



L'apprentissage du calculus dans une tâche classique de la transition lycée-université

Macarena Flores González, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier

► To cite this version:

Macarena Flores González, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier. L'apprentissage du calculus dans une tâche classique de la transition lycée-université. IREM de Paris, 23, 2020, Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz., 978-2-86612-396-3. <hal-03544670>

HAL Id: hal-03544670

<https://hal.science/hal-03544670v1>

Submitted on 8 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



**Cahiers du laboratoire de didactique
André Revuz
n°23**

Juin 2020

**L'APPRENTISSAGE DU CALCULUS DANS UNE TÂCHE CLASSIQUE
DE LA TRANSITION LYCÉE-UNIVERSITÉ**

Par Macarena Flores González, Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier

ISBN : 978-2-86612-396-3

ISSN : 2105-5203

Imprimé par l'IREM de Paris – Université de Paris

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication

<https://irem.u-paris.fr/>

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):

Université de Paris, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de France)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:

Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:

nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

<https://irem.u-paris.fr/> (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

L'apprentissage du *calculus* dans une tâche classique de la transition lycée-université¹

Macarena Flores González, Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier

Résumé

Nous avons choisi pour notre recherche une tâche classique de la fin du secondaire, qui fait également objet d'apprentissage au début de l'enseignement supérieur : l'étude d'une suite définie par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur \mathbb{R} . Nous cherchons à caractériser les spécificités de l'apprentissage du *calculus*² dans les deux institutions ainsi que ses continuités et ses ruptures, en étudiant ce type de tâches, les productions écrites des élèves lycéens et des étudiants universitaires. Les notions de suite et de fonction dans toute leur complexité (Montoya et al., 2018), sont au cœur de nos analyses. Comme cadre théorique nous articulons la Théorie de l'Activité développée en Didactique des Mathématiques (TADM - analyses locales des tâches et activités mathématiques des élèves, Vandebrouck 2018) avec la théorie complémentaire des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak et al., 2016).

Mots-Clés : Activités mathématiques, travail mathématique, paradigmes de l'analyse, contrôle, suites récurrentes.

1. Introduction

De nombreuses études ont déjà caractérisé la spécificité dans la nature de la transition entre le lycée et l'université dans l'enseignement des mathématiques. En effet, cette transition est un enjeu majeur dans l'enseignement des mathématiques, ainsi elle comporte plusieurs dimensions allant des dimensions institutionnelles et socioculturelles aux dimensions épistémologiques et cognitives ; dans cette brochure, nous nous concentrons davantage sur les questions épistémologiques et cognitives. La transition entre les niveaux secondaire et supérieur entraîne des discontinuités dans les processus d'enseignement et d'apprentissage ainsi que des continuités (Gueudet, 2008 ; Gueudet et al., 2016 ; Winsløw et al., 2018 ; Gueudet et Thomas, 2020) ; cela est particulièrement le cas dans le domaine du *calculus* (Monaghan et al., 2019).

Par exemple, les suites et les fonctions numériques sont étudiées dans les deux institutions et un simple regard sur les manuels et les documents de ressources pour les classes du lycée, permet de voir que ce type d'objets mathématiques est enseigné et appris d'une manière très stable. Cependant, le travail mathématique sur ces objets est généralement très difficile, même pour les bons étudiants qui entrent à l'université. Plus particulièrement, nous avons choisi d'étudier l'enseignement et l'apprentissage des suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$; car d'une part c'est un objet prépondérant du point de vue de l'épistémologie des mathématiques, et d'autre part cet objet apparaît dans l'enseignement secondaire et au début de l'université en France. Cette notion clé pourrait permettre d'effacer la plupart des difficultés que les élèves peuvent rencontrer avec les suites, les fonctions ou la confusion entre les deux. De plus, ce type de suites présente un grand intérêt pour de nombreux problèmes mathématiques

¹ Ce travail est une présentation plus longue et détaillée, en français, d'un article soumis à ZDM.

² Nous utilisons le terme *calculus* utilisé dans la bibliographie anglo-saxonne pour faire référence à ce qu'en France on appelle « analyse », que ce soit au niveau du lycée ou à l'université.

dans le domaine de l'analyse mathématique à l'université et dans les domaines de recherche en mathématique.

Par la suite, nous présentons le cadre théorique que nous utilisons dans nos analyses, suivi de la façon dont nous concevons la problématique que nous abordons, la présentation de la méthodologie utilisée avec la tâche mathématique que nous avons construit pour cette étude, les analyses a priori et posteriori la concernant, et finalement nous exposons nos conclusions et les ouvertures de ce travail.

2. Cadre théorique globale : articulation entre la TADM et les ETM

2.1. Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques

D'abord, nous travaillons dans le cadre de Théorie de l'Activité, c'est-à-dire que nous étudions l'apprentissage des mathématiques de la part des élèves dans une perspective vygotskienne impliquant notamment les tâches, les médiations, l'internalisation, l'utilisation des outils et des signes, les concepts scientifiques et la zone proximal de développement (ZPD) des élèves. Nous nous appuyons aussi sur les trois niveaux introduits à l'origine par Leontiev (1978) : activité associée à un motif, actions associées à des buts et opérations associées à des conditions. Nous utilisons surtout des outils théoriques et méthodologiques qui ont été développés au cours des dernières dizaines d'années par la communauté française des ergonomes cognitifs, puis par des chercheurs travaillant dans le domaine de la didactique des mathématiques (Vandebrouck, 2018). L'accent est mis sur l'individu en tant que sujet cognitif et acteur de l'activité, avec une perspective piagétienne constructiviste (Piaget, 1968), plutôt que sur le fonctionnement du système global comme dans le modèle d'Engeström par exemple (Engeström et al., 1999). Ces développements de la Théorie de l'Activité dont nous parlons, sont proches de ceux de Simon et al. (2018) qui traitent également des « *aspects of constructivist theory to contribute to explicating internalization* » (p.2). Cependant, nous ne nous concentrons sur aucun modèle d'apprentissage et de conception des tâches. On trouvera des explorations plus détaillées de la complémentarité de Piaget et Vygotsky dans Cole et Wertsch (1996).

Les tâches sont cruciales pour l'analyse de l'activité des élèves, et elles - telles que décrites par Leontiev (1978) et étendues en ergonomie cognitive - font référence aux objectifs à atteindre dans certaines conditions (Leplat 1997). Ces tâches sont analysées en référence aux connaissances disponibles pour celui qui apprend, au contexte, aux médiations et aux ressources dans le cadre de notre perspective cognitive dans la Théorie de l'Activité. En utilisant la catégorisation de Robert (1998) pour analyser les tâches, nous identifions tout d'abord les connaissances mathématiques à utiliser pour une tâche donnée : la (les) représentation(s) d'un concept, le (les) théorème(s), la (les) définition(s), la (les) méthode(s), la (les) formule(s), les types de preuves, etc. L'analyse vise à répondre à plusieurs questions cruciales : Les connaissances mathématiques à utiliser existent-elles déjà pour les étudiants ou sont-elles nouvelles ? Les étudiants doivent-ils trouver eux-mêmes les connaissances à utiliser ? Si la réponse est oui, nous dirons que ces tâches se réfèrent au *niveau disponible*. La tâche nécessite-t-elle seulement de l'application directe d'un savoir sans aucun ajustement (*niveau technique*) ou nécessite-t-elle des adaptations et/ou la réalisation de sous-tâches ? (*niveau d'adaptation*). Horoks et Robert (2007) présentent une liste d'adaptations pour la résolution des tâches où on trouve : le mélange de connaissances, l'utilisation d'intermédiaires, le changement de registre de représentation (Duval, 1995), le changement de cadre mathématique (Douady, 1986), le changement de domaine mathématique, l'introduction d'étapes ou l'introduction de choix, l'utilisation de différents points de vue, etc. Les tâches qui nécessitent une telle disponibilité ou adaptation des connaissances sont appelées *tâches complexes*. Ces tâches stimulent l'apprentissage des mathématiques car les élèves sont en mesure d'accéder plus facilement et

plus souplement aux connaissances en question, en fonction toutefois de leur mise en œuvre en classe.

Nous introduisons le terme générique d'*activités mathématiques* (plutôt que d'activité) pour faire référence à l'activité des élèves sur une tâche mathématique spécifique dans un contexte donné. Les activités mathématiques se réfèrent aux processus cognitifs qui entourent les actions et les opérations (même les non-actions). Ces activités mathématiques sont conçues sur la base des fonctions d'opérations de Galperine (1966) qui distingue trois fonctions : l'orientation, l'exécution et le contrôle. Lorsque les élèves sont confrontés à une tâche mathématique, les activités mathématiques englobent ces trois fonctions ; cependant, nous nous concentrons davantage sur certaines activités "critiques" (Vandebrouck, 2018) qui sont caractéristiques des tâches complexes (Robert et Vandebrouck, 2014), dans le sens où les élèves doivent développer ces activités pendant l'exécution de la tâche complexe. Nous mettons l'accent sur les trois activités critiques suivantes :

- Les *activités de reconnaissance*, qui se produisent principalement lorsque les tâches sont de niveau disponible : les élèves doivent reconnaître les connaissances mathématiques qui peuvent être utilisées pour résoudre les tâches qui leur sont confiées. Toutefois, il peut également être demandé aux élèves de reconnaître des modalités d'application ou d'adaptation de ces connaissances. L'élève peut également reconnaître que plusieurs étapes de son raisonnement peuvent être reliées à d'autres étapes.
- Les *activités d'organisation*, qui peuvent se produire lorsque les tâches appartiennent au niveau d'adaptation : les élèves doivent identifier les étapes logiques et temporelles de leur raisonnement mathématique, par exemple si certaines étapes sont nécessaires ou si certains intermédiaires doivent être introduits.
- Les *activités de contrôle*, qui sont développées lors de la réalisation de tâches complexes lorsque les élèves sont capables de reconnaître que leur raisonnement est cohérent avec plusieurs points de contrôle.

Cette catégorisation des activités mathématiques peut s'appuyer sur l'orientation cognitive des tâches de *calculus* dans l'article de White et Mesa (2014). Ils se réfèrent également à Piaget (1968) afin de mettre en évidence certaines de leurs catégories. Cependant, nous nous concentrons davantage sur les activités mathématiques des élèves lorsqu'ils sont confrontés à des tâches complexes, et non sur leur « rappel et application de la procédure » (qui se réfèrent à notre niveau technique). Nous nous concentrons davantage sur la « procédure de reconnaissance et d'application », sur la « compréhension appliquée », sur l'« analyse » (qui regroupe les activités de reconnaissance et d'organisation) et sur l'« évaluation » (qui regroupe les activités de contrôle). De plus, pour des tâches complexes, avec des adaptations ou des connaissances disponibles nécessaires aux étudiants, nos outils d'analyse des tâches peuvent aider à préciser le type d'adaptation ou le type de disponibilité auquel les étudiants sont confrontés.

Enfin, nos analyses des tâches et des activités fondées sur la Théorie de l'Activité, sont aussi étroitement liées au contexte situationnel des élèves et des classes. En conséquence, les activités ne sont pas seulement caractérisées par la complexité des tâches, mais aussi par les caractéristiques du contexte et toutes les médiations qui se produisent lors de l'exécution des tâches. Nous considérons la proximité de la tâche à laquelle les élèves sont confrontés avec tout type de tâche habituelle dans le contexte de la classe. Certaines tâches complexes peuvent avoir été routinisées en tant qu'opérations dans le contexte de la pratique en classe et se rapportent donc principalement au niveau technique. De même, la caractéristique de l'énoncé ou le discours de l'enseignant peuvent interagir et les élèves peuvent bénéficier de médiations qui les aident à reconnaître le type de tâche et la technique associée. Dans certains cas, certaines

activités mathématiques telles que la reconnaissance, ne peuvent jamais avoir lieu à cause des médiations contextuelles de l'enseignant ou à cause des formes routinières des énoncés.

Lorsque les tâches et les activités mathématiques se rapportent à l'enseignement et à l'apprentissage de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, les tâches peuvent être analysées comme des tâches complexes, car les concepts relatifs aux fonctions et les concepts relatifs aux suites sont mélangés. Même si les connaissances mathématiques à utiliser existent déjà chez les élèves (les concepts ne sont pas nouveaux lorsque les élèves sont confrontés à des tâches sur des suites récurrentes), plusieurs théorèmes ou méthodes doivent être disponibles ou adaptés par les élèves. Par exemple, sans aucune médiation, les élèves doivent reconnaître un théorème spécifique comme outil pour étudier la suite. Au lycée, le seul théorème disponible est que "toute suite croissante et majorée est convergente". Par conséquent, la méthode globale pour étudier les suites récurrentes a été routinisée ; il reste aux étudiants d'adapter la méthode globale de telle sorte que la tâche se rapporte principalement au niveau d'adaptation sans aucune médiation. À l'université, plusieurs autres types de suites sont étudiés et plusieurs autres théorèmes peuvent être utilisés, de ce fait, le niveau de la tâche est souvent disponible. Cependant, dans les deux institutions, les étudiants doivent développer des activités d'organisation pour planifier le raisonnement : d'abord trouver la variation de la suite, puis trouver si la suite est majorée ou minorée selon le résultat de la première phase. Selon le contexte, les étudiants peuvent calculer $u_{n+1} - u_n$ ou u_{n+1}/u_n et ils doivent interpréter le contexte pour reconnaître la meilleure méthode. Lorsqu'ils calculent $u_{n+1} - u_n$, les élèves peuvent faire face à d'autres activités de reconnaissance pour déterminer le signe de l'expression. Une preuve avec la méthode de démonstration par récurrence peut également être appropriée et les étudiants doivent reconnaître la méthode à appliquer si une médiation est apportée par le contexte (dans l'énoncé ou comme médiation de la part de l'enseignant). Enfin, des activités de contrôle peuvent avoir lieu si les élèves essaient d'établir des relations entre les éléments contextuels et leurs résultats : par exemple, une suite croissante de valeurs positives ne peut pas converger vers 0, dans ce cas les élèves peuvent développer des activités de contrôle pour identifier l'erreur. Les activités de contrôle peuvent également concerner la comparaison entre les résultats que les élèves ont trouvés et les différentes représentations de la suite, ce qui peut être fait par un graphique, un tableau de valeurs, etc.

2.2. La Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM)

Deuxièmement, nous utilisons la Théorie des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak, Tanguay et Elia, 2016 ; Gómez-Chacón, Kuzniak et Vivier, 2016 ; Kuzniak et Richard, 2014) qui a été développée au sein de la communauté de didactique des mathématiques, comme modèle pour saisir de manière cohérente les perspectives cognitives et épistémologiques de l'apprentissage. Comme le mentionne Radford (2016) dans le numéro spécial du ZDM, l'une des caractéristiques les plus marquantes de la tradition française en matière de didactique des mathématiques est l'accent mis sur le contenu mathématique, notamment à travers les deux théories françaises les plus influentes : la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (p.925). L'approche des ETM va dans ce sens, en mettant fondamentalement l'accent sur le plan épistémologique. Cependant, l'approche des ETM est également stimulée par l'approche cognitive que nous avons mentionnés ci-dessus avec la Théorie de l'Activité dans l'enseignement des mathématiques, donnant autant d'importance au plan cognitif et aux dimensions entre les deux plans. Comme le rappelle Radford, l'articulation des approches épistémologiques et cognitives n'est pas une question mineure. Néanmoins, avec les ETM l'accent est davantage mis sur le travail mathématique et les espaces de travail des élèves plutôt que sur le contexte de l'activité.

Notre objectif n'est pas de présenter l'ensemble de la théorie, mais plutôt de mettre l'accent sur la structure principale qui apporte la théorie des ETM. Avec les deux plans cognitif et épistémologique, cette théorie prend en compte trois dimensions qui sont d'une importance cruciale pour le travail mathématique (Kuzniak, Tanguay et Elia, 2016, p. 726-727) :

- La *Dimension Sémiotique* « c'est le processus associé aux signes et aux représentations (ou signifiants) [...] affichés et organisés par des systèmes de représentations sémiotiques. La dimension sémiotique fournit aux représentations perceptibles leur statut d'objets mathématiques opérationnels ».
- La *Dimension Discursive* « c'est le processus par lequel les propriétés et les résultats organisés dans le système de référence théorique sont actionnés afin d'être disponibles pour le raisonnement mathématique et les validations discursives. [...] Le but de cette dimension est d'engager un processus bidirectionnel : un discours déductif, probatoire, soutenu par des propriétés structurées dans le cadre du référentiel théorique [...] ; ou inversement, l'identification de propriétés et de définitions à inclure dans le référentiel ».
- La *Dimension Instrumentale* « permet de rendre opérationnels les artefacts dans les processus de construction en contribuant à la réalisation du travail mathématique ».

Ces trois dimensions importantes dans le travail mathématique, ne sont pas isolées ; en effet, il n'y a pas de travail mathématique dans une seule dimension et la plupart du temps, les dimensions sont entrelacées. Cependant, l'analyse didactique des ETM met souvent l'accent sur une dimension (la plus importante selon le travail mathématique) ou sur deux dimensions activées aux même temps, appelées plans verticaux : plan sémiotique-discursif [Sem-Dis], plan instrumental-discursif [Ins-Dis] et plan sémiotique-instrumental [Sem-Ins] (Kuzniak et al. 2016).

Selon l'exemple précédent abordé dans la section 2.1, la dimension Discursive est clairement présente lorsque l'on cherche à prouver des résultats ; néanmoins, il y a aussi la dimension Sémiotique qui, selon la situation, guidera le choix du calcul de $u_{n+1} - u_n$ ou de u_{n+1}/u_n , ainsi que le choix d'une preuve par récurrence ou non. Par exemple, si l'on trouve $u_{n+1} - u_n = P(u_n)$ une visualisation du polynôme (dimension Sémiotique) peut permettre de prouver qu'il a un signe constant (dimension Discursive). Cependant, si l'on visualise que $u_{n+1} - u_n$ a un signe identique à $u_n - u_{n-1}$, cela peut conduire plutôt à une preuve par récurrence. La dimension Instrumentale est également importante car elle peut guider le travail. Par exemple, le calcul sur tableur des premiers termes de la suite peut amener à penser que la suite est croissante et bornée entre 0 et 1, ce qui permet d'établir quelques conjectures. Dans le contexte français, il est assez courant pour les lycéens de travailler avec des outils (la calculatrice notamment) alors que cela est souvent interdit au niveau universitaire.

Un autre aspect que nous allons développer ci-dessous est la notion de paradigme. Nous pouvons en effet reconnaître différents types de travail, chacun ayant des caractéristiques, des exigences et des attentes différentes. Ce n'est pas le même travail de visualiser sur un tableur qu'une suite croît, à un travail qui consiste à justifier algébriquement que $u_{n+1} - u_n$ a un signe constant.

