Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif

Macarena Flores González, Alain Kuzniak, Assia Nechache, Laurent Vivier

▶ **To cite this version:**

Macarena Flores González, Alain Kuzniak, Assia Nechache, Laurent Vivier. Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif. IREM de Paris, 21, 2020, Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz., 978-2-86612-394-9. hal-03544660

HAL Id: hal-03544660
https://hal.science/hal-03544660

Submitted on 8 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz n°21

Juin 2020

REGARDS CROISÉS SUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE EN CONTEXTE ÉDUCATIF

Edité par

Macarena Flores González, Alain Kuzniak, Assia Nechache et Laurent Vivier

ISBN : 978-2-86612-394-9

ISSN : 2105-5203

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
UNIVERSITE PARIS DIDEROT

Imprimé par l'IREM de Paris – Université de Paris

Exemplaire **téléchargeable** sur notre site dans la section Publication
https://irem.u-paris.fr/

Coordonnées de l'IREM

Pour venir à l'IREM (il est possible de consulter et d'acheter les publications sur place):
Université de Paris, Bâtiment Sophie-Germain,
8 place Aurélie Nemours (sur l'avenue de France), huitième étage,
75013 Paris 13ème arrondissement
(métro 14 -Bibliothèque François Mitterrand ou tramway ligne T3a – Avenue de france)

Nous Contacter

Pour téléphoner: 01 57 27 91 93

Pour écrire à l'IREM concernant les publications:

par voie postale:
Locufier Nadine
IREM de Paris – Case 7018
Université Paris Diderot
75205 Paris cedex 13

par voie électronique:
nlocufier@irem.univ-paris-diderot.fr

La liste des publications de l'IREM est mise à jour sur notre site web :

https://irem.u-paris.fr// (en bas à gauche de la page d'accueil)

Pour rester informé:

inscription à la liste de diffusion de l'IREM de Paris également sur le site de l'IREM

Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif

Deuxièmes Journées d'Etudes sur le Travail Mathématique – JETM 2

Editeurs : Macarena Flores González, Alain Kuzniak, Assia Nechache et Laurent Vivier

Auteurs

Alain Kuzniak
Assia Nechache
Luis Radford
Fabrice Vandebrouck
Laurent Vivier
Philippe Hoppenot
Blandine Masselin
Macarena Flores González

Introduction générale

Ce cahier rend compte principalement des Deuxièmes Journées d'Etude sur le Travail Mathématique qui ont eu lieu les 21 et 22 octobre 2019. Cette rencontre, coordonnée par le groupe ETM du LDAR, réunissait des jeunes chercheurs et des chercheurs intéressés par la question du travail mathématique et par des échanges entre approches théoriques différentes. Les exposés et les ateliers qui ont eu lieu lors de ces journées, ont permis des discussions et des réflexions scientifiques sur des recherches récentes.

Lors de la première journée, nous avons mis en perspective la notion de travail mathématique à travers trois théories qui s'y intéressent : la Théorie de l'Objectivation (TO), la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TA-DM) et la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM). La deuxième journée a été consacrée à une présentation de différentes méthodes utilisées pour l'analyse du travail mathématique dans la théorie des ETM. Le détail de l'organisation de ces journées est donné en pages 113 et 114.

La première partie est introduite par Alain Kuzniak et Assia Nechache à partir de plusieurs questions qui cherchent à situer le travail mathématique dans les recherches en didactique des mathématiques liées aux trois théories mises en regard. Cette introduction est suivie par les exposés présentés par Luis Radford, Fabrice Vandebrouck et Laurent Vivier. Les auteurs se sont appliqués à présenter rapidement leur approche théorique et leur emploi de notions et notamment celles de travail mathématique, d'activité ou d'action. La deuxième partie de ce cahier est consacrée aux résumés des ateliers sur la méthodologie pour analyser le travail mathématique qui constituait le thème de la deuxième journée. Elle est enrichie par la présentation d'un atelier sur le travail mathématique personnel des élèves qui a eu lieu lors de l'école d'été de didactique des mathématiques de 2019. À partir des exemples précis issus de travaux récents s'appuyant sur la Théorie des ETM, nous présentons différentes méthodes d'analyse du travail mathématique des élèves mais aussi des enseignants. Dans le premier, Philippe Hoppenot et Laurent Vivier présentent des données pour analyser le travail mathématique d'élèves lors de la réalisation d'une tâche dans le domaine de l'analyse. Dans le deuxième, Blandine Masselin et Macarena Flores González présentent une méthodologie utilisée pour étudier le travail mathématique en classe (du point de vue de l'enseignant et d'un groupe d'élèves), sur une tâche issue du domaine des probabilités. Dans le dernier, Alain Kuzniak, Blandine Masselin, Assia Nechache et Laurent Vivier présentent une méthodologie pour analyser le travail mathématique de l'élève lors d'une tâche, dans le domaine de la géométrie.

En hommage à François Pluvinage,

homme merveilleux et infatigable chercheur

Table des matières

Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif.....7

Alain Kuzniak et Assia Nechache

Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation 19

Luis Radford

Théorie de l'Activité en didactique des mathématiques 43

Fabrice Vandebrouck

Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM .55

Laurent Vivier

Atelier 1 : la notion de tangente 71

Philippe Hoppenot et Laurent Vivier

Atelier 2 : Étude du travail idoine, le cas de la simulation en probabilité 85

Blandine Masselin et Macarena Flores González

Une méthode d'analyse du travail personnel des élèves en géométrie 103

Alain Kuzniak, Blandine Masselin, Assia Nechache et Laurent Vivier

Organisation des JETM2.....111

Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif

Alain Kuzniak[1] et Assia Nechache[2]

[1]Université de Paris, LDAR (EA 4434), France

[2]CY Cergy Paris Université, LDAR (EA 4434), France

L'analyse et le développement du travail mathématique en contexte éducatif sont au centre des préoccupations des chercheurs en didactique des mathématiques proches de la théorie des ETM. Ces études supposent nécessairement une réflexion sur la notion même de travail mathématique dans le cadre des ETM mais il est également intéressant de savoir si cet objet d'étude a un sens dans d'autres cadres théoriques. Par ailleurs, la définition du travail mathématique nécessite une prise en compte d'autres notions renvoyant à l'idée de travail et qui sont couramment utilisées en didactique des mathématiques comme action, activité, pratique, praxis, etc.

L'objet de cette thématique est de profiter d'éclairages croisés et complémentaires sur la notion de travail mathématique en didactique des mathématiques à partir de trois théories qui ont certainement des parentés profondes au-delà de leur présence dans le même laboratoire de recherche ou d'affinités personnelles. Luis Radford et Fabrice Vandebrouck présentent des éléments clés de leurs approches théoriques respectives, la théorie de l'objectivation (TO) et la théorie de l'activité en didactique des mathématique (TA-DM). Ils proposent aussi leur propre interprétation du travail en général et de la place des mathématiques dans le cadre de leurs approches théoriques respectives. De son côté, Laurent Vivier développe la portée et l'usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM.

Trois questions pour introduire le débat

En guise d'introduction aux trois conférences, nous avons proposé les trois questions suivantes relatives au Travail Mathématique dans l'institution scolaire.

> En adoptant une perspective didactique, quel sens attribuer au travail mathématique dans l'institution scolaire ?
>
> Quel sens retenir dans une perspective didactique pour des termes comme action, activité… ?
>
> Comment les notions de travail mathématique, d'activité et d'action interviennent elles dans nos recherches ?

Dans la suite, nous précisons ces questions et abordons un dernier point, en relation avec la troisième question, qui a fait l'objet de discussion pendant les journées à savoir :

> Quelles proximités et complémentarités entre les trois approches théoriques peut-on envisager ?

Introduction sur le travail et les mathématiques.

La notion de travail mathématique est centrale dans la théorie des ETM et naturellement rien ne garantit a priori cette même prééminence dans la TO et la TA. D'ailleurs, nous verrons que Luis Radford et Fabrice Vandebrouck préfèrent commencer par préciser leur définition et leur usage de la notion d'activité plutôt que de partir de l'idée de travail mathématique. C'est seulement dans un second temps qu'ils s'intéressent à la notion de travail d'ailleurs pas forcément connecté aux mathématiques. Comme le signale Vandebrouck, cela vient peut-être du fait que la théorie des ETM est une théorie prioritairement inscrite dans la didactique des mathématiques alors que la TA comme la TO ont une vocation plus générale : la TA n'est pas a priori une théorie didactique et il s'agit pour ses tenants de voir comment elle peut s'appliquer à une activité particulière comme celle de faire des mathématiques dans le cadre d'un apprentissage de cette discipline. De son côté, comme le précise Radford, la TO intègre pleinement la question de l'enseignement et de l'apprentissage, il est par contre moins net de voir la spécificité mathématique qui la guide.

Une fois ces préliminaires énoncés, engageons-nous dans un effort de clarification terminologique autour de l'idée de travail mathématique en étant conscient que cette question préoccupe, a priori, davantage la théorie des ETM et que l'approche que nous allons proposer privilégie notre regard sur cette notion.

Sur les mathématiques

La notion de travail mathématique doit être prise dans sa globalité syntaxique qui relie étroitement travail et mathématiques. Nous commençons notre discussion par la partie sans doute la plus facile, et en tout cas la moins politique, celle en relation avec l'épistémologie des mathématiques.

Comme dans nos présentations antérieures[1], nous nous référerons à l'approche de Thurston dans son article « On proof and progress in mathematics » (1994) qui sert d'appui à de nombreux travaux contemporains sur la nature et la fonction des mathématiques (Hacking 2014).

Pour Thurston, la difficulté à définir les mathématiques tient au caractère essentiellement récursif de l'activité mathématique et il propose ainsi de les considérer comme le plus petit sujet satisfaisant aux conditions suivantes :

- Les mathématiques incluent les nombres entiers et la géométrie du plan et des solides ;
- Les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient ;
- Les mathématiciens sont ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques.

L'intérêt premier de cette approche est de présenter les mathématiques comme le résultat d'une action humaine en constante évolution. Il ne sera possible d'accéder à ce travail qu'en le faisant et en y ajoutant sans cesse de nouvelles notions. Le parcours de l'élève ou de l'étudiant devra suivre cette

[1] Kuzniak, Tanguay et Elia (2016).

incertaine genèse d'une pensée qui se nourrit de chacune de ses expériences antérieures. Par chance, son chemin sera doublement balisé d'une part par le travail antérieur de tous les mathématiciens qui l'ont rendu praticable et compréhensible mais aussi par celui de ses enseignants qui vont en aménager les accès et l'aider à constituer son propre travail mathématique.

Sur le travail

Le philosophe Fuchs[2] (2016) attire notre attention sur la question du sens du mot travail dans différentes langues indo-européennes en soulignant la distinction qui existe en anglais entre *work* et *labor* et en allemand entre *Arbei*t et *Werk*. Il souligne le fait que tandis que la racine étymologique de termes tels que *work* ou *werken* est créer, agir, faire, celle des mots tels que *labor* et *Arbeit* est esclavage, peine et misère (Fuchs, 2016 p. 17). Cette distinction étymologique se retrouve également en français entre d'une part la noblesse du terme *ouvrer* associé à l'idée d'*oeuvre* (l'opus latin) et d'autre part le dur et pénible *labeur*. En français, l'origine du mot travail avec son sens actuel est controversée et ne renvoie pas aux mêmes racines indo-européennes. Le terme est plus récent et il s'est répandu à la fin du Moyen-Age en relation avec le christianisme, il est même pour certains lié aux premières formes du capitalisme naissant. Le mot travail semble posséder en français les deux significations recouvertes par *work* et *labor* et, par ailleurs, le mot *labeur* est aujourd'hui rarement utilisé en français, par exemple, l'équivalent du Labor Day est la fête du travail.

Fuchs, qui suit ici Marcuse, considère que le travail est une activité sociale qui transforme la nature humaine et sociale (la culture) de telle sorte que de nouvelles valeurs émergent pour satisfaire les besoins humains. Ces besoins ne sont pas uniquement basiques comme la nourriture mais ils concernent aussi la reproduction sociale par la communication, l'apprentissage et l'éducation. Il propose aussi de considérer trois dimensions du travail : le travail comme processus inscrit dans la durée, l'effort et une certaine permanence ; le résultat du travail qui pourra être vu comme une œuvre ; la finalité et les enjeux du travail qui seront précisément, dans notre cas, mathématiques.

Dans la suite, il nous semble essentiel de considérer dans le travail la différence entre aspect processus et aspect résultat. L'aspect processus est en relation avec la conformité avec des règles, des manières de faire et des manières de penser. L'aspect résultat renvoie à la correction de ce travail d'un point de vue plus mathématique.

Articuler travail et mathématique

Dans son ouvrage sur une philosophie du style, Granger (1963) est, à notre connaissance, un des premiers auteurs qui ait précisé une notion générale de travail scientifique et mathématique. Ce dernier est introduit de manière très abstraite comme la mise en correspondance d'une forme à un contenu. Les mathématiques sont au cœur de cette transformation qui passe par une mise en forme basée sur des règles et la communication entre pairs. Granger relie les résultats produits par le travail mathématique aux contenus et les processus aux structures et formes engendrées par ce travail.

[2] Philosophe marxiste anglais d'origine allemande.

L'abstraction du travail mathématique peut alors conduire à regarder ces formes et structures comme l'essence de ce travail. Le travail mathématique est ainsi une forme de travail intellectuel particulièrement marquée par la rationalité inhérente aux mathématiques.

Le travail mathématique que nous souhaitons définir et étudier se développe en contexte scolaire d'apprentissage. Ce développement s'appuie sur les interactions, plus ou moins riches, entre un professeur et des élèves et on peut le considérer de différentes façons dépendantes de choix théoriques et idéologiques sur l'apprentissage. Cependant, en nous plaçant dans ce que Brousseau (1997) désigne comme des contrats didactiques forts, nous pouvons supposer que le but des enseignants est de conduire leurs élèves vers un travail mathématique personnel le plus en adéquation possible avec le travail mathématique attendu par l'institution. Ce chemin progressif vers l'adéquation la plus grande possible est ce qui correspond dans la théorie des ETM à l'ETM *idoine* qui est mis en place par le professeur en synergie avec ses élèves.

Quel sens retenir dans une perspective didactique pour des termes comme action, activité… ?

Dans cette partie, la difficulté particulière que nous rencontrons est cette fois liée au fait que la notion d'activité est au cœur de la TO et de la TA-DM en symétrie avec l'importance du travail dans la ThETM. L'emploi du terme « activité » en ThETM n'est pas spécifique et il renvoie au sens commun du terme sur le fait d'agir. Son seul emploi particulier relève de l'enseignement où une *activité* désigne ce que le professeur peut proposer à ses élèves pour leur permettre d'agir. Pour être plus précis et, dans la lignée de la TSD, ce type d'activité pourra être conçue comme une situation didactique avec toutes les conséquences théoriques et pratiques que cela implique. Dans le cadre théorique des ETM, les questions portent plutôt sur le lien entre travail et activité. Pour la TO et la TA-DM, il en va différemment puisque cette fois la nécessité d'être le plus précis dans l'emploi du terme activité est cruciale pour un développement cohérent des deux théories. Dans la suite de cette présentation, il faudra garder à l'esprit cette différence initiale entre les trois théories.

Action et activité

Indépendamment de ce que nous venons de dire, une approche complète de tous les termes précédents avec leur fonction renvoie à des champs disciplinaires fort variés comme la philosophie, la psychologie, la sociologie et bien sûr la didactique en relation avec l'éducation. Dans un petit ouvrage publié en 2005, Bronckart propose une vision synthétique et relativement complète de tous ces aspects en relation avec notre questionnement. Tout d'abord, il introduit l'*agir* pour désigner (id. p. 81) « toute forme d'intervention orientée d'un ou plusieurs humains dans le monde ». L'*agir* peut constituer un travail dont la structure peut être décomposée en tâches, et temporellement, en une chaîne d'actes ou de gestes. Il conclut son ouvrage en proposant (p. 82) une articulation entre action et activité originale. Pour lui, l'activité désigne « une lecture de l'agir impliquant les dimensions motivationnelles et intentionnelles mobilisées au niveau collectif », et l'action correspond à « une lecture de l'agir impliquant les mêmes dimensions mobilisées au niveau des personnes singulières ».

Ainsi, pour Bronckart, l'activité renvoie au collectif, au social et l'action à l'individuel, les deux aspects étant articulés.

La proposition de Bronckart est intéressante mais elle ne résout pas un des problèmes majeurs que pose le terme « activité » dans le domaine de la didactique qui est son caractère général, polysémique et son emploi dans les contextes les plus variés. Luis Radford et Fabrice Vandebrouck proposent tous les deux une clarification terminologique sur « activité » en revenant à l'origine de l'emploi de ce terme dans les théories russes de l'activité, théories qui prennent elle-mêmes appui sur l'emploi par Marx et Engels du terme *activité* en relation avec le travail humain dans la société capitaliste. En allemand comme en russe, il existe deux mots pour rendre compte de la différence entre l'activité comme simple agir et occupation et l'activité comme source profonde d'enrichissement intellectuel et esthétique. Radford nous indique que le terme pour désigner le premier type d'activité est Aktivität (en allemand) et activnost' [активность] (en russe). Pour désigner le deuxième type d'activité, il existe Tätigkeit (en allemand) et deyatel'nost' [деятельность] (en russe)[3]. Ces termes (Radford) font référence à l'activité conçue comme un système dynamique axé sur la satisfaction des besoins collectifs. Ces deux sens sont recouverts en français (mais aussi en anglais et espagnol entre autres) par le seul terme activité qui tend à confondre les deux aspects.

Pour rendre compte de ces différences, Fabrice Vandebrouck propose un jeu subtil, et difficile à tenir avec constance[4], entre activité (avec un a minuscule) pour le premier sens et Activité (avec un A majuscule) pour le second. En se référant à Léontiev (1984), il reprend la distinction entre l'activité avec un motif et l'action avec un but de façon à distinguer activité et action. Il précise aussi que la théorie de l'activité dans la tradition de l'école française est une théorie du sujet agissant dans un but précis, éprouvant un besoin (motif ou mobile de l'activité). Il donne aussi un caractère individuel à l'action qui correspond alors aux actes extériorisés observables du sujet individualisé.

Retenir les termes allemands ou russe pour le seul second sens aurait une certaine logique mais Radford ouvre une autre voie pour permettre une traduction et à la suite d'un raisonnement, il peut conclure :

> Dans la TO, c'est donc « travail » le terme qui traduit en français le sens dialectique-matérialiste de la Tätigkeit pour désigner l'activité d'apprentissage. Il constitue la catégorie centrale de la TO et affirme le rôle ontologique et épistémologique fondamental de la matière, du corps, du mouvement, de l'action, du rythme, de la passion et de la sensation dans ce que c'est d'être humain.

Cependant, un des risques de l'usage du terme « travail » est qu'il peut induire une dépendance à l'idée d'aliénation. Or ce que souhaite Radford, c'est au contraire promouvoir dans la classe une

---

[3] Il faut noter que Tätigkeit et deyatel'nost' sont plus fréquents au singulier que Aktivität et activnost' alors que c'est le contraire au pluriel.

[4] Il ne s'agit pas ici d'une critique de l'approche proposée mais un simple constat de notre difficulté à entrer dans ce jeu.

forme de travail qui s'éloigne de l'enseignement classique avec un rapport professeur élève justement non aliénant, pour aller au-delà de cette forme il développe l'idée de *travail conjoint*.

Travail : tâche et activité

Pour Leplat (2004) qui cite Leontiev, d'un point de vue psychologique, « le travail est une activité », « une activité essentiellement humaine, originellement sociale, fondée sur la coopération d'individus laquelle suppose une division technique (…) des fonctions du travail ». Il ajoute ensuite que l'analyse du travail nécessite de distinguer mais aussi d'articuler : tâche et activité. Il précise que la tâche c'est le but à atteindre et les conditions dans lesquelles elle doit être réalisée tandis que l'activité c'est ce qui est mis en œuvre par le sujet pour exécuter la tâche. D'une certaine manière, la tâche pourra être reliée aux résultats du travail avec un but, qui « peut être défini par un ou plusieurs critères, qui permettront de définir la performance » (Leplat, p. 102). L'activité relève davantage des modalités et des processus mis en œuvre par un sujet pour réaliser le travail.

Dans la théorie des ETM, un lien similaire entre le travail et l'activité d'un sujet confronté à une tâche est établi et le travail est considéré comme un ensemble d'actions organisées et finalisées ce qui permet de retrouver la dualité du travail entre processus de travail et résultats ou produits du travail.

En TA-DM, l'activité permet le fonctionnement des connaissances et elle sera également en appui sur des tâches. Citant Rogalski (2008), Vandebrouck précise que la tâche est du côté de la situation et que l'activité est du côté du sujet.

Comment les notions de travail, d'activité et d'action interviennent elles dans nos recherches ?

Les théories mises en regard lors de cette journée sont toutes des théories à vocation didactique mais, comme le fait remarquer Vandebrouck à la fin de sa contribution, toutes n'entretiennent pas le même lien avec la didactique et avec les mathématiques. Du fait que nos recherches relèvent de la didactique des mathématiques, il convient de considérer l'usage des termes comme travail et activité en les mettant en regard de l'idée d'apprentissage et d'enseignement d'une discipline particulière qui a pour nom les mathématiques.

Cela passe par une réflexion sur la relation entre savoir et apprentissage et, ici, nous ne pouvons mieux faire que renvoyer à la présentation par Radford de cette question (ce cahier, p. 24 et 25). Après avoir identifié le savoir à un système de systèmes de pensée et d'action constitués culturellement et historiquement (ce cahier p. 25), il définit ce qu'il appelle l'*objectivation* comme une rencontre avec ces systèmes de pensée, les mathématiques étant l'un d'entre eux. Pour rendre cette idée plus opératoire, il ajoute :

> (…) l'objectivation est un processus social, corporel, matériel et symbolique de prise de conscience du savoir, c'est-à-dire, des formes historiquement et culturellement constituées d'action, d'expression et de pensée.

> Cette prise de conscience qui, dans la TO, sert à rendre compte de l'apprentissage n'est pas le résultat d'un processus propre à un individu ; c'est le résultat d'un processus *collectif* culturellement et historiquement situé qui, loin d'être contemplatif ou passif, demande l'*activation* des individus. À la place d'être un processus purement intellectuel, le processus d'objectivation est soutenu par le corps, l'affect, les émotions et le monde matériel.

Le *travail conjoint* permet alors à Radford de développer une approche éthique de l'apprentissage qui va bien au-delà des préoccupations usuelles de la didactique des mathématiques pour atteindre un idéal de développement humain et social.

> *Le travail conjoint.* C'est un travail où les uns et les autres s'affirment dans leur production et se réalisent comme humains dans ce qu'ils font. Il ne s'agit pas de l'éthique de l'obéissance. Il ne s'agit pas non plus de l'éthique constructiviste de la liberté et de l'autonomie de l'élève, mais de ce que nous avons appelé une *éthique communautaire*, définie par la responsabilité, la solidarité et le soin de l'autre. (Radford, ce cahier, p. 36)

Cette conception de l'apprentissage nous évoque une certaine éthique du *care* et de de la *sollicitude* que l'on peut aussi entrevoir dans la TA-DM qui s'intéresse particulièrement à la relation en situation de classe avec un rôle déterminant donné à l'enseignant. Celui-ci accompagne le développement de l'élève et il doit prendre idéalement *soin* des élèves à travers des remédiations, des proximités et un balisage des tâches (entre activités a minima et activités a maxima).

Redescendons par degré à des considérations sans doute plus prosaïques et moins ambitieuses sur l'enseignement et l'apprentissage en les reliant de manière plus contingente aux mathématiques.

Dans le cadre de la didactique des mathématiques, Vandebrouck juge nécessaire de repenser l'idée de la conceptualisation dans l'action (Vergnaud, 1996) pour spécifier son adaptation de la théorie de l'activité au contexte scolaire à l'apprentissage des mathématiques. Il lui apparaît aussi indispensable de spécifier les activités mathématiques aux situations scolaires car cette spécification n'est pas présente dans le cadre général de la théorie de l'activité. Pour cela il indique :

> Nous avons donc choisi de retravailler cette notion d'activités mathématiques des élèves (ou plus rapidement leurs activités) afin de développer une méthodologie d'identification des activités à partir des analyses contextualisées des tâches et des déroulements dans la classe.
>
> A nouveau, à titre personnel, je préfère donc l'idée que les activités mathématiques – des élèves - sont « ce qui pilote, et est piloté par, le niveau des actions des élèves et du professeur dans la classe », à partir des tâches mathématiques prescrites et des déroulements organisés (Robert, 1998 ; Vandebrouck, 2008).

Cela le conduit à préciser ses méthodes d'étude des activités mathématiques dans un cadre didactique qui s'intéresse à la fois aux actions des élèves et à celles des professeurs :

> Les activités mathématiques des élèves sont donc étudiées en relation avec les actions (et donc les activités) du professeur – discours, gestes... - et plus généralement tout le contexte de la situation (toutes les « médiations », interactions/rétroactions dans la classe). On utilise souvent du matériel

de vidéos tournées dans les classes (ordinaires). Sont mobilisés également dans la mesure du possible des entretiens des acteurs pour avoir accès à la composante personnelle de leur activité (élèves et professeurs), mais aussi pour avoir les éléments de contexte (place de la séance étudiée dans un scénario notamment...)

Dans la théorie des ETM, la centration sur le travail mathématique induit de fait une approche qui est liée à la typologie des tâches données (ou effectuées) en relation avec une typologie du travailleur sujet. Celui-ci pouvant être confronté à un rôle de tâcheron, de technicien ou d'ingénieur (voire de mathématicien) (Nechache, 2017) en fonction de ce qu'il rencontre. Là encore tâche et activité sont essentielles pour observer, développer voire transformer le travail mathématique. Ce travail dépend finalement des enseignants ou de la société qui déterminent un type de fonctionnement didactique particulier (constructiviste, transmissif, imitatif, conditionné, etc.). La relation entre les processus et les résultats du travail dépend fondamentalement de choix socio-économiques et aussi éthiques qui peuvent conduire à privilégier des formes de travail mathématique radicalement différentes.

La particularité du travail mathématique est d'être principalement un type de travail intellectuel qui suppose une activité cognitive importante et comme le souligne Leplat (2004), les activités cognitives étant inobservables, elles doivent être induites à partir d'actions observables. C'est pour cela que dans les ETM, l'observation des activités et actions en relation avec la tâche donnée aux élèves va également être essentielle. Comme le résument Kuzniak et Nechache (2020) pour préciser leur méthodologie :

> Dans notre recherche, l'analyse cognitive utilisée a pour objectif de reconstituer les principaux épisodes planifiés par l'étudiant pour réaliser la tâche qui lui a été prescrite. Chaque épisode correspond à une sous-tâche auto-prescrite par l'étudiant dans sa planification de la réalisation de la tâche. Le repérage des actions mathématiques qui constituent chaque épisode permet de les décrire.

Comme l'indique Vivier, les actions sont au centre des deux théories (ETM et TA-DM) et permettent d'identifier soit l'activité mathématique, soit le travail mathématique.

La relation entre les trois théories : Comment se complètent-elles ?

Du fait de l'organisation de ces journées par le groupe des ETM, les réflexions autour des échanges possibles entre les théories ont été concentrées sur la double relation TO-ThETM et ThETM-TDAM. Cependant, on peut souligner, comme le fait Radford, qu'il y a une convergence générale dans l'idée que la production des mathématiques et leur apprentissage reposent sur un agir, sur une activation des individus.

Des liens entre la TO et la ThETM

Radford s'interroge sur la place du contenu mathématiques derrière l'idée de travail conjoint. De manière plus précise, il estime que :

> Les deux théories (la TO et la ThETM) se tournent du côté du travail, l'une « in order to identify precisely the meaning of mathematics when it is considered through the idea of work » (Kuzniak et Vivier, 2019, p. 3073), l'autre pour comprendre l'apprentissage des mathématiques.

Il relie alors les deux théories en se posant la question du contenu spécifique (en l'occurrence, le contenu mathématique) dans le concept d'apprentissage et le concept de travail conjoint de la TO.

