresponding profiles are presented in figure 2.

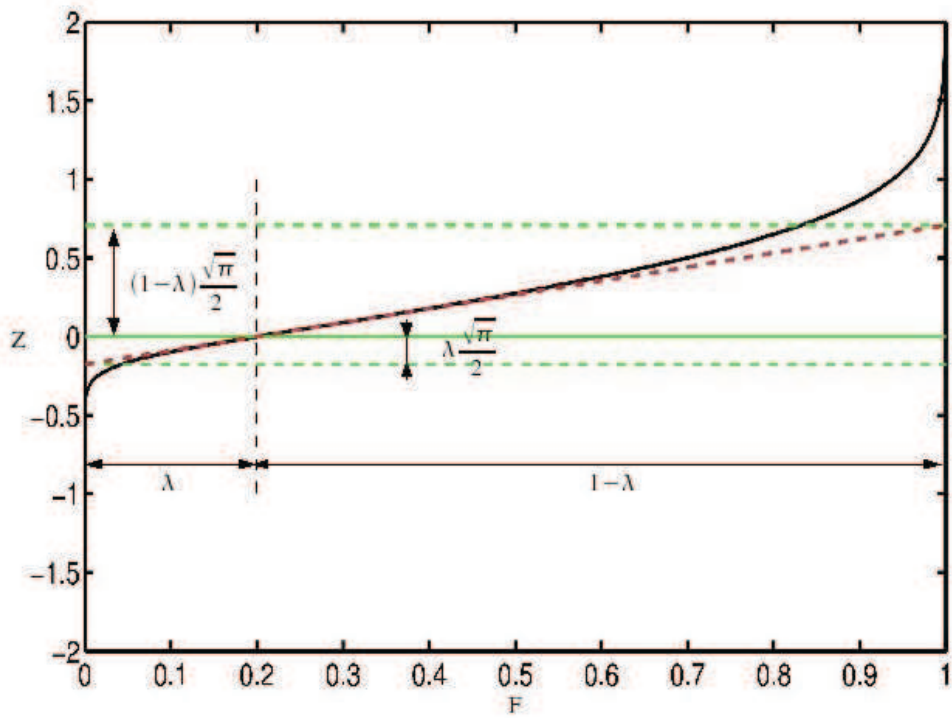


Figure 1. Representation of profile on Z of the function $F(\lambda, Z)$ with $\lambda=0.2$.

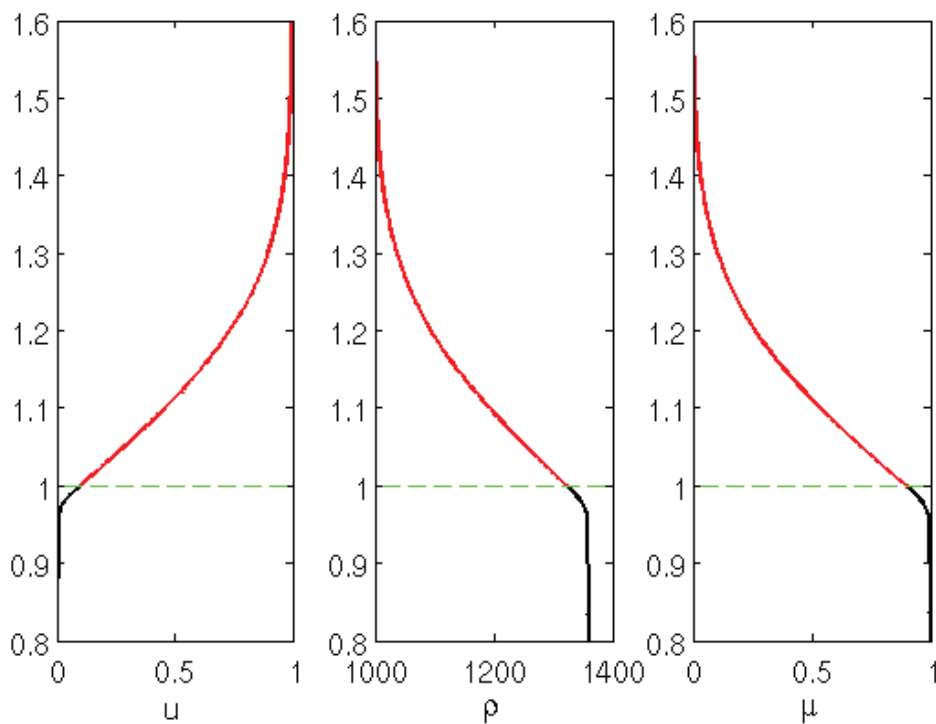


Figure 2. Initial profiles $u(z)$, $\rho(z)$ and $\mu(z)$ on a portion $z \in [0.8 \text{ m}, 1.6 \text{ m}]$ of the domain $z \in [0, 3 \text{ h}]$, with $h=1 \text{ m}$, $\delta=0.3 \text{ m}$ and $\lambda=0.1$.