2.3. Complémentarité des deux théories

La proximité naturelle de la Théorie de l'Activité dans l'enseignement des mathématiques avec la théorie des ETM justifie l'articulation des deux théories dans ce travail. Cette complémentarité découle de leur objectif commun d'étudier les pratiques ordinaires des élèves en classe. De ce fait, les deux théories donnent un cadre et des outils pour reconstituer rationnellement les processus cognitifs d'un sujet à partir des traces tangibles laissées par les actions de ce sujet en situation, lors de l'exécution d'une tâche mathématique.

Mais la distinction entre les activités dans le premier cadre et le travail dans le second, semble être un point important à soulever. En fait, les activités et le travail concernent tous les deux le niveau des actions. Néanmoins, la Théorie de l'Activité est d'abord une approche cognitive visant à caractériser les activités des élèves, principalement internes, en relation avec la tâche à laquelle ils sont confrontés et les médiations qui se produisent afin de déduire les problèmes d'apprentissage. De son côté, la théorie des ETM est une théorie didactique qui met en évidence le travail des élèves, principalement externe, pour essayer de comprendre les réflexions mathématiques d'un sujet.

Le croisement des deux théories est un moyen de donner une consistance mathématique aux catégories données par la Théorie de l'Activité et de les structurer à travers les trois dimensions de l'ETM : Sémiotique, Instrumentale et Discursive. D'autre part, cela donne une légitimité cognitive aux catégories de l'ETM qui permet une analyse cohérente du travail mathématique, en particulier pour les aspects cognitifs. Cependant, plus qu'une proximité, nous construisons une complémentarité entre l'approche des ETM et les développements didactiques de la Théorie de l'Activité.

3. Étude et apprentissage des suites récurrentes, problématisation

3.1. Des mathématiques aux programmes d'études

Les suites récurrentes présentent un grand intérêt pour de nombreux problèmes mathématiques dans le domaine de l'analyse à l'université. Principalement, elles apparaissent comme des objets naturels pour approcher les solutions numériques des équations $g(x) = 0$ (en utilisant $f(x) = x + g(x)$ ou $f(x) = x + \alpha(x)g(x)$ d'une manière plus générale). Par exemple, la méthode numérique de Newton pour résoudre les équations fonctionnelles est basée sur cette idée. La recherche de zéro pour g est transformée en étude de la convergence de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Cette méthode peut être généralisée en analyse multivariable et en géométrie différentielle car elle permet de montrer l'existence de solutions locales de certains problèmes (via le théorème du point fixe) comme dans la méthode de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles (Picard-Lindelöf pour les Anglais), le théorème des fonctions implicites (Perrin, 2000), les fractales, et les systèmes dynamiques qui est un grand domaine de recherche de nos jours.

Comme ces suites sont importantes dans l'univers mathématique, leur étude apparaît à la fois à la fin de l'école secondaire et au début de l'université. En fait, on trouve des exercices des suites définies par récurrence dans la plupart des manuels pour les dernières années du lycée. Par ailleurs, les suites définies par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ sont un sujet d'étude des classes de Première et Terminale Scientifiques (grades 11 et 12) du lycée. En plus, à l'heure actuelle nous trouvons ces suites comme sujet obligatoire dans les programmes de la nouvelle réforme scolaire du lycée en France. Cela montre la pertinence actuelle de cet objet mathématique dans le contexte de l'enseignement français.

3.2. Difficultés des étudiants

D'une perspective plus didactique, l'étude des suites récurrentes, ainsi que les concepts de convergence et de limite, reste une difficulté majeure pour les étudiants de la fin du secondaire et du début de l'université. Cette étude mélange des activités avec deux types d'objets mathématiques : les suites et les fonctions, qui ne sont pas conceptualisées pour elles-mêmes par les élèves à la fin du secondaire et au début de l'université (Rousse, 2018). Une partie des élèves ne reconnaît pas les suites récurrentes comme des suites spécifiques et les traite de la forme $u_n = f(n)$ comme nous le verrons dans les expérimentations que nous présenterons.

Pour l'autre partie des étudiants - les étudiants sur lesquels nous allons nous concentrer - les manipulations de suites récurrentes restent très chaotiques car les activités traitent à la fois de techniques provenant du domaine des suites (par exemple le raisonnement inductif, utilisation de $u_{n+1} - u_n$ pour étudier les variations...) et de techniques provenant du domaine des fonctions (résolution de l'équation $f(x) = x$, dérivation de la fonction f , utilisation du tableau de variations pour la fonction...). De plus, certaines techniques peuvent être les mêmes dans les deux domaines - si f est croissante alors la suite $u_n = f(n)$ est croissante, de même pour la limite à l'infini - alors que la plupart des techniques sont différentes entre les deux domaines, surtout lorsque nous considérons la suite récurrente : les variations de f ne sont pas les mêmes que les variations de (u_n) et la limite de f n'est pas liée à celle de (u_n) .

Pour réduire la complexité pour les élèves et les étudiants, les tâches sont souvent données sous forme de liste de sous-tâches que les étudiants doivent accomplir sans aucune flexibilité, c'est-à-dire principalement au niveau technique. Dans une étude précédente (Flores-González, Vandebrouck et Vivier, 2020), nous nous sommes concentrés sur une telle tâche qui a été donnée au baccalauréat scientifique en France (fin de l'école secondaire). Nous avons comparé cette tâche avec un exercice donné aux élèves lors d'un examen de première année d'université. Cette comparaison a montré de quelle façon les activités de reconnaissance sont à attendre pour les étudiants universitaires, même si le cœur de la tâche - l'étude d'une suite récurrente - est le même. Nous avons montré, à travers les productions des étudiants, qu'il y a un faible taux de réussite à cette tâche, que la plupart des étudiants amalgament les connaissances entre les suites et les fonctions, et qu'ils ne contrôlent pas leurs résultats mathématiques. Pour les deux institutions, la dimension Instrumentale du travail mathématique est presque nulle et les étudiants n'ont aucun moyen de contrôler leurs résultats. Nous reviendrons plus bas sur ce point méthodologique.

3.3. Paradigmes de l'analyse

Le travail mathématique à la transition lycée-université change beaucoup. Par exemple, les calculatrices sont beaucoup utilisées au lycée mais sont mises à l'écart à l'université. Afin de caractériser les différents types de travail mathématique, nous nous référons à la notion de paradigmes dans les ETM et plus particulièrement au paradigme de l'analyse (Montoya Delgadillo et Vivier, 2016, p. 742-743) en les désignant par A1, A2, A3, au lieu de AG, AC et AR :

- L'*Analyse arithmético-géométrique* [A1], qui permet des interprétations avec des hypothèses implicites basées sur la géométrie, les calculs arithmétiques ou le monde réel. La nature des objets auxquels les signes se réfèrent est secondaire.
- L'*Analyse calculatoire* [A2], où les règles de calcul sont définies plus ou moins explicitement et sont appliquées sans réfléchir nécessairement à l'existence et la nature des objets introduits. Les calculs sont souvent effectués selon une démarche algébrique efficace, avec des expressions formelles qui ont une forme représentative. Ces calculs sont effectués sans conscience de la nature de l'objet mathématique.
- L'*Analyse réelle* [A3], qui se caractérise par un travail d'approximation et de voisinage, voire topologique ; la définition et les propriétés sont fixées théoriquement, ce qui permet un « travail des ε » spécifique à ce paradigme : limites, inégalité, "le négligeable". La nature des objets est explicite.

Dans l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, le travail dans le paradigme A1 consiste à représenter les premiers termes de la suite, dans un tableau de valeurs ou graphiquement par exemple, et à visualiser ses propriétés, comme la monotonie ou la convergence de la suite. Le travail peut également être contrôlé, par exemple, en calculant plus de termes ou en zoomant sur un graphique. Cela peut être lié au travail du mathématicien lorsqu'il étudie un nouvel objet

et même une nouvelle suite pour laquelle aucune procédure n'est disponible. D'autre part, le travail dans le paradigme A2 écarte les représentations des premiers termes de la suite pour privilégier un travail basé sur des calculs algébriques et l'utilisation de théorèmes, par exemple : montrer par récurrence que la suite est majorée par 1 ; calculer $u_{n+1} - u_n$ qui est par exemple positif, et donc la suite est croissante ; et pour conclure sur la convergence avec le théorème déjà mentionné. Le travail dans le paradigme A3 consisterait à travailler davantage sur les inégalités pour mettre en évidence ce qui est prépondérant. Ce paradigme apparaît essentiellement à l'université, il ne s'agit donc pas d'une question de transition et nous ne développons pas ce paradigme dans cette étude.

Toutefois, ces paradigmes ne doivent pas être considérés comme une catégorisation des étudiants, mais plutôt comme une façon de comprendre le travail mathématique effectué. En effet, il est parfois difficile de juger le travail d'un étudiant en fonction d'un seul paradigme. Il s'agit plutôt d'une constatation des différents types de travaux mathématiques, ici dans le domaine de l'analyse, qui peuvent être effectués dans une institution. Ces paradigmes ne sont pas isolés les uns des autres ; par exemple, même si c'est le paradigme A2 qui est privilégié dans les deux institutions que nous analysons dans cette étude, il est évident que le paradigme A1 peut être utilisé pour faire des conjectures, et donc pour guider le travail dans le paradigme A2, et peut rendre possible certains contrôles du travail. Par conséquent, le travail mathématique est basé sur une dialectique entre les paradigmes, comme c'est le cas en géométrie, où peu de personnes soutiendraient l'idée de faire des démonstrations sans faire une figure.

3.4. Objectif de l'étude

Notre objectif est d'enrichir la capacité des élèves à traiter les suites récurrentes à la fin de l'école secondaire et au début de l'université. Suite aux observations didactiques et épistémologiques ci-dessus, nous voulons améliorer spécifiquement le travail mathématique en termes de richesse des paradigmes et de dimension Instrumentale, ainsi que l'amélioration des activités mathématiques des étudiants en termes d'activités de reconnaissance et de contrôle. Nous partons du principe que dans notre expérimentation le but n'est pas d'enrichir les activités d'organisation chez les étudiants.

A partir de la tâche du baccalauréat et de l'examen que nous avons évoqué ci-dessus, nous avons d'abord conçu une pré-expérimentation visant à proposer aux élèves du secondaire un exercice venant du niveau universitaire mais avec quelques légères adaptations, cela pour être en cohérence avec les deux institutions. Ainsi, certaines activités de reconnaissance ont ensuite été déléguées aux élèves du secondaire ; cependant, la dimension Instrumentale est restée presque nulle et le travail des étudiants est resté essentiellement dans le paradigme A2 et le plan [Sem-Dis]. Les activités de contrôle n'ont pas encore été mises en évidence.

Ensuite, nous avons proposé une expérimentation avec des élèves de fin d'études secondaires (classe de Terminale Scientifique), visant d'abord à enrichir le travail mathématique à travers la dimension Instrumentale. En effet, l'une des principales différences entre le travail du lycée et celui de l'université est l'utilisation d'artefacts, notamment des outils numériques pour les calculs et les représentations d'objets mathématiques. Cela représente également une façon d'étudier un nouveau problème dans l'activité du mathématicien en général. Cela donne lieu à une focalisation sur la dimension Instrumentale comme moyen permettant de mieux reconnaître les objets mathématiques en jeu et de mieux contrôler les résultats mathématiques à travers un contrôle instrumental. Parallèlement, l'accent est mis sur le paradigme A1 avec l'idée que le fait de travailler en A1 avant de demander un travail en A2, en combinaison avec un travail instrumental, favorisera la reconnaissance et le contrôle des activités de l'étudiant entre les paradigmes A1 et A2, ce qui permettrait d'améliorer la dialectique entre les deux paradigmes.

4. La méthodologie

Nous avons conçu une méthodologie avec trois périodes : (1) la comparaison entre une tâche du baccalauréat et un examen de première année d'université, comme nous l'avons expliqué ci-dessus ; (2) la pré-expérimentation avec une tâche donnée aux élèves du secondaire visant à développer plus d'activités de reconnaissance (toujours dans le paradigme A2 et sans aucune focalisation sur la dimension Instrumentale dans le travail mathématique) ; et ensuite, (3) en tenant compte des résultats précédents de ces deux périodes, nous avons conçu une expérimentation au début de l'année scolaire (en novembre 2019 avec de nouveaux élèves) où nous avons essayé d'enrichir le travail et les activités des élèves avec un nouvel exercice, en nous focalisant davantage sur les changements de paradigme (A1 et A2) et la dimension Instrumentale du travail. Nous abordons ci-après ces trois périodes.

4.1. Première période : une première comparaison de deux exercices, du niveau secondaire et du niveau universitaire

L'exercice du baccalauréat que nous avons pris comme point de départ porte sur l'étude de la suite donnée par $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$ et $u_0 = 1$. Cependant, la tâche est divisée en deux sous-tâches, la première concernant l'étude de la fonction en jeu et la seconde concernant la suite elle-même.

L'exercice de l'examen de niveau universitaire porte sur la suite donnée par $u_{n+1} = 1/(2 - u_n)$ et $u_0 = \alpha$ dans $[0,1]$. Cet exercice a un niveau de complexité élevé, tout d'abord à cause de la généralité de α . De plus, dans l'examen, l'étude de la suite et l'étude de la fonction sont liées de telle sorte que les étudiants universitaires doivent davantage reconnaître et contrôler les objets mathématiques sur lesquels ils travaillent.

Dans l'exercice du baccalauréat, chacune des sous-tâches est divisée en plusieurs questions techniques, alors que les étudiants de l'université ont peu de questions qui peuvent orienter leur activité. En particulier, la tâche au niveau universitaire a plus de possibilités pour plusieurs méthodes de résolution (par exemple, l'étude des variations de la fonction en jeu est une question explicite au baccalauréat, mais à l'examen universitaire il n'est pas nécessaire de garantir que $[0,1]$ est stable par f).

Enfin, dans l'exercice du baccalauréat la plupart des questions restent très techniques, avec le niveau de complexité technique. Ici, la plupart d'entre elles peuvent être renvoyées à des tâches habituelles et routinières que les élèves ont l'habitude de rencontrer. Au niveau universitaire, au contraire, les étudiants doivent reconnaître et adapter les techniques/outils à utiliser dans chaque question qui est au niveau disponible et/ou au niveau d'adaptation. Par exemple, la nécessité d'une démonstration par récurrence n'est pas donnée dans l'exercice universitaire alors qu'elle est explicitement demandée dans l'exercice du baccalauréat. D'autre part, la méthode pour calculer la valeur de la limite n'est pas donnée, ce qui renforce la complexité de l'exécution de la tâche au niveau universitaire.

Enfin, l'exécution de la tâche au niveau universitaire est plus complexe avec adaptation et la nécessité des connaissances disponibles, et avec un niveau plus élevé dans l'orientation et le contrôle de l'activité. Au niveau du baccalauréat, les élèves peuvent répondre à chacune des questions avec un minimum d'activités (au niveau technique), avec peu de nécessité d'orienter et de contrôler (avec cohérence) leur activité globale. Les étudiants universitaires ont une plus grande responsabilité quant à l'orientation de l'ensemble du raisonnement et ont besoin d'un niveau de contrôle plus élevé afin de réussir la tâche globale.

4.2. Deuxième période : une pré-expérimentation pour développer les activités de reconnaissance des élèves du secondaire

Nous avons proposé aux élèves du secondaire en fin d'année scolaire (juin 2019) un exercice issu de l'examen universitaire de la première période mais avec quelques caractéristiques du baccalauréat. L'idée était de confier aux élèves du secondaire des activités de reconnaissance qui ne sont pas usuelles.

PARTIE A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R} - \{2\}$ l'équation : $f(x) = x$.
- 2) Étudier le sens de variation de f .
- 3) Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1]$, $f(x)$ appartient à $[0,1]$.

PARTIE B : Soit α un réel appartenant à $]0,1[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient $[0,1]$.
- 2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- 3) Montrer que la suite (u_n) converge.
- 4) On note l sa limite, et on admet que $l = f(l)$. En déduire la valeur de l .

Figure 1 : Adaptation de l'exercice universitaire pour les lycéens.

Ce nouvel exercice a été divisé en deux parties (partie A et partie B) de telle sorte que les questions de la partie A concernent la fonction et les questions de la partie B portent sur la suite. Les questions de la partie A sont fermées comme pour le baccalauréat. Comme la partie A est consacrée à l'étude de la fonction f , nous ne présentons pas son analyse et nous nous concentrons sur la partie B qui reste le cœur de l'étude. Ici, certaines activités de reconnaissance sont nouvelles pour les élèves et proches de ce que les étudiants universitaires doivent être capables de développer :

- 1) La sous-tâche de la question 1 appartient aux niveaux disponible et d'adaptation de connaissances : les élèves doivent procéder à un raisonnement récursif sans aucune indication (niveau de connaissance disponible, avec des activités de reconnaissance sur le raisonnement récursif). Ils doivent utiliser un résultat provenant de la partie A ($[0,1]$ est stable par f) (adaptation des résultats précédents, avec des activités de reconnaissance de l'utilité du résultat provenant de la partie A).
- 2) La sous-tâche de la question 2 appartient également aux niveaux disponible et d'adaptation : là encore, les élèves doivent procéder à un raisonnement récursif sans aucune indication (niveau de connaissance disponible). Ils doivent à nouveau utiliser un résultat provenant de la partie A (f est croissant) - adaptation du résultat précédent avec des activités de reconnaissance. Il n'y a pas d'indication explicite par rapport à la croissance (ou décroissance) de la suite ; la question était plus ouverte que celle du baccalauréat, où la question demandait de montrer que la suite est croissante. Il y a donc plus d'adaptations des connaissances que dans le baccalauréat.
- 3) La sous-tâche de la question 3 correspond au niveau technique car les élèves n'ont qu'à utiliser leur théorème classique : (u_n) est en croissance et majoré, alors (u_n) a une limite. Cependant, les élèves doivent développer des activités de reconnaissance pour identifier que la question 1 et la question 2 leur donne les conditions pour l'application du théorème.
- 4) La sous-tâche 4 appartient au niveau d'adaptation car les élèves doivent utiliser le résultat de la partie A.

La plupart des questions sont plus ouvertes qu'au baccalauréat et nécessitent davantage d'activités de reconnaissance, ce qui était l'objectif de cette deuxième période. Par exemple, la nécessité d'une récurrence n'est pas une évidence comme dans ce nouvel exercice ; de même

pour la question des variations de la suite qui est aussi plus ouverte, car il n'est demandé que d'étudier ses variations.