S'il est vrai qu'il y a une analyse épistémologique derrière les tâches mathématiques proposées aux élèves dans la TO, l'analyse épistémologique menée à l'intérieur de la Théorie des Espaces de Travail Mathématique apporte une profondeur et des nuances qui ne peuvent que jeter un éclairage important sur ce qu'un certain contenu culturel implique par rapport à son apprentissage.

Réciproquement, il estime que la TO permettrait d'ouvrir des pistes de recherches pour comprendre la communication et l'interaction qui entourent l'apprentissage des mathématiques dans la Théorie des Espaces de Travail Mathématique. La TO apporte un éclairage particulier par rapport à l'apprentissage et à sa nature culturelle, sociale et collective.

Des liens entre TA-DM et ThETM

Comme le souligne Vandebrouck, les ressemblances et les parentés entre les deux théories sont nombreuses et assurent cette sensibilité épistémologique dont parle Kidron (2016) et qui semble un préalable à tout échange réellement fructueux. Il pointe trois directions :

- Le centrage sur le fonctionnement d'une classe ordinaire en essayant d'être au plus près des conditions réelles d'enseignement et d'apprentissage.
- L'importance accordée aux aspects épistémologiques dans la tradition française de la didactique des mathématiques.
- La place tout aussi importante accordée à la dimension cognitive dans les processus d'apprentissage des mathématiques.

A chaque fois la structuration de ces points dans les deux théories diffère et passe par une organisation différente. Par exemple pour lui :

> Les activités mathématiques sont des processus cognitifs, intermédiaires entre les actions de élèves et l'apprentissage mathématique. Tandis que dans la modélisation proposée de l'ETM, le plan cognitif est en relation avec le plan épistémologique selon les trois dimensions sémiotique, instrumentale et discursive.

Les deux théories se retrouvent dans l'importance accordée aux tâches et aux actions nécessaires pour les mener à bien. Comme le signale Vivier :

> Les actions sont au centre des deux théories et permettent d'identifier soit l'activité mathématique, soit le travail mathématique.

Et Vandebrouck affirme que :

> Si le travail est décrit dans un ETM en termes d'activations, de genèses, de circulation, on ne peut statuer sur ces éléments qu'en analysant les activités des élèves comme intermédiaires entre les actions et les activations, les genèses, les circulations. Les genèses et les circulations sont des mises en relations entre le plan épistémologique et le plan cognitif. Elles embarquent donc non seulement des actions mais aussi des non actions, des choix.

Vivier reprend cette idée de l'importance des genèses pour comprendre la question de l'apprentissage :

> Mais je pense que les ETM permettent d'aborder plus finement la question de l'apprentissage. Il est en premier lieu assez naturel de penser aux genèses, puisque c'est à travers les genèses que la théorie prend en compte d'évolution des ETM personnels. Plus généralement, il me semble que les interactions entre les éléments de l'ETM jouent un rôle dans l'apprentissage.
>
> Et si l'on en revient aux genèses, il me semble qu'il y a un manque de compréhension de ce qu'elles sont. On les utilise dans les analyses, mais qu'est-ce qu'une genèse ? Je pense qu'un rapprochement entre la théorie des ETM et la TA-DM permettrait de mieux comprendre la nature des genèses, de mieux les définir.

Enfin, il reste la question de l'articulation entre les actions du professeur et l'évolution du travail mathématique (des activités mathématiques) de l'élève. Vandebrouck pose la question de l'intégration dans la ThETM des actions de l'enseignant qui peuvent influer sur les activités mathématiques (et donc le travail) des élèves. Et il pose cette question :

> N'est-ce pas au niveau de l'étude de l'ETM idoine (ou « partagé ») que les deux théories ont le plus à communiquer au final ?

En effet, la qualité et la finalité du travail sont fonctions des tâches qui vont dépendre des enseignants pour leur conception et aussi des élèves pour leur réalisation avec *in fine* des formes de travail différentes. Mais, dans un contexte scolaire d'apprentissage, les tâches ne vivent pas seules et nécessitent un intermédiaire, c'est le professeur qui pourra piloter non seulement l'autonomie mais aussi d'initiative laissée à l'élève dans un ETM idoine

C'est cette fois la place de l'« enseignement » et de la qualité du travail qui sont questionnées dans les deux théories et Laurent Vivier fait remarquer que « les deux théories s'intéressent à la richesse: des activités provoquées par l'enseignant et du travail mathématique ».

Pour conclure : une interrogation sur *mathematics education* vs didactique des mathématiques.

Donner une place essentielle à la notion de travail sous différentes formes – travail conjoint ou travail mathématique – force à réinterroger la finalité et les conditions d'exercice de ce travail. La forte dimension éthique que donne la TO ou la dimension identitaire que proposent les ETM avec l'idée du travailleur-sujet renvoient toutes les deux à des choix sociétaux. De ce point de vue, et pour

dépasser l'opposition un peu simpliste de la didactique comme focalisée sur le seul contenu et une *mathematics education* tournée uniquement vers l'éducation, on peut reprendre la suggestion de Luis Radford[5] d'une sorte d'expérience aux limites qui ne serait pas seulement une expérience de pensée et où nos équipes de recherche pourraient s'engager. Cette expérience pourrait être selon lui :

> l'étude conjointe de situations d'apprentissage des mathématiques dans un contexte culturel assez différent de ceux sur lesquelles nos recherches respectives se sont penchées jusqu'à maintenant. On serait obligé de sortir de notre quotidienneté et de travailler conjointement et s'appuyer l'un sur l'autre et vice-versa pour produire du sens et essayer d'aller plus loin.

Cette approche nous semble de plus en plus nécessaire et essentielle dans le monde profondément inégalitaire, fracturé et fragile que la crise sanitaire mondiale a contribué à révéler.

Références

Bronckart, J-P. (2005). *Une introduction aux théories de l'action*. Genève : Université de Genève.

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.

Fuchs, C. (2016). *Critical theory of communication: New Readings of Lukács, Adorno, Marcuse, Honneth and Habermas in the Age of the Internet*. London: University Press of Westminster.

Granger, G. G. (1963). *Essai d'une philosophie du style*. Paris : Armand Colin, (rééd. Odile Jacob 1987).

Hacking, I. (2014). *Why Is There Philosophy of Mathematics at All?* Cambridge: Cambridge University Press

Kidron, I. (2016). Epistemology and networking theories. Educational Studies in Mathematics, 91(2), 149–163.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2020). Développer un travai mathématique complet et conforme chez les étudiants de première année des master enseignement en France. *Revue de Mathématique pour l'école. (à paraître)*

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. ZDM, 48(6), 721-737.

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2019). An epistemological and philosophical perspective on the question of mathematical work in the mathematical working space theory. In U. Jankvist, M. van den

[5] Luis Radford se démarque du courant dominant des « *Mathematics Education qui se sont développées autour des perspectives empiristes centrées sur l'élève ; ce sont les courants comme le constructivisme américain et le constructionisme anglais qui ont développé la Mathematics Education. Il a fallu que j'explique qu'en fait la TO émerge contre ces courants empiristes individualistes* ». Communication personnelle.

Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), Proceedings of the eleventh congress of the European society for research in mathematics education (pp. 3070-3077). Utrecht: ERME.

Leplat, J. (2004). L'analyse psychologique du travail. Revue européenne de psychologie appliquée. 54, 101-108.

Leontiev, A. (1984). Activité Conscience Personnalité Moscou : Editions du Progrès (1ère édition, 1975, en russe).

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (22), 67-90.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement, pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. In F. Vandebrouck (Éd.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp 23-30 & pp 429-459). Toulouse : Octarès.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161–177.

Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017). *Activité mathématique des élèves avec les technologies numériques : vers une théorie didactique de l'activité (TDA).* Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz (n°17), IREM de Paris : Paris.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action la conceptualisation La théorie des champs conceptuels. In J-M. Barbier (Ed). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris, Presses Universitaires de France

Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation

Luis Radford

Université Laurentienne, Canada

À la mémoire de François Pluvinage

La théorie de l'objectivation (TO) s'intéresse particulièrement à l'apprentissage et aux manières de le promouvoir en salle de classe. En partant d'une conception de l'apprentissage comme processus collectif *et du fait que l'apprentissage a lieu à l'*intérieur d'une activité, *l'activité d'enseignement-apprentissage, la question qui se pose est celle de la nature générale et des spécificités de* l'activité où l'apprentissage a lieu*, spécificités qui le tournent tantôt en quelque chose d'ennuyeux, tantôt en quelque chose d'excitant. L'étude de la* nature *de l'activité d'enseignement–apprentissage et de ce qui peut la caractériser comme une activité collective, critique, conduisant à des apprentissages mathématiques profonds, constitue une partie centrale de cet article. Cette étude débouche sur l'articulation du concept de* travail conjoint *des élèves et du professeur lequel repose sur la pratique d'une éthique que nous appelons* communautaire*.*

Introduction

Le but de cet article est de discuter d'un concept central de la théorie de l'objectivation (TO) : le concept de travail conjoint. Ce concept est relié, de manière intime, à un problème qui est à la base de la TO, à savoir, le problème de l'apprentissage. En effet, la TO tente de reformuler le problème de l'apprentissage d'une manière différente de celle proposée au cours du 20e siècle par les courants pédagogiques dits « centrés sur l'élève » et dont la caractéristique la plus importante est de considérer l'apprentissage comme une affaire individuelle. Dans la TO, l'apprentissage est conceptualisé comme un processus collectif, enraciné dans le social, l'historique et le culturel. La TO s'inspire de la psychologie historico-culturelle de Lev Vygotsky (1997a, 1997b, 1998) et de la théorie de l'activité d'A. N. Leont'ev [ou Leontyev] (2005, 2009a, 2009b)[1]. Elle conçoit l'apprentissage comme un processus qui a lieu à l'intérieur d'une activité — l'activité d'enseignement–apprentissage. Comprendre l'apprentissage ne peut donc se faire qu'en considérant les spécificités de l'activité où celui-ci a lieu. En effet, comme le montre l'expérience quotidienne, l'apprentissage des mathématiques peut être quelque chose de très excitant et mener à des compréhensions profondes ; mais l'apprentissage peut aussi être quelque chose d'ennuyeux, de solitaire, de monotone, d'insipide et mener à des compréhensions superficielles et dépourvues de sens pour les élèves. Ce qui fait que l'apprentissage prenne une voie ou l'autre, c'est justement l'activité d'enseignement–apprentissage. Dans la TO, nous nous intéressons à comprendre ce qui peut faire de l'activité d'enseignement–

[1] Dans cet article, au lieu d'utiliser les translitérations « Vygotski » et « Léontiev » ou « Leontiev », communes en français et en espagnol, je vais utiliser la translitération anglaises « Vygotsky » et indistinctement « Leont'ev » et « Leontyev » pour garder les références en harmonie avec les textes référés.

apprentissage une expérience à la fois sensible et intellectuelle, critique et poétique, une activité qui mène à des compréhensions profondes des mathématiques tout en étant une aventure collective enrichissante socialement et culturellement, tant pour les élèves que pour le professeur. Comment donc concevoir une telle activité ? Quels éléments didactiques pourraient la caractériser de sorte qu'elle se présente comme une activité non aliénante, qui, tout en permettant une rencontre critique avec l'histoire et la culture, soit à la fois réalisation du soi et de l'autre ? Le travail conjoint des élèves et du professeur est la réponse qu'offre la TO à ces questions.

Cet article est organisé comme suit : dans la première partie, nous discutons des antécédents de la TO et de ce qui nous a amenés à essayer d'offrir une conception de l'apprentissage en tant que processus collectif. Or, au cours de notre démarche, il est tout de suite devenu apparent que l'élaboration d'une telle conception de l'apprentissage ne pouvait se faire sans repenser la nature du savoir. C'est justement ce problème ontologique qui va nous occuper dans la deuxième partie de l'article. Nous commencerons par explorer la conception qu'en offrent les perspectives constructivistes pour ensuite proposer une conception du savoir cohérente avec notre projet historico-culturel. Notre conception du savoir, qui s'appuie sur le matérialisme dialectique, devient une plateforme propédeutique à partir de laquelle nous pouvons entrer dans la problématique éducative de l'apprentissage en général et de l'apprentissage des mathématiques en particulier. Comme nous l'avons noté ci-dessus, dès qu'on rentre dans la problématique de l'apprentissage, la question centrale devient celle de l'activité où l'apprentissage a lieu. L'exploration de ce que c'est cette activité constitue le reste de l'article. Cette exploration débouche sur l'articulation du concept de travail conjoint et sur la mise en évidence d'une de ses caractéristiques les plus notables : le travail conjoint des élèves et du professeur passe par la pratique d'une éthique que nous appelons communautaire.

Les antécédents de la Théorie de l'Objectivation

Historiquement parlant, les premières traces de la TO remontent à une douzaine d'années (Radford, 2006, 2007, 2008). Comme c'est le cas de toute théorie, l'émergence de la TO n'est pas un phénomène isolé. Elle s'inscrit dans un mouvement d'opposition à une conception paradigmatique de l'humain qui trouve une élaboration explicite dans la philosophie de Kant et qui, au cours du 20e siècle, pense l'individu comme un être isolé de son contexte historico-culturel et finit par le prendre comme la source du savoir et l'origine du sens et de l'intentionnalité. Au 20e siècle, cette conception paradigmatique de l'humain a fini par offrir une conception individualiste de l'être (Martin, 2004 ; Mészáros, 2010) et de la réalité[2]. Les théories dites « constructivistes » constituent l'expression la plus achevée de cette conception paradigmatique[3].

---

[2] Pour le problème général de la réalité, voir Watzlawick (1988) ; pour un exemple précis – celui de la réalité dans les sciences de la santé – voir Levine et Fish (1999).

[3] Pour le cas de la psychologie cognitive, voir Gerstenmaier et Mandl (2001) ; pour le cas de l'enseignement des sciences, voir Lorsbach et Tobin (1992).

Les théories constructivistes ont eu aussi une influence considérable dans les recherches menées sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (voir, par exemple, le constructivisme radical de von Glasersfeld (1983, 1995), le constructivisme cognitif de Thomson (Thomson, 2014 ; Cobb et Thomson, 1998) et le socioconstructivisme de Cobb et collaborateurs (Cobb et Yackel, 1996). En s'inspirant de la psychologie génétique de Piaget (1970), elles ont formulé une conception de l'apprentissage de nature essentiellement individualiste : c'est l'élève qui, à travers son propre agir, construit ses propres connaissances. Cet agir peut, bien sûr, inclure un agir avec d'autres individus, mais ce qui est construit est, au fond, une construction personnelle.

Ces théories constructivistes ont provoqué l'apparition d'un mouvement d'opposition dont le but a été d'offrir une conception plus large de l'apprentissage, en donnant en particulier une place prépondérante à la dimension sociale et culturelle. Ce mouvement d'opposition « socioculturel » s'est fait sentir au cours des années 1980 et 1990 (voir Lerman, 1996a, 1996b), en particulier en prenant appui sur les travaux de Vygotsky. Bartolini Bussi (1991) et Bartolini Bussi et Mariotti (1999, 2008), par exemple, ont eu recours aux travaux de Vygotsky pour étudier le rôle de l'interaction et le rôle des artefacts culturels en classe ; elles ont attiré l'attention sur le problème de la médiation sémiotique. En suivant aussi une ligne de pensée vygotskienne, Arzarello et ses collaborateurs se sont également intéressés aux artefacts, et plus particulièrement aux signes mathématiques et à leur évolution (Arzarello, Bazzini, & Chiappini, 1994). Inspiré également par les travaux de Vygotsky (1987) et de la psychologie discursive (Harré & Gillet, 1994), Lerman (1996b) a étudié le rôle du langage dans la constitution de l'intersubjectivité. Boero, Pedemonte et Robotti (1997) ont étudié la conceptualisation des mathématiques émergentes des élèves comme un phénomène à la croisée de la phylogenèse et de l'ontogenèse par l'historicité de la parole.

Pour la TO, dès le départ, la question centrale était la recherche d'une nouvelle conception de l'apprentissage en mathématiques. Une telle recherche exigeait en même temps de repenser les objets ou contenus de l'apprentissage (c'est-à-dire, le savoir) et de repenser aussi l'élève et le professeur. Comme on le sait très bien, la théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 2002) offre une conception de l'apprentissage qui découle d'une de ses problématiques centrales : celle du rapport entre situations et connaissances. En suivant une voie piagétienne, dans la TSD les connaissances sont considérées comme des « adaptations » à une situation ; ces « adaptations » émanent de l'agir du sujet (Brousseau, 1997, p. 14). Étant donnée une situation,

> « Agir » consiste pour un sujet à choisir directement les états du milieu antagoniste en fonction de ses propres motivations. Si le milieu réagit avec une certaine régularité, le sujet peut être conduit à anticiper ces réactions et à en tenir compte dans ses propres actions. Les connaissances sont ce qui permet de produire et de changer ces « anticipations » (Brousseau, 1997, p. 6).

Dans ce contexte, l'apprentissage est décrit comme la transformation de la connaissance : « L'apprentissage est le processus par lequel les connaissances se modifient » (Brousseau, 1997, p. 6).

Qu'en est-il du sujet auquel on attribue un apprentissage ? Dans la TSD, le sujet est un sujet abstrait : « Le sujet de la situation didactique est une espèce de sujet théorique . . . un sujet épistémique » (Brousseau, 2005, pp. 23-24). Le sujet de la salle de classe, l'élève, reste au rang de la révélation – la révélation d'un rapport : « Pour moi, l'élève c'est le révélateur d'un rapport entre une situation et des connaissances, et, ce que gère le professeur, c'est ce rapport » (Brousseau, 2005, p. 24).

Pour la TO, il s'agissait d'arriver à élaborer une conception plus large de l'apprentissage que celle qui dérive de l'épistémologie piagétienne. Contrairement à l'agir piagétien, c'est-à-dire un agir essentiellement tourné du côté du rationnel, pour la TO, il s'agissait de comprendre l'« agir » des sujets selon les limites et les possibilités d'action telles que celles-ci s'offrent à ces sujets à l'intérieur de leur cadre social, politique, historique et culturel. Il s'agissait aussi de trouver une voie qui porterait sur une conception plus concrète du sujet, sans tomber dans le réductionnisme des courants psychologiques individualistes pour lesquels le sujet est réduit à un sujet cognitif (Valero, 2004) sans attaches à l'histoire et à la culture (Martin, 2004). Il s'agissait plutôt de reconceptualiser le sujet et l'apprentissage d'une manière qui serait cohérente avec une vision historico-culturelle de la vie. Bishop (1991) avait déjà posé les premiers jalons, avec son idée d'*enculturation*. Apprendre serait entrer dans une culture. L'idée vygotskienne d'*internalisation* semblait aussi suggérer des éléments de base pour l'élaboration d'un concept historico-culturel de l'apprentissage. Mais, en y regardant de plus près, ces concepts finissaient par donner peu de prise à ce qu'en anglais on appelle *agency*, c'est-à-dire la faculté d'agir de l'individu en tant qu'individu social concret. C'est notamment le cas du concept d'internalisation qui se veut un transfert de comportements sociaux allant de l'« extérieur » (le plan social) vers l'« intérieur » (le plan individuel) (Vygotsky, 1998, p. 170). Bien sûr, Vygotsky a insisté que ce transfert

> n'est pas du tout un transfert purement mécanique ; il ne se fait pas automatiquement . . . [il] constitue une étape spéciale dans le développement des formes supérieures du comportement. Des formes complexes de coopération transférées dans la sphère du comportement individuel commencent à fonctionner selon les lois du tout primitif [*primitive whole*], dont elles constituent maintenant une partie organique. (Vygotsky, 1999, p. 53)

Il demeure, toutefois, que le concept d'internalisation reste expliqué par des lois (les lois d'un « tout primitif ») qui n'ont pas à voir avec cette dimension de l'agir de l'individu qui, à notre point de vue, devrait être prise en compte dans une théorisation sur l'apprentissage. De plus, le concept d'internalisation reste encré dans cette dichotomie extérieur/intérieur (Veresov, 1999) que, pour nous, il convient de surmonter (voir Radford, 2018a).

En toute justice, il faut dire que le concept d'internalisation de Vygotsky n'a pas été élaboré pour répondre à la question éducative de l'apprentissage et de la manière dont celui-ci a lieu. Le concept d'internalisation est un construit psychologique et non pas un construit pédagogique. Son but est d'opérationnaliser ce transfert de l'extérieur à l'intérieur en accord avec ce que Vygotsky appelait les « lois génétiques du développement culturel » (Vygotsky, 1998, pp. 167-170). Leont'ev explique l'idée de base de ces lois dans son chapitre « On Vygotsky's creative development ». Leont'ev dit :

> Vers les années 1920, la position de leader de l'école française [de psychologie] est occupée par le grand érudit [Pierre] Janet . . . [qui] a proposé l'hypothèse que l'enfant dans le processus de développement intériorise les formes sociales de comportement qui ont d'abord été utilisées par les adultes à l'égard de l'enfant lui-même. . . Mais Janet, comme l'ensemble de l'école française, est partie de l'hypothèse que la personne est d'abord asociale, que la socialisation lui est imposée de l'extérieur. (Leont'ev, 1997, p. 21)

Vygotsky emprunte une voie différente. En premier lieu, il ne considère pas la socialisation comme un processus imposé de l'extérieur. En deuxième lieu, pour expliquer le transfert du social vers l'individuel, il ajoute un élément important qui manque dans l'approche de Janet : la dimension matérielle de la culture. Il finit ainsi par élaborer un concept sémiotique d'internalisation. Leont'ev continue son explication en disant que

> pour Vygotsky les déterminants du développement mental humain ne sont pas la maturation biologique en ontogenèse et l'adaptation biologique au cours de la lutte pour la vie en phylogénèse . . . mais le travail humain médiatisé par des instruments. (Leont'ev, 1997, p. 21)

C'est ainsi que Vygotsky pourra expliquer le développement mental en se servant de l'idée de « la médiation des processus mentaux par des outils » (Leont'ev, 1997, p. 21).

Bien sûr, le fait que le concept d'*internalisation* soit un construit psychologique et non pas pédagogique ne diminue en rien l'intérêt que ce construit peut avoir en éducation, en pédagogie et en didactique. Il peut aider à étudier la formation des concepts et la formation des fonctions psychiques supérieures d'un point de vue *psychologique* (à la manière de Gal'perin (1967, 1992), par exemple). Mais le rôle de ce construit n'est pas celui d'étudier l'apprentissage ou de concevoir des propositions didactiques. On est un peu dans la même situation que Piaget et son concept de schéma. C'est pourquoi il serait aussi vain de chercher chez Vygotsky des propositions didactiques précises, comme il serait vain de les chercher chez Piaget. Comme dit Vergnaud,

> Que l'on ne cherche pas dans Piaget les choses de la didactique, elles n'y sont pas : Piaget s'intéressait à des processus généraux de la pensée, son épistémologie génétique est une épistémologie relativement générale, mais son œuvre contient des avancées considérables, utiles à la didactique. (Vergnaud, 2005, p. 19)

Il en va de même pour Vygotsky, qui, « tout en étant un des apôtres de la théorie de l'activité à la Russe, à la Soviétique je dirais! ne développe pas l'étude des situations [d'apprentissage] et n'a donc sur ce point aucune théorie » (Vergnaud, 2005, p. 20).

La TO se veut non pas une théorie psychologique, mais une théorie éducative qui veut justement formuler la question de l'apprentissage à partir des travaux de l'école historico-culturelle de Vygotsky. En suivant les orientations de cette école, il s'agit d'élaborer une conception de l'apprentissage non pas comme phénomène individuel, mais collectif, ancré dans le social, l'historique et le culturel. Or, puisqu'apprendre c'est apprendre quelque chose, c'est-à-dire un certain contenu, il a fallu élucider d'abord ce contenu. Ce contenu n'est rien d'autre que le savoir culturel, le

savoir d'une culture à un moment donné. Pour mieux comprendre la conception que nous proposons du savoir et de l'apprentissage, arrêtons-nous un moment sur le constructivisme[4].

Savoir et apprentissage dans le constructivisme

Indépendamment de ses variantes, le constructivisme propose une définition courte, claire et opérationnelle du savoir et de l'apprentissage. Pour le constructivisme, l'individu construit son propre savoir. Cela veut dire que le professeur ne peut pas construire le savoir à la place de l'élève. La construction du savoir est une affaire individuelle : comme nous l'avons mentionné ci-dessus, elle est le résultat des actions du sujet. Apprentissage, construction conceptuelle et savoir sont, au fond, la même chose. Il y a plusieurs corollaires qui découlent de cette position théorique.

a) Un corollaire, de nature ontologique, concerne la *nature* du savoir. Celui-ci est *généré* par le sujet ; il est son *extension*. Puisque le savoir (Sa) demeure quelque chose qui est essentiellement de l'ordre du sujet (Su), on pourrait écrire ce corollaire comme une égalité : Sa = Su. On pourrait aussi écrire simplement le savoir ainsi : Sa_{Su}, ce qui voudrait dire que le savoir est toujours *relatif* au sujet qui le génère. Un autre sujet Su' aura un savoir différent, $Sa_{Su'}$. Une société composée d'un nombre *n* de sujets, aura *n* savoirs différents. Et il est absolument impossible de déterminer si deux sujets en interaction parlent de la même chose, car quand ils mentionnent le mot triangle ou le mot tangente, par exemple, on ne peut pas du tout savoir s'ils font référence au même objet conceptuel ou non (Thomson, 2014). Selon le constructivisme, pour que l'interaction ou la communication entre deux sujets puissent continuer, il faut que ces sujets fassent simplement semblant qu'ils parlent de la même chose. C'est ce que les constructivistes appellent « taken-as-shared », c'est-à-dire on *présume* que ce dont on parle est quelque chose de partagé (Cobb, Stephen, McClain, & Gravemeijer, 2001). Les philosophes ont un terme technique pour décrire cette position qui appartient au courant de l'idéalisme : le terme est solipsisme – doctrine d'après laquelle « il n'y aurait pour le sujet pensant d'autre réalité que lui-même » (Dictionnaire en ligne Le Grand Robert de la langue française, 2017).

Mais le corollaire ontologique comporte une autre équation : Sa = A. Savoir (Sa) et apprentissage (A) coïncident. On a appris ce savoir qu'on a soi-même construit.

Historiquement parlant, la conception du savoir que véhicule le constructivisme est en fait le résultat d'une longue transformation épistémologique qui a commencé à se mettre sur pied peu à peu à l'intérieur des grands changements historico-culturels dans les formes de production économiques à la fin du Moyen Âge (Arendt, 1958a ; Radford, 2012). Le savoir n'y est plus vu comme une question de *révélation*, de *déchiffrement* ou de *foi* comme cela fut le cas à l'époque féodale (Gilson, 1939).

---

[4] Le dialogue continuel de la TO avec le constructivisme en général, avec la TSD (Brousseau, 2002), avec la commognition (Sfard, 2008) et, plus récemment, avec l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, Tanguay et Elia, 2016) n'a pas pour but de créer des polarités. Il s'agit d'un effort pour mieux comprendre notre propre théorie. Vygotsky disait que « Through others, we become ourselves » (1998, p. 170). Il en va de même des théories. C'est par l'entremise d'un dialogue avec d'autres théories que les théories se forgent une identité.