2.3 Control parameters

First, in the chosen configurations, the Atwood number $At=(\rho_1-\rho_0)/(\rho_1+\rho_0)$ is close to 0.15. The three other non-dimensional numbers, relevant for our study, are defined by:

$$Re = \frac{U_0 \delta}{\mu_0 / \rho_0}, \quad Ri = \frac{g (\rho_0 - \rho_1) \delta \sqrt{\pi}}{\rho_h 2U_0^2} \quad \text{and} \quad W = \log_{10} \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} \right), \quad (4)$$

where $\rho_h = \rho(h) = (\rho_0 - \rho_1) \lambda + \rho_1$ is the density at the interface, Re is the Reynolds number based on the viscosity of water, Ri is the Richardson number Ri based on the maximum of the density gradient located at the interface $z=h$, and W is the logarithm of the viscosity ratio between mud flow and water.

2.4 Description of the Navier-Stokes and linear stability analysis code

The Navier-Stokes solver, JADIM, developed at IMFT (Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse), solves Navier-Stokes equations for multiphase incompressible flows. The equations use primitive variables (velocity, pressure) and are solved by a finite volumes method. The code is 2nd order accurate in space and time, thanks to a 3rd order Runge-Kutta temporal scheme and a semi-implicit Crank-Nicolson scheme for diffusive terms. The equations are discretized using a 2nd order centered scheme with staggered variables (CALMET & MAGNAUDET 1996, LEGENDRE & MAGNAUDET 1998). The version used in the present study solves the system of equations (1) and has been validated for a viscosity gradient by ERN *et al.*, 2003 and for a density gradient by HALLEZ, 2007.

As supplement to the JADIM code, a linear stability code, LiSa (ANTKOWIAK & BRANCHER 2004, 2007) is used to obtain a global vision of the problem. This code solves the system of equations (1) linearized around the base flow (3). Given a parallel base flow, a perturbation (defined by its wave vector) and specific numerical parameters, LiSa provides the eigen values and their associated modes, using a spectral method based on Chebyshev polynomials. So, in 2D, for each wave length, LiSa gives the prediction of the more unstable mode and its growth rate.

3. Results

For the simulations, the density of water and mud flow are fixed, while we vary the characteristic velocity U_0 to modify the Richardson number Ri and the Reynolds number Re , and the density of the mud flow to modify the parameter W . For these simulations, the Reynolds number order is 10^5 .

3.1 Bidimensionnal parameters

First, two-dimensional simulations, similar to flows observed in estuaries, are carried out with the JADIM code. The choice of a 2D configuration has been justified by an exploration of 3D configurations, in which we observed the development of instabilities

in the flow direction. However, instabilities with a finite spanwise wave number cannot be excluded by the Squire Theorem, as done for homogeneous flows.

The 2D simulations are performed on a periodic field streamwise, of 3.4 m length and 3 m height, with respectively 340×300 grid points, and with no slip boundary condition at the bottom and free-slip condition at the top. At initial time, the parallel flow is perturbed by a vertical velocity field located around the interface $z=h$ modeled by a white noise of amplitude $w_m=10^{-2} \text{ m s}^{-1}$.

3.2 Typical growth of instabilities

We present here results of 2D simulations, realized with the JADIM code, by varying the Richardson gradient number Ri and the viscosity ratio W . We observe the appearance of growing shear instabilities of large amplitude for Richardson numbers below the critical Richardson number of 0.25, approximately, for all the values of W investigated here.

As for the viscosity gradient, we observe that, as presented in figures 3 and 4 for a Richardson number $Ri=0.15$, an increase of the viscosity gradient leads to a shift of the instability location upward in the interface, that is, closer to water, the less viscous fluid. This shift of the instability leads to a reducing of the quantity of sediments put in suspension. Indeed, for a large viscosity ratio, mixing occurs between clear water and some already mixed mud, of intermediate density and viscosity.

3.3 Linear stability analysis

After having determined the impact of control parameters on the stability of the interface, linear stability analysis has been performed using the LiSa code developed at IMFT. The growth rate of the more unstable mode is computed for a hundred values of the normalized wavenumber of the perturbation k^* and is presented in figure 6 for $Ri=0.15$ and different W . We choose to scale the wave number with half the thickness of the interface: $k^*=k \times \delta \times (\sqrt{\pi})/4$; the phase velocity with $U_0/2$; the growth rate is normalized by $\sigma^*=\sigma \times (\delta \times (\sqrt{\pi})/2) / U_0$.