4.3. Troisième période : l'expérimentation finale

La conclusion de la pré-expérimentation pour l'étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (Flores-González, Vandebrouck et Vivier, 2020), était d'une part, de proposer un travail dans le paradigme A1 avant de demander un travail dans le paradigme A2, tout en promouvant un travail dans le plan [Sem-Ins] avant d'un travail plus discursif (que ce soit dans A1 ou A2). Ainsi, la théorie des ETM est principalement utilisée pour structurer les tâches proposées aux élèves.

Nous avons conservé l'étude de la fonction, partie A, car ses propriétés sont nécessaires pour étudier la suite. Le travail peut être effectué dans l'un ou l'autre des deux paradigmes. Nous n'abordons pas cette partie A pour nous concentrer sur l'étude de la suite.

Le travail de la partie B est directement lié au paradigme A1 avec un horizon au A2 puisque nous demandons de conjecturer certaines propriétés de la suite. Après un travail dans le plan [Sem-Ins] en utilisant la calculatrice pour calculer les premiers termes de la suite, nous demandons un travail discursif de conjecture des propriétés de la suite. La partie C est consacrée à la preuve de ces propriétés dans le paradigme A2, essentiellement avec un travail discursif.

Tout d'abord dans l'analyse a posteriori, nous noterons les élèves qui comprennent le travail demandé et en particulier le paradigme (A1 en B et A2 en C), ainsi que l'interprétation correcte de l'objet mathématique de l'étude en écartant ceux qui interprètent la suite comme $u_n = f(n)$ (bonne activité de reconnaissance). Nous focaliserons ensuite nos analyses sur les élèves qui ont eu un travail attendu (paradigmes et objet de suite) en identifiant les activités en lien avec travail mathématique tel que conçu avec la théorie des ETM.

En outre, nous accorderons une attention particulière aux activités de contrôle dans les trois dimensions de l'ETM avec une demande explicite sur l'utilisation de la calculatrice ; sur le plan méthodologique, l'accent sera mis sur la recherche de traces de contrôle explicite ou, au contraire, d'incohérences dans les réponses qui manifestent des manques d'activités de contrôle. Le contrôle peut être de type instrumental (par exemple, en utilisant plusieurs outils ou logiciels), sémiotique (par des changements de registres), discursif (par différents théorèmes ou résultats complémentaires du référentiel théorique). Il est possible de penser que le contrôle s'opère souvent dans une dimension complémentaire à celle dans laquelle le travail est développé. Il en est de même pour les contrôles par paradigmes quand des élèves contrôlent par exemple leur travail dans A2 en utilisant des résultats de A1. L'idée d'expérimenter avec cette succession, notamment paradigme A1 dans la partie B puis paradigme A2 dans la partie C, est de promouvoir le contrôle instrumental et sémiotique dans le paradigme A1 du travail discursif dans le paradigme A2.

5. Analyse *a priori* de la troisième expérimentation

Nous présentons la tâche construite lors des résultats de la première expérimentation. Comme nous l'avons signalé, cette nouvelle tâche comporte une nouvelle partie (partie B) qui a pour objectif de présenter la suite et de l'étudier dans le paradigme A1 en établissant des conjectures, pour ensuite effectuer les preuves dans le paradigme A2 (partie C).

Analyse de chaque partie de la situation proposée

Nous nous focalisons sur les parties B et C, car la partie A concerne seulement l'étude de la fonction.

5.1. Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Figure 2 : Énoncé de la partie B et énoncé de la première question B.1.

Suivaient trois tableaux à remplir, chacun pour une valeur particulière de α , pour les valeurs de u_1 à u_6 (voir la Table 1 ci-dessous pour les valeurs 0, 0.5 et 0.9).

Cette question B.1 a pour objectif d'identifier et se familiariser avec la suite à l'aide d'exemples explicites pour trois valeurs différentes de α . En termes théoriques du point de vue de la Théorie de l'Activité nous espérons une reconnaissance de la suite définie par récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ (non explicité dans l'énoncé). Cette reconnaissance amènera ensuite à un contrôle des termes de la suite (u_1, u_2, \dots, u_6) qui seront affichés sur leurs calculatrices. Dans cette partie, l'utilisation de la calculatrice est essentielle, et du point de vue de la théorie des ETM c'est la dimension Instrumentale qui est la plus importante avec une manipulation de l'instrument. On espère ainsi avoir un travail mathématique dans le paradigme A1.

Nous identifions deux représentations numériques possibles données par la calculatrice : représentation décimale et représentation fractionnaire (cf. Table 1). La première (celle que nous espérons), permet de répondre plus manifestement aux questions suivantes ; tandis que la deuxième est moins évidente pour répondre aux questions, mais elle permet de conjecturer l'expression algébrique de la suite $u_n = \frac{n}{n+1}$, ce qui est plus évident. Le choix de la représentation peut être conscient, avec éventuellement un affichage des deux types, ou subi à partir de la configuration de la calculatrice. Éventuellement, si le choix de représentation est conscient, cela pourrait aider aux élèves à avoir soit un contrôle de type discursive (en utilisant l'expression de u_n), soit un contrôle de type instrumental.

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,5$		Cas $\alpha_3 = 0,9$		Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,5$		Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0	u_0	0,5	u_0	0,9	u_0	0	u_0	0,5	u_0	0,9
u_1	0,5000	u_1	0,6666	u_1	0,9090	u_1	1/2	u_1	2/3	u_1	10/11
u_2	0,6666	u_2	0,7500	u_2	0,9166	u_2	2/3	u_2	3/4	u_2	11/12
u_3	0,7500	u_3	0,8000	u_3	0,9230	u_3	3/4	u_3	4/5	u_3	12/13
u_4	0,8000	u_4	0,8333	u_4	0,9285	u_4	4/5	u_4	5/6	u_4	13/14
u_5	0,8333	u_5	0,8571	u_5	0,9333	u_5	5/6	u_5	6/7	u_5	14/15
u_6	0,8571	u_6	0,8750	u_6	0,9375	u_6	6/7	u_6	7/8	u_6	15/16

Table 1 : Valeurs de termes de la suite (en représentation décimal à gauche et fractionnaire à droite) pour trois valeurs de α (0, 0.5 et 0.9).

La suite demandait des conjectures (comme on montre dans la figure 3) à partir de ces tables de valeurs.

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

- Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

- Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

Figure 3 : Questions B.2 et B.3 de la partie B, paradigme A1.

Ces questions B.2 et B.3 ont pour objectif de conjecturer la variation, la convergence et la limite de la suite à partir de l'observation des 6 premiers termes de la suite pour chaque valeur de α donnée. Si la monotonie peut être visualisée pour les premiers termes puis inférée pour les valeurs suivantes (avec un possible contrôle avec les calculs des termes suivants), en revanche cela n'est pas possible pour la convergence et la limite. Il s'agit en effet d'une propriété locale en l'infini et on a finalement trop peu d'informations³. Il peut ainsi y avoir des non-réponses à cette demande de conjecture qui proviendraient d'une bonne compréhension des tables de valeurs et de la notion de convergence.

Enfin, du point de vue de la Théorie de l'Activité on attend la reconnaissance et l'interprétation de la croissance, de la convergence et de la limite 1 de la suite. Du point de vue de la théorie des ETM, cette fois nous espérons un travail dans le plan [Sem-Dis], puisqu'il s'agit d'une activité d'interprétation de signes de représentation et que celle-là sera directement liée à la visualisation (dimension Sémiotique). Une fois cette visualisation est faite, les élèves rédigent leurs discours mathématiques (dimension Discursive) et la conjecture qu'il s'agit d'une suite croissante, convergente, et que sa limite est 1. Pour stimuler un contrôle instrumental de l'objet mathématique et que la reconnaissance (la visualisation) puisse aboutir, nous rajoutons la question « comment avez-vous utilisé la calculatrice » en espérant donner la place à d'autres stratégies de la part des élèves. À travers de cette question nous cherchons à rendre conscient à l'élève de la façon dont il utilise la calculatrice et ainsi, pouvoir stimuler la reconnaissance d'une cohérence (ou non cohérence) dans leur démarche ; cela en espérant donner des éléments pour qu'ils puissent contrôler leur activité mathématique (comme une programmation algorithmique de la suite, une représentation graphique, ou faire calculer plus de termes de la suite sur la table de valeurs par exemple).

5.2. Partie C

Dans cette partie nous espérons que les élèves aient de reconnaissances de théorèmes, de procédures et de preuves liés à chacune des questions. Cela implique un travail mathématique ancré dans la dimension Discursive et dans le paradigme A2.

³ Peut-on conjecturer que la suite $\ln(n)$ converge vers 3 avec les 20 premiers termes ou bien que la série harmonique converge vers 4 avec les 30 premiers termes ?

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

C.4) On note l la limite de la suite (u_n) , expliquer pourquoi $l = f(l)$.

C.5) En déduire la valeur de l sachant que $l = f(l)$.

Figure 4 : Questions de la partie C, paradigme A2 – à la suite de chaque question il était demandé si on pourrait utiliser la calculatrice, et si c'est oui, expliquer comment.

Question C.1

Comme objectif, nous attendons l'activité de reconnaissance d'un travail dans le paradigme A2 avec l'utilisation de la démonstration par récurrence, et l'organisation des étapes qu'elle implique. Ainsi on attend les étapes : (i) On a : $u_0 = \alpha$ et $\alpha \in [0, 1]$ donc $u_0 \in [0, 1]$. (ii) Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $u_m \in [0, 1]$. Par ce qui précède, on obtient $f(u_m) \in [0, 1]$. Or $f(u_m) = u_{m+1}$. Donc $u_{m+1} \in [0, 1]$. (iii) Cela permet de conclure par le principe de récurrence que : $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geq 0$. On pourra dire que l'élève a fait un contrôle s'il met en relation explicitement le résultat qu'il vient de prouver avec la partie B sur les conjectures.

En termes d'ETM, comme il s'agit d'une méthode définie qui permet de résoudre la tâche, on dira que l'élève se trouve dans le paradigme A2. Dans le cas où l'élève ne reconnaît pas la méthode de démonstration par récurrence et fait des interprétations issues de son travail dans la partie B, on dira qu'il se trouve dans le paradigme A1. Vu qu'il s'agit d'une méthode spécifique de preuve et de produire un discours mathématique, le travail mathématique se fera principalement dans la dimension Discursive, que ce soit dans A1 ou dans A2.

Question C.2

Pour cette question, nous attendons la reconnaissance d'une méthode pour déterminer la croissance de la suite. Il y a un choix possible : soit on utilise encore le raisonnement par récurrence (en montrant que pour tout n , $u_n \leq u_{n+1}$), soit on choisit d'analyser les variations de la suite via les expressions algébriques de $u_{n+1} - u_n$ ou de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Dans la stratégie, $u_{n+1} - u_n$, on attend la reconnaissance de l'identité remarquable $(u_n - 1)^2$ au numérateur. À partir de cette reconnaissance, l'élève conclut que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n} \geq 0$ et ensuite il conclut que la suite est croissante. Dans le deuxième cas, pour pouvoir bien conclure, il faut que l'élève puisse reconnaître un polynôme de deuxième degré au dénominateur et reconnaître l'utilisation du résultat de la question C.1 (ie. que u_n est dans $[0,1]$). Comme dans les cas précédents, si le travail de l'élève manque de cohérence on dira que son contrôle est faible ou qu'il n'y a pas eu de contrôle (surtout quand il interprète sans avoir abouti à la reconnaissance de la méthode, et donc il y a un manque de cohérence). Du point de vue des ETM, on attend un travail dans le paradigme A2 et la dimension Discursive.

Question C.3

Pour cette tâche, on attend uniquement la stratégie de la reconnaissance du théorème de convergence monotone. Ainsi dans cette question ils utilisent des résultats des tâches précédentes : de la question C.1 on interprète que la suite (u_n) est majorée par 1, et dans la question C.2 ils interprètent que la suite (u_n) est croissante ; donc (u_n) est convergente. On attend que l'élève ait aussi des activités de contrôle pour relier le résultat de C.3 avec les conjectures de la partie B.

Les questions C.4 et C.5 ne sont pas abordés dans cette brochure.

6. Analyse posteriori : Seconde et troisième expérimentations

Comme on l'a dit, nous avons fait deux expérimentations dans deux classes de la fin de secondaire scientifique, dans deux lycées de la région Parisienne. Les expérimentations ont été mises en place au début de l'année scolaire, après avoir déjà traité les contenus de limite de suites et de limite de fonctions. La Classe 1 correspond à une implémentation de 30 élèves, où ils travaillent de façon individuelle dans deux demi-groupes (codés G1) avec leurs calculatrices scientifiques (modèle TI83 et CASIO graph). Dans la Classe 2 (codée G2), il s'agit d'une expérimentation avec 32 élèves, qui comporte aussi un temps de travail individuel des élèves (d'une durée de 12 min par partie) mais cette fois, suivi de l'intervention de l'enseignant (d'une durée de 3 à 5 min). Ces interventions sont de deux ordres : d'une part le professeur fait un bilan à la fin de chaque partie de la tâche (partie A, partie B, etc.) ; et d'autre part, il donne des aides individuelles (ou à des binômes) pour pouvoir débloquer à des élèves et que la classe puisse avancer ensemble dans la résolution de la tâche.

Identifier si le travail mené par un individu est correct est au centre des analyses du développement du travail mathématique. Ainsi, on distinguera trois états du travail : 1) Travail mathématique **correct** (codé C, quand les actions mathématiques répondent à ce qui était attendu) ; 2) Travail mathématique **incomplet** ou pas totalement correct (codé I, quand le discours mathématique comporte des assertions vraies mathématiquement mais elles manquent d'argumentation) ; et 3) Travail mathématique **non correct** (codé NC, quand les actions mathématiques sont fausses ou ne répondent pas à ce qui était attendu). Bien entendu, cela est à croiser avec les activités mathématiques, les paradigmes de l'analyse et les dimensions du travail mathématique pour contribuer à l'analyse de ce travail.

On rappelle que l'on n'analyse pas la partie A dans cette brochure.

6.1. Partie B

L'objectif de cette partie est que les élèves puissent se familiariser avec la suite proposée, grâce à un travail dans le paradigme A1 et avec la bonne interprétation des signes produits par la calculatrice pour pouvoir conjecturer la croissance, la convergence et la limite de la suite. Il s'agit donc de l'activation des dimensions Sémiotique et Instrumentale du travail mathématique dans le paradigme A1, grâce à l'utilisation de la calculatrice.

6.1.1. Question B.1 : *reconnaissance de la suite récurrente*

Dans un premier temps, nous identifions les bonnes reconnaissances de la suite récurrente telle qu'elle est définie ($u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$) et nous identifions particulièrement les élèves qui ont fait une mauvaise reconnaissance de la suite comme $u_{n+1} = f(n) = \frac{1}{2-n}$. Ainsi, pour la Classe 1, la réussite de cette reconnaissance est de 57% (17 de 30 élèves). 14 élèves parmi eux ont bien utilisé l'instrument, ce qui les amène à produire un tableau correct (C), les 3 autres ont des tableaux incomplets (I) malgré la bonne reconnaissance de la suite.

Sur les 13 autres élèves (13 élèves sur 30), il y a la confusion entre $f(u_n)$ et $f(n)$ pour 9 élèves. Des 4 élèves qui restent, 3 ne répondent pas à la question et le dernier remplit seulement le premier tableau avec des zéros.

L'élève G1-2.3 (figure 5) permet d'illustrer la confusion entre $f(u_n)$ et $f(n)$. On remarque que les trois tables sont identiques (u_0 mis à part), ce qui est caractéristique de cette confusion entre suite récurrente et $f(n)$, puisqu'il n'y a aucune dépendance avec u_0 . D'autre part, cet élève est très explicite sur l'implémentation de la calculatrice, ce qui permet de rejeter une erreur (toujours possible) d'écriture sur la calculatrice. Il ajoute également un décalage en remplaçant n par $n - 1$, ce qui est cohérent puisque la formule $u_{n+1} = f(n)$ peut se réécrire comme $u_n = f(n - 1)$. D'où un contrôle de type discursif sur ce qu'il écrit. D'autres élèves produisent ce décalage, mais de manière moins explicite que celui-ci. Il est enfin à signaler que, malgré son explication, cet élève calcule finalement les valeurs de $\frac{1}{2+n}$, sans doute par un contrôle sémiotique cette fois, inadéquat, pour rejeter des valeurs négatives obtenues (voir le premier tableau pour $\alpha = 0$ de la figure 5). Les élèves qui produisent trois fois le même tableau ne semblent pas avoir un contrôle sémiotique leur permettant d'identifier l'erreur dans cette identité des tableaux.

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,1$		Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0	u_0	0,1	u_0	0,5
u_1	0,3	u_1	0,3	u_1	0,3
u_2	0,15	u_2	0,25	u_2	0,25
u_3	0,2	u_3	0,2	u_3	0,2
u_4	0,17	u_4	0,17	u_4	0,16
u_5	0,14	u_5	0,14	u_5	0,14
u_6	0,125	u_6	0,125	u_6	0,125

La suite semble croissante puis décroissante. Elle semble être convergente, et sa limite serait 0.		Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? On a rentré la suite $\frac{1}{2-(n-1)}$ on a tapé table et on a noté les solutions.
--	--	---

Figure 5 : Réponse à la question B.2 de l'élève G1-2.3.

Dans la Classe 2, le taux de reconnaissance de la suite récurrente est très bon avec 30 élèves sur 32 (94%), tandis que l'erreur de la confusion entre $f(u_n)$ et $f(n)$ est fait par un seul élève. La majorité des élèves (25 sur 32, 78%) semble avoir bien utilisé l'instrument (en donnant les bonnes valeurs de la suite dans les tableaux), ce qui amène ces élèves à avoir un travail correct.

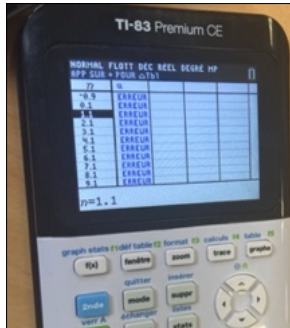
Les différences entre la Classe 1 et la Classe 2 sont vraisemblablement dues au fait que, dans le cas de l'expérimentation avec intervention – Classe 2, deux minutes après que les élèves ont commencé à résoudre l'exercice, l'enseignant aide toute la Classe en disant : « La suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ça veut dire que u_{n+1} est égale à 1 sur 2 moins u_n , avec un terme initial quelque chose... ». L'activité et le travail mathématique sont donc impactés par cette aide majeure du professeur à ce moment-là.