Dans le nouvel ordre épistémologique de la modernité, savoir quelque chose revient à rendre compte de la manière dont la chose est produite. Hanna Arendt dit,

> It has frequently been asserted that modem science was born when attention shifted from the search after the "What" to the investigation of "How." This shift of emphasis is almost a matter of course if one assumes that man (sic) can only know what he has made himself, insofar as this assumption in turn implies that I "know" a thing whenever I understand how it has come into being. (Arendt, 1958b, p. 585)

Nous trouvons cette conception clairement articulée dans le texte de 1667 de Baruch Spinoza, *De Intellectus Emendatione*. Spinoza dit qu'une idée vraie « montre comment et pourquoi quelque chose est ou a été fait » (Spinoza, 1989, p. 29). Sans cette transformation épistémologique qui fait bousculer les pôles de l'axe sujet–objet, transformation elle-même enracinée dans les nouvelles formes de productions économiques de l'époque, c'est-à-dire le capitalisme artisanal, le sujet *produit* l'objet ; savoir devient synonyme d'être en mesure de rendre compte du processus de sa production. C'est justement cette idée qu'on retrouvera plus tard chez Piaget : « On ne connait, en effet un objet qu'en agissant sur lui et en le transformant » (Piaget, 1970, p. 85). On agit sur l'objet par une suite d'actions du sujet. Et il explique : « L'important pour la connaissance n'est pas la suite de telles actions considérées isolément : c'est le schème de ces actions » (p. 86). Bref, on connaît un objet quand il y a un schéma d'actions qui lui correspond.

b) Un corollaire, de nature pédagogique, qui découle de la position constructiviste concerne le professeur. Le professeur ne peut qu'*accompagner* l'élève dans ses propres cogitations cognitives. Et cet accompagnement est lourd de conséquences, car entre le professeur et l'élève il y aura toujours une séparation, une ligne invisible, mais insurmontable, qui est le signe de cet espace personnel, inaliénable, qui garantit à l'élève la pleine jouissance de sa liberté et de son autonomie — deux éléments clés qui remontent à la pédagogie romantique humaniste du siècle des Lumières et descendent le long d'une côte qui va de Rousseau, à Pestalozzi jusqu'à Piaget. Traverser cette ligne invisible qui sépare l'élève du professeur reviendrait à priver l'élève de ses droits. Car le savoir et sa production sont vus ici à travers la logique de la *propriété privée.* Le savoir y apparaît, effectivement, comme une entité subjective, *appartenant* à l'individu et issue du travail de celui-ci. Traverser cette ligne invisible pourrait ainsi conduire le professeur à imposer, peut-être subrepticement et sans le vouloir, des sens et des conceptualisations qui ne sont pas ceux de l'élève (voir les paradoxes de l'enseignement identifiés par Brousseau (2002)).

Savoir et apprentissage dans la Théorie de l'Objectivation

Dans la TO, le savoir est considéré comme un système de systèmes : systèmes de pensée et d'action constitués culturellement et historiquement. À notre naissance, ces systèmes (toujours en mouvement, toujours changeants) existaient déjà dans notre culture — sous la forme de savoir planter des semences de maïs, de savoir calculer des hypothèques, etc. En d'autres termes, à la naissance, pour chacun d'entre nous, le savoir est apparu comme une *capacité générative* historico-culturelle. C'est-à-dire une *capacité latente* (qu'Aristote appelait potentialité, *δύναμις,* dunamis) ; une capacité à faire

des choses et à penser de certaines manières — une capacité latente que nous pouvons (ou non) rencontrer au cours de notre vie selon les réseaux culturels, historiques et politiques d'accès au savoir qui sont omniprésents dans notre société. Notre rencontre avec des systèmes de pensée culturellement et historiquement constitués (par exemple, mathématiques, scientifiques, esthétiques, juridiques, etc.) est ce que, dans la TO, on appelle l'objectivation.

Pour comprendre le sens de cette rencontre, gardons à l'esprit que le substantif « objectivation » tente de transmettre l'idée qu'avant notre rencontre avec le savoir, celui-ci se présente comme quelque chose de *différent* de nous : quelque chose qui, dans son *altérité*, nous oppose à sa propre présence. C'est-à-dire que de par sa présence, le savoir nous résiste ou nous objecte. Si dans l'idéalisme constructiviste l'équation était Sa = Su, dans la TO l'équation est Sa ≠ Su. Avant notre rencontre avec le savoir, le savoir est le signe d'une *différence*. L'objectivation est la tentative d'effacer cette différence. Mais parce que le savoir est une forme *idéale* (générale, potentielle) en constante évolution, constamment recréée, affinée et élargie (Hegel, 1991), la différence que notre rencontre avec le savoir tente d'effacer n'est pas quelque chose qui peut disparaître totalement. Il y a toujours un *résidu* qui reste au-delà de nos rencontres toujours locales, situées et concrètes avec le savoir. On ne rencontre totalement l'idéalité « tangente ». On la rencontre toujours partiellement, dans un contexte spécifique par l'entremise d'un problème particulier. Ce qui *apparaît* dans la rencontre (par exemple, la manière de penser la tangente) est toujours *moins* que la forme idéale. Mais en même temps, ce qui apparaît dans la rencontre est *plus* que la forme idéale. Car ce qui apparaît a une *spécificité* que la forme idéale, comme telle, ne peut pas avoir. Ce qui apparaît *dépasse* la forme idéale. Il en résulte que ce qui apparaît est toujours *déficit* et *surplus* par rapport à son idéalité et que l'idéalité est toujours plus et moins que ce qui la matérialise ou l'incarne. En conséquence, l'objectivation est toujours partielle, une tentative interminable de saisir le savoir — de devenir conscient de celui-ci. Dès qu'on essaie de le rencontrer, le savoir bouge, se déplace ; il n'est plus là, mais ailleurs.

En termes plus techniques et opérationnels, l'objectivation est un processus social, corporel, matériel et symbolique de prise de conscience du savoir, c'est-à-dire, des formes historiquement et culturellement constituées d'action, d'expression et de pensée. Cette prise de conscience qui, dans la TO, sert à rendre compte de l'apprentissage n'est pas le résultat d'un processus propre à un individu ; c'est le résultat d'un processus *collectif* culturellement et historiquement situé qui, loin d'être contemplatif ou passif, demande l'*activation* des individus. À la place d'être un processus purement intellectuel, le processus d'objectivation est soutenu par le corps, l'affect, les émotions et le monde matériel. Ce processus a lieu à l'intérieur d'une *activité*. Or, de quelle activité s'agit-il ?

L'activité humaine

La question à laquelle nous devons essayer de répondre dans cette section est celle de la nature de l'activité à travers laquelle les élèves rencontrent le savoir culturel. Évidemment, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, cette rencontre peut être quelque chose d'excitant. Mais cela peut être aussi quelque chose d'ennuyeux, ce qui arrive souvent dans l'enseignement traditionnel. En effet,

dans le cadre de l'enseignement traditionnel, il y a des processus d'objectivation, car il y a une rencontre avec un savoir culturel, mais cette rencontre et les processus d'objectivation qui y ont lieu sont très pauvres. Les prises de conscience qui en résultent sont très superficielles, ce qui mène à des apprentissages peu significatifs. Les activités d'apprentissage de l'enseignement traditionnel réduisent l'élève à l'imitation et à l'obéissance. Dans la théorie de l'objectivation, nous visons à produire des activités d'enseignement et d'apprentissage riches du point de vue du savoir étudié, mais aussi riches du point de vue des transformations possibles des sujets impliqués dans l'activité. Dans les activités que nous promouvons en salle de classe, nous visons à ce que l'objectivation apparaisse comme un processus critique, poétique, sensible et sensuel de rencontre avec les mathématiques. Il s'agit pour nous de promouvoir les conditions pour qu'il y ait une rencontre progressive, incarnée, discursive, subversive, affective, symbolique et matérielle avec le savoir culturel (Radford, 2019a).

Nous arrivons ici à un problème qui est à la fois terminologique et conceptuel : comment *appeler* ce deuxième type d'*activité* où la rencontre avec les savoirs culturels est une expérience collective et enrichissante tant du point de vue intellectuel qu'esthétique ? Comment l'appeler afin de la distinguer d'autres types de rencontres (comme celui qu'offre l'enseignement traditionnel, qui la réduit à une expérience d'obéissance passive du côté de l'apprenant) ? Les langues russes et allemandes ont des termes différents pour distinguer deux types d'activités. Le terme pour distinguer le premier type d'activité est *Aktivität* (en allemand) et *activnost'* [активность] (en russe). Ces termes font référence à l'activité dans le sens d'être simplement occupé par quelque chose (Roth et Radford, 2011). Par contre, le terme *Tätigkei*t (en allemand) et le terme deyatel'nost' [деятельность] (en russe) font référence à l'activité conçue comme un système dynamique axé sur la satisfaction des besoins collectifs. Donc, quand on dit *Aktivitä*t et quand on dit *Tätigkeit*, on ne parle pas de la même chose. Pourtant, dans beaucoup de langues (par exemple, le français, l'espagnol, l'anglais et le portugais), tant Tätigkeit qu'Aktivität sont traduits en un seul mot : *activité,* ce qui amène à confondre les choses.

L'activité humaine au sens du *Tätigkeit* a une portée très profonde dans la manière de concevoir ce qui se passe en salle de classe. *Tätigkeit* ne signifie pas simplement une série d'actions qu'effectue un élève ou un individu; elle ne signifie pas non plus une coordination d'actions (aussi complexe soit elle) d'un groupe d'individus. *Tätigkeit* va, de manière décisive, au-delà de la dimension purement technique du faire ; elle a une portée ontologique. En effet, comme le note Marx dans l'Idéologie Allemande, il ne s'agit pas simplement d'agir et produire « sous le seul aspect de la reproduction de l'existence physique des individus » (Marx, 1982, p. 1055). L'agir des individus dans l'activité (*Tätigkeit*) comporte déjà un mode social, culturel et historique de production à travers lequel, dans leurs actions avec d'autres, ces individus se *produisent eux-mêmes comme sujets humains* :

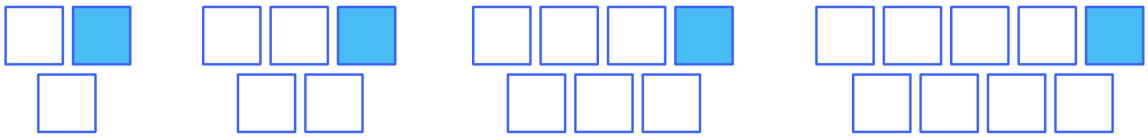
> Il s'agit déjà, chez ces individus, d'un genre d'activité [Tätigkeit] déterminé, d'une manière déterminée de manifester leur vie, d'un certain *mode de vie* de ces mêmes individus. Ainsi les individus manifestent-ils leur vie, ainsi sont-ils. Ce qu'ils sont coïncide donc avec leur production, avec ce qu'ils produisent aussi bien qu'avec la façon dont ils la produisent. (1982, p. 1055 ; cursives dans l'original)

C'est encore dans le sens d'activité comme Tätigkeit que Marx utilise le terme dans les *Thèses sur Feuerbach* (un philosophe matérialiste contemporain de Marx). Par exemple, dans un passage de la première thèse, Marx dit : « Feuerbach will sinnliche - von den Gedankenobjekten wirklich unterschiedene Objekte : aber er fasst die menschliche **Tätigkeit** selbst nicht als gegenständliche **Tätigkeit** » (Marx, cité dans Macherey, 2008, p. 39-40 ; c'est moi qui surligne). Le philosophe français Pierre Macherey traduit ce passage ainsi : « Feuerbach veut des objets sensibles effectivement distincts des objets de pensée : mais l'**activité** humaine elle-même, il ne l'appréhende pas en tant qu'**activité** objective » (Macherey, 2008, p. 40 ; c'est moi qui surligne).

Marx, on le voit, parle de Tätigkeit et non pas d'Aktivität. Et la différence ne serait pas importante si les concepts auxquels ces mots renvoient n'avaient pas de répercussions sur la manière de comprendre l'activité d'apprentissage en salle de classe. Tournons-nous vers un exemple pour illustrer cette idée.

Exemple

L'exemple en question provient d'une classe de 2e année (élèves de 7-8 ans) qui commencent à étudier la généralisation des suites dans un contexte d'introduction à l'algèbre. La classe a été divisée en petits groupes de 2 ou 3 élèves. Les élèves devaient prolonger une suite (voir Figure 1) dont les quatre premiers termes étaient donnés, en dessinant les termes suivants jusqu'au Terme 6. Les élèves devaient aussi étudier le Terme 8 de la suite.



Terme 1 Terme 2 Terme 3 Terme 4

Figure 1 : Les premiers termes d'une suite explorée par les élèves.

Arrêtons-nous sur le travail effectué par un des groupes. Dans ce groupe de trois élèves, l'attention a été dirigée vers la numérosité. De manière implicite, les élèves ont dégagé une relation de récurrence d'après laquelle, pour passer d'un terme au suivant, il faut ajouter deux petits carrés ($T_{n+1}=T_n+2$). Ainsi, un des élèves a dessiné les Termes 5 et 6 tels qu'ils sont montrés dans la Figure 2.

Figure 2 : Les Termes 5 et 6 tels que dessinés par un élève de 2e année.

Toutefois, le projet didactique de l'enseignante comprenait l'idée de se servir des informations *spatiales* contenues dans la *forme* des quatre premiers termes de la séquence afin de se rendre compte qu'on peut percevoir ces termes comme étant formés de « parties notables ». Le comptage des parties notables repose sur l'identification de *variables* convenables et de leur mise en corrélation.

Évidemment, il y a plusieurs manières de percevoir les termes. On peut les voir comme étant formés de petits paquets en « diagonale » de *deux* carrés chacun, qui, quelques années plus tard, quand les élèves rencontreront l'écriture symbolique de l'algèbre, correspondra au coefficient « 2 » de la formule $T_n=2n+1$) avec un terme extra (le carré foncé, qui, lui, correspondra au terme constant « 1 »). On peut aussi voir ces termes comme étant formés de *deux* rangées horizontales, etc. L'enseignante, est allée voir le travail du groupe après plus d'une demi-heure que les enfants travaillaient sur ces questions et d'autres questions sur la séquence ; elle a invité les enfants à compter, avec elle, le nombre de petits carrés dans chaque terme. Elle a opté par la stratégie qui consiste à voir les termes comme étant formés de deux rangées horizontales. Elle a dit :

1. Enseignante : Nous allons simplement regarder les carrés qui se trouvent en bas (*tout en disant cela, l'enseignante fait trois gestes glissants consécutifs, chacun allant de la rangée du bas du premier terme à la rangée du bas du quatrième terme (voir Figure 3a)*). Seulement ceux du bas. Pas ceux qui sont en haut. Terme 1 (*elle pointe avec deux doigts la rangée inférieure du terme 1*), combien y a-t-il de [carrés] ?
2. Élèves : 1 !
3. Enseignant : (*Elle pointe avec un geste indexical le Terme 2*) Terme 2 ?
4. Élèves : 2 ! (*Jacques, un des élèves, montre la rangée inférieure du terme 2 ; voir Figure 3b*).
5. *Enseignant* : (*Elle pointe avec un geste indexical à deux doigts le Terme 3 ; voir Figure 3c*) Terme 3 ?
6. Élèves : 3 !
7. Enseignant : (*Elle pointe avec un geste indexical à deux doigts le Terme 4*) Terme 4 ?
8. Élèves : 4 !

L'enseignant et les élèves continuent d'explorer rythmiquement la rangée inférieure des termes 2, 3 et 4, et aussi, par des gestes et des mots, les termes 5, 6, 7 et 8, qui ne sont pas perceptibles. Dans la Figure 3d, on voit le geste indexical de l'enseignante qui montre le Terme 5 de la suite où ce terme devrait hypothétiquement se situer (pour une analyse détaillée de ce passage, voir Radford (2013a)).

De cette manière, l'enseignante et les élèves dégagent, collectivement, une première relation, que nous pouvons écrire comme $x \rightarrow x$: le terme x a x carrés dans la rangée du bas. Puis, l'enseignante et les élèves se tournent vers la rangée du haut et, collectivement, en suivant un déploiement rythmique similaire de ressources sémiotiques, discursives et perceptuelles, dégagent la deuxième relation : $x \rightarrow x+1$: le terme x a $x+1$ carrés dans la rangée du haut.

Comme notre enregistrement vidéo le montre, percevoir les termes comme étant constitués de deux rangées horizontales pour organiser et simplifier le comptage et ensuite généraliser cette perception des figures aux termes perceptuellement inaccessibles (comme les Termes, 5, 6, 7 et 8) est un défi de taille.

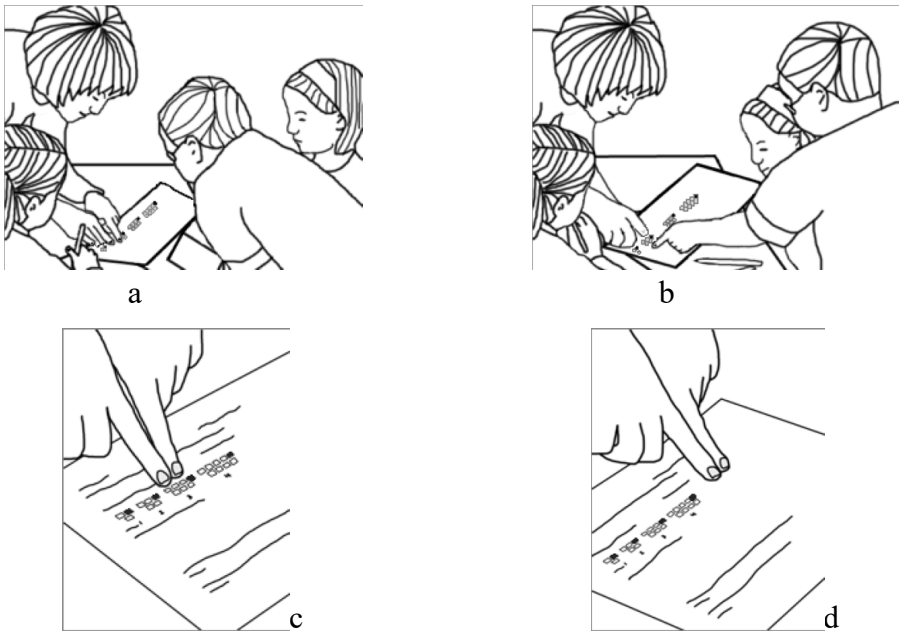


Figure 3 : Collectivement, l'enseignante et les élèves explorent les termes de la séquence.

Ce court extrait nous offre un exemple d'un processus d'objectivation, c'est-à-dire un processus collectif, sensuel, sensible et matériel à travers lequel a lieu, progressivement, une prise de conscience d'une forme culturellement et historiquement constituée de voir et de penser les suites et qu'on trouve déjà, historiquement parlant, à la fin de l'Antiquité, dans l'œuvre de Diophante (Radford, 2001). Ce qui se dévoile à la conscience est cette manière mathématique de voir et de percevoir les figures en termes de *variables* et leur *relation* — une *co-variation* qui porte sur le nombre de chaque terme et le nombre de carrés dans les rangées du bas et du haut de ce terme. Ce processus d'objectivation repose sur une coordination collective de gestes, de mots, d'actions perceptives, de dessins et de rythme. Plutôt que redondants, les trois gestes que fait l'enseignante et qui se répètent l'un après l'autre en même temps qu'elle dit « On va juste regarder les carrés qui sont en bas » viennent ajouter un sens visuel à ce que les mots disent. Bien sûr, rien ne garantit au départ que ce dans quoi s'embarquent l'enseignante et les élèves va fonctionner. Mais ces gestes, dans toute leur dimension physique et kinesthésique, ainsi que les mots dits tant dans leur sens abstrait que dans l'émotion qu'ils véhiculent et que nous reconnaissons à l'intonation et à d'autres mécanismes prosodiques comme l'accent et le ton, sont aussi, et avant tout, une invitation aux élèves à explorer ensemble la suite d'une *autre* manière. Ils sont une invitation à une rencontre — une rencontre avec l'inconnu, avec ce que, jusqu'au matin de ce jour, les élèves n'avaient pas encore rencontré : une manière algébrique de penser les suites.

Or, ce processus d'objectivation ne va pas de soi. Il dépend de l'*activité* à l'intérieur de laquelle il a lieu. Il s'agit d'une activité que l'enseignante et les élèves mettent en œuvre *ensemble*. C'est une activité au sens de la *Tätigkeit* et non pas au sens de l'*Aktivität*. En effet, pour les élèves, il ne s'agit pas simplement d'être occupé à faire quelque chose. Il ne s'agit pas non plus d'une simplement coordination d'actions ou de la création d'une manière idiosyncratique de résoudre les problèmes que

pose la suite donnée aux élèves. L'activité que l'enseignante et les élèves mettent en œuvre ensemble est caractérisée par la poursuite d'un objet —l'objet de l'activité. C'est cet objet qui anime ou motive l'agir de l'enseignante et les élèves (Leont'ev, 2005, 2009a, 2009b). Or, de quel objet s'agit-il ? Il s'agit d'un objet historico-culturel, d'un objet idéel, d'un savoir, qui se dévoile à la conscience des élèves au cours de l'activité. La rencontre de cet objet est l'entrée dans un dialogue avec l'humanité. C'est rencontrer ce savoir culturel et le reconnaître dans ce qu'il est : le savoir en soi, dans la terminologie de Hegel (2009), savoir qui, au cours du processus d'objectivation, devient un savoir pour soi. Ce qui distingue la *Tätigkeit* de l'*Aktivität* c'est cette orientation qui lui imprime la recherche de l'objet historico-culturel. C'est pour cela que, dans le matérialisme dialectique, on parle d'*object-oriented activity — activité orientée objectuellement* ou, plus simplement, *activité objective*. Justement, la critique que fait Marx à Feuerbach dans le passage cité ci-dessus est que Feuerbach ne conçoit pas l'activité du sujet comme activité objective : « l'activité humaine elle-même, il [Feuerbach] ne l'appréhende pas en tant qu'activité objective » (Macherey, 2008, p. 40). C'est-à-dire, il ne l'appréhende pas en tant qu'activité qui porte sur des objets historico-culturels qui transcendent le sujet *qua* sujet. Feuerbach la limite à un agir subjectif.

Mais comment pourrions-nous traduire *Tätigkeit* en français, si le terme « activité » ne semble pas assez catégorique ? « Activité objective » semble être une solution, mais l'adjectif peut porter à des malentendus (en particulier, il peut conduire à penser, à tort, que l'activité est en rapport avec une prétendue *vérité* indépendante des individus, idée justement que les *Thèses sur Feuerbach*, et en particulier la deuxième thèse, vont réfuter).

À la recherche d'un nom

Une question qui émerge ici est la suivante : on a dit que la *Tätigkeit* se distingue de l'*Aktivität* en ce que la *Tätigkeit*, à la différence de l'*Aktivität*, se présente comme un système dynamique axé sur la satisfaction des besoins collectifs. Ces besoins collectifs sont cristallisés dans l'objet de l'activité qui imprime une orientation à l'activité elle-même. Or, dans le cas de l'apprentissage, au départ, l'objet de l'activité échappe aux élèves. Dans l'exemple discuté ci-dessus, l'objet de l'activité était cette manière historico-culturelle algébrique de percevoir et de penser les suites. Comment les élèves peuvent-ils orienter leurs actions alors qu'ils ignorent ce qu'ils cherchent ? Comment les élèves peuvent-ils se lancer à la recherche de cet objet, s'il leur est précisément inconnu ? Dans les activités d'apprentissage, l'objet cherché n'est pas le point de départ. Il se dévoile à la conscience comme *résultat* de l'activité. Qu'est-ce qui fait donc que l'élève s'active ?

Poser le problème en termes du seul objet de l'activité serait nous enfermer encore une fois dans la vue rationaliste qu'on a souvent adoptée pour penser l'enfant. En fait, il faut penser l'activité d'apprentissage à l'école dans le contexte général de socialisation que celle-ci accomplit. Mais voir l'enfant comme simplement réagissant aux contraintes d'obligation qu'on lui impose serait une démarche réductrice également. Leontyev remarque que

> L'essentiel n'est pas, bien sûr, que le jeune élève soit en général obligé de faire quelque chose ; il avait des devoirs avant même d'entrer à l'école. L'essentiel est qu'il n'y a plus seulement des

> devoirs envers les parents et les enseignants, mais des obligations objectives envers la société. Ce sont des devoirs dont dépend l'accomplissement de sa place dans la vie, de sa fonction et de son rôle social, et donc aussi le contenu de toute sa vie ultérieure. (Leontyev, 2009a, pp. 326-327; traduction libre)

Bref, la participation des élèves à l'activité est motivée par d'autres choses que l'objet de l'activité. On ne saurait assez surligner l'importance de cet objet; mais pour les raisons auxquelles Leontyev lui-même allude, on ne peut pas réduire l'activité à son seul objet, car l'activité objective (object-oriented activity) ouvre aussi des espaces pour que les élèves puissent s'y positionner socialement et culturellement. Ce positionnement est ce qui permet à l'élève de se montrer et de s'affirmer en tant que subjectivité.

Une fois cette question de l'objet la *Tätigkeit* clarifiée, revenons sur sa rencontre en salle de classe. Nous avons dit ci-dessus que le savoir apparaît du côté de l'élève comme la rencontre avec une potentialité. Cette potentialité n'est pas saisissable en soi. Dans toute sa généralité, elle ne peut pas être appréhendée. C'est ce que mon exemple ci-dessus de la tangente veut dire (exemple que j'emprunte d'ailleurs à Laurent Vivier (2019)). Et c'est ce que notre exemple de la suite ci-dessus montre également au sujet du savoir algébrique. Pour être appréhendée par la conscience, il faut que la potentialité prenne *forme*, qu'elle se *matérialise*. Pour que le savoir puisse être appréhendé, l'activité doit le mettre en mouvement ; c'est ce que montre l'exemple précédent sur la généralisation des suites. En effet, comme savoir en soi, la forme algébrique de penser les suites ne peut pas se montrer à la conscience. Il faut que ce savoir (nécessairement général), soit mis en *mouvement*. Et ce qui la met en mouvement c'est l'activité d'enseignement-apprentissage, à travers les dires, les actions, les gestes des élèves et de l'enseignante. Comme résultat de ce mouvement, le savoir apparaît, phénoménologiquement parlant : il apparaît dans une forme développée : une forme concrète *qu'on voit, qu'on entend et qu'on sent* dans le dialogue et les photos de la Figure 3. À travers cette apparition sensuelle, le savoir s'incarne et devient *connaissance* — une entité susceptible d'être objet de pensée et de conscience (Radford, 2013b).

Le rapport savoir / connaissance que nous discutons ici dans le cas des mathématiques peut être mieux compris si on se situe un moment du côté de la musique. Une symphonie (disons, pour fixer les idées, la 7e symphonie de Beethoven) ne peut être appréhendée que si elle est jouée. Du côté de l'individu qui ne l'a jamais écoutée, la 7e symphonie *qua* symphonie n'est pas saisissable. Il faut *l'activité* d'un orchestre pour qu'elle acquière un contenu sonore et qu'ainsi elle devienne objet de conscience. Ce qu'on entend dans une salle de concert, cette musique sensuelle et concrète est la manifestation ou matérialisation d'une potentialité ou d'un savoir (Radford, 2019b). Pour la distinguer de la potentialité (δύναμις), Aristote utilisait le terme *actualité* (*ένέργεια, energía*). La connaissance, dans la terminologie de la TO, est cette actualité de la potentialité. La connaissance est la matérialisation du savoir.

Nous avons avancé dans notre discussion, mais nous n'avons pas encore donné une réponse à notre question. Comment donc appeler cette activité orientée par un objet-savoir qui, elle seule, peut accomplir la transformation du savoir en connaissance ? Pour la distinguer d'autres termes qui

n'évoqueraient pas nécessairement cette caractéristique fondamentale de l'activité de salle de classe, en anglais canadien nous avons opté pour le terme *labour* (Radford, 2018b) et en espagnol pour le terme *labor* (2019c). Les deux termes proviennent du latin *laborare*. En français on pourrait dire labeur. Le terme *labeur* a l'avantage d'évoquer cette dimension d'effort pénible qui lui est associée. Dans l'entrée « labeur » d'un dictionnaire étymologique de la langue française, son auteur le présente comme dérivation du latin labor. On y lit : « travail corporel, pénible » (Mazure, 1863, p. 192). L'entrée continue plus loin comme ceci : « Forcellini fait venir *labor* de *labi*, parce que le travail épuise les forces . . . il y a dans l'idée du labeur un sentiment de la sentence divine qui condamne l'homme (*sic*) à manger son pain à la sueur de son front. Chez les Romains laborare est très souvent employé dans le sens de souffrir » (Mazure, 1863, p. 193).