We observe, in figure 5, a similar behavior for the different viscosity ratios tested here. However, slight differences are observed for $W=3$, corresponding to a dynamic viscosity of mud flow 1000 times higher than that of water. On the one hand, we notice that the growth rate is larger ($\sim 10\%$); and on the other hand, the most unstable wave number is different (0.456 for $W=0$ and 0.480 for $W=3$).

This difference in growth rate and wave number of the most unstable modes between different W , can be of consequence for the sediment resuspension.

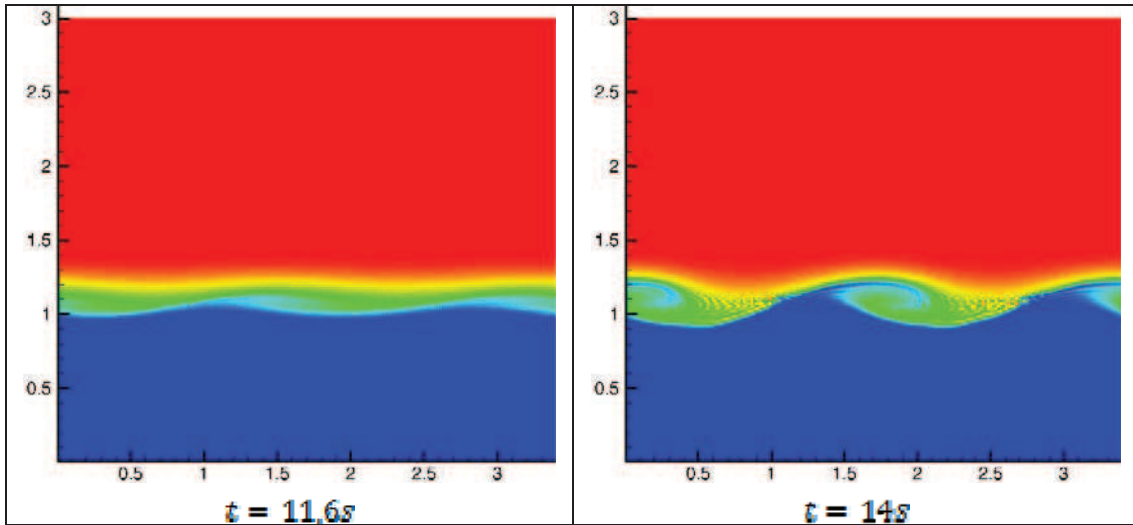


Figure 3. Configuration $Ri=0.15$, $L=3.4 \text{ m}$, $W=0$. Density fields $\rho(x, z)$ at different times separated by 2.3 s ($\color{red}\blacksquare$: $\rho_0=1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\color{blue}\blacksquare$: $\rho_1=1360 \text{ kg m}^{-3}$).