Ce travail dans le paradigme A1 nous montre que pour beaucoup d'élèves (notamment ceux en autonomie totale de la Classe 1), la reconnaissance du bon type de suite n'est déjà pas facile. Il serait donc illusoire pour ceux-là de chercher à travailler correctement dans le paradigme A2.

Dorénavant dans notre analyse, nous allons nous focaliser sur les élèves qui ont eu les bonnes reconnaissances de la suite, c'est à dire, 17 élèves pour la première Classe, et 30 élèves pour la seconde (même si leur travail n'était pas correct). Nous reviendrons à la fin sur les élèves qui n'ont pas reconnu la bonne suite pour constater le travail effectué dans le paradigme A2 en partie C.

Dans les figures suivantes, nous exemplifions un type de contrôle instrumental. L'élève G1-1.8 de la Classe 1 (travail individuel), en utilisant la calculatrice dans la question B.1 pour calculer les valeurs de la suite, est confronté à un affichage systématique d'erreur (Figure 6, il y a des

« ERREUR » partout sur l'écran de la calculatrice !). Nous pouvons faire l'hypothèse qu'il a un contrôle instrumental, et que cela ne lui semble pas cohérent, raison pour laquelle il reprend ses calculs. Dans sa production finale nous trouvons finalement les valeurs correctes de la suite (Figure 7). D'ailleurs, il est à remarquer que cet élève est celui qui a mieux réussi la tâche dans la Classe 1, c'est-à-dire dans un travail en autonomie.



Production élève avant contrôle :

Cas $\alpha_1 = 0$

u_0	0
u_1	1
u_2	ERREUR
u_3	ERREUR
u_4	ERREUR
u_5	ERREUR
u_6	ERREUR

Figure 6 : Élève G1-1.8 avant de faire le contrôle.

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0	u_0	0,1
u_1	0,5	u_1	0,5263
u_2	0,6667	u_2	0,6786
u_3	0,7500	u_3	0,7568
u_4	0,8	u_4	0,8044
u_5	0,8333	u_5	0,8364
u_6	0,8571	u_6	0,8584

Figure 7 : Élève G1-1.8 après de faire le contrôle.

On peut donc se demander si certains élèves n'ont pas reconnu la bonne suite $u_{n+1} = f(u_n)$ grâce à la demande d'implémentation sur la calculatrice des premiers termes, et un contrôle instrumental et sémiotique à la fois. En effet, la calculatrice fournit des valeurs de cette suite et les trois tableaux doivent nécessairement être différents. Cela valide déjà pour partie l'importance de passer par une telle étape, pour que les élèves réussissent mieux la tâche proposée.

6.1.2. Questions B.2 et B.3 : reconnaissances de la croissance, de la convergence et de la limite

Effectif d'élèves	Sans réponse		Croissance		Convergence		Limite	
	B.2	B.3	B.2	B.3	B.2	B.3	B.2	B.3
Classe 1 : 17	2	7	13	9	7	5	8	5
Classe 2 : 30	6	19	24	12	24	11	24	10

Table 2 : Nombre d'élèves avec les bonnes reconnaissances de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite de la suite (questions B.2 et B.3).

La table 2 présente l'effectif des élèves de chaque classe que nous avons considéré dans l'analyse et les réponses respectives pour les questions B.2 et B.3 : le nombre d'élèves n'ayant pas répondu à la question ; le nombre des réponses des élèves qui font les reconnaissances attendues en ce qui concerne les conjectures de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite pour les trois valeurs demandées de α (question B.2), et les mêmes conjectures pour tout α dans $[0,1]$ (question B.3).

Les activités de reconnaissance de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite sont bien mieux développées avec les trois valeurs fixes de α que dans la généralisation. En outre, la croissance est toujours mieux reconnue. En fait, dans la question B.3 on demande une conjecture (ou généralisation) d'une autre conjecture qui a été faite dans la question B.2. Ainsi la baisse de la réussite n'est pas étonnante. On choisit donc pour des questions de lisibilité des résultats, de se concentrer sur les élèves qui ont eu des reconnaissances - même partielles - pour la question B.2 : 15 élèves dans la Classe 1 et 24 dans la Classe 2. À nouveau, comme pour les élèves qui n'ont pas reconnu en B.1 la bonne forme de suite, on reviendra ensuite sur les productions dans la partie C des élèves mis à l'écart (2 dans la Classe 1 et 6 dans la Classe 2).

Si on se concentre sur la question B.2 et les élèves qui ont répondu quelque chose (15 dans la Classe 1 et 24 dans la Classe 2), on a plus spécifiquement le tableau suivant :

Effectif d'élèves	Tableaux en B.1	Reconnaissance en B.2			Paradigme	Plan	Correction		
		Cr	Co	Limite			C	I	NC
Classe 1 : 15	12 C	11	10	7	A1	[Sem-Dis]	7	3	2
	3 I	2	2			[Sem-Dis]		2	1
Classe 2 : 24	24 C	24	24	24	A1	[Sem-Dis]	24		

Table 3 : Activité de reconnaissance et travail mathématique des élèves qui répondent B.2.

Dans la Classe 1, sur les 15 élèves qui ont eu des reconnaissances partielles, seuls 12 d'entre eux avaient des tableaux corrects à l'issue de B.1. On a parmi ceux-là seuls 11 élèves qui ont reconnu la croissance. Donc la reconnaissance de la croissance à partir des tableaux de valeur corrects, n'est pas une activité si aisée pour tous les élèves. Parmi les 11 élèves, on a 7 élèves qui ont le travail correct (C) en B.2 avec toutes les bonnes reconnaissances. Sur les 4 autres élèves qui reconnaissent la croissance, 1 élève dit que la convergence est vers 0 sans aucun contrôle (NC) ; 1 élève reconnaît seulement la croissance, 1 élève dit que la convergence est vers 0.9, et 1 élève dit que la convergence est vers 0 et la limite 1 (codés I -travail incomplet- tous les 3).

Pour les 3 élèves sur les 15 qui partent avec des tableaux de valeurs incomplets dans la question B.1, 2 élèves reconnaissent tout de même la croissance de la suite, mais ils reconnaissent une convergence vers 0,9 ou bien une convergence et une divergence à la fois (codés I -travail incomplet- tous les 2).

On voit donc à nouveau la relative difficulté pour les élèves à passer des tableaux de valeurs, même s'ils sont corrects, à une reconnaissance de la croissance de la suite. On constate surtout que la convergence est beaucoup plus difficile à reconnaître par les élèves, notamment la valeur de la limite, d'autant plus qu'avec six valeurs dans les tableaux il serait nécessaire que les élèves passent à une perspective locale, en cherchant éventuellement à avoir des valeurs supplémentaires de la suite avec leur instrument.

Dans la Classe 2, on a comme pour la question B.1, un effet professeur qui fait que les 24 élèves qui se sont engagés dans B.2 et B.3 ont tous reconnu la croissance, la convergence et la valeur de la limite à partir de leurs tableaux de valeurs. Il semble que les difficultés que l'on identifie chez les élèves en autonomie (reconnaissance de la convergence à partir des tableaux de valeurs, liés à un passage d'une perspective ponctuelle à une perspective locale – Montoya-Delgadillo et al. 2018), soient « gommées » en classe par les aides que le professeur donne durant la

séance. D'ailleurs 3 élèves (G2-20, G2-18 et G2-4) parmi les 24 qui n'avaient pas des tableaux à valeurs correctes, arrivent tout de même à produire des discours corrects en B.2. On revient ci-dessous sur l'importance des interventions du professeur dans la Classe 2.

Du point de vue des ETM, comme il était prévu dans l'analyse a priori, tous les élèves qui ont répondu aux différentes questions de la partie B ont travaillé dans le paradigme A1. Comme il était prévu aussi, tous ont travaillé dans le plan [Sem-Dis]. On voit donc l'importance d'un travail sur les deux dimensions Sémiotique et Discursive pour la production des conjectures correctes.

6.1.3. Questions B.2 et B.3 : représentation décimale versus représentation fractionnaire

La représentation fractionnaire des termes de la suite donnée par la calculatrice joue son rôle à l'heure de reconnaître la variation, la convergence et la limite de la suite (surtout pour toutes les valeurs d' α en $[0,1]$, question B.3).

Dans le cas de la Classe 1, sur l'effectif de 17 élèves, un seul élève utilise cette représentation fractionnaire : il développe un travail correct pour B.2 et incomplet pour B.3. Dans le cas de la Classe 2, 17 élèves sur 30 utilisent des fractions. Ainsi, de 6 élèves qui ne répondent pas à la question B.2, 4 utilisent des fractions ; et sur les 18 élèves qui ne répondent pas à la question B.3, 9 travaillent avec une représentation fractionnaire. Compte tenu des difficultés qui pourraient provoquer le travail avec des fractions chez les élèves, cela pourrait expliquer les non-réponses qui utilisent ce type de représentation et des élèves peuvent rester bloqués dans leurs démarches. On donne à la suite le cas d'un binôme d'élèves qui a dépassé le problème provenant vraisemblablement de la représentation en fraction.

Les élèves G2-28 et G2-27 travaillent ensemble et ont utilisé des fractions en B.1 (dans leurs tableaux). L'élève G2-28 a d'abord mis que la suite était décroissante en B.2 (mauvaise reconnaissance au départ, on voit sur les copies originales qu'elle a effacé avant d'écrire correctement, figure 8).

Cas $\alpha_1 = 0$		Cas $\alpha_2 = 0,5$		Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0	u_0	0,5	u_0	0,9
u_1	$\frac{1}{2}$	u_1	$\frac{3}{4}$	u_1	$\frac{10}{11}$
u_2	$\frac{3}{4}$	u_2	$\frac{7}{8}$	u_2	$\frac{11}{12}$
u_3	$\frac{5}{8}$	u_3	$\frac{15}{16}$	u_3	$\frac{12}{13}$
u_4	$\frac{7}{8}$	u_4	$\frac{31}{32}$	u_4	$\frac{13}{14}$
u_5	$\frac{15}{16}$	u_5	$\frac{63}{64}$	u_5	$\frac{14}{15}$
u_6	$\frac{31}{32}$	u_6	$\frac{127}{128}$	u_6	$\frac{15}{16}$

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

<p>Cas $\alpha_1 = 0$: la suite semble <u>croissante</u> et semble <u>posséder une limite</u> = à 1.</p> <p>Cas $\alpha_2 = 0,5$: la suite semble <u>croissante</u> et semble <u>posséder une limite</u> = à 1.</p> <p>Cas $\alpha_3 = 0,9$: la suite semble <u>croissante</u> et semble <u>posséder une limite</u> = à 1.</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>Création d'un tableau pour éviter de calculer le stade d'après.</p>
--	---

Figure 8 : Production élève G2-28 questions B.1 et B.2 : « la suite semble croissante et semble posséder une limite = à 1 » ; « création d'un tableau pour éviter de calculer le stade d'après ».

L'élève G2-27 a écrit également qu'elle regarde la courbe de la suite pour voir sa convergence et sa limite (figure 9). On pourrait penser que pour ce binôme, les fractions en B.1 n'ont pas permis de faire des conjectures correctes. Ce binôme aurait eu besoin d'autres représentations

pour un meilleur contrôle sémiotique de son travail. La courbe peut en effet permettre de conjecturer plus facilement la convergence et la valeur de la limite que la représentation ponctuelle en tableaux de valeurs, surtout comme dans ce cas sous formes fractionnaires.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? <i>on regarde la courbe de la suite et vers où elle converge et quelle serait sa limite</i>	<i>On regarde la courbe de la suite et vers où elle converge et quelle serait sa limite</i>
--	---

Figure 9 : Production en question B.3 de l'élève G2-27.

Il est à noter une aide du professeur – que d'autres élèves ont pu entendre – à propos d'un contrôle instrumental avec la calculatrice, vraisemblablement pour faire avancer vers un travail correct, comme on peut le voir en figure 10 au cours de la partie B.

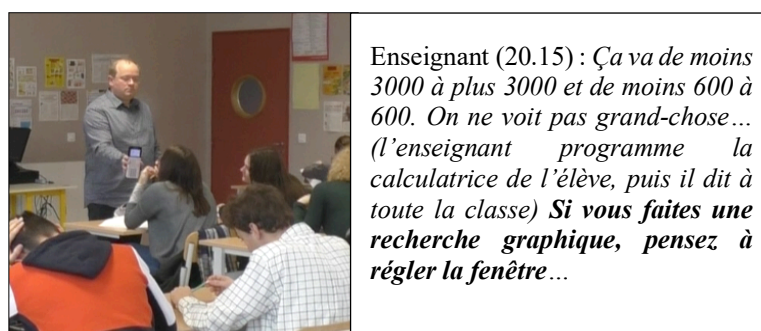


Figure 10 : Minute 20.15 de la Classe 2, aide de l'enseignant au contrôle instrumental des élèves G2-27 et G2-28.

Cette aide a servi au binôme d'élèves mais a pu aussi être utile à d'autres binômes. Ceci peut expliquer que les reconnaissances ont été à nouveau bien meilleures dans la Classe 2 avec l'enseignant (et notamment que certains élèves arrivent à produire les réponses attendues en B.2 sans pour autant avoir les tableaux de valeurs correctes en B.1 comme on l'a signalé plus haut).

6.2. Partie C

L'objectif de cette partie était que les élèves puissent prouver les conjectures faites dans la partie B, c'est-à-dire, un travail mathématique attendu dans le paradigme A2 avec une dimension Discursive privilégiée. En termes d'activité, il s'agissait de reconnaître la nécessité du paradigme A2 avec ses théorèmes et ses méthodes de preuve – le raisonnement par récurrence notamment – avec des contrôles s'appuyant sur la partie B.

Dans un premier temps, on ne considère que les 15 élèves de la Classe 1 et les 24 élèves de la Classe 2 qui ont reconnu la bonne suite récurrente en question B.1 et qui ont produit des résultats dans la question B.2. Pour ceux-là on attend des contrôles entre ce qu'ils produisent comme discours dans la partie C et ce qu'ils ont développé – même partiellement correct – dans la partie B. On reviendra sur les autres élèves en fin de section.

6.2.1. Question C.1 : prouver que la suite est bornée

Nous présentons la table 4 qui synthétise le travail mathématique des élèves (paradigmes et dimensions) dans la question C.1, notamment l'activité de reconnaissance de la récurrence à

utiliser et la correction du travail. Les catégories issues des questions B.1 et B.2 sont reprises de la table 3. Pour la Classe 1, il s'agit des 7 élèves qui ont eu un travail correct (codé C en B.2), 3 élèves qui ont eu un travail incomplet (codé I en B.2), on a groupé ensemble les 3 élèves qui n'avaient pas obtenu des tableaux corrects en B.1 (codés I en B.1), et les 2 élèves qui ont eu un travail non correct en B.2 (codés NC en B.2). Pour la Classe 2, les 24 élèves sont dans la même catégorie (C) après B.1 et B.2.

Effectif d'élèves	Catégories issues des questions B.1-B.2	NR	Paradigme			Dim	Récurrence (ou tentative)	Correction		
			A1	A2	?			C	I	NC
Classe 1 15	7 élèves travail C en B.1 et B.2	1	4	2		Dis (*)	2 (A2)	1 (A2)	4	1
	3 élèves travail I en B.2 : reconnaissance croissance mais convergence farfelue	1		2		Dis	2 (A2)		2	
	5 élèves : travail NC en B.2 ou I en B.1	3	1		1	Sem-Dis (**)			2	
Classe 2 24	Travail C en B.1 et B.2	1		23		Dis	21	7	14	2

Table 4 : Résumé des réponses à la question C.1.

(*) G1-1.15 dans [Sem-Dis] parmi ceux qui sont dans A1.

(**) G1-1.12 dans A1 et G1-1.4 dans « ? ».

Dans la Classe 1, parmi les 15 élèves qui ont eu un travail dans la question B.2 (avec des reconnaissances partielles sur la croissance et la convergence), 5 n'ont pas pu donner de réponse à la question C.1 et 1 seul parmi ces 5 élèves fait partie des élèves qui ont eu un travail correct en B.2 (G1-1.9). Le travail correct dans le paradigme A1 (partie B) semble donc être un bon précurseur pour amorcer le travail attendu dans le paradigme A2 (partie C). On peut donc faire l'hypothèse que les élèves peuvent d'autant mieux rentrer dans la question C.1 qu'ils ont des moyens de contrôles à partir de leur travail fait dans la partie B.

Il faut cependant noter que parmi les 7 élèves qui ont eu un travail correct en B.2 (et qui ont travaillé dans C.1), 4 d'entre eux restent spontanément dans le paradigme A1. Le travail dans le paradigme A1 semble donc à la fois un bon précurseur pour A2 mais peut-être aussi un frein au changement de paradigme pour une partie des élèves.

Au total, 5 élèves de la Classe 1 travaillent dans le paradigme A1 (4 qui avaient un travail correct dans les questions B.1-B.2 et l'élève G1-1.12 qui n'avait pas tous ses tableaux de valeurs corrects en B.1). 4 font un travail incomplet (I) et on identifie assez clairement chez ces élèves un travail qui n'est pas seulement discursif, voire des contrôles explicites en lien avec la partie B. Par exemple, l'élève G1-1.15 argumente que la suite converge vers 1 mais sans l'atteindre, donc que la suite est dans $[0,1]$; puis, il dit qu'il peut utiliser la fonction table de la calculatrice. Il en est de même pour G1-2.8, sans qu'il parle cependant de la calculatrice. L'élève G1-1.16 dit aussi que l'on pourrait utiliser la calculatrice. L'élève G1-1.12, qui n'avait pas ses tableaux de valeurs corrects en B.1, extrapole aussi ses observations à partir des trois tableaux de valeurs ; il écrit aussi que l'on pourrait utiliser la calculatrice. Il y a donc des dimensions

Instrumentales et Sémiotiques dans le travail au-delà du seul Discursif. Par contre, le cinquième élève qui travaille dans A1 (G1-1.14) retourne à considérer la suite $u_n = f(n)$ sans du tout mettre en relation son travail de la partie C avec celui correct de sa partie B. Son travail est ainsi non correct (NC).

Un autre élève G1-1.4, qui lui aussi n'avait pas ses tableaux corrects en B.1, se trouve dans un paradigme intermédiaire entre A1 et A2, et il se base sur l'allure de la courbe de la fonction f pour argumenter sa réponse (figure 11). À nouveau, sa réponse n'est pas conforme au travail attendu. Mais il y a ici un contrôle sémiotique à partir de la courbe de f et il produit un travail incomplet (I) – ce qu'il dit n'est pas non correct :

$f(0) = \frac{1}{2}$ $f(1) = 1$ <i>on a pas de variation anormale dans l'encadrement</i> <i>sur $[0,1]$ et ayant une courbe croissante alors</i> <i>pour tout entier n, u_n appartient à $[0,1]$</i>	$f(0) = 1/2$ $f(1) = 1$ N'ayant pas de variation anormale dans l'encadrement $[0,1]$ et ayant une courbe croissante alors pour tout entier n , u_n appartient à $[0,1]$.
--	---

Figure 11 : Production de la question C.1 de l'élève G1-1.4.