Un avantage de cet exercice étymologique est qu'il montre que le concept pour lequel nous cherchons un mot est inéluctablement lié au concept d'homme (*sic*), d'individu ou, plus généralement, d'humain. Nous arrivons par là à une conséquence probablement inattendue : le mot cherché doit tenir compte de notre idée d'individu impliqué dans l'activité au sens de la Tätigkeit. En fait, pour conceptualiser l'individu (et ainsi pouvoir conceptualiser tant l'élève que le professeur), la TO remonte à la conception avancée par Marx, selon laquelle l'individu est un être naturel (un être de la nature) et, par conséquent, un *être de besoins* et que, pour les satisfaire, il doit s'activer — voir les « manuscrits parisiens », où l'idée apparaît déjà très clairement (Marx, 2007). De ce compte le labeur est ce à travers quoi l'individu parvient à satisfaire ses besoins tout en s'affirmant comme être social, historique et culturel.

Le terme labeur semble donc tout à fait propice pour nommer ce que nous entendons dans la TO par activité d'apprentissage. Il nous rappelle ce que chacun de nous a su depuis toujours : qu'apprendre implique un effort ; il implique une souffrance — et aussi une joie. Il nous amène à reconnaître que c'est dans le labeur, en tant qu'activité matérielle, sensible, que se trouve le champ ultime de l'expérience esthétique, de la subjectivité et de la cognition. Et notre décision terminologique se serait arrêtée sur « labeur », si ce n'était pas le cas que, malheureusement, ce terme est, en fait, relativement rare en français. Le plus proche est le terme « travail », qui semble aussi bien garder les sédiments du sens recherché. Dans la TO, c'est donc « travail » le terme qui traduit en français le sens dialectique-matérialiste de la *Tätigkeit* pour désigner l'activité d'apprentissage. Il constitue la catégorie centrale de la TO et affirme le rôle ontologique et épistémologique fondamental de la matière, du corps, du mouvement, de l'action, du rythme, de la passion et de la sensation dans ce que c'est d'être humain[5].

[5] Notons qu'une difficulté similaire à celle que nous essayons de surmonter ici s'est posée aussi du côté de la terminologie adoptée dans le cadre de la Théorie de L'Espace de Travail Mathématique. Ainsi, Kuzniak et Vivier (2019) explorent la meilleure manière de traduire en anglais l'expression « travail mathématique ». Ils disent : « one of the first difficulties we encounter […] is the translation into English of the term 'le travail mathématique'. We have opted for 'mathematical work' » (p. 3073). Mais ils ajoutent tout de suite, « which is not its exact equivalent » (p. 3073).

Mais nous n'avons pas fini. Le travail, on le sait très bien, peut déboucher dans l'aliénation des individus et dans l'aliénation des élèves et du professeur. C'est le cas du travail qu'on observe dans l'enseignement traditionnel où le professeur s'active pour dévoiler le savoir à l'élève et, par la suite, l'élève s'active pour recevoir ce savoir. En faisant référence à ce modèle pédagogique ci-dessous, nous avons dit que bien que l'élève doive s'activer pour comprendre ce que fait le professeur, il ne *se reconnait pas* dans l'effort qu'il fait : il reçoit simplement le savoir de manière obéissante (Radford, 2014). Nous devons donc continuer notre réflexion afin de mieux comprendre ce qui manque. Comment qualifier le travail afin qu'à la place d'être aliénant, le travail d'apprentissage soit plutôt un travail où se réalisent les sujets qui y participent ?

Travail conjoint

Dans ses réflexions sur le travail aliénant, une fois qu'il a dégagé certains traits qui caractérisent ce type de travail amenant ainsi les individus à ne pas produire comme des êtres humains, Marx parvient à se poser la question de ce qui pourrait être un travail non aliénant. Il nous offre le passage suivant :

> Supposons que nous produisions comme des êtres humains : chacun de nous s'affirmerait doublement dans sa production, soi-même et l'autre. 1° Dans ma production, je réaliserais mon individualité, ma particularité ; j'éprouverais, en travaillant, la jouissance d'une manifestation individuelle de ma vie, et, dans la contemplation de l'objet, j'aurais la joie individuelle de reconnaître ma personnalité comme une puissance réelle, concrètement saisissable et échappant à tout doute. 2° Dans ta jouissance ou ton emploi de mon produit, j'aurais la joie spirituelle immédiate de satisfaire par mon travail un besoin humain, de réaliser la nature humaine et de fournir au besoin d'un autre l'objet de sa nécessité. 3° J'aurais conscience de servir de médiateur entre toi et le genre humain, d'être reconnu et ressenti par toi comme un complément à ton propre être et comme une partie nécessaire de toi-même, d'être accepté dans ton esprit comme dans ton amour. 4° J'aurais, dans mes manifestations individuelles, la joie de créer la manifestation de ta vie, c'est-à-dire de réaliser et d'affirmer dans mon activité individuelle ma vraie nature, ma sociabilité humaine [*Gemeinwesen*].
>
> Nos productions seraient autant de miroirs où nos êtres rayonneraient l'un vers l'autre. (Marx, 1968, p. 33)

Le travail non aliénant, tel qu'il est présenté ici par Marx, repose, on le voit, sur une production qui n'est pas seulement production d'énergie, mais en même temps relation à *l'autre* : « chacun de nous s'affirmerait doublement dans sa production, soi-même et l'autre ». Marx ne le dit pas, mais ce que cela veut dire est que le travail non aliénant est inévitablement une affaire *éthique*. Bien sûr, le travail aliénant —celui de l'enseignement traditionnel, par exemple — est éthique aussi. Dans l'enseignement traditionnel, ce que le professeur fait, est fait à l'intention de l'élève. Il y a bel et bien une éthique ici en jeu : dès qu'on voit de près, on se rend compte que c'est celle de l'assujettissement de l'autre. C'est l'éthique de l'autorité et de l'obéissance. Dans le passage des *Manuscrits Parisiens* que Marx nous offre ci-dessus, il s'agit d'une *autr*e éthique. Ici, Marx suit Hegel de près qui voyait

dans la reconnaissance de l'Autre en tant que sujet « libre » et égal (Hegel, 1978, p. 57) le nœud de la relation éthique fondamentale[6].

Revenons à notre exemple de la classe de 2e année ci-dessus. Ce que nous voyons, c'est que l'enseignante et les élèves s'activent[7]. Encore plus important, ce que nous voyons c'est qu'ils travaillent ensemble :

De son côté, l'enseignante n'enseigne pas au sens traditionnel du terme. Elle travaille *avec* et *pour* les élèves — et vice-versa. En effet, comme on le voit dans le dialogue ci-dessus et dans les photos, l'enseignante *suggère* une nouvelle façon de percevoir les termes. Elle ne dit pas quoi faire : ses actions sont plutôt une *invitation* à regarder les termes de la suite *autrement*[8].

De leur côté, les élèves n'apprennent pas au sens traditionnel du terme. Ils ne restent pas passifs à écouter l'enseignante. En acceptant l'invitation de l'enseignante, ils s'engagent dans cette nouvelle façon de voir les termes de la suite, même si au départ ils ne peuvent pas savoir ce dont il s'agit exactement. S'ils le savaient déjà, il n'y aurait rien à apprendre.

De ce travail conjoint sur les termes de la suite résulte le dégagement d'une relation algébrique entre les variables : une *œuvre commune*, une manière algébrique d'attaquer cette suite. C'est la matérialisation d'un savoir mathématique qui vient envahir la salle de classe, comme la musique envahirait une salle de concerts. Il n'y a pas deux activités ou deux travaux en parallèle : celui de

---

[6] Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, Leont'ev (2005 2009a 2009b) a souligné l'importance du motif et de l'objet de l'activité (Tätigkeit). Nous suivons Leont'ev dans cette conceptualisation de l'activité. Mais nous poussons la théorisation dans une direction complémentaire afin de formuler l'activité comme entité fondamentalement éthique, ce qui nous paraît primordial pour aborder la problématique de l'activité d'enseignement-apprentissage qui est au centre des préoccupations de la TO. Ainsi, plutôt que voir l'activité sur l'angle objet/motif/action/but/operations/conditions, nous la voyons sur deux axes complémentaires : celui de ses modes de production et celui de ses formes de collaboration humaine (voir Radford, 2019c).

[7] Dans un travail précédent (voir chapitre 5 dans D'Amore et Radford, 2017), nous distinguons deux composantes de l'activité : une composante appelée « didactique » et une composante appelée « activité proprement dite ». Dans la première a lieu la planification que fait le professeur du déroulement de l'activité (le choix des problèmes, l'organisation des problèmes, etc.). Dans la deuxième a lieu l'activité d'enseignement-apprentissage : c'est ce qui se passe effectivement en salle de classe, pendant la période des mathématiques.

[8] Une analyse prosodique de l'épisode en question révèle la manière dont l'enseignante joue avec l'intonation, l'accentuation et le rythme des mots pour formuler l'invitation aux élèves. C'est un moment hautement affectif dans le déroulement de la leçon et dans l'entrée au travail conjoint (pour une étude prosodique, voir Roth et Radford, 2011).

l'enseignante et celui des élèves. Il n'y a pas une activité d'enseignement et une activité d'apprentissage, mais une seule activité d'enseignement-apprentissage. Il y a un seul travail[9].

Comment donc nommer ce travail qui n'est ni celui de l'enseignement traditionnel ni celui d'un travail antagonique entre professeur et élève ni un agir centré sur soi-même comme c'est le cas du constructivisme ? *Travail conjoint*. C'est un travail où les uns et les autres s'affirment dans leur production et se réalisent comme humains dans ce qu'ils font. Il ne s'agit pas de l'éthique de l'obéissance. Il ne s'agit pas non plus de l'éthique constructiviste de la liberté et de l'autonomie de l'élève, mais de ce que nous avons appelé une *éthique communautaire* (Radford, 2019c), définie par la responsabilité, la solidarité et le soin de l'autre. *Travail conjoint* est donc ce terme que nous cherchions pour nommer ce type d'activité (*Tätigkeit*) qui n'est pas aliénante. Sa caractéristique passe par la pratique d'une éthique communautaire. Dans la TO, il oriente l'action didactique en salle de classe.

Il est facile à voir, il me semble, qu'il y a plusieurs points potentiels de contact entre la TO et la Théorie des espaces de travail mathématique. Les deux théories se tournent du côté du travail, l'une « in order to identify precisely the meaning of mathematics when it is considered through the idea of work » (Kuzniak et Vivier, 2019, p. 3073), l'autre pour comprendre l'apprentissage des mathématiques. Il y a une convergence générale, dirais-je, dans l'idée que la production des mathématiques et leur apprentissage reposent sur un agir, sur une activation des individus. On peut alors poser la question de la place du contenu spécifique (en l'occurrence, le contenu mathématique) dans le concept d'apprentissage et le concept de travail conjoint de la TO. S'il est vrai qu'il y a une analyse épistémologique derrière les tâches mathématiques proposées aux élèves dans la TO (voir, par exemple, D'Amore et Radford, 2017), l'analyse épistémologique menée à l'intérieur de la Théorie des Espaces de Travail Mathématique apporte une profondeur et des nuances qui ne peuvent que jeter un éclairage important sur ce qu'un certain contenu culturel implique par rapport à son apprentissage. L'éclairage épistémologique peut mieux nous renseigner sur les enjeux sous-jacents à la rencontre des élèves avec les mathématiques en tant que forme historico-culturelle de penser le monde. Je ne crois pas qu'un tel éclairage épistémologique exige l'adoption d'une position de « récapitulation » entre phylogénèse et ontogénèse (c'est-à-dire, l'adoption de la position selon laquelle la formation d'une pensée mathématique chez l'individu suit le même trajet que la formation de la pensée

[9] Bien sûr, cela ne veut pas dire que l'enseignante fait la même chose que les élèves. Il y a évidemment une division du travail. L'enseignante a une perspective sur l'activité d'enseignement-apprentissage que les élèves n'ont pas. Leur rapport au savoir n'est pas le même. Cette différence dans le rapport au savoir vient créer nécessairement une asymétrie dans la symétrie du travail conjoint. Toutefois, l'existence d'une telle asymétrie n'anéantit pas automatiquement la possibilité du travail conjoint. Mais pour que l'anéantissement n'ait pas lieu, il y a un prix à payer : il faut que les élèves abandonnent la place d'obédience et soumission qu'on leur assigne dans l'enseignement traditionnel. Et il faut aussi et que l'enseignante abandonne la place patriarcale qu'on lui assigne dans ce type d'enseignement vis-à-vis le savoir.

mathématique elle-même ; pour une critique de la position de récapitulation, voir Furinghetti et Radford, 2008 ; Radford et Puig, 2007).

Réciproquement, les conditions et spécificités que la TO cherche à clarifier par rapport à l'apprentissage et en particulier par rapport à sa nature culturelle, sociale et collective et les questions de pouvoir qui émergent comme résultat de l'asymétrie du travail conjoint peuvent ouvrir des pistes de recherches pour mieux comprendre la communication et l'interaction qui entourent l'apprentissage des mathématiques dans la Théorie des Espaces de Travail Mathématique.

Une « expérience limite » pourrait être l'étude conjointe de situations d'apprentissage des mathématiques dans un contexte culturel assez différent de ceux sur lesquels nos recherches respectives se sont penchées jusqu'à maintenant. On serait obligé de sortir de notre quotidienneté et de travailler conjointement et s'appuyer l'un sur l'autre et vice-versa pour produire du sens et essayer d'aller plus loin.

Crédits

Cet article est le résultat d'un programme de recherche financé par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada / Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (SSHRC/CRSH).

Références

Arendt, H. (1958a). *The human condition*. Chicago: The University of Chicago Press.

Arendt, H. (1958b). The modern concept of history. *The Review of Politics*, *20*(4), 570-590.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, C. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero, Analisi teorica e considerazioni didattiche* (6). Pavia: Dipartimento di Matemática, Università di Pavia, Progetto Strategico del C.N.R.

Bartolini Bussi, M. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 1-16). Assisi, Italy: PME.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M., A. (1999). Semiotic mediation: From history to the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 19(2), 27-35.

Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M., A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd Edition) (pp. 746-783). New York: Routledge, Taylor and Francis.

Bishop, A. J. (1991). Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education. Dordrecht: Kluwer.

Boero, P., Pedemonte, B., & Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: A Vygotskian perspective. In Proceedings of the XXI International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 81-88). Lahti (Finland).

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.

Brousseau, G. (2002). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (2005). Réponses orales à Gérard Vergnaud. In M.-H. Salin, P. Clanché, & B. Sarrazy (Eds.), Sur la théorie des situations didactiques (pp. 22-28). Grenoble: La pensée sauvage.

Cobb, P., Stephen, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in Classroom Mathematical Practies. The Journal of the Learning Sciences, 10(1-2), 113-163.

Cobb, P., & Thomson, P. (1998). On relationships between psychological and sociocultural perspectives. In S. Berenson, K. Dawkins, & M. Blanton (Eds.), Proceedings of the annual meeting of the North American Chapter of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 1, pp. 3-26). Raleigh, NC: PME-NA.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. Educational Psychologist, 31(3/4), 175-190.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). Enseñanza y aprendizaje de la matemática: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Furinghetti, F., & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd Edition) (pp. 626 - 655). New York: Taylor and Francis.

Gal'perin, P. (1967). On the notion of internalization. Soviet Psychology, 5(3), 28-33.

Gal'perin, P. (1992). Stage-by-stage formation as a method of psychological investigation. Journal of Russian and East European Psychology, 30(4), 60-80.

Gerstenmaier, J., & Mandl, H. (2001). Constructivism in Cognitive Psychology. In N. J. Smelser & P. B. Baltes (Eds.), International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences (pp. 2654-2659). Oxford: Pergamon.

Gilson, E. (1939). Reason and revelation in the Middle Ages. New York: Charles Scribner's sons.

Harré, R., & Gillett, G. (1994). The discursive mind. London: Sage.

Hegel, G. (1978). Hegel's philosophy of subjective spirit. Vol. 3 (M. J. Petry, Ed.). Dordrecht: D. Reider.

Hegel, G. (1991). The Encyclopaedia Logic. Part I of the Encyclopaedia of Philosophical Sciences (T, F. Geraets, W. A. Suchting, & H. S. Harris, Trans.). Indianapolis / Cambridge: Hackett Publishing Company, Inc.

Hegel, G. (2009). Hegel's logic. (W. Wallace, Trans.). Pacifica, CA: MIA.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. ZDM, 48), 721-737.

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2019). An epistemological and philosophical perspective on the question of mathematical work in the mathematical working space theory. In U. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), Proceedings of the eleventh congress of the European society for research in mathematics education (pp. 3070-3077). Utrecht: ERME.

Lerman, S. (1996a). Guest editorial. Educational Studies in Mathematics (Special Issue: Socio-cultural Approaches to Mathematics Teaching and Learning), 31(1-2), 1-9.

Lerman, S. (1996b). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? Journal for Research in Mathematics Education, 27(2), 133-150.

Leont'ev, A. N. (1997). On Vygotsky's creative development. In Vygotsky, L. S. Collected works (Vol. 3) (pp. 9-32). New York: Plenum.

Leont'ev, A. N. (2005). The genesis of activity. Journal of Russian and East European Psychology, 43(4), 58-71.

Leontyev, A. N. (2009a). The development of mind. Pacifica, CA: MIA.

Leontyev, A. N. (2009b). Activity and consciousness. Pacifica, CA: MIA.

Levine, L. B., & Fish, L. (1999). The integration of constructivism and social constructionist theory in family therapy: A Delphi study. Journal of Systemic Therapies, 18(1), 58-84.

Lorsbach, A., & Tobin, K. (1992). Constructivism as a referent for science teaching. NARST Newsletter, 30, 5-7.

Macherey, P. (2008). Marx 1845. Les thèses sur Feuerbach. [Marx 1845. The Theses on Feuerbach]. Paris: Éditions Amsterdam.

Martin, J. (2004). The educational inadequacy of conceptions of self in educational psychology. Interchange: A Quarterly Review of Education, 35, 185-208.

Marx, K. (1968). Oeuvres. Économie II. (M. Rubel, Ed.). Paris: Pléiade.

Marx, K. (1982). Œuvres. Tome III. Philosophie. (M. Rubel, Ed.). Paris: Gallimard.

Marx, K. (2007). Manuscrits économico-philosophiques de 1844. (F. Fischbach, Trans.). Paris: Vrin.

Mazure, M. A. (1863). Dictionnaire étymologique de la langue française. Paris: Librairie classique d'Eugène Belin.

Mészáros, I. (2010). Social structure and forms of consciousness. New York: Monthly Review Press.

Piaget, J. (1970). Psychologie et épistémologie. Paris : Éditions Gonthier.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), Perspectives on School Algebra (pp. 13-63). Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking), pp. 103-129 (http://luisradford.ca).

Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME – 5) (pp. 1782-1797). Larnaca, Cyprus.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2012). Education and the illusions of emancipation. Educational Studies in Mathematics, 80(1), 101-118.

Radford, L. (2013a). Sensuous cognition. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), Visual mathematics and cyberlearning (pp. 141-162). New York: Springer.

Radford, L. (2013b). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. Journal ofResearch in Mathematics Education, 2(1), 7-44.

Radford, L. (2014). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Vol. 1, pp. 1-20). Vancouver: PME.

Radford, L. (2018a). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. PNA, 12(2), 61-80.

Radford, L. (2018b). A cultural-historical approach to teaching and learning: The theory of objectification. In F.-J. Hsieh (Ed.), Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education. Vol 2 (pp. 137-147). Taipei, Taiwan : EARCOME.

Radford, L. (2019a). Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. In J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM 2018 (pp. 314-332). Paris: IREM de Paris – Université Paris Diderot.

Radford, L. (2019b). So, you say that doing math is like playing music ? The mathematics classroom as a concert hall. La matematica e la sua didattica, 27(1), 69-87.

Radford, L. (2019c). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática (pp. 15-42). São Paulo, Brazil: Livraria da Física.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical Forms of Algebraic Thinking. Educational Studies in Mathematics, 66, 145-164.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). A cultural historical perspective on teaching and learning. Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating. Cambridge: Cambridge University Press.

Spinoza, B. (1989). Ethics including the improvement of the understanding. (R. Elwes, Trans.). Buffalo: Prometheus. (Original work published 1667)

Thompson, P. (2014). Constructivism in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 96-100). New York: Springer.

Valero, P. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. In P. Walshaw (Ed.), Mathematics education within the postmodern (pp. 35-54). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Veresov, N. (1999). Undiscovered Vygotsky. Etudes on the pre-history of cultural-historical psychology. Frankfurt: Peter Lang.

Vergnaud, G. (2005). Questions de Gérard Vergnaud. In M.-H. Salin, P. Clanché, & B. Sarrazy (Eds.), Sur la théorie des situations didactiques (pp. 18-22). Grenoble: La pensée sauvage.

Vivier, L. (2019). Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM. Deuxièmes Journées Espace de Travail Mathématique. Université Paris-Diderot. Paris, 21 et 22 octobre 2019.

von Glasersfeld, E. (1983). Learning as a constructive activity. In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), Proceedings of the fifth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 41-69). Montreal: Université de Montréal: Faculté de Science de l'Éducation.

von Glasersfeld, E. (1995). Radical constructivism: A way of knowing and learning. London: The Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1987). Collected works (Vol. 1). New York: Plenum.

Vygotsky, L. S. (1997a). Educational psychology. Boca Raton, Florida: St. Lucie Press.

Vygotsky, L. S. (1997b). Collected works (Vol. 3). New York: Plenum Press.

Vygotsky, L. S. (1998). Collected works (Vol. 5). New York: Plenum Press.

Vygotsky, L. S. (1999). Collected works (Vol. 6). New York: Plenum.

Watzlawick, P. (1988). L'invention de la réalité. Paris: Éditions du Seuil.

Théorie de l'Activité en didactique des mathématiques

Fabrice Vandebrouck

Université de Paris, LDAR (EA 4434), France

Ce texte présente de manière succincte la manière dont le cadre de la Théorie de l'Activité adopté depuis plusieurs années par des chercheurs en didactique des mathématiques a été adapté pour étudier les apprentissages scolaires des mathématiques en relation avec l'enseignement que les élèves reçoivent, le contexte de leur travail ainsi que les pratiques de leurs enseignants. Il s'agit d'un cadre théorique en construction, assez ouvert, de sorte que les méthodologies des chercheurs s'y inscrivant ont des traits généraux communs mais que chacun peut ensuite développer les concepts selon ses propres objets de recherche. Quelques éléments de comparaison avec la théorie des ETM sont esquissés, ainsi que des difficultés théoriques (par exemple sur la distinction entre Activité, activité et travail, sur la notion d'objet de l'activité, d'objet de l'action…), des perspectives et des questionnements.

Cadre général

Dans notre démarche théorique, nous prenons comme entrée pour étudier les relations enseignement-apprentissage d'un contenu mathématique donné, ce qui se fait dans la classe de mathématiques, dans son contexte historique et institutionnel, mais aussi parfois plus largement culturel et social (dans certaines recherches sur les ZEP par exemple). Il s'agit donc d'une importation en didactique des mathématiques de la théorie de l'activité (TA). La classe est un environnement de l'Activité (grand A), composé des élèves, du professeur et d'un ensemble d'autres médiateurs des activités des élèves et du professeur, comme les ressources ou des artefacts numériques par exemple[1]. Dans cette perspective théorique, les interactions, et donc les déroulements des séances en classes de mathématiques, sont aussi cruciaux que les analyses des tâches proposées aux élèves.

La théorie de l'activité à laquelle nous référons prend sa source dans les travaux de Vygotski (1986), développés ensuite par Léontiev (1984). Léontiev poursuit les travaux de Vygotski sur les processus d'apprentissages individuels mais introduit la dimension collective dans ces processus, utilisant à cet effet un terme russe traduit ensuite par « activité » – au sens de collectif historico-socio-culturel, comme dans « l'activité de classe ». Cette dimension de l'activité embarque les différents acteurs, en particulier l'enseignant et les élèves, dans leurs interactions. Mais Léontiev poursuit aussi l'œuvre de Vygotski sur l'importance des médiations dans les processus d'apprentissages individuels des sujets en action. Le terme activité a donc deux sens qu'il convient de distinguer : l'activité au sens « système

[1] On peut dire que nous adoptons une entrée par les sujets qui constituent la classe de mathématiques alors que la TAD propose plutôt une entrée complémentaire par les savoirs et la TSD par les situations. La ThETM adopte une entrée mixte, à la fois épistémologique sur les savoirs en jeu mais aussi par les sujets considérés de façon purement cognitive.

d'activité », qui est développé ensuite par Engeström[2] - et qui sera noté avec un grand A – et activité avec une orientation individuelle et cognitive, qui est développée dans l'école française en ergonomie cognitive puis en didactique professionnelle. Cette dernière approche permet d'articuler les apports de Piaget (1985) et Vergnaud (1990) sur les processus développementaux aux apports de Vygotski et Léontiev précédents. C'est dans la lignée de cette école française que nous nous situons. Les interrelations entre activité des sujets et Activité (grand A) de classe constituent un chantier de recherche encore à investir.

Dans notre cas, c'est plus précisément une approche double qui nous guide[3], articulant théorie de l'activité et didactique des mathématiques pour l'analyse imbriquée de l'activité de l'enseignant et celle des élèves dans la classe. Cela permet de comprendre la contextualisation des processus d'enseignement-apprentissage, compte tenu des contenus mathématiques en jeu, des déroulements dans la classe, et du contexte de l'activité (ou de l'Activité), découlant notamment de l'activité de l'enseignant, de ses pratiques habituelles mais aussi plus largement de l'établissement, de la communauté des enseignants, de la noosphère… Au centre de notre usage de la théorie de l'activité, nous plaçons les activités mathématiques des élèves (on dira juste « activités »), processus cognitifs individuels qui nous permettent d'apprécier les apprentissages potentiels (Abboud, Robert, Rogalski, & Vandebrouck, 2017 ; Vandebrouck et Robert, 2017).

Ce cadrage inclut l'adoption d'hypothèses sur les apprentissages[4] et leur adaptation aux mathématiques en situation scolaire. Ces hypothèses se traduisent notamment en termes de conceptualisation mathématique, les activités mathématiques étant constitutives du processus de conceptualisation, cette dernière étant aussi le produit visé des apprentissages. Les apprentissages ne se réduisent cependant pas à de la conceptualisation. Pendant la résolution de problème ce peut être des apprentissages de procédures par exemple. Les activités sont déclenchées par les tâches proposées, décrites en termes de mises en fonctionnement de connaissances mathématiques, et les déroulements (et donc l'ensemble des médiations dans la classe) organisés, dans le contexte précis en jeu – ce que nous appelons aussi la situation. Participent à la description de cette dernière, le scénario adopté et des caractéristiques des pratiques de l'enseignant qui incluent sans s'y restreindre les choix

---

[2] Selon Engeström et al. (1999), la Théorie de l'Activité a été conçue comme une théorie unifiée du comportement individuel et social. Elle n'a pas l'ambition d'être une grande théorie mais elle se veut fondée sur des sujets réels et des cas concrets.

[3] Mais pas au sens de la Double Approche Didactique et Ergonomique des Pratiques enseignantes. Ici nous nous intéressons uniquement aux apprentissages des élèves même s'ils dépendent du contexte et donc des pratiques des enseignants.

[4] Les théories convoquées sont celles de Piaget et de Vygotski. La définition de la conceptualisation de Vergnaud et ses champs conceptuels sont également utilisés (la notion de niveaux de conceptualisation est insérée) tout comme des concepts et des outils généraux de la didactique des mathématiques (les registres, les cadres, les situations à dimension adidactique, le contrat…).

de tâches et de déroulements. Les activités varient d'un élève à l'autre et sont en partie inaccessibles : seules les activités possibles, inférées des observations, sont accessibles par reconstruction.

Méthodologiquement, on adopte donc sur l'Activité dans la classe (plutôt l'Activité DE classe) une perspective cognitive concernant les tâches prescrites aux élèves – et leur organisation – (traduites en terme d'« itinéraire cognitif », succession des activités mathématiques attendues) et une perspective « médiative » qui s'intéresse à tous les médiateurs de l'activité des élèves pendant les déroulements (le rôle et le discours de l'enseignant, les échanges entre élèves mais aussi les outils disponibles, etc). Ces deux perspectives complémentaires correspondent à deux temps de notre méthodologie générale et permettent d'inférer les activités possibles[5] des élèves.