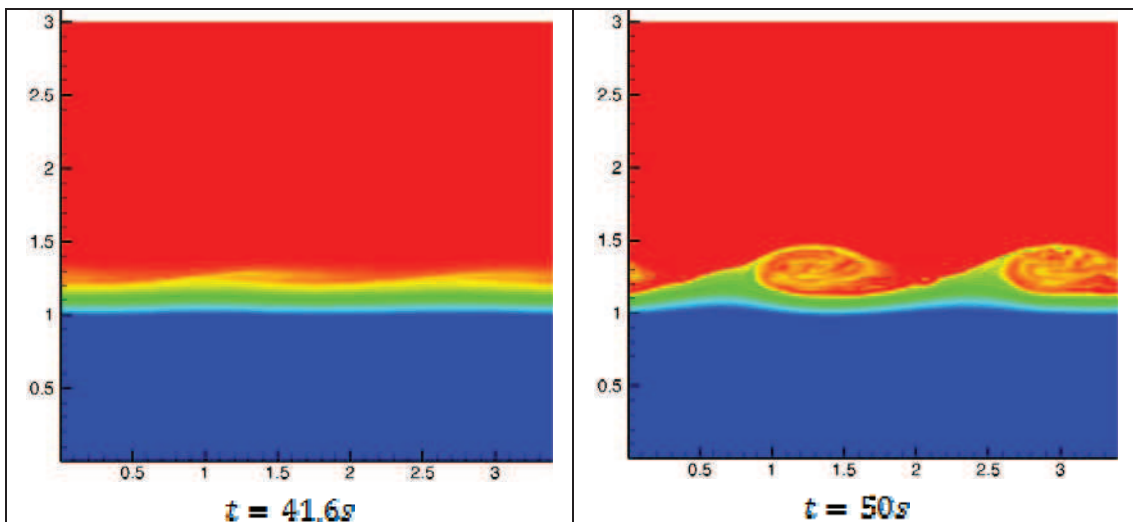


Figure 4. Configuration $Ri=0.15$, $L=3.4 \text{ m}$, $W=3$. Density fields $\rho(x, z)$ at different times separated by 8.4 s ($\color{red}\blacksquare$: $\rho_0=1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\color{blue}\blacksquare$: $\rho_1=1360 \text{ kg m}^{-3}$).

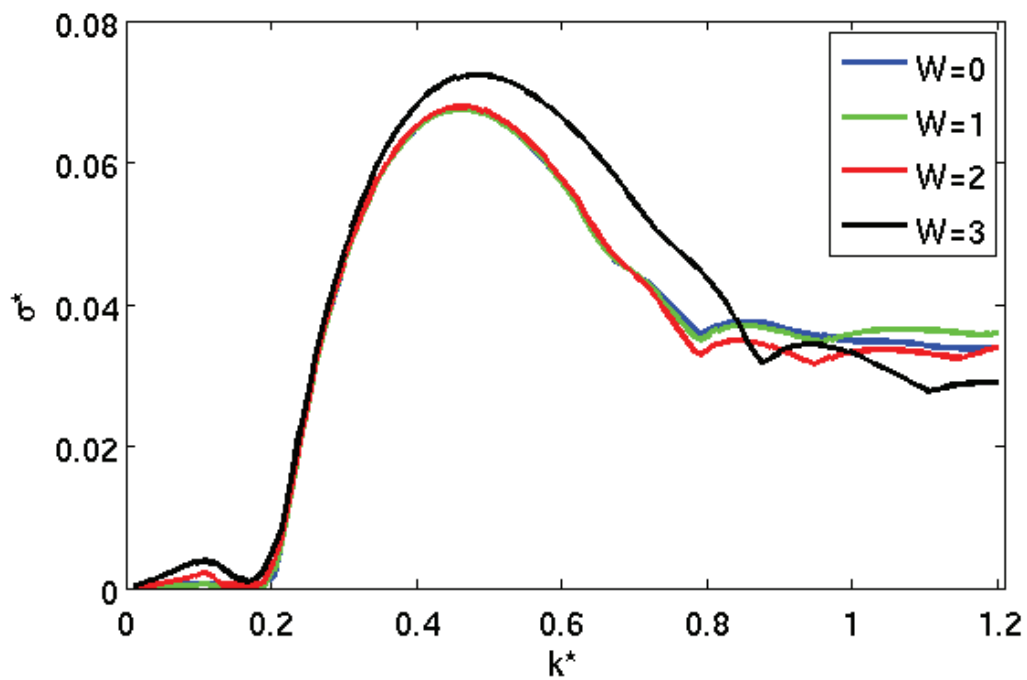


Figure 5 : Representation of the normalized growth rate σ^* as a function of the normalized wave number k^* for Richardson number $Ri=0.15$.