La Classe 1 comporte ensuite 4 élèves dans le paradigme A2 attendu. Ils sont 2 parmi les 7 qui avaient un travail correct dans les questions B.1-B.2, mais aussi 2 parmi les élèves qui avaient bien reconnu la croissance de la suite mais avaient proposé des convergences farfelues (notamment vers 0,9). Ces 4 élèves ont tous fait ou amorcé une récurrence pour prouver que la suite est dans $[0,1]$. Un seul a développé un travail correct (C), deux autres font un travail incomplet (I) car la récurrence n'est pas complétée, et le troisième (G1-2.10) a basculé sur le modèle $u_n = f(n)$ pour sa récurrence, mais comme il a bien reconnu la nécessité d'une récurrence on le code aussi incomplet (I).

Remarquons finalement qu'un seul élève de la Classe 1 produit un travail totalement non correct (NC). C'est l'élève G1-1.14 qui part sur $u_n = f(n)$ en restant dans le paradigme A1. C'est typiquement un élève qui n'aurait rien fait si seule la partie C avait été donnée d'emblée, bien qu'il ait travaillé tout à fait correctement dans la partie B.

En ce qui concerne les autres élèves, ils travaillent dans les paradigmes A1 ou A2 (avec la récurrence), sur des dimensions à la fois Discursives, Sémiotiques (sur les tableaux de valeurs ou des graphes), voire Instrumentales (quand ils reprennent ou même évoquent leur calculatrice), et ils arrivent tout de même au mieux à produire un travail incomplet (I). Nous y reviendrons en conclusion.

Pour la Classe 2, parmi les 24 élèves que nous considérons, 23 ont répondu à la question et tous travaillent dans le paradigme A2 et donc produisent un travail conforme au paradigme attendu. La dimension Discursive est privilégiée et il n'y a pas de signes de contrôles sémiotiques ou instrumentaux du travail avec la partie B. Parmi ces élèves, 21 élèves reconnaissent la démonstration par récurrence, mais la plupart la mène de façon incomplète (14 élèves). Pour les 2 élèves qui ne reconnaissent pas la récurrence, ils essaient tout de même de raisonner dans A2 avec des inégalités et sans se contrôler avec la partie B. Par exemple l'élève G2-10 (figure 12) produit un travail non correct (NC) en échangeant sans contrôle discursif le u_n avec le x . Il cherche à faire un travail guidé par la dimension Sémiotique, avec des inégalités pour montrer

que la suite sera toujours dans $[0,1]$. On retrouve aussi chez des élèves des notations explicites du type $f(x) = f(u_n)$.

$0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0$ $\Leftrightarrow 1 \leq 2-x \leq 2$ $\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1 \text{ on appartient à } [0,1].$	$0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0$ $\Leftrightarrow 1 \leq 2-x \leq 2$ $\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1 \text{ } u_n \text{ appartient à } [0,1].$
--	--

Figure 12 : Production de l'élève G2-10 dans question C.1.

6.2.2. Question C.2 : prouver que la suite est croissante

Sur les 10 élèves de la Classe 1 qui ont répondu à C.1, tous ont répondu à la question C.2, tandis que sur les 23 élèves de la Classe 2 qui ont répondu à la question C.1, seuls 18 ont répondu à C.2. On retrouve l'idée qu'un travail dans le paradigme A1 qui est largement plus présent pour les élèves de la Classe 1, jusque dans la question C.1, favorise l'engagement jusqu'à la question C.2. Ce ne peut pas être le cas dans la Classe 2 où tous les élèves ont basculé dans A2 dès la partie C de la situation après le bilan du professeur de la partie B.

Dans la table 5, nous présentons à nouveau la synthèse du travail (paradigme et dimension), qui inclut les trois stratégies plus utilisées⁴ et la correction du travail, pour les 10 élèves de la Classe 1 et les 18 élèves de la Classe 2 que nous considérons pour la question C.2.

Catégories à l'issue de C.1	Paradigme			Dimension	$u_{n+1} - u_n$	Récurrence	f Croissant \Rightarrow u_n croissante	Correction		
	A1	A2	?					C	I	NC
Classe 1 : 4 dans A2	1	3		Dis	2		1	1	2	1
Classe 1 : 5 dans A1	4	1		Sem	1		1		2	3
Classe 1 : 1 dans ?			1	Dis			1		1	
Classe 2 : 18 qui répondent à C.1 dans A2 et dimension DIS	2			Sem-Dis			1		1	1
	1			Dis			1		1	
		15		Dis sauf 1	3	10	3		9	6

Table 5 : Résumé réponses de la question C.2.

Pour la Classe 1 on voit que 4 élèves travaillent dans le paradigme A2, 3 qui étaient déjà dans A2 dans la question C.1 mais 1 élève qui est revenu dans le paradigme A2 (G1-1.14). Parmi les 3 premiers, 1 produit le travail correct (et donc conforme à ce qui était attendu, utilisant la stratégie $u_{n+1} - u_n$) et 1 produit un travail incomplet (avec la même stratégie $u_{n+1} - u_n$). C'est toujours la dimension Discursive du travail qui est privilégiée. Le troisième élève dans A2 produit un travail non correct, avec l'activation de la dimension Sémiotique mais sans contrôle discursif, avec la confusion $u_n = f(n)$ qui arrive à ce moment-là (alors que sa récurrence incomplète à la question précédente portait sur la bonne expression de la suite, figure 13 ci-dessous).

⁴ Aucun élève ne propose le calcul du quotient u_{n+1}/u_n .

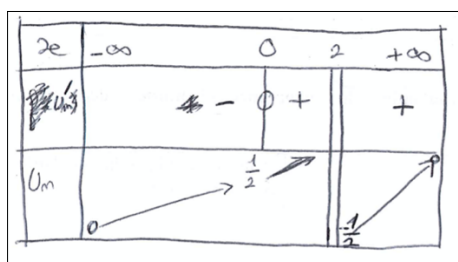


Figure 13 : Production de l'élève G1-2.6 pour la question C.2.

L'élève (G1-1.14, figure 14) qui est passé de A1 à A2 est celui qui avait basculé sur le modèle $u_n = f(n)$ dans la question C.1. Il calcule bien la différence $u_{n+1} - u_n$ mais continue avec $u_n = f(n)$ toujours sans lien avec la partie B. Son travail est non correct (NC).

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} - u_n &= \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2-n} \\
 &= \frac{1}{-n} - \frac{1}{2-n} \\
 &= \frac{1}{(2-n)-n} - \frac{2(1-n)}{(2-n)-n} \\
 u_{n+2} - u_n &= \frac{1+1}{-2n+n^2} = \frac{2+n}{-2n+n^2} \quad \uparrow
 \end{aligned}$$

Figure 14 : Production de l'élève G1-1.14 pour la question C.2.

On a aussi 5 élèves dans le paradigme A1, 4 qui étaient déjà dans A1 pour la question C.1 et un qui est passé de A2 à A1. Parmi les 4 premiers, 2 produisent un travail incomplet (I) en argumentant avec le tableau de valeurs ou le graphique donné par la calculatrice. C'est un travail essentiellement sémiotique. Les 2 autres élèves produisent un travail non correct (NC). L'élève qui est passé de A2 à A1 (G1-2.10) est celui qui avait tenté la récurrence à la question C.1 mais avec le modèle $u_n = f(n)$. A cette question, il revient dans le paradigme A1 en disant que « la suite semble croissante car $u_0 < u_1 < u_2 \dots u_{n+1}$ ». Sans doute s'appuie-t-il aussi sur ses tables de valeurs de la partie B. Son travail est cette fois non correct (NC).

Pour le dernier élève, on ne peut rien dire concernant le paradigme du travail : il argumente aussi que la suite est croissante en s'appuyant sur la courbe croissante de la fonction. Il s'agit du même élève (G1-1.4) qui travaillait entre deux paradigmes à la question C.1. Ce théorème en acte (Vergnaud, 1991, p.142) « f croissante donc (u_n) croissante » peut cacher soit une confusion entre suite et fonction, un modèle du type $u_n = f(n)$, ou bien un transfert de propriétés de f sur la suite dans le cas du bon modèle $u_{n+1} = f(u_n)$. Il apparaît dans le cas où les élèves travaillent dans le paradigme A1 mais aussi en A2 (4 élèves au total dans la Classe 1 appliquent ce théorème en acte, trois qui apparaissent dans la table 5 et 1 (G1-1.5) qui ne répond pas à la question C.1.

Pour la Classe 2, les élèves continuent massivement à travailler dans le paradigme A2. Les seuls mouvements observés sont des décrochages de A2 vers A1 pour 3 élèves. Parmi les 15 élèves qui travaillent toujours dans le paradigme A2 à ce stade, aucun finalement ne produit un travail correct sur la question C.2 (alors qu'on avait un élève qui en produisait un dans la Classe 1). On a, dans ce paradigme A2, 9 élèves qui font un travail incomplet (8 en faisant une récurrence et 1 avec la méthode de la différence) et 6 qui font un travail non correct (3 essayent une récurrence, 1 en faisant la méthode de la différence, et plusieurs d'entre eux font les confusions entre la suite et la fonction que l'on peut interpréter comme une régression vers le modèle $u_n = f(n)$). Des 3 élèves qui sont dans le paradigme A1, 2 regardent le graphique de u_n sur leur calculatrice (travail dans le plan [Sem-Dis]) et l'autre élève dit simplement que « $u_n < u_{n+1}$ car la fonction est croissante » (G2-10, discursif uniquement, travail incomplet I).

Si on revient sur la Classe 1, on trouve aussi deux élèves parmi les 5 qui n'ont pas travaillé dans C.1 mais qui retravaillent dans C.2 (G1-2.11, G1-1.5). Ils ne reconnaissent cependant aucune méthode valable pour étudier les variations de la suite. L'un travaille dans le paradigme A1 et dit que la suite est croissante d'après les tableaux de valeur (G1-2.11, principalement sémiotique). L'autre, énonce que « *dans le cas de $u_{n+1} = f(u_n)$, les variations de la suite sont les mêmes que les variations de la fonction* » (G1-1.5, discursif uniquement).

6.2.3. Question C.3 : prouver la convergence de la suite

Comme on l'a dit dans l'analyse de la question C.2, 10 élèves parmi les 15 qui avaient des reconnaissances de la suite, de la convergence et de la limite à l'issue de B.1 et B.2, avaient répondu à C.1 et C.2. Parmi ceux-là, 7 répondent encore à la question C.3. Dans cette Classe, sur les 5 qui n'ont pas répondu dans C.1, 2 travaillent tout de même en C.2 (G1-2.11 et G1-1.5 rencontrés plus haut), mais ils ne produisent plus rien ensuite pour la question C.3.

Ce n'est pas du tout la même observation dans la Classe 2 où on a une géographie totalement différente des parcours des élèves. En effet sur 24 élèves qui avaient travaillé à l'issue de B.1 et B.2, 23 ont répondu dans C.1, 18 dans la question C.2 mais qu'on en a à nouveau 22 parmi les 23 qui répondent dans la question C.3. En ce qui concerne le seul élève qui n'a pas travaillé dans C.1, il ne reconnaît aucune méthode acceptable non plus pour C.2, mais il travaille tout de même de façon correcte dans C.3 (G2-20) malgré le manque d'appui possible sur C.1 et C.2. Cela est possible à nouveau à cause du professeur, car il a donné le bilan intermédiaire entre les parties B et C et il a validé les conjectures sur la croissance et sur la convergence de la suite.

On a donc 7 élèves de la Classe 1 et 23 élèves de la Classe 2 qui travaillent dans C.3 avec le tableau synthétique du travail (paradigme et dimensions), la reconnaissance du théorème et le statut du travail, donné dans la table 6 ci-dessous.

Catégories à l'issue de C.2	Effectif	Paradigme			Plan	Théorème	Correction		
		A1	A2	?			C	I	NC
A1 pour C.1 et C.2	Classe 1 7	3			[Ins-Dis] / Sem			3	
A2 pour C.1 et C.2			2		Dis	1	1		1
Changent			1 (en C2)	1 (en C3)	Dis				2
A2 pour C.1 et A1 pour C.2	Classe 2 23		2	1	Dis	2	2		1
A2 pour C.1 (22) A2 pour C.2 (19)			20		Dis	19	19	1	

Table 6 : Résumé réponses de la question C.3.

Dans la Classe 1, sur les 7 élèves, aucun ne reconnaît le théorème en jeu sauf 1 (C). Il s'agit de l'élève G1-1.8 qui avait reconnu la croissance et qui avait conjecturé une convergence de la suite vers 0,9 dans la partie B. Il est toujours dans le paradigme A2 depuis le début de la partie C avec une dimension de travail essentiellement Discursive et sans éléments de contrôle observables. Cependant on peut penser que cet élève contrôle tout de même avec sa partie B car il explicite à la fin du travail que la suite converge vers 1 et non pas 0,9, ce qu'il avait conjecturé en partie B.

Trois élèves ont un travail incomplet (I). Il est remarquable de voir que ce sont des élèves qui travaillent dans le paradigme A1 sur toutes les questions C.1, C.2 et C.3, avec notamment pour l'un d'entre eux (G1-1.15, figure 15) qui produit un travail sur plusieurs plans ([Sem-Dis] et [Ins-Dis]) en faisant référence constamment aux tableaux de valeurs et à la calculatrice.

d'après la calculatrice on voit que la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? oui avec le tableau
D'après la calculatrice on voit que la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas	Oui avec le tableau

Figure 15 : Réponse de l'élève G1-1.15 à la question C.3.

Il y a enfin 3 élèves qui font un travail non correct (NC) : un argumente que la suite converge car elle est croissante et minorée (G1-2.2) et un autre essaye de calculer la limite de la suite directement et de façon erronée (G1-1.14). Ces deux derniers élèves sont dans le paradigme A2. Il reste un élève qui passe du paradigme A2 à un paradigme entre A1 et A2 (G1-2.6) après avoir produit un travail correct en C.1 et un travail non correct en C.2. Il conclut de son tableau de variation faux (figure 13) que la suite converge vers 0. Ce qui apparaît donc c'est que l'appui constant sur le paradigme A1 permet d'aller, si ce n'est vers un travail correct, au moins jusqu'à C.3 avec un travail incomplet (I). Ce n'est pas forcément les élèves qui sont dans A2 qui répondent le mieux à ce qui est attendu. Tout se passe comme si pour les élèves qui veulent rester ou rentrer dans A2 (pour répondre à ce qui est attendu) produisent finalement un travail mathématique non correct (NC). Tel est le cas de G1-1.14 (figure 16) qui a travaillé en A1 pour C.1, A2 pour C.2 et A2 pour C.3, ou G1-2.2 qui a travaillé en A2 dans les trois questions.

Figure 16 : Production de la question C.3 de l'élève G1-1.14.

Dans la Classe 2, sur les 23 élèves qui répondent, 2 seulement ne reconnaissent pas le théorème à appliquer. On est donc dans une situation totalement différente de la Classe 1 comme on a déjà signalé plus haut quant au parcours des élèves dans les questions.

L'un des élèves (G2-4) qui ne reconnaît pas le théorème, est un élève parmi les 5 qui ont travaillé dans C.1 mais pas dans C.2. Il écrit que la suite est « *croissante, majorée et convergente* », par conséquent, on ne peut pas dire qu'il ait reconnu le théorème. Cependant, nous pouvons dire qu'il produit un travail incomplet car ses affirmations sont correctes.

L'autre élève (G2-10) avait glissé dans du paradigme A2 pour C.1 à A1 dans la question C.2 (« $u_n < u_{n+1}$ car la fonction est croissante »), et dans cette question C.3 on ne peut rien dire de son paradigme de travail. Ici, il calcule la limite de f et dit que c'est la limite de u_n , produisant ainsi un travail non correct. Plus précisément il affirme que la limite de f à l'infini est 1 – ce qui est faux – et donc que u_n converge vers 1. On peut se demander s'il n'y a pas un contrôle à l'envers qui fait dire à l'élève que la limite de f est 1 car il sait que la limite de u_n est 1 (notamment à cause du bilan du professeur).

Mis à part ces deux élèves, tous les élèves ont un travail codé correct, dans le paradigme A2, mettant en jeu la dimension Discursive (seule). On note que c'est en particulier le cas aussi de l'élève G2-20 qui n'a pas d'appui sur C.1 et C.2. C'est le cas aussi les deux élèves qui étaient passés dans le paradigme A1 pour la réponse à la question C.2. Ils reviennent dans le paradigme A2 et répondent correctement dans la question C.3, avec une bonne reconnaissance du théorème à utiliser.

6.3. Retour sur quelques cas particuliers d'élèves

Nous revenons sur les cas des élèves provisoirement écartés et qui n'ont pas répondu de manière adéquate aux questions B.1 ou B.2.

6.3.1. Mauvaise reconnaissance de la suite

Il s'agit d'une part des élèves qui ont reconnu une suite $u_n = f(n)$ dans la partie B. Ce sont 9 élèves de la Classe 1 et un élève de la Classe 2.

Parmi les 9 élèves de la Classe 1 qui ont utilisé $u_n = f(n)$ dans la question B.1, 5 ne répondent à aucune question de la partie C. Des 4 qui restent, en ce qui concerne la question C.1 : 2 travaillent la récurrence, donc dans le paradigme A2, mais ils ne respectent pas forcément les règles de la preuve. 1 travaille encore dans le paradigme A1, et 1 commence à travailler avec des inégalités (seulement est présente l'inégalité u_n entre 0 et 1). Concernant la question C.2, 2 de ces 4 élèves font le tableau de variation pour montrer la croissance de la suite, 1 seul énonce la stratégie $u_{n+1} - u_n$, et un élève dit que la suite est croissante mais ne fournit aucune preuve. Pour la question C.3, 2 ne répondent pas, 1 dit que la suite est divergente, et l'autre que la suite converge vers 0 (par rapport à leur paradigme on ne peut rien dire).

Le seul élève de la Classe 2 qui a travaillé avec $u_n = f(n)$ dans la question B.1, répond seulement à la question C.2 (preuve de la croissance de la suite) en essayant de faire une récurrence mais sans l'aboutir.