Retour sur Activité, activité, actions

La théorie de l'activité dans la tradition de l'école française[6] est une théorie du sujet agissant dans un but précis, éprouvant un besoin (motif ou mobile de l'activité). En reprenant Léontiev (1984), on retrouve donc la distinction entre « but » et « motif » : dans le cas du sujet individualisé, le motif de l'activité (petit a), moteur direct de l'activité que le sujet développe pour satisfaire son besoin, « pousse » l'activité ; tandis que le but, représentation mentale du résultat futur de l'activité, « tire » l'activité. Mais motifs et buts peuvent être partagés, si le sujet est dans un collectif. L'exemple pris par Léontiev est souvent celui de la chasse, comme activité collective, avec un grand A. Léontiev situe en fait les motifs au niveau de l'activité (A et a, selon le contexte de l'étude) et situe les buts au niveau des actions, dans sa schématisation dynamique {A-activité / actions / opérations}. L'activité (A ou a selon le contexte) est accomplie par le biais d'actions, subordonnées aux motifs et aux buts. Les opérations sont sous-jacentes aux actions et à l'A-activité, elles dépendent à des conditions de mise en œuvre.

Dans certains écrits, on trouve aussi la notion d'« objet de l'activité » et/ou « objet de l'action ». Il faut voir que ce mot est ambigu lui aussi dans la langue française (comme « activité ») dans le sens où l'objet peut-être matériel objectif, matériel subjectif (associant la représentation que se fait le sujet de l'« objet ») et peut aussi prendre le sens de « objectif ». Quand il est matériel, on trouve aussi l'idée dans la théorie que l'activité est subordonnée aux propriétés de cet objet. Selon les différents sens que prend le terme objet et selon qu'on l'associe au niveau de l'activité ou à celui des actions, on pourra plus ou moins le rapprocher de motif et de but mais cela reste souvent assez mystérieux aussi… et pas forcément pertinent. Reste encore la sensibilité dans la théorie aux « outils de l'activité » et plus globalement au contexte de l'activité qui replace nécessairement l'activité du sujet au sein d'un

[5] On différencie les activités possibles a minima, que les élèves développent à partir de toutes les aides qui peuvent leur avoir été fournies, les activités a maxima, qui correspondent à ce que peuvent développer des élèves rapides en travaillant sur la tâche prescrite et les activités pour tous, lors des situation en totale autonomie par exemple.

[6] Mais aussi dans l'approche contemporaine de Nosulenko en Russie.

collectif : l'activité est de nature collective, notamment en situation de classe, même si on va s'intéresser à l'activité des individus, élèves en premier lieu mais aussi enseignant qui pilote la classe.

La citation de Rogalski (2008) reprend autant qu'elle les résume quelques-unes des idées développées ci-dessus, intégrant l'idée de développement propre à l'approche française d'inspiration Piagétienne :

> L'objet de cette théorie est une activité finalisée (par un but d'action) et motivée : le sujet vise l'atteinte de buts d'action et ce sont les mobiles de son activité qui sont le moteur de ses actions. La théorie vise l'analyse des processus en jeu chez le sujet agissant, et les processus par lesquels son activité évolue et par lesquels il se développe. Elle s'appuie sur deux notions clés : celle de sujet et celle de situation[7]. Elle différencie par ailleurs tâche et activité, qui sont respectivement « du côté de la situation » et « du côté du sujet » (Rogalski, 2008, p. 23).

La citation ci-dessous explicite, quant à elle, la différence entre une approche cognitive stricte – comme dans l'approche proposée par la TSD[8] – et l'approche proposée par la théorie de l'activité, qui embarque le sujet cognitif dans ce qui y est désigné par le « sujet-personne », avec toute sa complexité et son contexte :

> […] ce ne sont pas les "propriétés" ou le "fonctionnement" de la position occupée par l'enseignant dans un système didactique qui sont en jeu ici, à la différence de la perspective qui pourrait être adoptée par une didactique stricto sensu. […] Il en est de même de la considération de l'élève comme sujet-personne, non comme sujet didactique » (Rogalski, 2013, p. 3)

Et enfin l'activité (petit a) est :

> […] tout ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend dans ce qu'il fait et ce qu'il se retient de faire ; l'activité comprend aussi la manière dont le sujet gère son temps, et également son état personnel – en termes de charge de travail, de fatigue, de stress, et aussi de plaisir pris au travail –, ainsi que ses interactions avec autrui dans la situation de travail (Rogalski 2008, p. 24).

L'approche développementale de l'activité du sujet individualisé

Le développement de la théorie de l'activité adaptée en didactique des mathématiques intègre les références à Vergnaud (1990), sa notion de conceptualisation, et plus précisément les champs conceptuels[9]. Le rôle de l'action, et donc de l'activité, est au cœur du processus de conceptualisation[10] et plus largement des apprentissages mathématiques. Le terme *conceptualisation* réfère à la fois au

---

[7] Le mot « situation » ne fait pas référence à la TSD mais est à entendre dans un sens plus large et naïf.

[8] Et quelque part celle proposée par la théorie des ETM dans le volet cognitif.

[9] Même si comme nous l'avons précisé plus haut le développement n'est pas que conceptualisation.

[10] Au fond de l'action, la conceptualisation, selon Vergnaud (1996).

processus de développement et à son produit. Ce produit est défini en termes de disponibilités d'un certain nombre d'aspects outils et objets de la notion visée, sur un ensemble de tâches, avec une certaine flexibilité, qu'on précise plus tard en termes d'adaptations. Selon Chesnais (2018),

> (il s'agit d'une) disponibilité sur un ensemble de tâches des dimensions outil et objet de la connaissance visée, et il comprend son organisation avec les connaissances antérieures ainsi que la maîtrise des signifiants (langagiers et non langagiers) associés (p. 25).

Le schéma de double régulation (Leplat, 1997), qui rencontre l'approche Piagétienne, matérialise l'aspect développemental dans la théorie et est fédérateur pour les chercheurs en didactique qui s'inscrivent en Théorie de l'Activité. L'activité du sujet est codéterminée par la situation (la tâche dans son contexte) et le sujet lui-même. Le versant productif de l'activité correspond aux boucles de régulations de l'activité par les modifications de la situation (typiquement des simplifications de la tâche) tandis que le versant constructif de l'activité correspond aux régulations structurantes, tournées vers le sujet lui-même. Il faut également lire ce schéma avec au moins une double échelle de temps. A court terme, les régulations sont surtout procédurales, tournées vers la réalisation de la tâche (l'atteinte du but) donc vers la situation, même si des effets constructifs incidents ou intentionnels existent, tandis que les régulations constructives sont surtout sur le long terme de l'activité.

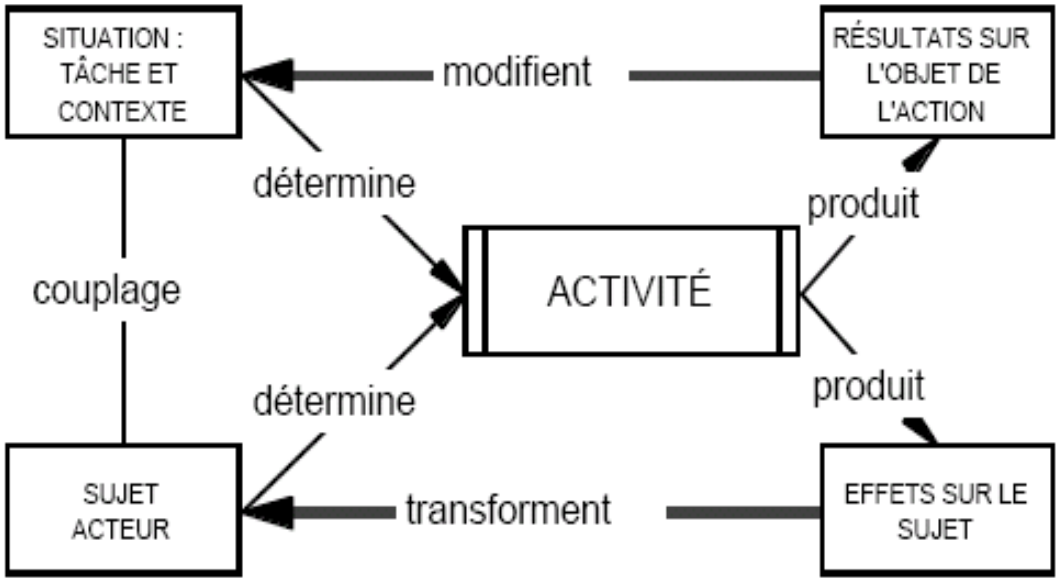


Figure 1 : Le schéma de double régulation de Leplat.

La sensibilité Vygotskienne dans le processus développemental met l'accent sur l'importance des médiations. Chez Vygotski, le développement est vu comme intériorisation intra-individuelle des actions inter-individuelles, par le biais de médiations sociales et par les outils (ce que Vygotski appelle instruments psychologiques).

Selon Rogalski (2008) :

> L'assimilation des concepts scientifiques n'est possible qu'avec deux médiations, d'une part, une médiation sociale instrumentée : les concepts scientifiques ont un rapport médiatisé avec le monde des objets à la fois par autrui et par des instruments psychologiques – au premier chef, le langage ; et d'autre part, une médiation par d'autres concepts (p. 440).

En croisant cette sensibilité et les médiations avec le schéma de double régulation, les chercheurs ont développé l'idée de médiations procédurales, tournées vers la situation, la tâche et donc l'activité productive du sujet, et les médiations à visées constructives, tournées vers le sujet lui-même et donc ses apprentissages.

L'œuvre de Vygotski (1986) fait ressortir aussi l'existence chez les sujets apprenants d'une Zone Proximale de Développement (ZPD), comme lieux où l'élève peut apprendre de nouvelles connaissances à partir de ses connaissances anciennes et les activités qu'elles permettent, avec l'aide d'un autrui « mieux sachant » (souvent le professeur). C'est dans cette optique que la notion de proximité discursive (Robert et Vandebrouck, 2014) a été développée, rendant compte d'éléments du discours du professeur dont le chercheur reconstruit qu'ils se situent dans la ZPD du ou des apprenants (à partir de l'étude des activités possibles de celui-ci ou ceux-là).

Les activités mathématiques comme mises en fonctionnement de connaissances

Dans le cadre de la didactique des mathématiques, la référence à Vergnaud et à la conceptualisation dans l'action (Vergnaud, 1996) n'est pas suffisante pour spécifier notre adaptation de la théorie de l'activité au contexte scolaire à l'apprentissage des mathématiques. De la même façon, la manière de spécifier l'activité aux mathématiques et aux situations scolaires n'est pas présente dans le cadre général de la théorie de l'activité. Nous avons donc choisi d'introduire « les activités mathématiques des élèves » (ou plus rapidement les activités) afin de développer une méthodologie d'analyse de l'activité des élèves, en mathématiques, à partir des analyses contextualisées des tâches et des déroulements dans la classe.

Les activités mathématiques des élèves sont des spécifications de leur activité plus générale (motivation, conditions…) au sens de la définition proposée par Rogalski plus haut. Ce sont des « segments cognitifs » de l'activité des élèves dans le contexte scolaire (i.e. sur des tâches mathématiques précises en général). Robert (2008) les définit aussi par « ce que les élèves pensent, font ou non, disent ou non, écrivent ou non, tapent ou non sur ordinateur… ». Cette définition ancienne est assez ambiguë, notamment avec les « ou non », et car elle semble faire référence à la fois au niveau de l'activité et au niveau des actions des élèves. Pour relier cette définition des activités au niveau des actions de Léontiev, j'ai réinterprété à titre personnel cette définition en :

> les activités (a) des individus – élèves et professeur - dans un système d'activités (A – la classe) pilotent et sont pilotées par le niveau des actions des différents individus.

Les activités mathématiques sont identifiées à partir des analyses de tâches mathématiques prescrites et des déroulements organisés par le professeur (Robert, 1998 ; Vandebrouck, 2008). Elles sont donc

étudiées en interrelation avec les actions (et donc les activités) du professeur – discours, gestes… - et plus généralement tout le contexte de la situation (toutes les « médiations », interactions/rétroactions dans la classe, mais aussi plus globalement le scénario…). On utilise souvent du matériel de vidéos tournées dans les classes (ordinaires). Sont mobilisés également dans la mesure du possible des entretiens des acteurs pour avoir accès à la composante personnelle de leur activité (élèves et professeurs), mais aussi pour avoir les éléments de contexte (place de la séance étudiée dans un scénario notamment…)

Compte tenu du rôle de l'action dans les apprentissages, les activités des élèves sont souvent analysées en séances d'exercices (ou menées sur des productions d'élèves sur des exercices, en comparant ce qui est attendu et ce qui observable)[11]. Ce qui est attendu est analysé grâce aux analyses des tâches proposées et aux analyses de déroulements dans les classes. Les analyses de tâches permettent d'inférer les activités (mathématiques) attendues, l'« itinéraire cognitif » et on dispose de tout un arsenal d'outils d'analyses de tâches depuis Robert (1998). Les analyses de déroulements permettent d'inférer les activités (mathématiques) possibles[12] des élèves, définies à partir d'indicateurs des formes de travail, des durées, des outils utilisées, des aides (procédurales et constructives en référence au schéma de double régulation) et des proximités (définies plus récemment en référence à Vygotski et à la ZPD).

Les activités mathématiques (attendues ou possibles) sont décrites en termes de mises en fonctionnement de connaissances mathématiques (Robert, 2008) : Quelles sont les connaissances mises en fonctionnement ? Quels sont les statuts de ces connaissances (ancien / nouveau, outil / objet, contextualisé / décontextualisé, conformes/non conformes). Quels sont les niveaux de mises en fonctionnement de ces connaissances (mobilisable, disponible). Quelles sont les adaptations de connaissances à la charge des élèves (reconnaissances de modalités d'application des connaissances, introductions d'étapes ou d'intermédiaires, changements de registres, de cadres, de point de vue…) ? Pour simplifier la description de ces mises en fonctionnement de connaissances mathématiques, on a introduit plus récemment une catégorisation non exhaustive des activités en sous activités mathématiques : Reconnaissances / Organisation / Traitements. Mais cette catégorisation, même si elle permet d'avancer n'est pas sans poser des questions : où sont par exemple les activités de contrôle – introduites par Galpérine (1966) - qui mettent aussi en fonctionnement des reconnaissances mathématiques) ?

[11] Les chercheurs commencent cependant à s'intéresser à des séances de cours, dans des recherches plus récentes, dans la mesure où il y a également des activités mathématiques des élèves en jeu – plus difficiles à repérer (Bridoux et al., 2015).

[12] Pour tous, a maxima, a minima.

Le relief sur les notions enseignées et le rôle du contexte dans la situation

Les analyses de tâches et des déroulements sont « relatives » aux contenus mathématiques en jeu et aux contextes des situations scolaires étudiées.

Elles sont référées d'une part à une triple analyse croisée épistémologique, curriculaire et cognitive des contenus en jeu : le « relief » sur les notions en jeu. Il s'agit d'abord d'une analyse didactique préalable[13] (mettant l'accent sur les mathématiques, leur épistémologie et des études curriculaires) mais elle est complétée par une visée d'étude des activités mathématiques des acteurs (donc avec une dimension cognitive).

Je reprends deux citations : la première « il s'agit d'autres éléments […] notamment liés à la plus ou moins grande proximité des notions à introduire avec ce qui précède » (Robert et Hache, 2013, p. 35) qui montre que le relief est lui-même un élément d'analyse relativement à un contexte pour lequel on fait l'analyse ; la deuxième :

> certaines distinctions ne sont intéressantes que parce qu'elles entrainent des différences significatives dans la manière dont les élèves s'y prennent pour traiter les situations ainsi différenciées ; le mathématicien lui-même n'y prend plus garde et, si l'on s'en tenait aux mathématiques constituées, on négligerait des distinctions qui sont importantes pour la didactique (Vergnaud, 1990, p. 156).

L'étude du relief des notions permet par exemple de dégager différents types de notions, selon leur ancrage dans les savoirs antérieurs, d'élaborer des introductions adaptées, des dynamiques entre cours et exercices. Cela permet aussi de baliser la variété des tâches à proposer (en termes d'adaptations des connaissances et de niveaux de mises en fonctionnement) et par conséquence la variété des activités possibles des élèves. L'étude du relief permet de définir aussi des « niveaux de conceptualisation », en référence à la conceptualisation « produit » de Vergnaud mais en prenant en compte explicitement les niveaux scolaires (les programmes d'enseignement notamment). Les niveaux de conceptualisation sont donc des références des apprentissages visés au niveau d'enseignement étudié, décrits essentiellement en termes d'activités attendues des élèves sur des ensembles de tâches.

D'autre part, les analyses de tâches et des déroulements sont aussi rapportées au contexte par les caractéristiques du scénario global dans lequel s'insère la séance étudiée – place du cours, exercices, routines, histoire de la classe… – et les caractéristiques de la situation scolaire étudiée – programmes, caractéristiques des élèves, contraintes… Elles sont aussi référées aux choix réguliers des enseignants et aux pratiques, dans leur complexité pendant les déroulements, notamment du fait de la prise en compte des élèves.

---

[13] Comme on pourrait la trouver dans toute recherche en didactique, souvent appelée « analyse préalable » comme par exemple dans la méthodologie de l'ingénierie didactique.

Comme on le comprend, accéder aux activités des élèves par le bais des analyses de tâches et de déroulement en classe, même si ces analyses sont relativisées par les contenus en jeu et les contextes des situations étudiées, reste d'une très grande complexité. On doit souvent compléter les analyses des observables par des questionnaires aux acteurs, en plus des vidéos. Ces analyses permettent d'éclairer les relations entre enseignement et apprentissages de contenus donnés dans des situations données. Cela peut prendre la forme d'un « théorème d'existence », relatif à une classe donnée, ou de régularités, à partir de plusieurs occurrences de ce qui est étudié. On peut par exemple dégager des phénomènes robustes (ou une séquence ou des hypothèses testées), qui résistent à des diversités de pratiques.

Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques et ETM

La théorie de l'activité en didactique des mathématiques (TA-DM) partage avec celle des ETM un centrage sur le fonctionnement de la classe ordinaire comme lieu d'interactions entre des élèves et leur professeur. C'est un premier rapprochement à faire. Le deuxième rapprochement tient à l'importance dans les deux théories des aspects épistémologiques des contenus en jeu et des aspects cognitifs chez les sujets agissants et apprenants. Plus précisément, dans le numéro spécial de ZDM sur les ETM (2016), Radford (2016) rappelle que dans la tradition française de la didactique des mathématiques, il y a une considération forte de la dimension épistémologique des contenus en jeu, ce qui apparaît nettement dans les deux grandes théories fondatrices de la didactique des mathématiques que sont la TAD et la TSD, et ce qui fait d'ailleurs la spécificité de la didactique des mathématiques par rapport à des courants de « mathematics education » plus anglo-saxons. La théorie des ETM et la théorie de l'activité se bâtissent donc sur cette tradition avec l'importance du plan épistémologique dans les ThETM et la référence au « relief » sur les notions en jeu dans la TA-DM. Mais les deux théories donnent une place tout aussi importante à la dimension cognitive dans les processus d'apprentissage des mathématiques. Les activités mathématiques sont des processus cognitifs, intermédiaires entre les actions de élèves et l'apprentissage mathématique. Tandis que dans la modélisation proposée de l'ETM, le plan cognitif est en relation avec le plan épistémologique selon les trois dimensions sémiotique, instrumentale et discursive. C'est là le troisième grand rapprochement qu'il convient de faire, me semble-t-il, avant toute autre considération.

La TA-DM se décline par ailleurs en termes d'« activités mathématiques des élèves » tandis que les ETM parlent en termes de « travail mathématique ». Dans la TA-DM, les activités mathématiques sont relatives à l'exécution d'une tâche dans une situation donnée (incluant un contexte) tandis que la notion de travail renvoie, semble-t-il, à quelque chose de plus global, non référé à une tâche ou une situation précise, non spécifié dans le temps et dans l'espace. Le travail mathématique est certes activé par des tâches mathématiques, mais on ne peut pas se construire un espace de travail personnel uniquement à partir de l'exécution d'une tâche, ou uniquement à partir d'une situation contextualisée. Mon idée est donc que – à l'instar des pratiques enseignantes reconstruites à partir des analyses de l'activité des enseignants en situation – c'est l'analyse des activités des élèves en situation (sur une tâche) qui permet d'alimenter notre connaissance de l'ETM personnel de l'élève – mais aussi d'un ETM « partagé » dans une classe de mathématiques. Bien évidemment, comme en théorie de

l'activité, on va s'appuyer sur l'analyse des actions des élèves (parfois à partir de leurs productions) mais si le travail est décrit dans un ETM en termes d'activations, de genèses, de circulation, on ne peut statuer sur ces éléments qu'en analysant les activités des élèves comme intermédiaires entre les actions et les activations, les genèses, les circulations. Les genèses et les circulations sont des mises en relations entre le plan épistémologique et le plan cognitif. Elles embarquent donc non seulement des actions mais aussi des non actions, des choix… Donc elles font sans doute référence à des activités mathématiques qu'il convient surement d'inférer préalablement à l'interprétation en termes de travail dans l'ETM. En outre, le niveau des actions et celui des activités sont bien définis dans le cadre de la TA (même s'il est parfois difficile de les dissocier). Même si activité réfère à la fois au niveau collectif A et au niveau individuel a, le niveau des activités « pilote » et « est piloté » par celui des actions, qui ne sont qu'une manifestation externe de ou des activités. N'est-il pas alors pertinent de mieux situer le travail mathématique entre actions et activités développées à partir de tâches mathématiques ?

Mobiliser les ETM donne sûrement une intelligibilité mathématique aux activités mathématiques des élèves en les donnant à voir à travers (notamment) le modèle de l'ETM. C'est une théorie qui s'est développée au sein de la DDM alors que la TA-DM est une adaptation d'une théorie très générale pour le cas spécifique des apprentissages mathématiques. La TA-DM a donc sûrement une portée beaucoup plus large ce qui fait une force mais aussi peut-être une faiblesse. Dans la TA-DM, il y a des hypothèses sur les liens entre les activités mathématiques et les apprentissages des contenus en jeu, qui intègrent des références globales à Piaget et Vygotski, mais aussi des résultats classiques de la didactique des mathématiques, tels que l'importance de la dévolution, de l'action, de l'institutionnalisation en référence spécifiquement à Brousseau (1998), la dialectique Outil-Objet et l'importance dans l'activité des changements de cadres en référence à Douady (1986), l'importance des changements de registres (Duval, 1995). Comme on a précisé tout au début, les développements progressifs de la TA (à partir des outils d'analyse des tâches proposés par Robert en 1998) se sont constitués comme compléments à la TAD mais surtout à la TSD. Dans la modélisation proposée par les ETM, on peut se demander comment apparaissent ces fondements de la didactique des mathématiques. Y a-t-il un lien entre le travail tel qu'il est analysé dans les ETM et l'apprentissage des mathématiques ? En d'autres termes, quelle est la place de l'apprentissage dans les deux théories et spécifiquement dans la théorisation proposée par les ETM ? Quelles sont les hypothèses sur les liens entre apprentissages mathématiques et les circulations et les genèses qui sont centrales dans la théorie des ETM ?

Ce qui est repéré dans les deux théories n'est aussi pas du même ordre : le confinement du travail dans un plan spécifique par exemple versus des activités de traitements mathématiques, sans organisation, sans reconnaissances. Les connaissances mathématiques mobilisées par les élèves (qui sont au cœur des activités mathématiques) peuvent être conformes ou non à ce qui est attendu dans la situation, sans relation avec le fait que le travail lui-même soit conforme ou non, complet ou non. On peut avoir un travail confiné dans un certain plan mais avec beaucoup d'activités mathématiques à la charge des élèves. A contrario, on peut identifier un travail complet mais où les circulations sont les résultats d'aides procédurales de l'enseignant et rien n'est à la charge des élèves. Comment dans

les ETM identifier que certaines activités mathématiques (mises en fonctionnement de connaissances) sont réalisées a minima par certains élèves alors que d'autres élèves les développent entièrement, a maxima, de façon totalement autonome ? Sans doute que la TA-DM prend plus directement en compte le rôle de l'enseignant – avec une catégorisation des aides et des proximités notamment - et qu'elle se centre moins sur les ETM personnels. Comment intégrer dans le modèle des ETM les actions de l'enseignant qui influent sur les activités mathématiques (et donc le travail) des élèves ? N'est-ce pas au niveau de l'étude de l'ETM idoine (ou « partagé ») que les deux théories ont le plus à communiquer au final ? C'est cette fois la place de l' « enseignement » qui est questionnée dans les deux théories.

References

Abboud, M., Robert A., Rogalski J., & Vandebrouck F. (2017). *Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. Un résumé des fondements partagés des développements récents et des perspectives*, Cahier du LDAR, (n°18), Février 2017, IREM de Paris : Paris

Bridoux, S., Chappet-Paries M., Grenier-Boley, C., Hache C., & Robert A. (2015). *Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques*, Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz (n°14), IREM de Paris : Paris.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chesnais, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*, HDR de l'Université de Montpellier

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5–31.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Engeström, Y., Miettinen, R., & Punamaki, R.L. (Eds) (1999). *Perspective on activity theory*. Cambridge UK : Cambridge University Press.

Galperine, P. (1966). *Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts*. Dans A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (Eds.) *Recherches psychologiques en URSS* (pp.114-132). Moscou : Editions du progrès.

Leontiev, A. (1984). *Activité Conscience Personnalité Moscou* : Editions du Progrès (1ère édition, 1975, en russe).

Leplat, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail*. Paris: PUF.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development* (T. Brown & K.J. Thampy Trans.). Chicago: University of Chicago Press.

Radford, L. (2016). The epistemic, the cognitive, the human: a commentary on the mathematical working space approach, *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 925–933

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Robert, A. (2008). *La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe*. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-68). Toulouse : Octarès.

Robert, A., & Horoks, J. (2007). Tasks Designed to Highlight Task-Activity Relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4–6), 279–287.

Robert, A. & Hache, C. (2013). *Why and how to understand what is at stake in a mathematics class?* In F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics Classrooms: students' activities and teachers' practices* (pp 23–74). Rotterdam : Sense Publishers.

Robert, A., Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 239-285

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 343-388.

Rogalski, J. (2008). *Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement, pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves*. In F. Vandebrouck (Éd.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp 23-30 & pp 429-459). Toulouse : Octarès.

Rogalski, J. (2013). *Theory of Activity and Developmental Frameworks for an Analysis of Teachers' Practices and Students' Learning*. In F. Vandebrouck (Ed.), *Mathematics Classrooms: students' activities and teachers' practices* (pp 3–22). Rotterdam : Sense Publishers

Vandebrouck, F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

Vandebrouck, F., & Robert, A. (2017). *Activité mathématiques des élèves avec les technologies numériques : vers une théorie didactique de l'activité (TDA)*, Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz (n°17), IREM de Paris : Paris

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133–169.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action la conceptualisation La théorie des champs conceptuels. In J-M. Barbier (Ed). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris, Presses Universitaires de France

Vygotski, L. (1986). *Thought and Language*. Cambridge MA: MIT Press.

Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM

Laurent Vivier

Université de Paris, LDAR (4434), France

Ce texte s'intéresse au travail mathématique comme objet d'étude didactique. Sa caractérisation nécessite l'identification d'éléments qui vont mener à la théorie des ETM dont certains principes sont rapidement exposés. Les liens entre ETM, travail mathématique et apprentissage sont également explorés car une des ambitions de la théorie est de comprendre comment un sujet fait des mathématiques et comment il est possible d'influer sur son travail grâce à l'enseignement.