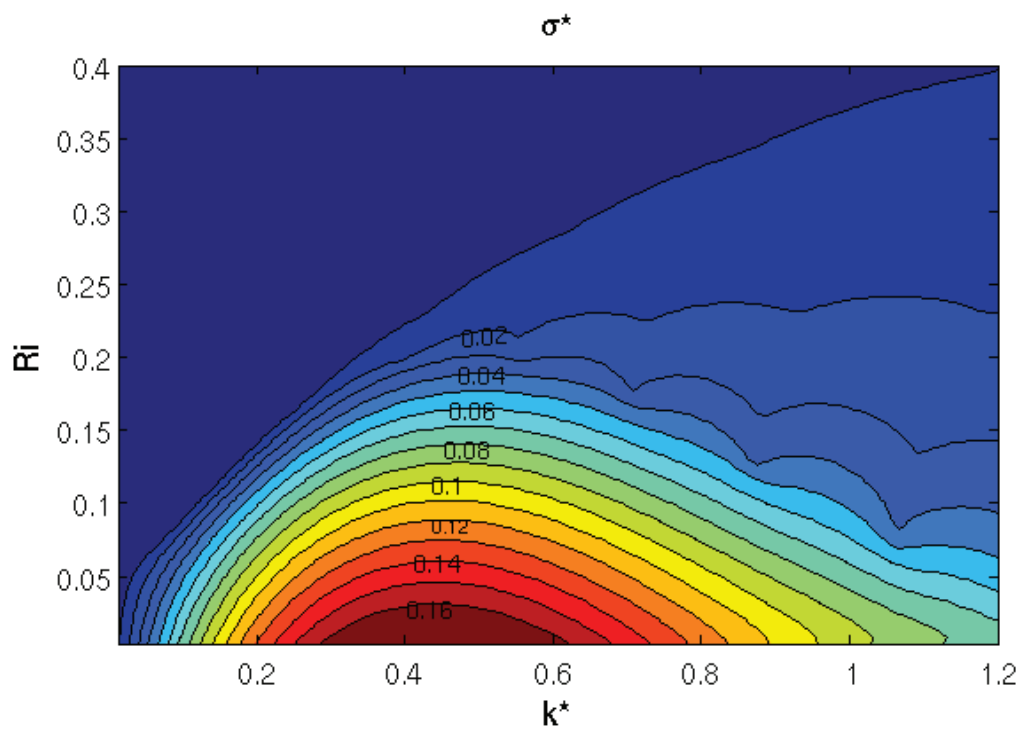


Figure 6 : Isolines of the normalized growth rate σ^* , as a function of the non-dimensional wave number k^* and the Richardson number Ri (for $W=3$).

In figure 6, we clearly observe, when Ri decreases, an increase of the growth rate and a decrease of the most unstable wave number. We can also observe for this configuration ($W=3$) the subsistence of very small growth rate instabilities beyond the conventional critical Richardson number situated at 0.25.

4. Conclusion

We have modeled the interface between water and mud flow by two Newtonian miscible fluids presenting strong variations of density and viscosity. 2D flows are simulated to get a stability criterion which is observed to be close to the well-known theoretical value $Ri=1/4$ for density stratified shear flows of homogeneous viscosity. The results show that the viscosity gradient modifies the outbreak of the instability, thus modifying the critical Richardson number, the wave number of the most unstable mode and the location of the instability at the interface. Therefore the viscosity ratio needs to be taken into account for the parameterization of the mixing due to shear instabilities.

These results predict, at the interface, the density of a homogeneous fluid, resulting from the mixing of a model of mudflow and water, in function of flow feature. The next goal is to translate the density in concentration to supply a boundary condition of sediment resuspension. These results suggest also further investigations, for instance, by comparing the present analysis to simulations realized with a more realistic rheology of the mud flow like Bingham or complex rheology (PHAM VAN BANG, 2007).

5. Acknowledgements



The first author is supported by a scholarship intended for PhD students funded by the DGA (Direction Générale de l'Armement).

This work has benefited from CICT and GENCI computational means.

6. Bibliography

ANTKOWIAK A., BRANCHER P. (2004). *Transient energy growth for the Lamb-Oseen vortex*. Physics of Fluids, vol. 16(1), pp L1-L4. doi:10.1063/1.1626123

ANTKOWIAK A., BRANCHER P. (2007). *On vortex rings around vortices: an optimal mechanism*. Journal of Fluids Mechanics, vol. 578, pp 295-304. doi:10.1017/S0022112007005198

CALMET I., MAGNAUDET J. (1996). *Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow*. Physics of Fluids, vol. 9(2), pp 438-455. doi:10.1063/1.869138

CAULFIELD C.P., PELTIER W.R. (2000). *The anatomy of the mixing transition in homogeneous and stratified free shear layers*. Journal of Fluid Mechanics, n° 413, pp 1-47. doi:10.1017/S0022112000008284

Appendix : Notations

A_0	: quantity A associated with the water
A_1	: quantity A associated with mud flow
A^*	: normalized quantity A
At	: Atwood number
F	: function
g	: acceleration of gravity (m s^{-2})
h	: height of the interface water - mud flow (m)
k	: streamwise wave number
L	: length of the computational box (m)
P	: pressure (Pa)
Re	: Reynolds number
Ri	: Richardson gradient number
t	: time (s)
\underline{u}	: velocity vector (m s^{-1})
w_m	: amplitude of the vertical velocity perturbations (m s^{-1})
W	: logarithm of the viscosity ratio
x,y,z	: coordinates (m)
Z	: vertical coordinate associated with function F (here $Z=(z-h)/\delta$)
δ	: thickness of interface (m)
λ	: shape ratio between water and mud flow
μ	: dynamic viscosity (Pa s)
ρ	: density (kg m^{-3})
σ	: growth rate
Φ	: volume fraction of mud flow in fluid