6.3.2. La non-reconnaissance dans la question B.2

Certains élèves n'ont pas réussi à reconnaître la croissance, la convergence et/ou la valeur de la limite de la suite dans la question B.2, à partir de leurs tableaux de valeurs corrects ou incomplets. Cela concerne 2 élèves dans la Classe 1 qui avaient réalisé un travail correct en B.1, et 6 élèves dans la Classe 2 dont 2 avaient réalisé un travail incorrect en B.1.

Des 2 élèves de la Classe 1, 1 seul produit ensuite quelque chose dans la question C.2 : il ne reconnaît pas de méthode valable pour montrer que la suite est croissante, et il produit un travail discursif dans un paradigme dont on ne sait pas si c'est A1 ou A2.

Des 6 élèves concernés de la Classe 2, il est intéressant de remarquer qu'ils travaillent à nouveau dans la partie C. Ils travaillent dans le paradigme A2 et selon la dimension Discursive uniquement. Ils procèdent par récurrence ou inégalité dans la question C.1. L'un d'entre eux reconnaît la méthode par différence pour montrer que la suite est croissante, mais pour tous les élèves le travail est incomplet ou non correct dans les questions C.1 et C.2. Par contre trois d'entre eux travaillent toujours dans la question C.3 (dont 1 qui avait réalisé un travail incomplet en B.1, G2.16). Tous reconnaissent le théorème et l'appliquent correctement ce qui est possible car il y a eu la mise en commun du professeur après la partie B. Ils savent donc comment orienter leur activité (la suite est croissante et convergente vers 1 selon les conjectures qui ont été formulées collectivement). On peut sans doute voir un effet de Classe sur la reconnaissance du paradigme, avec un contrat didactique bien installé et toujours un effet du bilan de l'enseignant entre la partie B et la partie C. Nous y revenons maintenant en conclusion.

7. Conclusion

Dorénavant, nous présentons une synthèse et une conclusion de notre travail à partir de nos analyses, les questions qui restent ouvertes, quelques conclusions théoriques et des projections que nous envisageons.

Dans notre travail, nous avons présenté une analyse qui nous a permis d'approfondir l'étude de la transition lycée-université d'un point de vue épistémologique et cognitif à partir des suites définies par récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour ce faire, nous avons conçu une tâche qui puisse s'adapter aux deux institutions et nous avons expérimenté cette tâche au niveau du lycée (une classe avec un travail individuel des élèves et une autre classe avec l'intervention de l'enseignant). Cette tâche avait pour but d'enrichir d'une part le travail mathématique à partir d'une diversité dans les paradigmes de travail et l'activation de la dimension Instrumentale dans l'études de ces suites. Cette tâche avait pour but de favoriser d'autre part certaines activités mathématiques des élèves, principalement les activités de reconnaissance et les activités de contrôle. Ces types de travail et d'activités mathématiques n'avaient pas été repérés lors de notre pré-expérimentation.

Ainsi, nous avons choisi de concevoir la tâche de telle sorte que l'on puisse articuler le paradigme A1 et A2 : nous avons choisi de commencer l'étude de la suite par un travail dans le paradigme A1, avec un appui sur la dimension Instrumentale du travail, avant de se plonger dans le travail dans le paradigme A2 (en appui sur le travail préalable en A1). Ainsi, la tâche commençait par l'étude de la fonction qui définissait la suite (partie A) comme dans le cas de la pré-expérimentation (que nous n'analysons pas dans cette brochure) ; puis la définition et l'exploration de la suite avec l'aide de la calculatrice (partie B), et on finissait par l'étude formelle de la suite avec un accent sur les preuves de ses principales propriétés (partie C).

7.1. La reconnaissance de la suite récurrente et de ses propriétés dans le paradigme A1

La partie B avait pour objectif d'introduire l'étude des propriétés de la suite avec un travail plus pragmatique appuyé dans le paradigme A1 avant de commencer un travail plus formel dans le paradigme A2. Grâce à un premier travail avec la calculatrice où on espérait la reconnaissance de la suite récurrente (question B.1), nous attendions favoriser la bonne interprétation des signes données par la calculatrice pour ainsi conjecturer la croissance, la convergence et la limite de la suite (questions B.2 et B.3).

Pour la question B.1, la reconnaissance de la suite récurrente a été faite pour presque la moitié des élèves dans la Classe 1 (57%), alors que la suite a été bien reconnue pour presque la totalité des élèves dans la Classe 2 (94%). Un tel écart entre les résultats de deux classes est certainement dû à l'intervention de l'enseignant dans le cas de la Classe 2. Son intervention prive peut-être certains élèves de la reconnaissance de la forme de la suite, mais par contre elle permet que beaucoup plus d'élèves continuent de travailler avec la bonne suite. Les élèves comprennent toutefois bien dans les deux classes que le travail est à développer dans le paradigme A1. Ils ont des bons usages des instruments (calculatrice) pour remplir leurs tableaux de valeurs. Il y a certains contrôles qui s'exercent déjà, par exemple des contrôles sémiotiques et instrumentaux quand la calculatrice ne renvoie pas ce qui pourrait être attendu, et on peut penser que pour certains élèves cela les aide aussi à reconnaître la bonne suite.

Dans le cas des élèves qui sont en autonomie en la Classe 1, malgré l'idée que l'on peut se faire qu'un travail plus pragmatique dans le paradigme A1 pourrait être plus accessible, le non-aboutissement de la reconnaissance de la suite nous montre que ce travail n'est pas évident pour nombreux élèves. Il est paradoxal de penser que ce type d'élève pourrait réaliser un travail

correct et contrôlé dans le paradigme A2, s'ils manquent d'activité du contrôle même dans le paradigme A1.

Pour les questions B.2 et B.3 on attendait la reconnaissance de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite de la suite. A partir des tableaux de valeurs, la reconnaissance de la croissance est bonne chez une grande partie des élèves, dans les deux classes. Il semble donc facile de passer d'une perspective ponctuelle portée par le tableau de valeur, à une perspective globale sur la suite pour conjecturer la croissance de la suite (dimension Sémiotique du travail). Par contre la reconnaissance de la convergence et de la valeur de la limite est plus difficile, ce qui est lié à un changement de perspective plus difficile (par exemple seulement 25% dans la Classe 1). Les élèves doivent se mettre dans une perspective locale pour apprécier la convergence et la limite. Nous n'avons pas cherché à creuser ce changement de perspective mais ces résultats sont cohérents avec le travail fait par Montoya-Delgadillo et al. (2018). La forme des représentations numériques (décimales ou fractionnaire) semble avoir un effet sur les reconnaissances puisque les représentations fractionnaires ne favorisent pas les reconnaissances que nous attendions ; en effet, la majorité des élèves bloqués dans B.2 et B.3 avaient des représentations fractionnaires dans leur tableaux de valeurs. Il y a alors un effet du professeur dans la Classe 2 qui a favorisé le fait pour les élèves bloqués de pouvoir changer de représentations. En effet, l'aide individuelle du professeur à un binôme d'élèves pour régler la fenêtre d'affichage de la calculatrice et visualiser la représentation graphique de la suite numérique, a été faite à haute voix et elle a pu aider aussi d'autres élèves. La courbe porte mieux les perspectives globales et locales nécessaires aux reconnaissances. Ainsi on a une très bonne reconnaissance de la croissance, de la convergence et de la valeur de la limite dans la Classe 2 (80%). On voit d'ailleurs dans cette Classe 2 que certains élèves ont tout de même les bonnes conjectures (sans doute avec la courbe), alors que leurs tableaux de valeurs étaient incomplets ou non corrects.

7.2. La reconnaissance des méthodes de preuve dans le paradigme A2

Pour la partie C, on avait comme objectif que les élèves puissent produire des preuves mathématiques dans le paradigme A2, avec une forte dimension Discursive du travail. Pour que cette dimension puisse s'activer, les élèves devaient reconnaître les différentes méthodes de preuve et contrôler chacune des étapes de ces preuves, notamment avec la partie B.

On peut dire que le travail mathématique correct (voire incomplet) dans la partie B (paradigme A1) s'avère être un bon précurseur pour entrer dans la partie C de preuves (discursives). Mais il s'avère aussi constituer un frein chez certains élèves, notamment dans la Classe 1 en autonomie, qui restent spontanément dans le paradigme A1 pour tenter des argumentations. A ce moment-là ces élèves contrôlent souvent leur discours avec la partie B – contrôles sémiotique ou instrumentaux en se référant à la calculatrice - mais ils fournissent un travail qui ne peut qu'être incomplet. Un seul élève (G1-1.14) semble totalement déconnecter sa partie C de la partie B tout en restant dans le paradigme A1. Il repart sur le modèle $u_{n+1} = f(n)$ alors que sa partie B était correcte. On peut dire que ces élèves et en particulier ce dernier exemple, n'auraient finalement rien pu faire si seule la partie C avaient été proposée d'emblée comme c'est le cas dans les exercices traditionnels au lycée et à l'université (Flores-González, Vandebrouck et Vivier, 2020). En d'autres termes, on voit qu'une partie des élèves est tout de même capable de produire un travail incomplet (et non pas non correct) si tant est qu'on leur permet de rester dans le paradigme A1 et qu'eux il se le permettent aussi. Mais, nous pensons qu'il pourrait y avoir des différentes raisons au fait que les élèves continuent leur travail dans le paradigme A1 : Est-ce que c'est le travail dans la partie B qui amène aux élèves à continuer dans le paradigme A1 dans la partie C ? Les élèves sont plus à l'aise en restant dans le paradigme A1 ? Sont-ils conscients de leurs lacunes dans le paradigme A2 ? Ont-ils conscience

du changement de contrat didactique lié au changement de paradigme ? Auquel cas on pourrait conclure que ce changement de contrat est à expliciter et à travailler, au même titre que le changement de paradigmes géométriques (Kuzniak, 2004) qui est clairement identifié et explicitement travaillé entre le primaire et le collège au cycle 4.

À ce propos, dans la question C.1, qui avait pour but de prouver que tous les termes de la suite étaient bien définis, 1 seul des élèves de la Classe 1 a produit un travail non correct. Ce n'est pas le cas dans la Classe 2 où tous les élèves sont passés dans le paradigme A2 avec la partie C. On peut à nouveau attribuer cela au rôle du professeur qui impose un rythme à la classe, qui donne des aides individuelles qui peuvent être entendues par tous, et signale la fin de la partie B en marquant la différence entre les conjectures (partie B) et ce qui va être fait « maintenant » dans la partie C⁵.

Dans cette même question C.1, le travail et les erreurs ne sont ainsi pas de même nature entre la Classe 1 et la Classe 2. D'une part une partie des élèves de la Classe 1 reste dans le paradigme A1 et fournissent un travail incomplet s'appuyant pour partie sur la partie B (sauf l'exception G1-1.14). Ceux qui passent dans le paradigme A2 reconnaissent qu'il faut mobiliser un raisonnement par récurrence, mais pour ceux qui ne basculent pas, serait-il à cause de la difficulté de la preuve par récurrence qu'ils restent dans le paradigme A1 ? Ainsi, cette preuve par récurrence semble être un marqueur fort du passage dans le paradigme A2, mais les conditions sont différentes dans les deux classes : dans la Classe 1, ce sont les élèves en autonomie qui reconnaissent spontanément la récurrence ; et dans la Classe 2, c'est plus un effet du discours du professeur ou plus un effet du contrat didactique (dialectique classique « conjecture / preuve » des problèmes du lycée) qui impose le paradigme A2 et donc les raisonnements qui vont avec. Tous les élèves sauf 3 amorcent une récurrence. Les autres semblent être confinés dans A2. 1 élève est bloqué et ne produit rien ; peut-être qu'à l'instar des élèves de la Classe 1, il aurait pu continuer à produire du travail si on lui avait laissé l'opportunité de continuer à travailler dans le paradigme A1. Les 2 autres élèves produisent un travail non correct tout en étant dans A2. Par exemple le travail non correct est lié à des traitements qui restent dans le paradigme A2 (inégalités où u_n est remplacé par x notamment) sans que l'on ne repère de contrôle d'aucun type avec ce qui a été produit dans la partie B. Les élèves semblent comme prisonniers du travail dans le paradigme A2, et la différence de paradigme entre la partie B et la partie C n'aide finalement pas à faire des contrôles qui ne sont pas habituels dans les pratiques classiques des élèves dans les classes du lycée.

Pour la question C.2, qui avait pour objective de prouver la croissance de la suite, on retrouve l'idée développée avec la question C.1. Le travail dans le paradigme A1 qui est largement plus présent pour les élèves de la Classe 1 jusqu'à la question C.1 (plus de la moitié des élèves alors que tous les élèves de la Classe 2 sont dans le paradigme A2), favorise l'engagement jusqu'à la question C.2. Plusieurs élèves arrivent encore à produire des argumentations incomplètes dans le paradigme A1 – ou un paradigme intermédiaire entre A1 et A2 - basées sur les tableaux de valeurs ou le graphique donné par la calculatrice (travail dans la dimension Sémiotique) ; néanmoins on peut dire que l'on a une tendance à proportionnellement plus de travail incomplet dans la Classe 2 qui est majoritairement dans le paradigme A2 (5/10 dans la Classe 1 contre 11/18 dans la Classe 2). Les changements de paradigmes ne sont pas du même type dans les deux classes, à nouveau on constate un effet du professeur ou du contrat didactique dans la Classe 2 qui impose le paradigme A2. Dans la Classe 1, on a plusieurs mouvements de A1 vers

⁵ Entre la partie B et la partie C l'enseignant ajoute : « *Maintenant l'objectif c'est de discuter, est-ce que c'est valable tout le temps, pour tous les alphas entre 0 et 1 d'avoir une suite croissante, majorée par 1 et qui converge vers 1 sa limite. Et ça pour l'instant on ne sait pas, c'est juste une conjecture* ».

A2 et de A2 vers A1. Revenir dans A2 correspond à reconnaître une méthode dans ce paradigme pour répondre à la question (typiquement calculer $u_{n+1} - u_n$), mais cela se fait sans contrôle et mène à du travail non correct. Revenir dans A1 semble permettre au contraire de continuer à développer un travail incomplet basé sur la partie B (« la suite semble croissante car $u_0 < u_1 < u_2 \dots u_{n+1}$ »). Dans la Classe 2, on a seulement 3 élèves qui décrochent dans un seul sens de A2 vers A1, dont deux qui peuvent développer un travail incomplet par ce biais (en référant à la calculatrice notamment). Les méthodes utilisées varient aussi entre les deux classes puisque dans la Classe 1 la méthode des différences $u_{n+1} - u_n$ est surtout utilisée et dans la Classe 2 c'est massivement la récurrence qui est utilisée. Dans le paradigme A2, il semble que le travail est essentiellement discursif, mais on voit peu de contrôles de l'activité en appui sur les autres dimensions et par des références au travail de la partie B (les tableaux de valeurs, les conjectures). On a des utilisations du théorème en acte « f croissante donc (u_n) croissante », surtout dans la Classe 1, mais ce théorème recouvre de multiples interprétations qui dépendent du contexte et il apparaît d'ailleurs aussi bien dans A1 que dans A2. On n'a pas de travail correct sauf 1 élève dans la Classe 1. La plupart du travail non correct est dans le paradigme A2. Par exemple, sans contrôle discursif avec un travail essentiellement sémiotique où on dérive la suite u'_n et où on la représente comme une fonction dans un tableau de variation (G1-2.6).

Pour la question C.3 où le but c'était de prouver la convergence de la suite, on voit la géographie ou les parcours totalement différents entre la Classe 1 en autonomie et la Classe 2 guidée par le professeur (notamment avec le bilan entre les parties B et C). Les élèves de la Classe 1 se permettent des allers retours entre les deux paradigmes, ce qui leur permet d'avancer dans un travail au mieux incomplet mais en jouant sur plusieurs dimensions (typiquement G1-1.15 qui travaille uniquement dans le paradigme A1). Dans cette même Classe, un seul des élèves reconnaît le théorème à mobiliser dans la question C.3, et c'est celui qui fournit un travail final correct. Comme on l'a signalé précédemment, on peut penser que cet élève (G1-1.8) contrôle bien son travail avec sa partie B car il explicite à la fin du travail que « la suite tend vers 1 et non pas vers 0,9 », ce qu'il avait conjecturé en partie B. Les autres élèves dans le paradigme A2 produisent des raisonnements non corrects et vice versa les raisonnements non corrects sont surtout dans le paradigme A2 ; ainsi on constate à nouveau que ce n'est pas parce que les élèves sont dans le paradigme attendu qu'ils vont produire un travail mathématique correct. Les élèves de la Classe 1 font des discours sans contrôle avec la partie B (« suite croissante et minorée », « suite converge vers 0 » ...) ; cela montre que pour ces élèves la partie B et la partie C semblent déconnectées, et par conséquent, les paradigme A1 et A2 sont des paradigmes déconnectés aussi (articulation qui ne serait pas toujours évidente). Concernant les élèves de la Classe 2, ils restent massivement dans A2 et peuvent décrocher dans le paradigme A1 temporairement (3 élèves), mais reconnaissent majoritairement dans la dernière question le théorème approprié (21 élèves parmi les 26 au total qui ont répondu à cette question). Ils produisent massivement un travail correct même pour un élève qui n'avait pas travaillé dans C.1 et C.2 (G.20), ou encore un élève qui n'avait pas des tableaux de valeurs corrects et n'avait fait aucune conjecture dans la partie B (G2.16). Il y a donc toujours un effet du bilan intermédiaire entre les parties B et C qui permet que les élèves continuent leur travail, mais aussi du coup une certaine illusion du travail correct dans le paradigme A2. Là encore, on a des discours ancrés dans le paradigme A2 (ou intermédiaire) mais sans contrôle d'aucun type avec les représentations fournies par la partie B ou par la calculatrice (par exemple G2-4 ou G2-10 qui transfère la limite de f pour donner celle attendue pour la suite dont on a dit que cela peut correspondre à un « contrôle à l'envers »). Il semble donc que les élèves dans A2 cherchent à répondre à ce qui est attendu dans ce paradigme coûte que coûte.

7.3. Réflexions théoriques et projections

À partir des outils théoriques que nous avons pris en compte pour nos analyses, nous remarquons la complémentarité dans l'articulation des deux cadres théoriques que nous avons utilisés. Ainsi, nous avons pu observer de types d'activité de contrôle sémiotique et instrumentale, que dans notre étude cela se rend explicite grâce au rôle de l'instrument calculatrice : ici l'élève travaille dans une combinaison entre l'information qui renvoient les signes qui montre la calculatrice, et d'autre part, la manipulation de la calculatrice elle-même. Le travail mathématique développé avec l'aide de la calculatrice, montre clairement l'activation du plan Sémiotique-Instrumentale ; mais pour que ce travail puisse aboutir à un travail correct, l'élève a besoin d'avoir des activités mathématiques de reconnaissance et de contrôle. Si l'activité de contrôle ne se présente pas, cela vraisemblablement produira un travail mathématique non correct. Ce qui reste à relever, mais aussi à creuser dans une prochaine étude, c'est que nous avons constaté des travaux mathématiques corrects où on ne sait pas dans quelle mesure il y a eu une activité de contrôle ; par conséquent, il faudrait rendre ces activités plus explicites.