Introduction

La théorie des ETM a pris son essor[1], depuis plus de vingt ans, à partir des travaux de Houdement et Kuzniak (1999) en géométrie. La manière de caractériser le travail mathématique s'est d'abord appuyée sur la notion de paradigme, reformulée à partir des travaux de Kuhn. Mais les paradigmes seuls se sont vite avérés insuffisants et une première version de la notion d'Espace de Travail Géométrique (ETG) est apparue au début des années 2000. Quelques années plus tard, une deuxième version, en appui sur les processus cognitifs en géométrie de Duval (2005), a été développée et, ensuite, étendue aux autres domaines mathématiques avec la notion d'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011). Plusieurs éléments ont joué des rôles importants dans la genèse de la théorie. On peut notamment citer les deux projets ECOS-Sud avec le Chili. Le premier de 2003 à 2005 (Guzman et Kuzniak, 2006) a permis de développer la notion d'ETG et le deuxième (2014-2016) a permis de préciser l'ETM de l'analyse. Les divers symposiums ETM[2] ont également été importants pour le développement de la théorie, au sein d'une communauté de chercheurs, avec notamment le deuxième symposium à Paris en 2010 où la notion d'ETM a été avancée. Et bien entendu, il faut tenir compte de tous les doctorats, passés ou en cours, dont les auteurs participent au dynamisme et à la créativité de la théorie.

Le travail mathématique

Cette section s'intéresse au travail mathématique en tant qu'objet d'étude didactique. Sa caractérisation nécessite l'identification d'éléments qui vont mener à la théorie des ETM. Le travail est considéré dans une double signification : à la fois comme un ensemble d'activités humaines organisées pour atteindre des buts et en même temps comme le produit de ces activités.

[1] Pour plus de détails sur l'histoire de la théorie des ETM, voir Kuzniak (2019).

[2] Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique. Six symposiums, avec actes, ont déjà eu lieu.

Bien entendu, le travail mathématique est perçu différemment selon les sujets, enseignants et élèves. Pour l'élève, le plus important est le produit du travail mathématique avec la réponse qu'il doit donner à son professeur, alors que pour l'enseignant l'essence du travail mathématique qu'il attend de ses élèves est plutôt associée aux processus de ce travail. Pour l'enseignant, il est important que l'élève puisse réutiliser, dans d'autres circonstances, un processus qu'il aura appris.

Des observables aux actions

Afin d'identifier le travail mathématique, on s'intéresse aux traces tangibles qui se manifestent, à la fois durant le processus et dans le produit. Ce sont les observables du travail mathématique qui constituent les données expérimentales que l'on peut recueillir, puis analyser. Mais dans une perspective mathématique, tous les observables ne sont pas à considérer – cela serait d'ailleurs impossible. En effet, « prendre un stylo » est un observable mais n'est pas signifiant du point de vue mathématique et il est inutile de considérer ce type d'observable – à moins que le stylo ne soit utilisé pour reporter une longueur ou vérifier un alignement. On se limite ainsi aux observables ayant une signification mathématique, que l'on appelle des actions (cf. partie III, EEDM2019), effectuées par le sujet au cours d'un travail mathématique. Ces actions entraînent des traces tangibles, durables ou non, qui sont externes au sujet. L'hypothèse est que les actions mathématiques réalisées par un sujet permettent de reconstituer de manière rationnelle le travail mathématique effectué par le sujet. Dans cette perspective, les actions mathématiques sont des sortes de briques élémentaires du travail mathématique. Ainsi, à partir des traces laissées par le travail mathématique, on infère des actions mathématiques qui permettent une (voire plusieurs) reconstruction du travail mathématique. Et naturellement, une seule de ces actions ne suffit pas à rendre compte du travail mathématique global d'un individu.

Toutefois, dans cette interprétation des actions mathématiques, il est nécessaire de prendre en compte le contexte, dans une acceptation très générale. On peut par exemple penser au niveau scolaire de l'étude. En effet, si pour un étudiant-professeur il est possible de se contenter d'un « il trace un cercle de centre A passant par B », en revanche, pour un élève de primaire en début d'apprentissage il est très certainement utile de décomposer les actions pour préciser qu'il « place la pointe du compas sur le centre A » et « ajuste l'écartement du compas à la longueur AB ».

Ainsi, on pourra faire une différenciation selon les sujets, selon l'institution dont le sujet fait partie (avec les programmes d'enseignement), on pourra prendre en compte la situation, le contrat didactique, le milieu, les aspects affectifs, les interactions entre pairs et avec l'enseignant. En particulier, il est important d'identifier le travail mathématique proposé et à effectuer dans l'institution.

Les éléments caractéristiques nécessaires

La spécification du travail aux mathématiques entraîne que l'organisation ainsi que l'orientation productive du travail sont supportées par les mathématiques. Il en est de même de la finalité générale de ce travail. Ainsi, le travail comme processus et comme produit est supporté par l'épistémologie des mathématiques. Mais, lorsqu'il est effectué par un sujet, le travail mathématique est également

supporté par ses connaissances, en évolution du fait de ses apprentissages, par la manière dont il pense les mathématiques. Ainsi, l'étude du travail mathématique effectué par un sujet doit également prendre en compte des aspects cognitifs.

En plus de ces deux aspects essentiels du travail mathématique, épistémologique et cognitif, trois dimensions sont considérées comme étant constitutives du travail mathématique et elles servent à caractériser les actions mathématiques :

- La dimension sémiotique s'impose d'emblée car, comme l'écrit Duval (1996), les objets mathématiques ont une caractéristique qui fait que, en très grande majorité, on ne peut y avoir accès qu'à travers des signes qui les représentent. Il y a bien entendu les représentations écrites, mais il ne faut pas non plus écarter les représentations plus éphémères comme les gestes et les sons.
- La plupart des signes écrits sont produits par l'usage d'un instrument par un sujet, qu'il soit matériel, digital ou symbolique. Ces instruments peuvent être associé à un outil[3] matériel spécifiquement créé pour effectuer un type de représentation, comme le compas pour tracer un cercle. Ils peuvent aussi provenir d'un usage détourné d'un objet existant, comme un stylo utilisé comme une règle pour vérifier un alignement. On parle ainsi plus généralement d'artefact, dont un sujet s'empare pour s'en servir comme un instrument.
- Enfin, au moins depuis les Éléments d'Euclide, les définitions et les propriétés des objets mathématiques ainsi que leurs mises en fonctionnement dans l'argumentation, voire les démonstrations, constituent une dimension essentielle du travail mathématique que l'on nomme discursive. Cette dimension discursive est associée à la preuve.

Remarquons que d'autres dimensions peuvent intervenir dans le travail mathématique. On peut par exemple citer les aspects affectifs, collectifs, esthétiques, etc. qui pourront être considérés dans certaines études.

La théorie des ETM

Dans notre recherche d'un outil pour étudier le travail mathématique, nous ne retenons que les aspects épistémologique et cognitif ainsi que les trois dimensions exposées à la section précédente. Ce choix est motivé par la recherche d'une théorie opérationnelle prenant en compte le « cœur » de l'activité mathématique avec un ensemble d'éléments constitutifs de base. D'autres éléments pourront y être ponctuellement adjoint selon les besoins d'une étude spécifique.

Le diagramme et le prisme

La théorie prend donc en considération les aspects épistémologiques et cognitifs que l'on croise avec les trois dimensions, sémiotique, instrumentale et discursive. Cela détermine six composantes de

[3] Dans la théorie des ETM, les instruments seront associés au plan cognitif et les outils au plan épistémologique (Kuzniak, Drouhard et Nechache, 2016).

l'Espace de Travail Mathématique : trois processus cognitifs et trois composantes épistémologiques qui sont donnés dans la table 1.

	Sémiotique	Instrumentale	Discursive
Cognitif	Visualisation	Construction	Preuve
Épistémologique	Representamen (Signes)	Artefacts	Référentiel Théorique

Table 1 : les éléments de l'ETM.

Le processus de visualisation est le processus par lequel un sujet interprète des signes mathématiques (idéalement avec des connaissances mathématiques) ; le processus de preuve est le processus par lequel un sujet argumente, justifie, explique, démontre en s'appuyant sur les éléments du référentiel théorique (définitions, propriétés, théorèmes,…) ; le processus de construction est le processus par lequel un sujet s'empare d'un artefact pour effectuer une action mathématique.

Cet outil pour l'analyse du travail mathématique est organisé et structuré en un espace abstrait représenté par le diagramme de la figure 1.

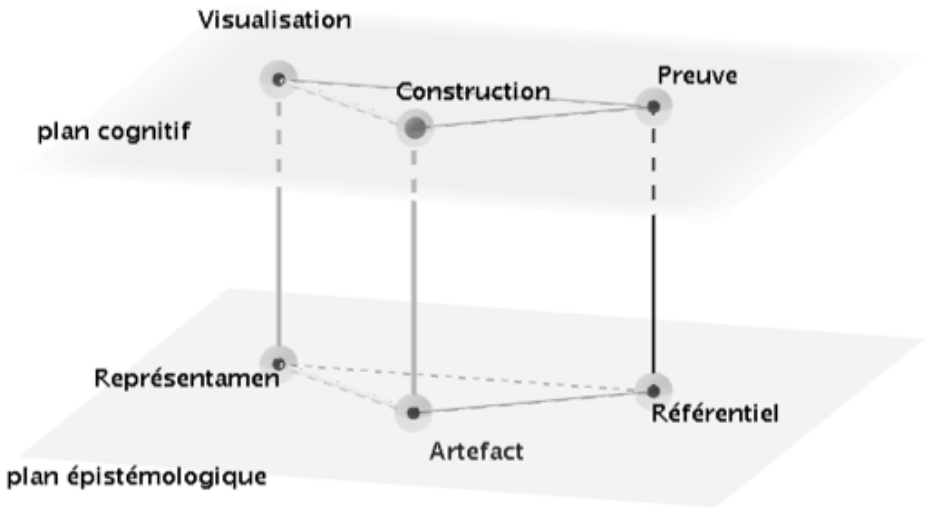


Figure 1 : le diagramme de l'ETM.

Ce diagramme a en particulier l'intérêt de montrer des liens entre les plans cognitif et épistémologique[4]. Ces liens, ou articulations, entre les deux plans sont spécifiés selon les trois dimensions, nommées également genèses pour rendre compte du caractère génétique et dynamique, de l'Espace de Travail Mathématique. En effet, un ETM n'est pas figé, il évolue et se développe dans le temps, idéalement en s'enrichissant, notamment par le travail mathématique déjà effectué.

Toutefois, contrairement à ce que pourrait laisser penser le squelette de la figure 1, il ne faut pas penser les genèses de manière isolée. Le travail mathématique est en général complexe et ne peut se

[4] Dans la tradition des ETM, on parle plutôt de plans que d'aspects.

contenter d'une seule dimension (même s'il peut y avoir une prépondérance d'une dimension sur une autre). Le travail mathématique requière très souvent de mettre en œuvre de manière imbriquée deux ou trois dimensions (ou genèses). Pour cela, on utilise également une autre représentation de l'ETM mettant en avant la nécessaire activation de deux genèses. C'est ce que présente le prisme de la figure 2 où l'on définit trois plans verticaux selon les couples de genèses.

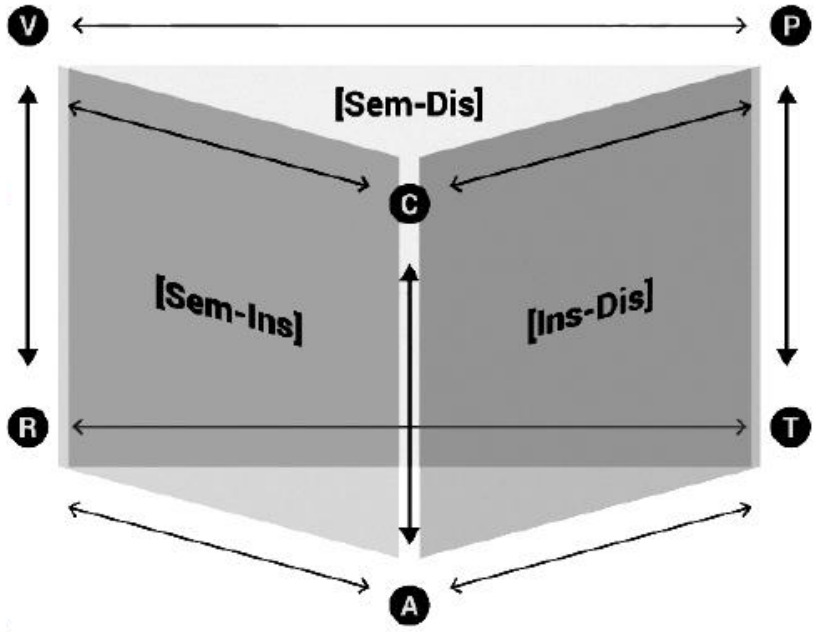


Figure 2 : le prisme des ETM et les plans verticaux.

Le diagramme et le prisme sont des outils pour les analyses qu'ils permettent de synthétiser. Mais il faut se garder de penser que la théorie se réduit à ces deux représentations. Avant de parler de la notion de paradigme à la section suivante, signalons que, pour rendre compte du travail mathématique dans une institution scolaire, il est nécessaire de considérer plusieurs niveaux :

- Le niveau des différentes institutions qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques (ETM de référence) ;
- Le niveau de la classe avec le travail proposé par un enseignant et mis en œuvre avec ses élèves (ETM idoine) ;
- Le niveau du sujet (ETM personnel) où l'on cherche à caractériser le travail mathématique d'un individu.

A chaque niveau correspondent des ETM qu'il s'agit d'identifier tout en prenant en considération les relations entre les différents ETM.

La notion de paradigme

La notion de paradigme est un élément clé de la théorie afin de comprendre le travail effectué, son orientation et les choix effectués. Et tout ceci est à penser pour un domaine mathématique, car il faut prendre en compte la spécificité du travail mathématique de chaque domaine.

Par exemple, pour la géométrie, Houdement et Kuzniak (1999) ont proposé les trois paradigmes suivants :

- La Géométrie I ou Géométrie Naturelle : la géométrie sur les objets réels, confusion entre mathématique et réalité, elle est technique et pratique ;
- La Géométrie II ou Géométrie axiomatique naturelle : la géométrie comme schéma de la réalité, le système d'axiomes provenant de la réalité peut être incomplet, elle est axiomatique et modélisante ;
- La Géométrie III ou Géométrie axiomatique formelle : il y a une indépendance de la géométrie avec de la réalité, ce paradigme pose le problème d'une axiomatique cohérente et complète, elle est logique et formelle.

Pour l'analyse, Montoya Delgadillo et Vivier (2016) ont proposé les trois paradigmes suivants.

- Analyse Arithmetico-Géométrique (AG ou A1) : qui permet des interprétations, provenant de la géométrie, du calcul arithmétique mais aussi du monde réel ;
- Analyse Calculatoire (AC ou A2) : dans ce calcul algébrique généralisé, les règles de calcul sont définies, plus ou moins explicitement, et elles sont appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits ;
- Analyse Réelle (AR ou A3)) : elle est caractérisée par un travail spécifique formel sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, travail sur des voisinages, négligeabilité.

Dans la suite de cette contribution, nous présentons un exemple en géométrie et un en analyse.

Un exemple en géométrie

Dans l'exemple qui suit (Kuzniak et Nechache, 2018), nous montrons une mise en œuvre de la théorie des ETM puis nous finissons par un questionnement sur les analyses provenant des données.

Il s'agit d'un exercice en géométrie proposé à des futurs enseignants du primaire en France. On ne s'intéresse qu'à la première partie où les étudiants devaient remarquer qu'il y avait une donnée manquante (ce que très peu ont vu).

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?

Et voici une production d'un étudiant (extrait du corpus de Kuzniak et Nechache, dont nous donnons à la suite une analyse rapide[5].

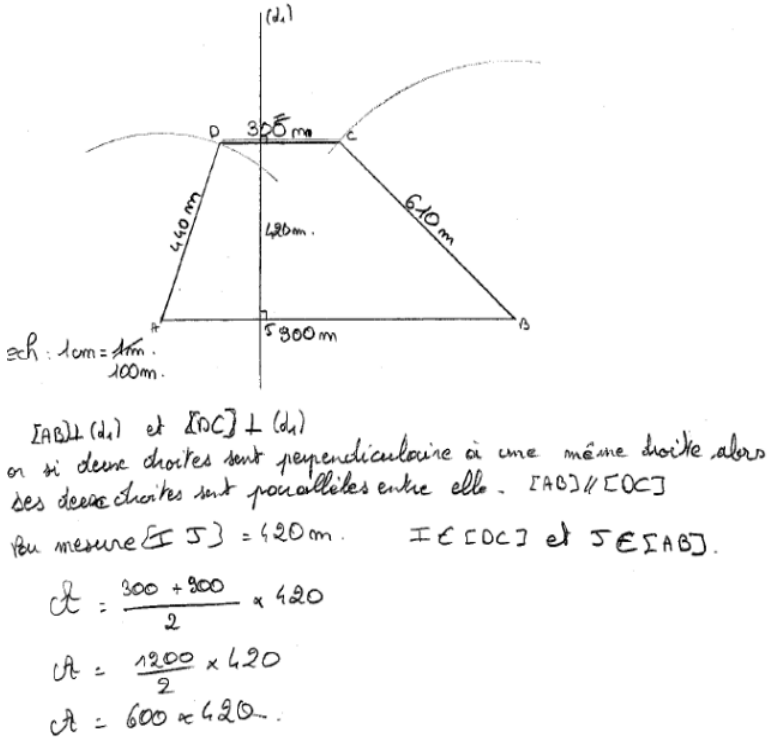


Figure 3 : réponse de Francis.

Pour la construction de la figure, après le choix d'une échelle (genèses discursive et sémiotique avec une visualisation des nombres), on relève d'abord un travail instrumental mais qui s'appuie en même temps sur les signes produits au fur et à mesure. Il s'agit d'une construction dans le paradigme GI de la géométrie.

Puis, l'étudiant justifie avec ses connaissances (genèse discursive) le fait qu'on a deux droites parallèles (peut-être dans la perspective d'avoir un trapèze), mais en prenant des informations sur la figure (genèses sémiotique et instrumentale). Il y a ici une coexistence des paradigmes GI et GII.

Enfin, il calcule l'aire en mesurant sur la figure (genèses sémiotique et instrumentale, paradigme GI) en appliquant la formule de l'aire d'un trapèze.

Toutefois, on ne peut pas savoir avec certitude à quel moment il trace la droite d1 : est-ce pour faire la justification comme on semble le comprendre dans son écrit ou bien a-t-il tracé cette droite pour avoir la mesure de la hauteur ?

---

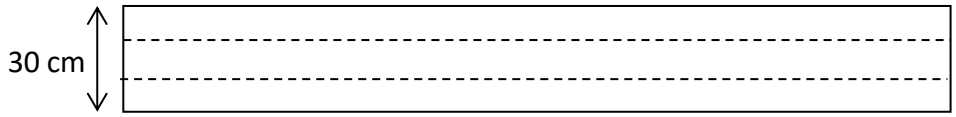
[5] Pour une analyse détaillée et des considérations sur la méthodologie utilisée en théorie des ETM pour rendre compte de l'ETM personnel voir la section « Une méthode d'analyse du travail personnel des élèves en géométrie » de ce cahier, page 103.

Comme on le constate, les dimensions ne sont effectivement pas isolées. On constate également la difficulté de savoir à quel moment il a pensé au trapèze avec ces données. Il ne le dit pas, mais on peut raisonnablement affirmer qu'au moment où il applique la formule de l'aire il pensait déjà au trapèze. Peut-être même lors de sa petite démonstration, car il justifie la propriété du trapèze. Est-ce dès le départ ? Jusqu'à quel point la configuration du trapèze a-t-il guidé son travail ? On ne peut en être certain, même s'il le déclare dans la phase collective qui a suivi[6], car il est possible qu'il ait reconstruit son travail. Quoiqu'il en soit, on peut en conclure que cet étudiant a appris, et est capable de réutiliser en contexte, des connaissances sur le trapèze, mais qu'il manque certainement de connaissances plus générales sur les quadrilatères et les aires. On pourra même considérer que son travail est conforme aux attentes du paradigme de la Géométrie I. Nous allons préciser cette idée de conformité dans la suite.

Conformité et diversité du travail mathématique : un exemple en analyse

Prenons l'exemple suivant, dit de la Canaleta[7] :

> On dispose de plaques rectangulaires en métal de largeur 30 cm et de grande longueur. On replie perpendiculairement les bords de chaque côté pour fabriquer une gouttière (selon les pointillés sur la figure ci-dessous). Pour des raisons évidentes, les deux rebords latéraux de la gouttière ont la même dimension.



Trouver comment replier la plaque pour obtenir une gouttière qui a un débit maximum.

Cet énoncé a été proposé à trois groupes de futurs enseignants de mathématiques en Argentine (Córdoba) :

- Le groupe 1PC de 1ère année d'université, N = 24 ;
- Le groupe 2PC de 2ème année d'université, N = 15 ;
- Le groupe 4PF de 4ème année d'université, N = 12.

Ainsi qu'à un groupe L3 de futurs enseignants du primaire en France (Paris), de 3ème année d'université, N = 16 (étudiants non scientifiques pour la plupart).

Seul le groupe 4PF a eu un enseignement d'analyse sur les fonctions et les dérivées (ainsi que quelques étudiants du groupe L3). Ces étudiants proposent tous une fonction quadratique avec soit un calcul de dérivée (proche de l'étudiant de la figure 4) soit un calcul du sommet de la parabole en

[6] Les données associées aux productions comportent généralement une vidéo de la mise en commun et un écrit réflexif de l'étudiant sur sa production.

[7] Une analyse de la situation de la Canaleta est présentée dans (Montoya Delgadillo, Viola & Vivier, 2017).

utilisant la formule du cours (figure 5). Ces étudiants effectuent un travail standardisé, dans le paradigme A2 de l'analyse (Montoya Delgadillo et Vivier, 2016), avec peu de choix à faire. C'est un travail conforme à ce qui a été enseigné, essentiellement dans le paradigme A2, avec très peu de diversité dans les productions.

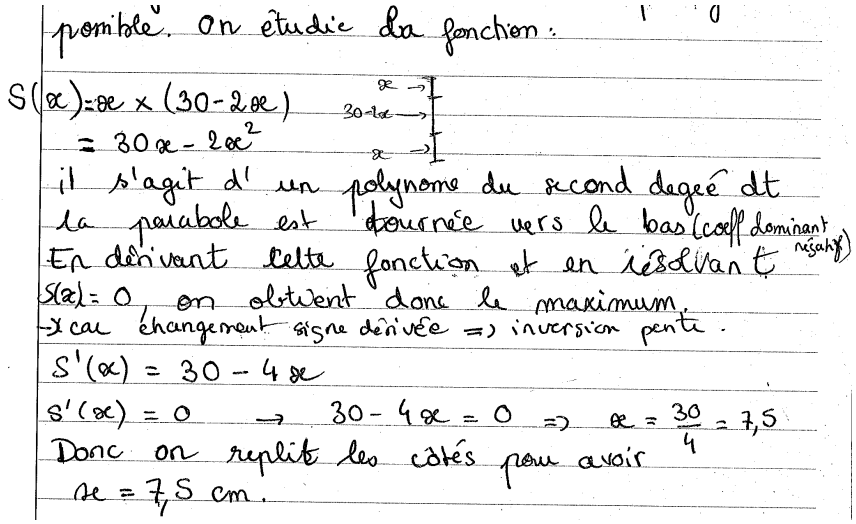


Figure 4 : Une fonction, calcul de la dérivée, recherche des points critiques.

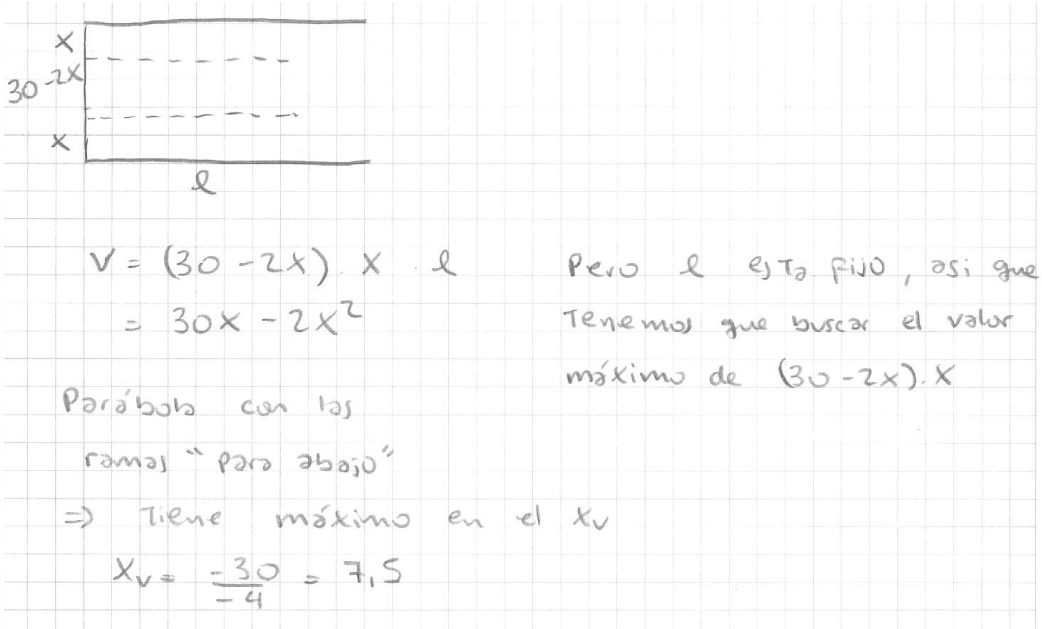


Figure 5 : une fonction quadratique, recherche du sommet.

Mais, dans les autres groupes, où l'enseignement n'a pas (encore) été standardisé, le travail sur ce type d'énoncés, les réponses sont très diverses. Tout d'abord il y a eu des réponses éloignées des attentes :

- Longueurs équitables des trois côtés, 10 cm chacun : 5 étudiants ;
- Il n'y a aucune variation, tout est constant : 4 étudiants ;

- Un pliage extrême, le plus petit (voire plus grand) côté latéral possible, mais avec la contrainte d'avoir des côtés latéraux de longueurs non nulles pour que l'eau restent dans la gouttière : 5 étudiants ;
- Un étudiant, L27, propose une pyramide sans comprendre la géométrie de l'énoncé (pour avoir un tuyau ?) ;
- Un étudiant, 1PC24, dessine le toit en expliquant la force de l'eau qui coule.

La plupart des autres étudiants (surtout de 1PC et 2PC) ont dessiné des sections de la gouttière en calculant des valeurs et en s'approchant par essais-erreurs de la solution. Ils en restent essentiellement à la géométrie et au calcul de grandeurs. Mais quelques autres (tous de L3) ont eu un travail intéressant, efficace, correct et divers (voir annexe). On peut alors, à partir du travail mathématique effectué, faire des inférences sur les apprentissages en lien avec certains objets mathématiques puisque certains utilisent des fonctions, d'autres non, certains s'appuient sur des tables de valeurs ou des graphiques, avec un possible usage de la calculatrice.

Ainsi, selon l'institution où l'on se place, on peut avoir soit une diversité du travail mathématique, qui est donc à prendre en compte, soit une conformité à un travail standard, sans doute inévitable, dans une certaine mesure, pour une institution.

En conséquence la question de savoir comment choisir et comment faire vivre un travail mathématique se pose. Un travail mathématique qui soit utile, faisable, consistant, permettant les apprentissages. La théorie des ETM donne des pistes et, surtout, des moyens d'action pour enrichir, affiner, améliorer l'enseignement et, on l'espère, l'apprentissage.

Discussions et questions ouvertes[8]

Pour étudier le travail mathématique, on élabore une théorie qui permet d'identifier le travail mathématique à l'aide des Espaces de Travail Mathématique. Des choix sont faits, guidés par les observables produits au cours du travail mathématique. L'ETM est ainsi un nouvel objet, produit de la didactique, qui a pour ambition l'étude du travail mathématique.

Mais une question cruciale se pose : L'ETM est-il fidèle au projet initial de comprendre le travail mathématique ?