Nous faisons l'hypothèse que l'activité de contrôle agit comme un régulateur de l'activité mathématique, pouvant aussi être un autorégulateur de cette activité. A cet égard, nous prenons le contrôle de l'activité mathématique comme une des problématiques clés de la transition lycée-université : au lycée quand la nécessité de contrôler l'activité arrive, c'est l'enseignant qui donne des aides aux élèves pour contrôler leur activité (aide avec la manipulation de l'instrument et donner les bonnes reconnaissance dans notre étude par exemple) et leur travail (que ce soit d'ordre sémiotique, instrumental ou discursif) ; tandis que à l'université, dès la première année, on veut que les étudiants puissent autoréguler leur activité, c'est-à-dire, qu'ils développent en autonomie des activités de contrôle dans leurs démarches mathématiques. Comment donc aider à promouvoir cette activité de contrôle pour qu'elle soit adéquate à la transition lycée-université ? Et quel rôle devrait jouer l'enseignant de lycée et celui de la première année de l'université pour favoriser cette transition ?

En ce qui concerne le rôle de l'enseignant, ces interventions nous semblent essentielles, car à chaque question que l'on a posé dans notre situation d'apprentissage, on a pu constater l'effet que cela pouvait produire dans le travail et les activités que les élèves développaient. C'est pour cela que l'on considère important pouvoir guider ces interventions pour favoriser l'apprentissage en prenant en compte le contexte de transition que nous étudions. Ainsi comme une possible perspective, nous pourrions continuer avec la méthodologie d'ACODESA (Hitt et González-Martin, 2015), qui pourrait permettre d'articuler les éléments théoriques que nous avons développée dans cette brochure, ainsi qu'enrichir notre analyse du point de vue socioculturelle et la Théorie de l'Activité.

References

- Cole, M., & Wertsch J. (1996). Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotski. *Human Development*, 39, 250–256.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Suisse: Peter Lang.
- Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamaki, R.L. (1999). *Perspective on activity theory*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Flores-González, M., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2020). Suites définies par récurrence dans la transition lycée- université : activité et travail mathématique. *INDRUM2020—Pre-Proceedings of the Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. (pp. 31–40).
https://indrum2020.sciencesconf.org/data/pages/indrum2020_preproceedings.pdf
- Galperine, P. (1966). Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. In A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (Eds.), *Recherches psychologiques en URSS* (pp.114–132). Moscou : Editions du progrès.
- Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático, *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*, 30 (54), 1–22.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237–254.
- Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A.A., Kwon, O.N., & Verschaffel, L. (2016) *Transition in mathematics education, ICME-13 Topical Survey series*. New York, NY: Springer.
- Gueudet, G. & Thomas, M. (2020). Secondary-tertiary transition in mathematics education. In Lerman S. (Ed). *Encyclopedia of mathematics education*. Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-030-15789-0_100026.
- Hitt, F., & Gonzalez-Martin, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 201–219.
- Horoks, J., & Robert, A. (2007). Task designed to highlight task-activity relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 279–287.
- Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l’habilitation à diriger des recherches. IREM Paris 7.
- Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. View points and perspectives, *RELIME—Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-I), 17–28.
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in Schooling. *ZDM— The International Journal on Mathematics Education*, 48(6), 721–737.
- Leontiev, A. (1978). *Activity, consciousness and personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Monaghan, J., Nardi, E., & Dreyfus, T. (2019). *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics*, Conference Proceeding, Kristiansand, Norway: MatRIC.

https://matric-calculus.sciencesconf.org/data/pages/CalcConf2019_Papers_190910.pdf
Accessed December 2019.

- Montoya-Delgadillo, E., Pérez-Murillo, R., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localisation Perspective in the Learning of Analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 139–160.
- Montoya Delgadillo, E., & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 48 (6), 739–754.
- Perrin, D. (2000). *Sur les suites récurrentes*. Resource document. <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/CAPES/analyse/Suites/suites-re%cc%81currentes.pdf>
Accessed June 2019.
- Piaget, J. (1968). Le point de vue de Piaget. *International Journal of Psychology*, 3(4), 281–299.
- Radford, L. (2016). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach. *ZDM— The International Journal on Mathematics Education*, 48(6), 925–933.
- Robert A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139–190.
- Robert A., & Vandebrouck F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 239–285.
- Rousse, S. (2018). *Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot, Paris.
- Simon, M. A., Kara, M., Placa, N., & Avitzur, A. (2018). Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The Learning Through Activity theoretical framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 95-112.
- Vandebrouck, F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. In: Kisier G., Forgasz H., Graven M., Kuzniak A., Simmt E., Xu B. (Eds) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs*, 679-698. Cham: Springer.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 135–170.
- White, N., & Mesa, V.M. (2014). Describing cognitive orientation of Calculus I tasks across different types of coursework. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education* 46(4), 675-690.
- Winsløw, Carl., Gueudet, G., Hochmut, R., & Nardi, E., (2018). Developing research in mathematics education - twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe. In. Dreyfus, T., Artigue, M., Potari, D., Prediger, S. & Ruthwen, K. (Eds.), *Research on University Mathematics Education*, 60-74. Routledge. European Research in Mathematics Education.

Annexes

- Élève G1-1.4 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	Erreur : Division par 0
u_2	Erreur : Division par 0
u_3	Erreur : Division par 0
u_4	Erreur : Division par 0
u_5	Erreur : Division par 0
u_6	Erreur : Division par 0

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,5263
u_2	0,6785
u_3	0,7567
u_4	0,8043
u_5	0,8363
u_6	0,8593

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,6666
u_2	0,7439
u_3	0,7899
u_4	0,8332
u_5	0,8570
u_6	0,8748

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

<p>Pour $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$ Les variations semblent croissantes Elles convergent vers 1, la limite sera 1</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? J'ai utilisé pour calculer α_2 et α_1 jusqu'à la limite de l'encadrement $[0, 1]$</p>
--	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p>à la main probablement, mais pas pour la calculatrice qui refuse de calculer $u_n = 0$.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
---	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

$f(0) = \frac{1}{2}$ $f(1) = 1$ on a pas de variation anormale dans l'encadrement sur $[0,1]$ et ayant une courbe croissante alors pour tout entier n , u_n appartient à $[0,1]$	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

avec la réponse à la question C.1) le sens de variation est croissant	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

- Élève G1-1.5 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	$\frac{1}{2}$
u_2	$\frac{2}{3}$
u_3	$\frac{3}{4}$
u_4	$\frac{4}{5}$
u_5	$\frac{5}{6}$
u_6	$\frac{6}{7}$

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,53
u_2	0,68
u_3	0,76
u_4	0,80
u_5	0,83
u_6	0,85

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,67
u_2	0,75
u_3	0,8
u_4	0,83
u_5	0,85
u_6	0,87

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>Je l'ai pas utilisée</p>
--	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p> <p>La non plus</p>
--	---

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Étant donné que la suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f de l'exercice 1, les variations de la suite sont les mêmes que celles de $f(x)$.	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? Je sais pas.
--	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

- Élève G1-1.8 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,6667
u_3	0,7500
u_4	0,8
u_5	0,8333
u_6	0,8571

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,5263
u_2	0,6786
u_3	0,7568
u_4	0,8044
u_5	0,8364
u_6	0,8594

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,6667
u_2	0,7500
u_3	0,8
u_4	0,8333
u_5	0,8571
u_6	0,8750

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

$\alpha \neq 1$ et $\alpha = 0,5$ la suite semble croissante et converge vers 0,9	Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? À l'aide de la table de valeurs
---	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

On peut dire que que α est croissant converge vers 0,9 pour tout $\alpha \in [0, 1]$	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? À l'aide de la table de valeurs
---	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p>$\forall m \in \mathbb{N}$, on pose : $0 \leq u_m \leq 1$</p> <p>Initialisation : pour $m=0$</p> <p>$0 \leq u_0 \leq 1$ $u_0 = 0,5$ P_0 est vraie</p> <p>Hérédité : pour $m \in \mathbb{N}$ fixé on suppose P_m vraie</p> <p>H.R. : $0 \leq u_m \leq 1$ on veut prouver que $u_{m+1} \in [0,1]$</p> <p>$\forall m \geq 1$</p> <p>$0 \leq u_{m+1} \leq 1$</p> <p>$0 - u_m \leq 2 - u_m \leq 1 - u_m$ P_m est héréditaire. P_0 est vraie P_n est héréditaire</p> <p>$\frac{1}{-u_m} \geq \frac{1}{2-u_m} \geq \frac{1}{1-u_m}$ est vraie P_n est héréditaire</p> <p>d'après le principe de raisonnement par récurrence P_m est vraie</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
--	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p>$u_{m+1} - u_m = \frac{1}{2-u_m} - u_m = \frac{1 - u_m(2-u_m)}{2-u_m}$</p> <p>$= \frac{1 - 2u_m + u_m^2}{2-u_m}$</p> <p>$\frac{u_m^2 - 2u_m + 1}{2-u_m} > 0$ $\left. \begin{array}{l} u_m \in [0,2] \\ u_m < 2 \end{array} \right\}$</p> <p>La suite est croissante sur $[0,1]$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
---	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

<p>La suite est croissante et est majorée par 1 elle converge</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
---	--

- Élève G1-1.9 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-2} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,66
u_3	0,74
u_4	0,79
u_5	0,82
u_6	0,84

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,52
u_2	0,67
u_3	0,75
u_4	0,8
u_5	0,83
u_6	0,85

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,66
u_2	0,74
u_3	0,79
u_4	0,82
u_5	0,84
u_6	0,86

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

<p style="text-align: center;">$\lim u_n = 1$</p> <p style="text-align: center;">donc elle converge.</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>non</p>
---	---

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
--	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

- Élève G1-1.12 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$

u_0	0	0	0
u_1	0,5	-0,5	0,5
u_2	1	0	0,6
u_3	ERROR	0,5	0,75
u_4	-1	0	0,8
u_5	-0,5	0,5	0,83
u_6	-0,333	0	0,857

Cas $\alpha_2 = 0,1$

u_0	0,1	0,1	0,1
u_1	0,5	0,1	0,5263
u_2	1	0,1	0,6385
u_3	ERROR	0,1	0,7567
u_4	-1	0,1	0,8043
u_5	-0,5	0,1	0,8363
u_6	-0,333	0,1	0,8593

Cas $\alpha_3 = 0,5$

u_0	0,5	0,5	0,5
u_1	0,5	0	0,6
u_2	1	0,5	0,75
u_3	ERROR	0	0,8
u_4	-1	0,5	0,83
u_5	-0,5	0	0,857
u_6	-0,333	0,5	0,875

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_3 = 0,5$, conjecturer les variations, la convergence, et la limite de la suite (si elle vous semble convergente).

<p>pour $\alpha_3 = 0,5 \rightarrow$ suite constante puis croissante $\lim u_{n+1} = +\infty$ la suite diverge</p> <p>pour $\alpha_2 = 0,1 \rightarrow$ suite croissante divergente $\lim u_{n+1} = +\infty$</p> <p>pour $\alpha_3 = 0,5 \rightarrow$ croissante - convergente vers 1 $\lim u_{n+1} = 1$</p> <p>pour $\alpha_2 = 0,1 \rightarrow$ croissante - convergente vers 1 $\lim u_{n+1} = 1$</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>Recur \rightarrow Type</p> <p>F2 $\rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$</p> <p>set - Start = 0</p> <p>End = 6</p> <p>$\alpha 0 = \alpha_{1/12/13}$</p> <p>Tabl - G.CON</p>
--	--

B.3) Peut-on conjecturer les variations, la convergence et l'éventuelle limite de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p>Les 3 suites sont croissantes et tendent vers 1 - Elles convergent vers 1 - $\lim u_{n+1} = 1$</p> <p>$0 \in [0, 1]$</p> <p>$0,1 \in [0, 1]$</p> <p>$0,5 \in [0, 1]$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p> <p>OUI</p>
---	---

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p>La suite $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ avec $u_0 = 0$ est définie sur $[0,1]$ La suite $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ avec $u_0 = 0,1$ est définie sur $[0,1;1]$ La suite $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ avec $u_0 = 0,5$ est définie sur $[0,5;1]$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>oui</p>
--	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>oui</p>
--	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

<p>La limite est 1 donc elle converge vers 1 Toutes les valeurs se rapprochent de 1 sans jamais l'atteindre</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>oui</p>
--	---

- Élève G1-1.14 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	$\frac{1}{2} = 0,5000$
u_2	$\frac{2}{3} = 0,6666$
u_3	$\frac{3}{4} = 0,7500$
u_4	$\frac{4}{5} = 0,8000$
u_5	$\frac{5}{6} = 0,8333$
u_6	$\frac{6}{7} = 0,8571$

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,5263
u_2	0,6285
u_3	0,7567
u_4	0,8043
u_5	0,8363
u_6	0,8593

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,6666
u_2	0,7500
u_3	0,8000
u_4	0,8333
u_5	0,8571
u_6	0,8750

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente). $\alpha_3 = 0,5$

<p>Pour le cas $\alpha_1 = 0,1$ les variations croît et semble tendre vers $\frac{1}{2}$. α_1 converge vers $\frac{1}{2}$</p> <p>Pour le cas $\alpha_2 = 0,5$ les variations croît et semble tendre vers $\frac{1}{2}$. α_2 converge vers $\frac{1}{2}$</p> <p>Pour le cas $\alpha_3 = 0,5$ les variations croît et semble tendre vers $\frac{1}{2}$. α_3 converge vers $\frac{1}{2}$</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>non.</p>
--	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p>Oui car on sait que la suite croît et qu'elle tend vers $\frac{1}{2}$ lorsqu'elle est comprise lorsque α est compris entre 0 et 1</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>non.</p>
---	---

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p> lorsque $n=0$ $u_0=0$ $n=2$ $u_2=0$ lorsque $n=1$ $u_1=1$ $n=3$ $u_3=-1$ Si on remplace a p Si $a=1$ la suite ne va pas dépasser 1. </p>	<p> Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? non. </p>
---	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p> $u_{n+2} - u_n = \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2n}$ $= \frac{1}{-n} - \frac{1}{2-n}$ $= \frac{1}{(2-n)-n} - \frac{1(1-n)}{(2-n)-n}$ $u_{n+2} - u_n = \frac{1+n}{-2n+n^2} = \frac{1+n}{-2n+n^2} \uparrow$ </p>	<p> Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? non. </p>
---	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

<p> $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \frac{1+n}{-2n+n^2} = \frac{+\infty}{-\infty} = -1$ $= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} = -\infty$ </p>	<p> Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? non. </p>
---	--

- Élève G1-1.15 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

à aide pour la calculatrice

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,6666
u_3	0,75
u_4	0,8
u_5	0,833
u_6	0,85

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,5263
u_2	0,6785
u_3	0,7567
u_4	0,8063
u_5	0,8363
u_6	0,8593

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,6666
u_2	0,75
u_3	0,8
u_4	0,8333
u_5	0,8571
u_6	0,875

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

<p><i>la suite semble croissante, on remarque grâce à la calculatrice que la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas</i></p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p><i>en allant dans le menu fonction suite</i></p>
--	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p><i>oui car d'après la calculatrice on voit que pour toute les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$, la suite semble être croissante et converge vers 1.</i></p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p><i>oui allant dans la fonction table</i></p>
--	---

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 1$
car la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas donc
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$

Pourrait-on utiliser la calculatrice ?
Si oui, comment ?

oui avec la
fonction table

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Le sens de variation de la suite
 (u_n) est croissant

Pourrait-on utiliser la calculatrice ?
Si oui, comment ?

oui avec le
tableau

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

d'après la calculatrice on voit
que la suite converge vers 1 mais
ne l'atteint pas

Pourrait-on utiliser la calculatrice ?
Si oui, comment ?

oui avec le
tableau

- Élève G1-1.16 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,666
u_3	0,749
u_4	0,8
u_5	0,833
u_6	0,857

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,586
u_2	0,678
u_3	0,757
u_4	0,804
u_5	0,836
u_6	0,859

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,666
u_2	0,75
u_3	0,8
u_4	0,833
u_5	0,857
u_6	0,875

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

<p>Cas α_1, α_2 et α_3: La suite est croissante elle converge et tend vers 1 $\lim(u_n) \rightarrow 1$</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? récurrence en entrant la fonction: $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ On a tracé pour observer les variations et on observe le tableau pour la limite</p>
--	---

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p>Oui, (u_n) a les mêmes variations et la même limite pour tout $\alpha \in [0, 1]$.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? oui;</p>
---	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p>(u_n) converge vers 1. Pour $n=0$, $u_n \in [0,1]$ et pour $n=1$, $u_n \in [0,1]$ Elle n'est pas définie sur $]-\infty; 0]$. Tous ses termes sont donc compris entre 0 et 1.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>Oui,</p>
--	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p>La suite (u_n) est croissante entre 0 et 1.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>Oui, en utilisant (u_n) dans recurrence et en traçant la fonction.</p>
---	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

<p>$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \rightarrow 1$ donc (u_n) converge vers 1.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>Oui, comme pour la question d'avant ou en observant le tableau des valeurs.</p>
--	--

- Élève G1-2.2 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,6667
u_3	0,75
u_4	0,8
u_5	0,8333
u_6	0,8571

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,5263
u_2	0,6785
u_3	0,7566
u_4	0,8043
u_5	0,8363
u_6	0,8593

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,6667
u_2	0,75
u_3	0,8
u_4	0,8333
u_5	0,8571
u_6	0,875

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

<p>α_1 = semble être croissante α_2 = semble être croissant α_3 = semble être croissante</p> <p>les 3 cas semble converger et vers $\lim u_n = 1$</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? Nous avons posé la suite $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ et vu les termes dans le tableau</p>
---	---

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

$0 < u_n < 1$ $2-0 < 2-u_n < 2-1$ $2 < 2-u_n < 4$ $\frac{1}{2} < \frac{1}{2-u_n} < 1$	$\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$ Comme u_{n+1} appartient à l'intervalle $[0,1]$ u_n appartient aussi à l'intervalle, c'est une partie de la démonstration par récurrence	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? Non
--	---	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n$ $= \frac{1 - (u_n(2-u_n))}{2-u_n}$ $= \frac{1 - 2u_n + u_n^2}{2-u_n}$ $-u_n^2 - 2u_n + 1 < 0$ <p>et $-u_n + 2 < 0$ donc la suite (u_n) est croissante décroissante (règle des signes)</p>	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
---	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

Comme la suite est décroissante et est minorée par 0 donc par le lemme $\lim u_n = 0$	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

- Élève G1-2.3 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,3
u_2	0,25
u_3	0,2
u_4	0,17
u_5	0,14
u_6	0,125

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,13
u_2	0,25
u_3	0,2
u_4	0,17
u_5	0,14
u_6	0,125

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,3
u_2	0,25
u_3	0,2
u_4	0,16
u_5	0,14
u_6	0,125

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

La suite semble ~~croissante~~ ~~pas~~ décroissante.
Elle semble être convergente, et sa limite serait 0.

Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? On a rentré la suite $\frac{1}{2-(n-1)}$ on a tapé table et on a noté les solutions.

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p>On pose $P_n = u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Initialisation: On vérifie P_0. $u_0 = \frac{1}{2-(0-1)} = 0,3$ $0,3 \in [0,1]$ Donc P_0 vraie. Hérédité: $u_{n+1} = \frac{1}{2-n}$ On suppose P_n vraie: $u_n \in [0,1]$ $=$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
---	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p>Calculons (u_n) $u_n = \frac{1}{2-(n-1)}$ $u_n' = \frac{u}{2u'}$ $= \frac{2-n+1}{-1}$ $= \frac{1(n-2-1)}{-1} u_n' = n-3$ \rightarrow pour $n < 3$ $u_n' < 0$ pour $n \geq 3$ $u_n' > 0$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? On tape la fonction (u_n) sur la calculatrice ensuite sur graph et on observe les variations.</p>
---	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	--

- Élève G1-2.6 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	1/2
u_2	2/3
u_3	3/4
u_4	4/5
u_5	5/6
u_6	6/7

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	10/19
u_2	19/28
u_3	28/37
u_4	37/46
u_5	46/55
u_6	55/64

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	2/3
u_2	3/4
u_3	4/5
u_4	5/6
u_5	6/7
u_6	7/8

B.2) Pour le cas ^{de α_1, α_2 et α_3} ou $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

<p>cas $\alpha_1 \rightarrow$ conjecture: la suite est croissante $\lim(u_n) = 1$ convergente vers 1</p> <p>cas $\alpha_2 \rightarrow$ conjecture: suite croissante. $\lim(u_n) = 1$ convergente vers 1</p> <p>cas $\alpha_3 \rightarrow$ conjecture: suite croissante. $\lim(u_n) = 1$ convergente vers 1</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p>
---	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p>Base Conjecture: Pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0; 1]$ la suite (u_n) ne converge pas, est croissante et tend vers $+\infty$.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
---	---

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p>Initialisation : pour $n=0 \rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ $u_0=0$ $u_0=0$ $u_1 = \frac{1}{2-u_0} = \frac{1}{2}$ $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ Donc P_0 vraie.</p> <p>Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose P_n vraie $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ $0 \leq \frac{1}{2-u_n} \leq 1$ Donc P_{n+1} héréditaire.</p> <p>Conclusion : P_0 vraie et P_n héréditaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, d'après le principe de raisonnement par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p>The diagram shows a horizontal axis with points $-\infty$, 0, 2, and $+\infty$. A vertical axis is labeled u_n. A horizontal line is drawn at $u_n = \frac{1}{2}$. Arrows indicate the sequence values approach this line from below as n increases.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

<p>La suite u_n converge vers 0.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	--

- Élève G1-2.8 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,5000
u_2	0,6667
u_3	0,7500
u_4	0,8000
u_5	0,8333
u_6	0,8571

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,5263
u_2	0,6786
u_3	0,7568
u_4	0,8043
u_5	0,8364
u_6	0,8594

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,6667
u_2	0,7500
u_3	0,8000
u_4	0,8333
u_5	0,8571
u_6	0,8750

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

α_1, α_2 et α_3 sont croissantes en $[0, +\infty[$ et convergent chacune vers 1 soit que leur $\lim(u_n) = 1$

Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?
La graphique de chaque courbe

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

• Si $\alpha \in [0, 1[$
Oui, les variations sont toujours croissantes, la suite converge vers 1 soit que leur $\lim(u_n) = 1$
- Si $\alpha = 1$
la suite est constante, elle est non monotone et ne converge pas

Pourrait-on utiliser la calculatrice ?
Si oui, comment ?
On peut s'en passer

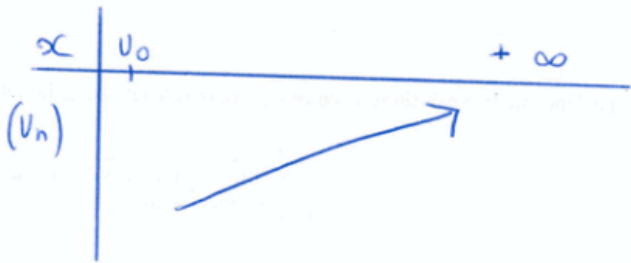
Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p>La suite est minorée en $u_0 = 0$ et converge vers 1 sans jamais l'atteindre pour tout entier naturel</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
---	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	---

- Élève G1-2.10 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,66
u_3	0,75
u_4	0,8
u_5	0,83
u_6	0,85

Cas $\alpha_2 = 0,1$	
u_0	0,1
u_1	0,52
u_2	0,67
u_3	0,75
u_4	0,8
u_5	0,83
u_6	0,85

Cas $\alpha_3 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,66
u_2	0,75
u_3	0,8
u_4	0,83
u_5	0,85
u_6	0,87

B.2) Pour le cas ~~ou $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$~~ ^{de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$} , conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

α_1 : semble croissante, converge vers 0 et $\lim \rightarrow 1$ α_2 : Pareil α_3 : Pareil	Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? Avec menu "Récurrence" de la calculatrice
---	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

Pour toute les valeurs $\alpha \in [0, 1]$, (u_n) est croissante, converge vers 0 et tend vers 0	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p>Soit $P_m: u_m = \frac{1}{2-m}$ fixé.</p> <p>I: $m=0$ $u_0 = \frac{1}{2} = 0,5$ P vraie</p> <p>H: soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. supposons P_m vraie</p> <p>AR: $\frac{1}{2-m}$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
---	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p>Un ensemble croissant</p> <p>car $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 \dots < u_{n+1}$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
--	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
--	--

- Élève G1-2.11 (Classe 1)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, complétez les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$

u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,6666
u_3	0,75
u_4	0,8
u_5	0,833333
u_6	0,8571

Cas $\alpha_2 = 0,1$

u_0	0,1
u_1	0,5263
u_2	0,6785
u_3	0,7567
u_4	0,8043
u_5	0,8363
u_6	0,8593

Cas $\alpha_3 = 0,5$

u_0	0,5
u_1	0,6666
u_2	0,75
u_3	0,8
u_4	0,8333
u_5	0,8571
u_6	0,875

B.2) Pour le cas où $\alpha_1 = 0,1$ et $\alpha_2 = 0,5$, conjecturer les **variations**, la **convergence**, et la **limite** de la suite (si elle vous semble convergente).

<p>Pour α_1, α_2 et α_3 elles sont toutes croissantes.</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>Je suis allé dans le mode recurrence puis j'ai modifié des valeurs</p> <p>$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0,1$ $\alpha_3 = 0,5$</p> <p>puis obtenu des valeurs des tableaux.</p>
---	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p>On peut conjecturer que (u_n) est croissante pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	---

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Elle est croissante, car d'après les tableaux de valeurs de la partie B, les valeurs augmentent au fur et à mesure.	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
---	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

- Élève G2-4 (Classe 2)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$

u_0	0
u_1	0
u_2	0,5
u_3	1,3333
u_4	4,5
u_5	-1,6
u_6	1,3889

Cas $\alpha_2 = 0,5$

u_0	0,5
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

Cas $\alpha_3 = 0,9$

u_0	0,9
u_1	0,90909
u_2	0,91667
u_3	0,92308
u_4	0,92857
u_5	0,93333
u_6	0,9375

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

<p>La suite converge vers 1, elle est majorée donc elle est croissante.</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>J'ai vu que les nombres sont proches de 1.</p>
---	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
--	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

$f(x) = \frac{1}{2-x}$ $f(x) = f(u_n) = \frac{1}{2-u_n}$ (P) $P_n: 0 \leq u_n \leq 1$ $0 \geq -u_n \geq -1$ $2 \geq 2 - u_n \geq 1$ $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-u_n} \leq 1$ $0 < \frac{1}{2}$ alors $0 < u_n < 1$ donc $u_n \in [0,1]$ Donc P_n est vraie.	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? ?
--	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ? En entrant la suite dans $f(x)$.
--	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

converge vers 1, majorée, et est croissante	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
---	---

- Élève G2-10 (Classe 2)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,5
u_2	0,666...
u_3	0,75
u_4	0,8
u_5	0,833...
u_6	0,85714...

Cas $\alpha_2 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	0,666...
u_2	0,75...
u_3	0,8
u_4	0,833...
u_5	0,85714...
u_6	0,875

Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0,9
u_1	0,905...
u_2	0,9166...
u_3	0,923...
u_4	0,9285...
u_5	0,9333...
u_6	0,9375

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

<p>La suite $u_{n+1} = f(u_n)$ semble être croissante sur $\mathbb{R} - \{2\}$. Elle semble converger vers 2 1, la limite semble donc être $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>Après.</p>
---	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
--	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

$0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0$ $\Leftrightarrow 1 \leq 2-x \leq 2$ $\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1 \text{ et } u_n \text{ appartient à } [0,1].$	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>Oui</p>
---	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

$u_n < u_{n+1} \text{ car la fonction } f(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R} - \{2\}.$	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>Oui</p>
---	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} = 1. \text{ La fonction } f \text{ a pour limite } 1.$ <p>La suite u_n est donc convergente vers 1.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>Oui.</p>
--	---

- Élève G2-18 (Classe 2)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	0,3333
u_2	0,6000
u_3	0,7143
u_4	0,7778
u_5	0,8192
u_6	0,8462

Cas $\alpha_2 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0,9
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

<p>Cas $\alpha_1 \rightarrow$ suite croissante</p> <p>Cas $\alpha_2 \rightarrow$ suite croissante</p> <p>Cas $\alpha_3 \rightarrow$ suite croissante.</p> <p>limite $\rightarrow 1$</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>regarder le graphique de la suite.</p>
---	--

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p>suite croissante, majorée</p> <p>\rightarrow converge vers une limite finie proche de 1.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
--	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

pour u_0 :

$$0 \leq 0 \leq 1$$

P_0 est vraie.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

Soit $0 \leq u_n \leq 1$

Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$:

$$0 \leq u_n \leq 1$$

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ car f croissante sur $[0,1]$.

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \quad P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

Pour tout n , $u_n \in [0,1]$.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ?
Si oui, comment ?

calcul de $f(0)$
calcul de $f(1)$

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2-u_n} - u_n \\ &= \frac{1}{2-u_n} - \frac{u_n(2-u_n)}{2-u_n} \\ &= \frac{1-2u_n}{2-u_n} = \frac{u_n(2-u_n)}{2-u_n} \\ &= u_n \cdot \text{or } u_n \in [0,1] \\ \text{Donc } u_n > 0 \end{aligned}$$

Pourrait-on utiliser la calculatrice ?
Si oui, comment ?

La suite est croissante.

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite finie $l \leq 1$.

Pourrait-on utiliser la calculatrice ?
Si oui, comment ?

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p>Soit a et b, deux entiers quelconques, tel que</p> $a < b$ $2-a < 2-b$ $\frac{1}{2-a} < \frac{1}{2-b}$ $f(a) < f(b), \text{ or } u_{n+1} = f(u_n),$ <p>donc u_n est croissante</p>	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
--	---

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

<p>(u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers 1.</p>	Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?
---	---

- Élève G2-27 (Classe 2)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$

u_0	0
u_1	$\frac{1}{2}$
u_2	$\frac{2}{3}$
u_3	$\frac{3}{4}$
u_4	$\frac{4}{5}$
u_5	$\frac{5}{6}$
u_6	$\frac{6}{7}$

Cas $\alpha_2 = 0,5$

u_0	0,5
u_1	$\frac{2}{3}$
u_2	$\frac{3}{4}$
u_3	$\frac{4}{5}$
u_4	$\frac{5}{6}$
u_5	$\frac{6}{7}$
u_6	$\frac{7}{8}$

Cas $\alpha_3 = 0,9$

u_0	0,9
u_1	$\frac{10}{11}$
u_2	$\frac{11}{12}$
u_3	$\frac{12}{13}$
u_4	$\frac{13}{14}$
u_5	$\frac{14}{15}$
u_6	$\frac{15}{16}$

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

Un est croissante et convergente vers une limite 1

Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?

on regarde vers
quelle limite se
dirigent les valeurs
on voit que $u_0 < u_1$
donc un croissante

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

Oui

Pourrait-on utiliser la calculatrice ?
Si oui, comment ?

on regarde la
courbe de la suite
et vers où elle
converge et quelle
serait sa limite

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

<p>pour $m=0$, $u_0 = 0$ $0 \leq 0 \leq 1$ donc P_0 est vraie</p> <p>soit m entier quelconque, on suppose P_m vraie :</p> $0 \leq u_m \leq 1$ $0 \geq -u_m \geq -1$ $2 \geq 2 - u_m \geq 1$ $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2 - u_m} \leq 1$ $0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{m+1} \leq 1 \text{ donc } P_{m+1} \text{ est vraie}$	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>Pour tout entier naturel m, u_m appartient à $[0,1]$</p> <p>Non</p>
--	---

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p>$u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) > 0$ sur $] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$</p> <p>donc $u_{n+1} > 0$ pour $m=0$ $u_0 = 0 \leq u_1 = \frac{1}{2}$</p> <p>$u_n \leq u_{n+1}$</p> <p>$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$</p> <p>$u_{n+1} \leq u_{n+2}$</p> <p>donc u_n est croissante</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>oui, on regarde l'allure de la courbe</p>
--	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

<p>(u_n) est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite finie $l \leq 1$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p> <p>on voit sur la calculatrice que u_n converge vers 1</p>
---	---

- Élève G2-28 (Classe 2)

Partie B

Soit α un réel appartenant à $[0, 1]$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$, par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (même fonction définie dans la partie A).

B.1) À l'aide de la calculatrice, compléter les tables de valeurs ci-dessous pour les trois valeurs de α (à une précision à 10^{-4} près).

Cas $\alpha_1 = 0$	
u_0	0
u_1	$\frac{1}{2}$
u_2	$\frac{2}{3}$
u_3	$\frac{3}{4}$
u_4	$\frac{4}{5}$
u_5	$\frac{5}{6}$
u_6	$\frac{6}{7}$

Cas $\alpha_2 = 0,5$	
u_0	0,5
u_1	$\frac{2}{3}$
u_2	$\frac{3}{4}$
u_3	$\frac{4}{5}$
u_4	$\frac{5}{6}$
u_5	$\frac{6}{7}$
u_6	$\frac{7}{8}$

Cas $\alpha_3 = 0,9$	
u_0	0,9
u_1	10/11
u_2	11/12
u_3	12/13
u_4	13/14
u_5	14/15
u_6	15/16

B.2) Conjecturer les **variations**, la **convergence**, et l'éventuelle **limite** de la suite en observant les tableaux pour les trois valeurs de α de la question B.1.

<p>Cas $\alpha_1 = 0$: la suite semble croissante et semble posséder une limite = à 1.</p> <p>Cas $\alpha_2 = 0,5$: la suite semble croissante et semble posséder une limite = à 1.</p> <p>Cas $\alpha_3 = 0,9$: la suite semble croissante et semble posséder une limite = à 1.</p>	<p>Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?</p> <p>Création d'un tableau pour éviter de calculer le stade d'après.</p>
--	---

B.3) Peut-on conjecturer les **variations**, la **convergence** et l'éventuelle **limite** de (u_n) pour toutes les valeurs de α appartenant à $[0, 1]$?

<p>Il semble que pour toutes les valeurs de α nous obtiendrions la même chose que précédemment.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ?</p> <p>Si oui, comment ?</p>
---	--

Partie C

On continue l'étude de la suite (u_n) définie dans la partie B.

C.1) Montrer que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0,1]$.

$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$ <p>Pour $n = 0$: $u_1 = \frac{1}{2} \rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 1$ Donc P_0 est vraie.</p> <p>On suppose que P_n est vraie : "$0 < u_n < u_{n+1} < 1$"</p> $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ $0 > -u_n \text{ et } -u_{n+1} > -1$ $2 > 2-u_n > 2-u_{n+1} > 1$ $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{2-u_n} < \frac{1}{2-u_{n+1}} < 1$ $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ <p>Donc P_{n+1} est vraie et P_n est héréditaire. Pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n < 1$</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	--

C.2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

<p>Voir C.1</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
-----------------	--

C.3) Montrer que la suite (u_n) converge.

<p>la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc (u_n) est convergente vers une limite finie qui semble égale à 1.</p>	<p>Pourrait-on utiliser la calculatrice ? Si oui, comment ?</p>
--	--

TITRE :

L'apprentissage du calculus dans une tâche classique de la transition lycée-université

AUTEURS:

Macarena Flores González, Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier

RÉSUMÉ :

Nous avons choisi pour notre recherche une tâche classique de la fin du secondaire, qui fait également objet d'apprentissage au début de l'enseignement supérieur : l'étude d'une suite définie par récurrence de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction définie sur \mathbb{R} . Nous cherchons à caractériser les spécificités de l'apprentissage du calculus dans les deux institutions ainsi que ses continuités et ses ruptures, en étudiant ce type de tâches, les productions écrites des élèves lycéens et des étudiants universitaires. Les notions de suite et de fonction dans toute leur complexité (Montoya et al., 2018), sont au cœur de nos analyses. Comme cadre théorique nous articulons la Théorie de l'Activité développée en Didactique des Mathématiques (TADM - analyses locales des tâches et activités mathématiques des élèves, Vandebrouck 2018) avec la théorie complémentaire des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak et al., 2016)..

MOTS- CLÉS :

Travail mathématique, activités mathématiques, paradigmes de l'analyse, contrôle, suites récurrentes.

Éditeur: IREM de Paris

Responsable de la publication: C. Hache

IREM de Paris – Case 7018

Université de Paris

75205 Paris cedex 13

irem_de_paris@u-paris.fr

<https://irem.u-paris.fr/>

Dépôt légal : 2020

ISBN : 978-2-86612-396-3