On peut commencer par se poser la question de la qualité des données. Dans notre premier exemple, la chronologie pourrait-être mieux cernée par des données vidéos. Ainsi, pour le tracé de la droite d1, avec une vidéo on pourrait vraisemblablement identifier si ce tracé était motivé pour la justification ou pour la mesure. Des interviews permettent également d'avoir des éléments supplémentaires. Mais ce discours est différé, comme le discours de Francis pendant la mise en commun (cf. ci-dessus et la section sur « une méthode d'analyse du travail personnel des élèves en géométrie » en page 103 de ce

[8] Dans cette section, j'expose des idées et des questions que je me pose personnellement, j'utilise donc la première personne.

cahier), et, de plus, cela ne peut pas être suffisant de manière systématique. Il y aura toujours des limitations, des zones d'ombre[9].

D'un autre côté, le choix des éléments considérés dans les ETM entraîne inévitablement des limites à la théorie. Mais d'une part, ces éléments constitutifs de la théorie sont suffisants pour de nombreuses études, la théorie est suffisamment complète et opérationnelle pour rendre intelligible le travail mathématique. Et d'autre part, dans le cas où un élément supplémentaire serait à considérer, rien n'empêche de l'intégrer dans l'étude, la théorie des ETM est suffisamment souple pour cela.

La question de l'apprentissage est, évidemment, importante. Dans les deux exemples précédents, l'analyse systématique du travail mathématique par la théorie des ETM permet de dégager des résultats en termes d'apprentissage. Mais il s'agit de résultats généraux, provenant de ce qu'un étudiant montre de son ETM personnel à un moment donné, sur une tâche donnée. Il est possible de dépasser ce caractère statique en étudiant l'évolution de l'ETM avec le temps et en diversifiant les tâches.

Mais je pense que les ETM permettent d'aborder plus finement la question de l'apprentissage. Il est en premier lieu assez naturel de penser aux genèses, puisque c'est à travers les genèses que la théorie prend en compte l'évolution des ETM personnels. Plus généralement, il me semble que les interactions entre les éléments de l'ETM jouent un rôle dans l'apprentissage. Il faudrait étudier l'influence de ces interactions dans l'apprentissage. Il s'agit d'une question difficile que l'on pourrait aborder par le travail mathématique et l'élaboration de tâches spécifiques. On pourrait alors tenter de provoquer certaines interactions entre les composants de l'ETM afin de favoriser un certain type de travail. Il reste la question des liens entre travail mathématique et apprentissage.

Et si l'on en revient aux genèses, il me semble qu'il y a un manque de compréhension de ce qu'elles sont. On les utilise dans les analyses, mais qu'est-ce qu'une genèse ? Je pense qu'un rapprochement entre la théorie des ETM et la TA-DM (Théorie l'Activité en Didactique des Mathématiques, voir le texte de Vandebrouck de ce cahier) permettrait de mieux comprendre la nature des genèses, de mieux les définir.

On peut en effet penser qu'un tel rapprochement serait possible, et c'est un souhait personnel, en particulier pour les indices suivants :

- En TA-DM, on ne s'intéresse pas seulement à la production finale mais aussi aux activités mathématiques autour de cette production, pour ensuite inférer des apprentissages possibles. Ainsi, dans les deux théories, on considère, avec une centration sur les tâches (Flores González, 2019), la dualité processus/but à atteindre. Mais il est à noter que la visée de la TA-DM est d'atteindre les apprentissages, la théorie des ETM pourrait s'enrichir de cette visée (cf. ci-dessus les questions sur l'apprentissage).

[9] Ces restrictions ne sont pas propres à la théorie des ETM et sont des limitations qui sont prises en compte dans l'analyse cognitive de tâches.

- Les deux théories s'intéressent à la richesse : des activités provoquées par l'enseignant et du travail mathématique.
- Les actions sont au centre des deux théories (récemment dans les ETM avec le travail de Kuzniak et Nechache) et permettent d'identifier soit l'activité mathématique, soit le travail mathématique.
- La notion d'activité peut-elle permettre d'expliquer le fonctionnement du diagramme dans les analyses du travail mathématique d'un sujet ? et plus spécifiquement la nature des genèses ?
- La notion d'ETM peut-elle aider à mieux structurer les analyses en TA-DM ? comme par exemple la notion de relief, avec la prise en compte des dimensions de l'ETM, en système (par exemple, en TA-DM, pourquoi la dimension instrumentale n'apparaît-elle pas explicitement dans le relief ?).
- Les itinéraires cognitifs, la conversion en activités mathématiques des scénarios d'enseignement, sont en général hors d'atteinte, car trop complexe à expliciter. Mais l'idée est proche de la notion d'ETM idoine. Cette notion d'ETM idoine constitue-t-elle un intermédiaire possible, atteignable de manière raisonnable et progressive.
- Peut-on voir un lien entre la conceptualisation visée et l'ETM de référence ?

Références

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16.3, 349–382.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5 -53.

Flores González, M. (2019). L'activité et le travail mathématique dans une tâche géométrique, In Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P. R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (Eds). (2019), *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (ETM6, 13-18 de diciembre 2018). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso 533-543.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, volume 30, número 54, 1-22.

Guzman, I. & Kuzniak, A. (Eds) (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français. Cahier de Didirem Spécial n°6, IREM Paris 7

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 283–312.

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.

Kuzniak A., Montoya Delgadillo E., Vandebrouck F. & Vivier, L (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction, In Y. Matheron, G. Gueudet & al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques*, Brest, août 2015, 47-66, La Pensée Sauvage.

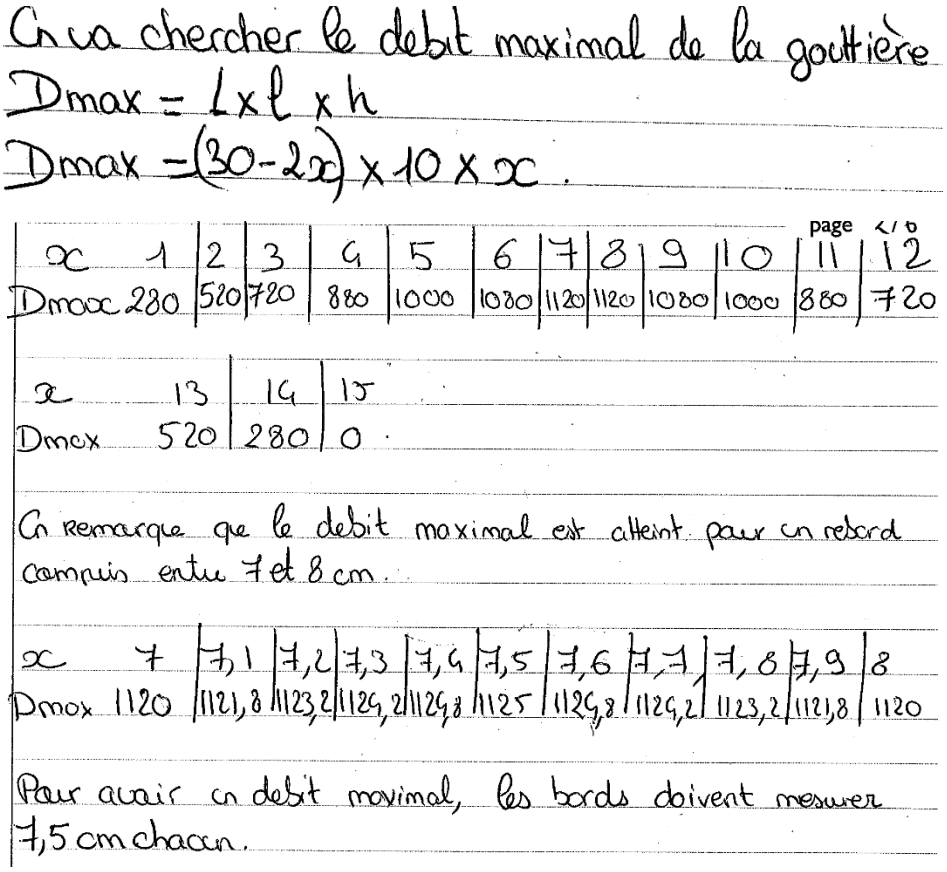
Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2018). Le terrain d'Alphonse ou les infortunes de la mesure. 45e colloque de COPIRELEM, Blois, juin 2018

Montoya Delgadillo, E., Viola, F. & Vivier, L. (2017). Choosing a Mathematic Working Space in a modelling task: the influence of teaching. Dooley, T. & Gueudet, G.. (Eds.) (2017). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 10, February 1 – 5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME, 956-963.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, 48(6), 739-754.

Annexe : quelques productions d'étudiants pour le problème de la 'canaleta'



On va chercher le debit maximal de la gouttière

$D_{max} = L \times l \times h$

$D_{max} = (30 - 2x) \times 10 \times x$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D_{max}	280	520	720	880	1000	1080	1120	1120	1080	1000	880	720

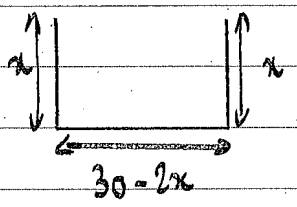
x	13	14	15
D_{max}	520	280	0

On remarque que le debit maximal est atteint pour un retard compris entre 7 et 8 cm.

x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8
D_{max}	1120	1121,8	1123,2	1124,2	1124,8	1125	1124,8	1124,2	1123,2	1121,8	1120

Pour avoir un debit maximal, les bords doivent mesurer 7,5 cm chacun.

Figure 6 : utilisation d'une formule (pas explicitement une fonction), tabulation de 1 en 1 puis de 0,1 en 0,1 entre 7 et 8.



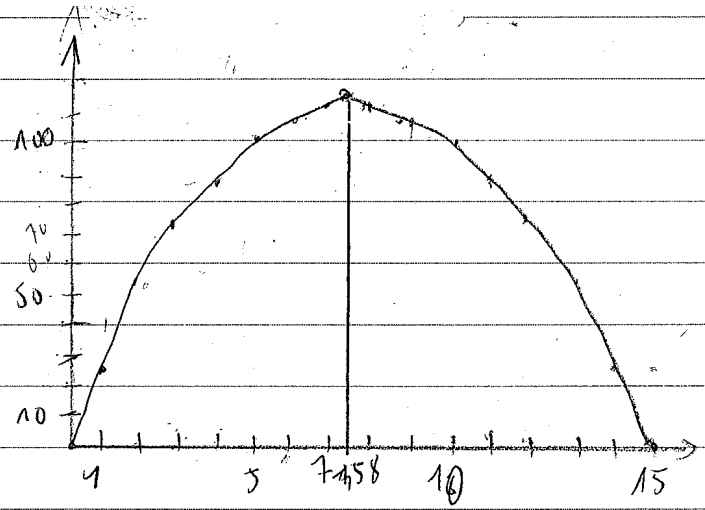
On ne connaît pas exactement la longueur de la gouttière. Intéressons-nous alors à l'aire de l'eau lorsqu'on coupe la gouttière transversalement.

Aire $= (30-2x) \times x$.

$f(x) = (30-2x)x$

On a $x \in]0,15[$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0	28	52	72	88	100	108	112	112	108	100	88	72	52	28	0



$x = 7,5$. $f(x) = 112,5$

$x = 7,5$ est la longueur du rebord pour avoir un débit maximum.

Figure 7 : utilisation d'une fonction, tabulation de 1 en 1, représentation graphique.

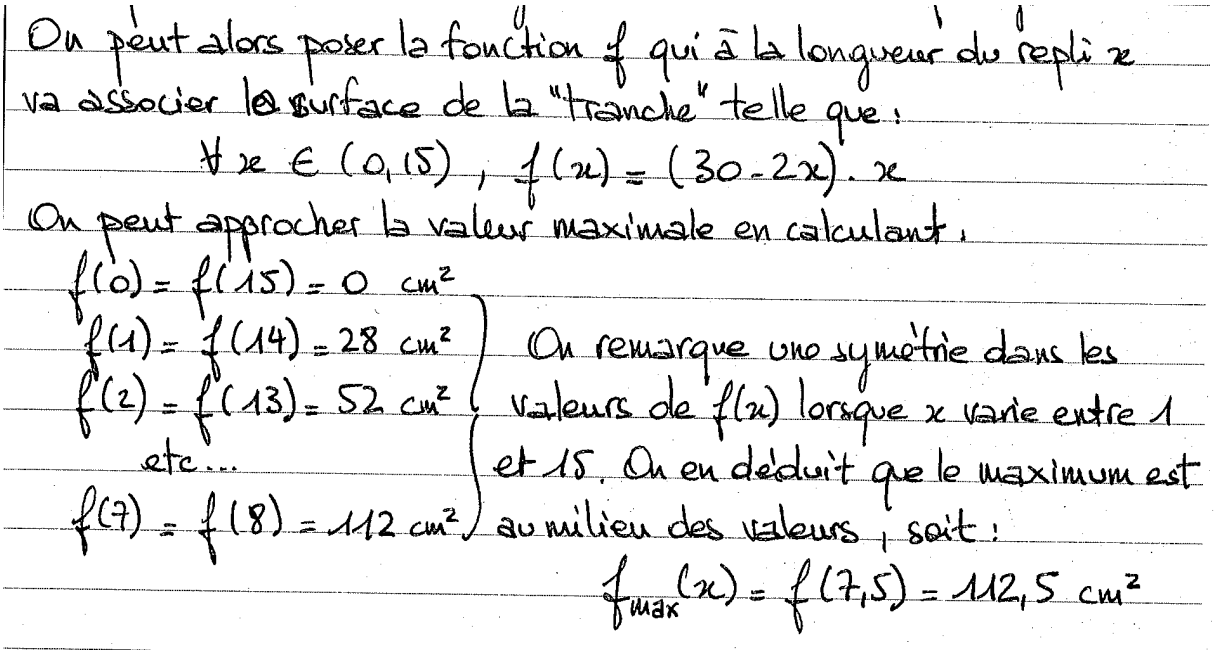


Figure 8 : introduction d'une fonction (formalisée), calcul des valeurs de 1 en 1, remarque d'une symétrie pour répondre.

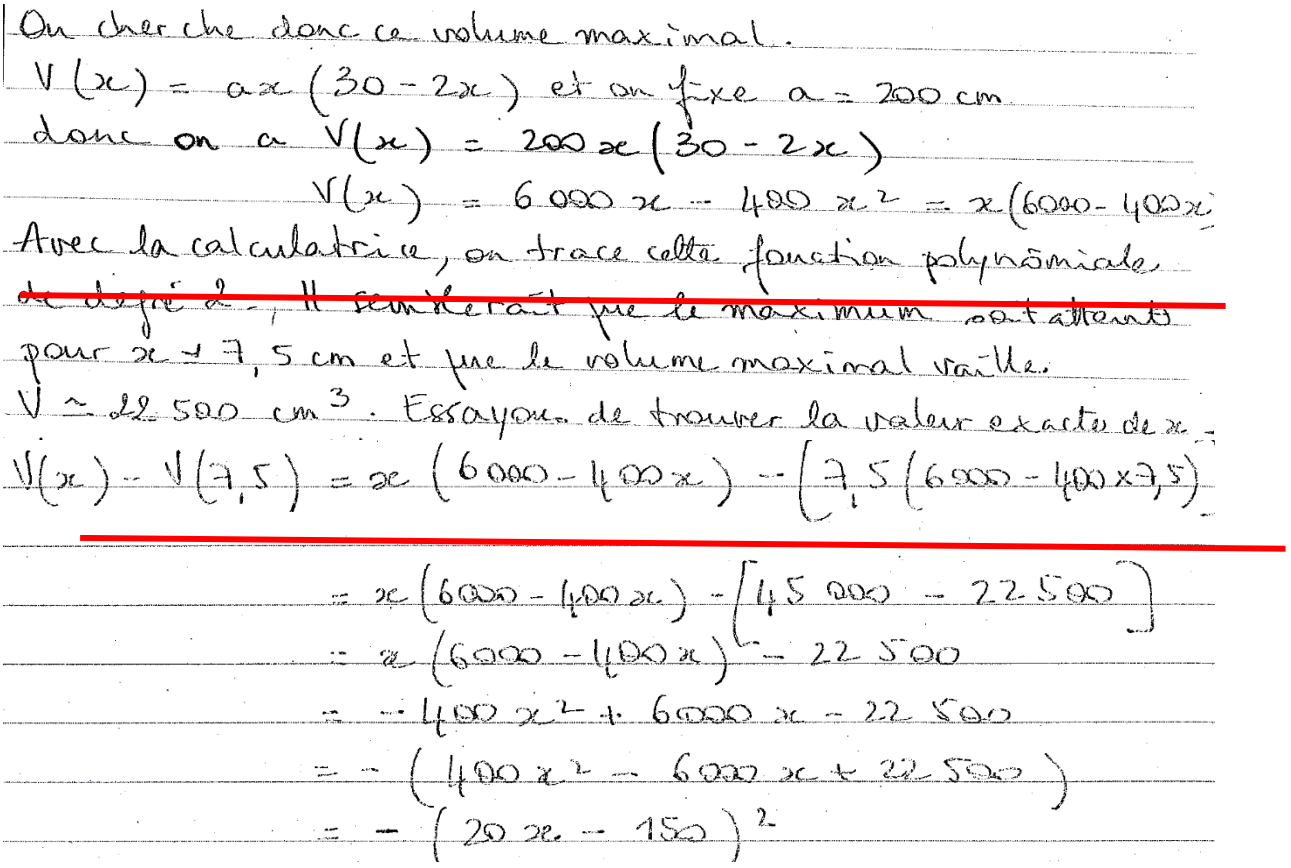


Figure 9 : utilisation d'une fonction, conjecture à la calculatrice graphique, justification algébrique en appui sur un principe variationnel.

Atelier 1 : la notion de tangente

Philippe Hoppenot[1] et Laurent Vivier[2]

[1]UEVE Paris Saclay, LDAR (EA 4434), France

[2]Université de Paris, LDAR (EA 4434), France

Présentation

Cet atelier proposait de travailler sur un corpus pour une tâche sur la notion de tangente qui a été proposée à deux classes de terminale ES d'un lycée de Rouen et une classe d'étudiants de DUT GEII à l'IUT d'Evry. Les étudiants avaient environ 50 min pour répondre à deux énoncés dans le cadre d'un projet de recherche avec l'université de Würzburg (Allemagne). Pour le deuxième énoncé, sur la notion de tangente, ils disposaient de 15 min pour résoudre la tâche, puis de 5 min pour répondre à la question (au verso de la feuille) : Quelles sont les incertitudes ou les difficultés que vous avez rencontrées en résolvant ces exercices ? Un entretien avec certains étudiants a suivi la semaine suivante.

La tâche

La tâche consiste à déterminer des tangentes pour une fonction non usuelle au niveau du lycée et qui était donné dans les registres algébrique et graphique. Un travail est possible dans chacun de ces registres qui présentent des aspects différents de la notion de tangente. Avec le caractère non standard de la tâche dû à la fonction proposée, l'objectif est de favoriser une articulation entre les deux registres, l'un permettant un contrôle du travail dans l'autre, notamment par la visualisation.

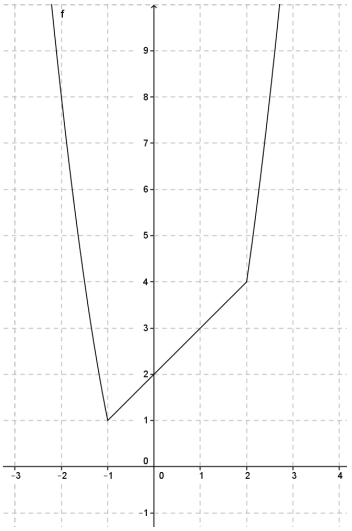
La tâche, dont on donne une analyse ci-dessous, a été proposée aux étudiants sur une feuille A4 où le graphique occupait environ 1/3 de la hauteur de la feuille :

On rappelle que la valeur absolue d'un nombre réel A est notée |A| et est définie par :

$$\begin{cases} |A| = A & \text{si A est positif} \\ |A| = -A & \text{si A est négatif} \end{cases}$$

Soit la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^2 + |2 + x - x^2|$.

Déterminer, si possible, les tangentes à la courbe aux points suivants : A(1 ; 3), B(2 ; 4) and C(3 ; 13).



Les questions de l'atelier

L'objectif de l'atelier était de réfléchir à une analyse *a priori* de cette tâche et d'analyser les productions de deux élèves de terminale ES et de deux élèves de DUT. Nous disposons des réponses écrites et d'une transcription de l'entretien. Dans l'atelier, le travail était organisé en petits groupes avec des mises en commun.

Deux questions étaient posées aux participants de l'atelier :

1. Faire une analyse *a priori* de la tâche pour caractériser le travail mathématique et les activités potentielles.
2. Faire une analyse de quatre productions d'élève en essayant de mettre en évidence les relations entre la partie algébrique et graphique, du point de vue des Espaces de Travail Mathématiques (ETM) et de la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TA-DM).

L'objectif était, en s'appuyant sur les deux registres de la tâche, d'identifier le travail mathématique attendu et effectué par les étudiants, leurs activités potentielles et possibles, puis d'avancer sur de possibles liens entre les deux théories. Nous ne rendons pas compte dans ce qui suit du travail de l'atelier, mais nous espérons que le corpus et les analyses qui suivent permettront au lecteur intéressé de poursuivre la réflexion.

Analyse de la tâche

La tâche est donnée avec deux registres, algébrique et graphique. Les étudiants n'ont donc pas à penser à introduire un nouveau registre. En revanche, ils auront le choix de fournir un travail dans l'un ou l'autre des registres, de produire des conversions entre registres, éventuellement pour contrôler les résultats ou avancer dans leur travail.

Un choix possible concerne également l'usage, ou non, d'un artefact comme la calculatrice. Soit pour des calculs, formels ou arithmétiques, soit pour représenter graphiquement la fonction afin d'avoir un support dynamique (par exemple pour faire des zooms ou avoir accès au point C, hors graphique).

La question centrale de cette tâche, que ce soit dans le registre algébrique ou graphique, est celle de la visualisation pour une fonction non standard :

- visualisation d'une partie 'plate' (point A), visualisation d'un point anguleux (point B) ou visualisation du fait qu'un point est hors graphique (point C) pour le registre graphique ;
- visualisation de la valeur absolue pour le registre algébrique, ainsi que des polynômes du second degré, devant déclencher un travail de disjonction de cas (avec notamment l'aide, espérée, apportée par le rappel de la valeur absolue).

Ces différents cas entraînent des difficultés pour déterminer la tangente aux trois points demandés (équations de droites et/ou traces rectilignes sur le graphique). Les deux registres montrent des aspects différents de ces difficultés et la question est de savoir si des liens ou des articulations entre les deux registres sont effectués ou non par les étudiants. Quelles sont les

décisions prises par les étudiants ? Quels contrôles mettent-ils en œuvre pour cette tâche non standard ?

On donne à la suite des éléments plus précis sur les deux registres et leurs liens possibles, en s'autorisant une utilisation des deux théories, ETM et TA-DM, sans avoir l'ambition d'en proposer une articulation.

Registre algébrique

Le lien entre l'équation de la tangente et le nombre dérivé doit être a minima disponible. Il relève de la dimension **discursive**. La dimension **sémiotique** intervient au niveau de la visualisation des notations, en particulier de la valeur absolue. La question de la dérivée de la valeur absolue va se poser. A minima, on peut s'attendre à voir les élèves dériver les polynômes et conserver les valeurs absolues, dans une démarche purement **instrumentale** (en considérant que la dérivation d'un polynôme est routinisée). On relève un théorème-en-acte que les étudiants pourraient utiliser : « la dérivée de la valeur absolue est la valeur absolue de la dérivée », valable lorsque la fonction est positive. Ainsi, cela étant ici le cas sur $]-\infty,-1[$ et $]2,+\infty[$, ce théorème-en-acte donne la bonne tangente pour C, pas pour A et pour B uniquement la demi-tangente à droite. A maxima, les élèves peuvent trouver les deux polynômes définissant la fonction, les trois intervalles où la valeur absolue conserve un signe constant et reconnaître qu'une tangente à une droite est une droite. Dans ce dernier cas, un lien peut être fait avec la représentation graphique. On peut aussi penser à l'utilisation d'une calculatrice pour le calcul de dérivée pour l'obtention de l'équation de la tangente.

Registre graphique

Sauf pour le point C, un travail uniquement dans le registre graphique peut être réalisé avec des difficultés bien identifiées comme l'obtention d'une tangente à une courbe rectiligne ou en un point anguleux (voir par exemple Montoya Delgadillo et Vivier, 2016 ; Paez Murrillo, Montoya Delgadillo, Vandebrouck et Vivier, 2018). On peut aussi obtenir, par le graphique (papier ou sur calculatrice), des équations de droites.

Le point C étant hors du graphique, on ne peut pas exploiter le registre graphique à moins d'une exploitation instrumentale de la calculatrice pour (re)tracer la courbe (éventuellement reproduite sur la feuille de papier). On peut aussi obtenir la tangente (ou expliquer comment l'obtenir) en extrapolant la courbe pour atteindre la partie manquante : soit parce qu'on reconnait qu'il s'agit d'une parabole (avec ou non un bon traitement des valeurs absolues) soit parce que l'on visualise que la partie de droite de la courbe est une droite puisque cette partie est presque rectiligne.

La calculatrice peut aussi être utilisée pour calculer le coefficient directeur, par exemple avec une droite approchant la tangente recherchée, avant d'établir l'équation de cette tangente (exploitation successive des formules routinisée du coefficient directeur à partir de deux points, et de l'équation de tangente).

Pour le point A l'interprétation peut être directe avec le tracé de la droite ou le calcul du coefficient de la droite directement lu sur le graphique.

Pour le point B qui est plus problématique, il va falloir distinguer deux équations de droites. En cas d'erreur, c'est alors une visualisation (dimension sémiotique) qui permet aussi éventuellement de noter qu'il y a un souci avec la tangente (en particulier, si un premier travail a été mené de manière algébrique).

Dialectique entre les deux registres

On peut finalement mettre en perspective les approches graphique et algébrique. Ce ne sont pas forcément les mêmes dimensions de l'ETM qui prédominent suivant que l'on effectue le travail mathématique dans le registre algébrique, ou dans le registre graphique.

L'existence de rétroactions découlant d'un travail mobilisant à la fois le registre algébrique et le registre graphique est à prendre en compte. Par exemple, un mauvais traitement de la valeur absolue peut entraîner une erreur sur le nombre dérivé qui peut entrer en contradiction avec un résultat donné par l'interprétation graphique. Dans ce cas, l'élève peut être amené à reconsidérer le calcul initial. Plus généralement, on peut s'interroger sur la mise en relation du travail dans les deux registres où la nécessité d'une cohérence pourrait amener à une activité de contrôle du travail mathématique (elle embarque vraisemblablement un travail dans la genèse discursive). Nous nous focalisons dans les analyses des productions qui suivent sur les contrôles exercés par les étudiants pour vérifier leurs résultats et notamment sur les contrôles entre le travail algébrique et le travail graphique.

Analyses des productions d'étudiants

Etudiant n°1, IZC0, TES

IZC0 (Figure 1 et Annexe 1) place les trois points sur le graphique et calcule la dérivée de f en utilisant le théorème-en-acte et trouve trois équations de droites (avec quelques erreurs sur le terme constant), avec la formule correcte de la tangente, pour les points A, B et C. Ce travail est biffé. On peut penser que l'élève a eu une activité de contrôle car les droites trouvées ne rendaient pas compte de ce qu'est une tangente graphiquement (surtout pour A où la droite $y=3x$ coupe la courbe, car en B c'est un cas très particulier non standard et C est hors graphique). Il bascule alors vers un travail plus graphique avec la visualisation de deux parties rectilignes de la courbe : (AB) et (BC). Il obtient deux équations de droites : $y=x+2$ qui est correct et $y=x+9$ au lieu de $y=9x-14$. En B, il trouve deux candidats possibles pour la tangente (tangente à droite et à gauche) et conclut à une impossibilité de déterminer la tangente, vraisemblablement pour un problème d'unicité. Certaines de ces interprétations sont corroborées par l'entretien où il explicite la procédure qu'il utilise finalement pour déterminer les tangentes (voir Annexe 1). Durant l'entretien, il s'appuie sur sa production écrite en y ajoutant des précisions (Annexe 1).

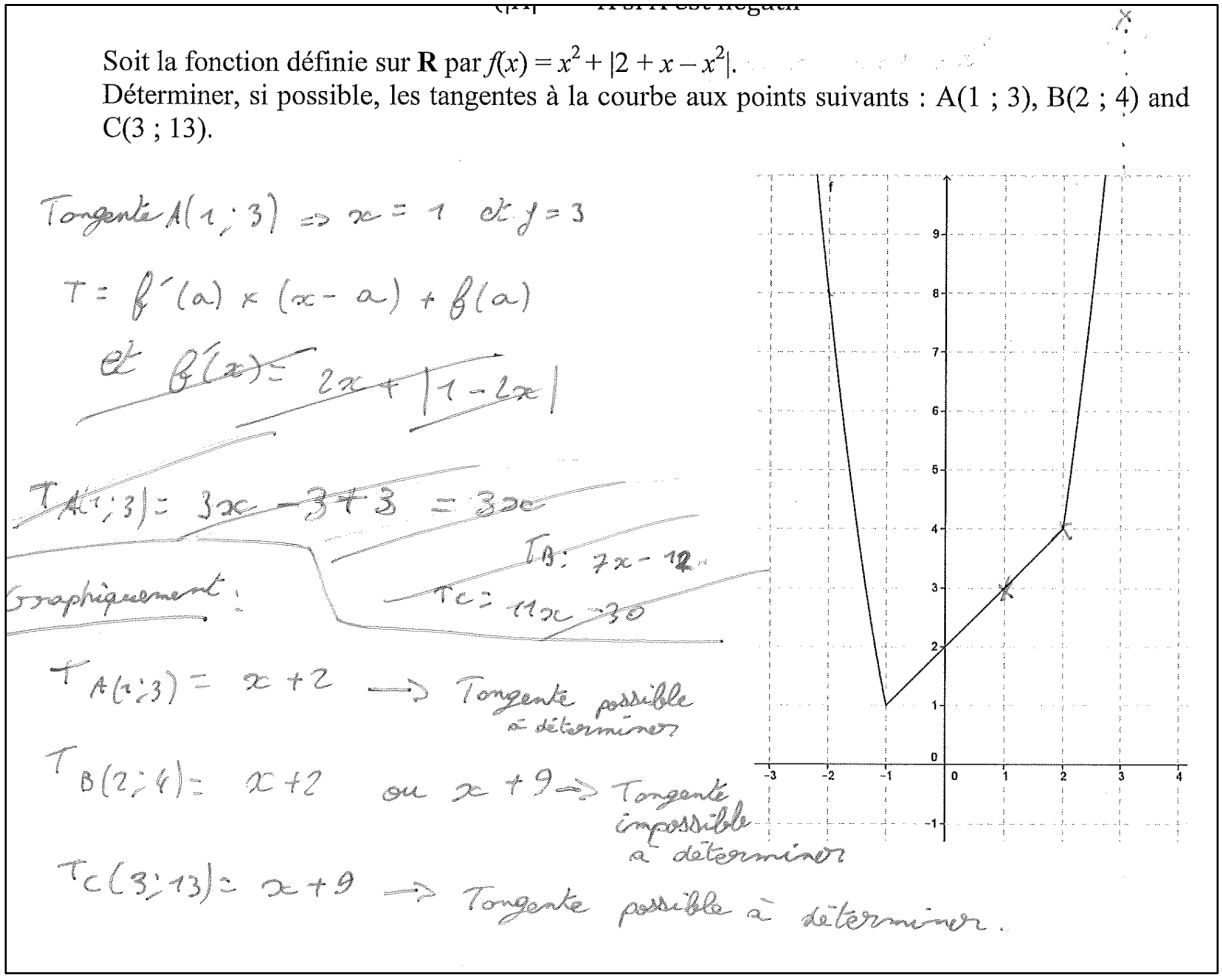


Figure 1 : Production écrite de IZC0 ; voir les modifications effectuées durant l'entretien en Annexe 1.

Etudiant n°2, VDR9, TES

VDR9 (Figure 2 et Annexe 2) procède comme IZC0, avec une confusion entre point et abscisse du point (écriture du type $f(A)$ ou $f'(A)$). Mais il ne semble pas avoir de contrôle et donne les trois équations de droite calculées comme étant les tangentes. En revanche, dans la question au verso, il émet un doute : « je ne suis pas sûr des tangentes ». Lors de l'entretien, on comprend d'où vient le doute. Il a effectivement eu une activité de contrôle instrumenté (il représente graphiquement la fonction f et la droite $y=3x$ sur la calculatrice). Il affirme que « elle passait à travers mais elle était pas tangente du tout » et que « Donc là on voit que c'est pas une tangente ». Néanmoins, cette activité de contrôle n'a pas été suivie d'une remise en question suffisante de son travail, contrairement à IZC0.

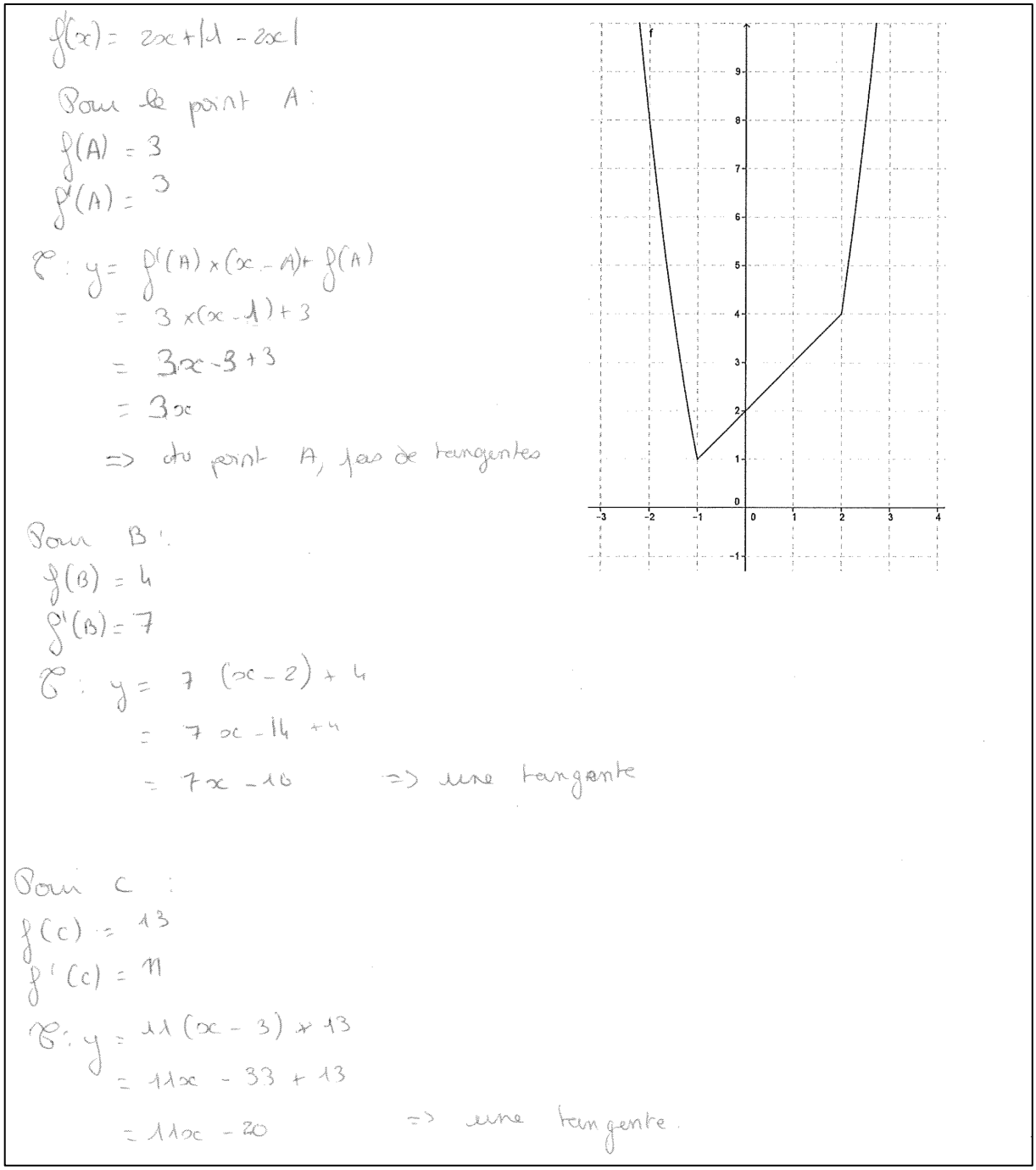


Figure 2 : Production écrite de VDR9, sans modification lors de l'entretien.

Etudiant n°3, KYA6, IUT

KYA6 (Figure 3 et Annexe 3) propose un travail uniquement graphique : en A, il trace à main levée la droite tangente en repassant sur la partie rectiligne de la courbe ; en B, il trace une droite de la sous-tangente qui semble être une sorte de moyenne entre les tangentes à droite et à gauche (ce qui laisserait penser qu'il y a une visualisation, inconsciente ou implicite, des deux demi-tangentes) ; il n'a pas vu le point C, peut-être parce qu'il est hors du graphique, on ne peut donc effectuer le même travail que pour A et B sur ce graphique. Il ne semble pas faire de lien avec le registre algébrique.

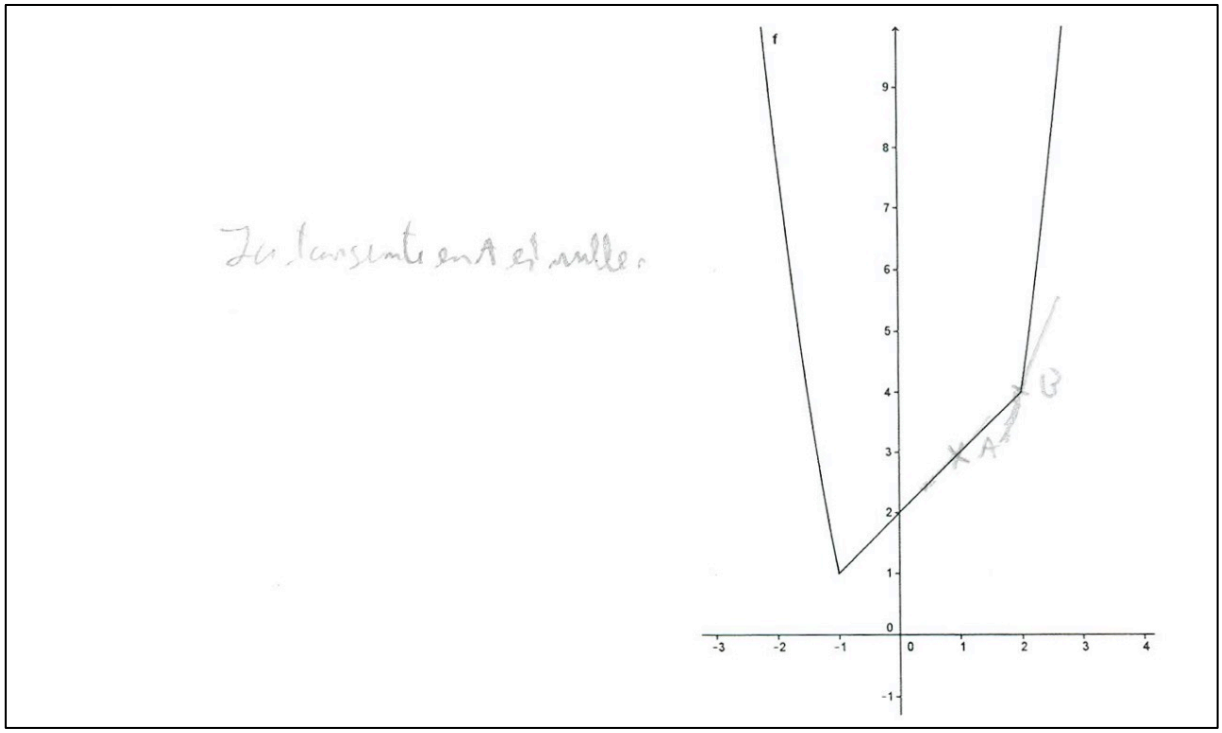


Figure 3 : Production écrite de KYA6, sans modification lors de l'entretien.

Etudiant n°4, NUM0, IUT

NUM0 (Figure 4 et Annexe 4) calcule les nombres dérivés aux abscisses des trois points A, B et C avec l'usage du théorème-en-acte sur la dérivation des valeurs absolues. En parallèle, il trace la tangente en A, correctement, et place le point de coordonnées $(2,f'(2))$. Les liens entre les deux registres pour la notion de tangente ne sont pas visibles. Il exprime ses difficultés au verso : « Les incertitudes sont […], Et sur le dernier exercice avec les tangentes où je bloque je n'arrive pas à les tracer. » L'entretien permet de lever une difficulté majeure pour cet étudiant puisqu'il identifie la dérivée avec la tangente, sans doute uniquement dans le registre algébrique. Cela peut expliquer que comme le point de coordonnées $(x_A,f'(x_A))$ déterminé est le point A, il n'y a pas d'incohérence avec la tangente graphique, alors que pour B le point de coordonnées $(x_B,f'(x_B))$ n'est pas le point B il ne peut rien en dire, d'autant plus qu'il visualise le problème du point anguleux (« Le B est sur une pointe », voir Annexe 4).

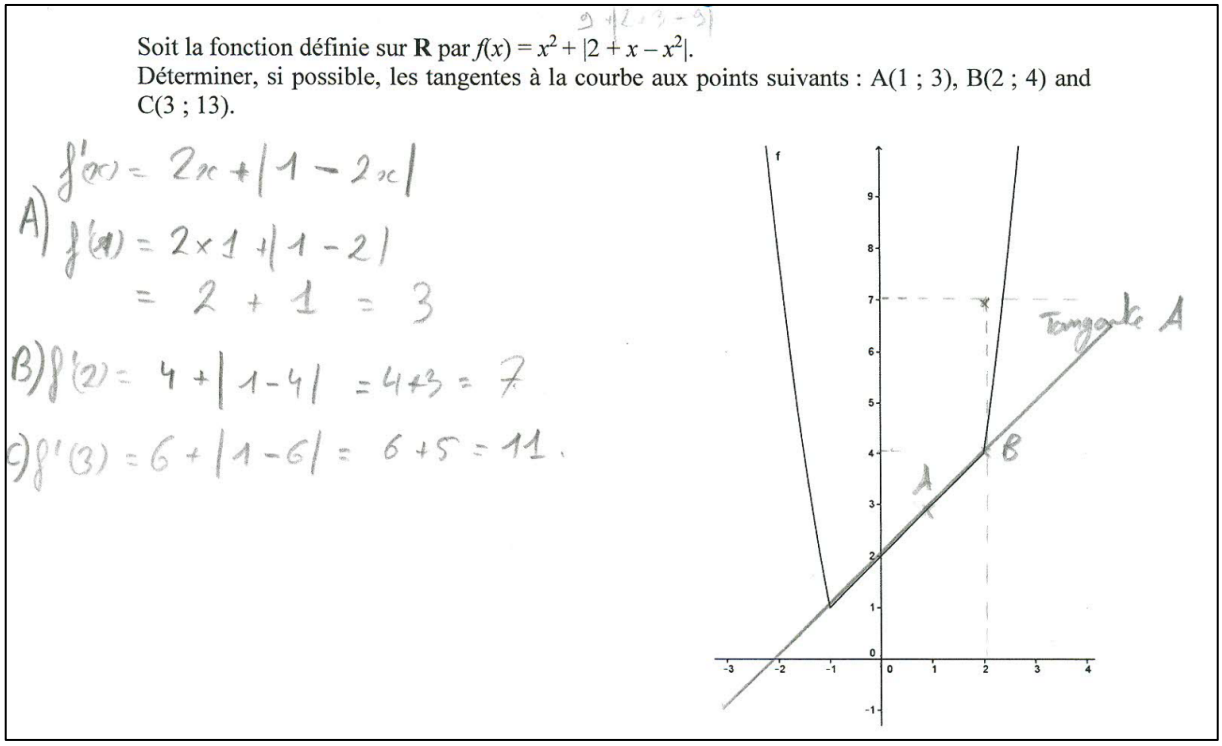


Figure 4 : Production écrite de NUM0, sans modification lors de l'entretien.

Conclusion

Ces quatre productions, avec les analyses rapides, montre l'importance dans le cas d'une tâche non standard d'un travail mathématique sur deux registres. Cela avait déjà été avancé dans (Block, Nikolantonakis et Vivier, 2012) au grade 1 pour les opérations sur les entiers. On retrouve ce résultat ici à un niveau plus avancé pour les fonctions. Ce sont les jeux entre les deux registres, possiblement instrumentés, qui permettent un contrôle pouvant mener à un travail correct. Ces jeux apparaissent donc comme essentiels et il semble important de travailler l'articulation entre registres. Cela étant, il est à signaler que, dans les cas non problématiques, il n'y a nul besoin de cette articulation avec, au mieux, une illustration. Ainsi, il semble important de travailler également des tâches non standard comme celle présentée dans cette étude.

Bibliographie

Block, D., Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2012). Registre et praxis numérique en fin de première année de primaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 17, 59-86.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, 48(6), 739-754.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R. E., Vandebrouck, F. & Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, Volume 4, Issue 1, 139–160.

Annexe 1 : Entretien de l'étudiant n°1, IZC0, Terminale ES

Production après entretien, IZC0

Tangente (15 min)

On rappelle que la valeur absolue d'un nombre réel A est notée |A| et est définie par :

$$\begin{cases} |A| = A & \text{si A est positif} \\ |A| = -A & \text{si A est négatif} \end{cases}$$

Soit la fonction définie sur **R** par $f(x) = x^2 + |2 + x - x^2|$.
Déterminer, si possible, les tangentes à la courbe aux points suivants : A(1 ; 3), B(2 ; 4) and C(3 ; 13).

Tangente A(1;3) => x = 1 et y = 3

T = f'(a) × (x - a) + f(a)

et f(x) = 2x + |1 - 2x|

T(1;3) = 3x - 3 + 3 = 3x

Graphiquement :

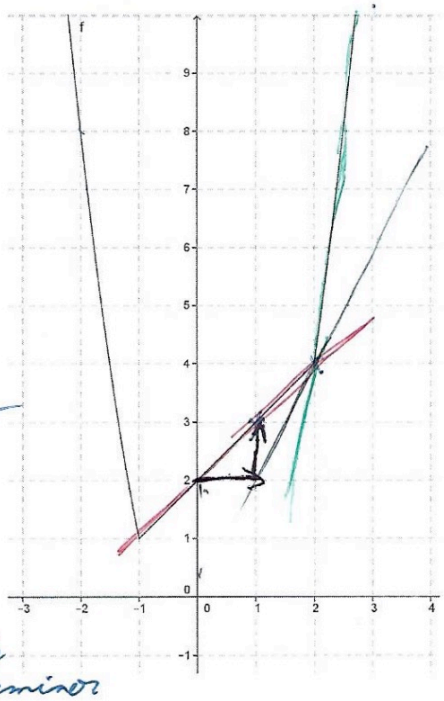
TA : 7x - 12

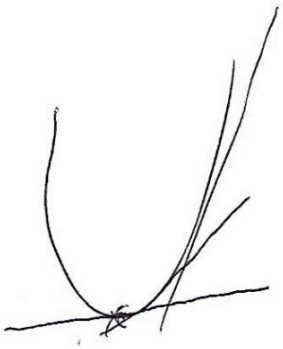
Tc : 11x - 30

$T_{A(1;3)} = x + 2$ → Tangente possible à déterminer

$T_{B(2;4)} =$ x + 2 ou x + 9 → Tangente impossible à déterminer

$T_{C(3;13)} = x + 9$ → Tangente possible à déterminer.





Extrait de l'entretien IZC0

P. Donc est-ce que tu peux m'expliquer pourquoi, comment tu as fait, qu'est-ce qui t'a gêné parce que tu as barré des choses puis après tu as changé donc raconte-moi

E. ben, en gros au départ j'ai voulu faire le les principes les techniques qu'on voit en cours, donc avec l'équation de la tangente $f'(a)(x-a)+f(a)$ – d'accord - et en fait j'ai essayé donc …

à raisonner comme ça en reprenant les les les valeurs abscisses et ordonnées de chaque point – ouais – en remplaçant et he quand j'ai fait ça je me suis rendu compte que les tangentes avaient un peu des têtes bizarres en utilisant cette fonction et en me disant soit j'ai fait des erreurs soit j'ai utilisé les mauvaises choses

P. alors quand tu dis 'les tangentes elles avaient une tête bizarre', laquelle t'a semblé étrange ?

E. ben par exemple pour he par rapport à celle du point A he en utilisant la technique qu'on voyait he enfin collège et tout on voit que pour un décalage en abscisse on augmente de 1 en ordonnée or là j'ai trouvé une tangente de 3*x* or 3*x* ça voudrait dire qu'en décalant de 1 en abscisse je montrais de 3 en ordonnée, or c'est pas le cas he graphiquement. Et du coup c'est pour ça que je me suis dit que bah c'est faux, ça ne peut pas être ça. Et après

P. d'accord, hee, t'as dit une technique du collège mais en réalité tu peux peut-être me tracer ton histoire de décalage de 1 et de 1

E. ouais //

P. je crois que je comprends mais ça m'aiderait à y voir un peu plus clair

E. ben c'est-à-dire que, en gros ben par rapport à la tangente là du point A qui se situe ici, on voit qu'il est sur cette phase-là de la courbe et, *x*, quand on augmente *x*A // on augmente // du coup *x* de 1, ben on voit que la courbe son son ordonnée augmente de 1 carreau aussi, du coup d'une une unité, du coup on voit que c'est ça va être une fonction affine qui va être *x*+quelque chose et là dans notre cas c'est *x*+2. Et c'est pour ça qu'après je les ai déterminées graphiquement pour être sûr d'avoir le le la bonne tangente

P. D'accord, donc là t'as la bonne tangente là ?

E. sur celle-là je pense que oui, - d'accord – sur celle-là ben je pense qu'il y a deux possibilités sachant qu'elle est entre deux deux, comment dire, deux phases de la courbe qui sont totalement différentes donc la tangente pour moi elle est indéterminable ou elle serait comme ça mais he graphiquement je ne sais pas le faire, enfin je peux pas l'avoir

P. elle serait comment du coup ?

E. bah he pfou

P. si t'avais à la tracer, tu la traces ou tu la traces pas ?

E. franchement je sais pas, mais pour moi, je la tracerais, si il faut, ce serait un peu comme ça

P. ah ! et pourquoi tu choisis comme ça ?

E. parce que ça c'est he après c'est souvent ce qu'on a par exemple en physique et tout, où c'est plus à l'œil et on peut déterminer que par rapport à la courbe souvent on se la représente de façon he, comment ça s'appelle, parabolique et du coup, on fait souvent des traits qui sont he légèrement parallèles à la courbe

P. en physique ?

E. en physique et math aussi, mais je sais que plus ou moins cette technique là je la fais en physique je suis un peu plus sûr de moi, he,

P. c'est quoi une tangente pour toi ?

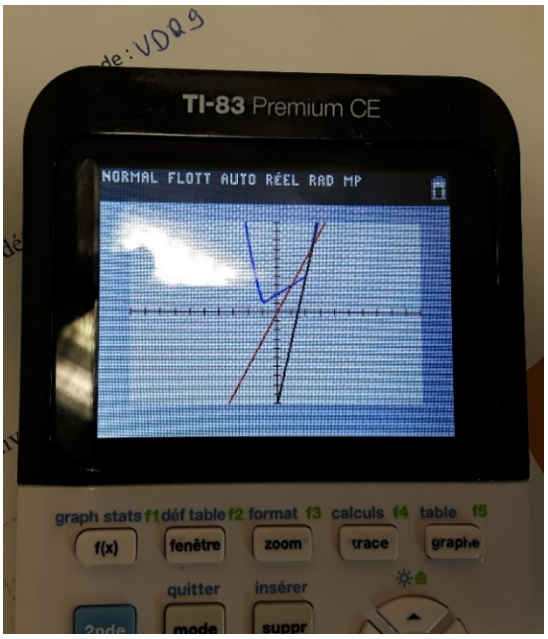
E. une tangente c'est he, comment dire, c'est au niveau d'un point c'est la le le, ah je sais pas comment dire ! en gros c'est la droite représentative de comment la courbe pourrait être si on partait de ce point et en faisant une ligne droite mais, enfin, je sais pas comment dire, par exemple lors d'une parabole hee c'est vers quelle direction le second point va être

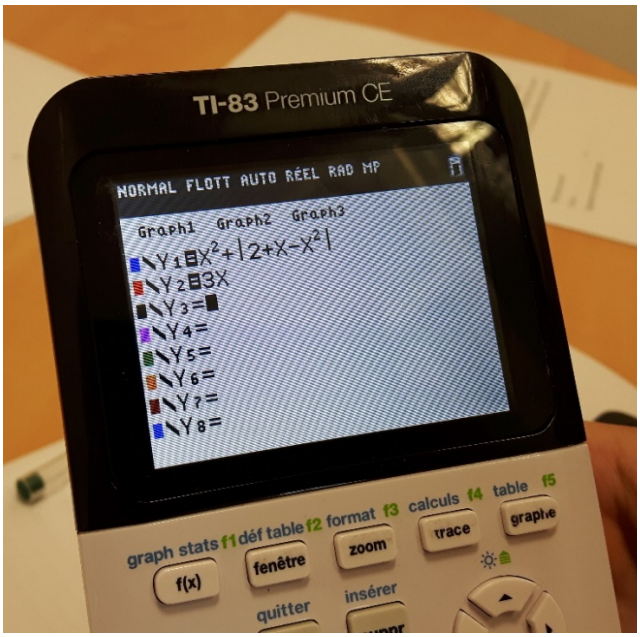
P. vas-y tu peux me dessiner ça ?

E. par exemple et -oui- on a une parabole comme ça -oui- et qu'on prend la tangente à zéro, la tangente elle va être comme ça parce que le point il est quasiment le prochain point donc celui à he dix puissance moins l'infini par exemple il va être quasiment sur cette tangente-là, et après, les points d'après ça va se décaler légèrement comme ça, puis comme ça et ainsi de suite -d'accord-. J'sais pas comme le dire mais, enfin je m'imagine en gros c'est ça touche un point et ça se rapproche à chaque fois de la courbe.

Annexe 2 : Entretien de l'étudiant n°2, VDR9, Terminale ES

Photos pendant l'entretien





Extrait de l'entretien VDR9

P. Je comprends à peu près ce que tu as fait ici hem tu peux aussi contrôler tes résultats
E. J'ai vérifié avec la calculatrice j'ai d'abord fait tous les calculs et après j'ai vérifié avec la calculatrice 'fin j'ai fait les calculs j'ai trouvé la fonction de la tangente [plus bas] enfin voilà [plus haut] et après j'ai rentré dans ma calculatrice pour voir où elle passait par rapport à ma courbe et la première elle passait à travers mais elle était pas tangente du tout
P. Heu OK tu as la calculatrice tu peux me la montrer ///
E. J'ai rentré cette fonction-là
P. Hm Hm /// Tu as aussi utilisé la calculatrice pour la tâche avant
E. Heu non
P. Pas du tout
E. Non donc après j'ai refait ça ///
P. D'accord
E. Donc là on voit que c'est pas une tangente
P. Pourquoi c'est pas une tangente
E. Parce que une tangente c'est sensé être collé à la courbe heu / une tangente d'une fonction c'est collé à la courbe de la fonction
P. Ha OK
E. Et là c'est complètement heu ça passe / ça touche la courbe mais ça la touche pas proche
P. OK //
E. Et celle-là elle est assez proche /// là elle est placée [passée ?] sur la courbe
P. Hm Hm
E. Donc pour moi c'est une tangente
P. Hm Hm
E. Ouais et pas celle-ci
P. OK comme ça tu n'as pas travaillé avec le graphique ici mais avec la calculatrice / d'accord / je pense / merci

Annexe 3 : Extrait de Entretien de l'étudiant n°3, KYA6, IUT

P. Et donc pour ce deuxième exercice alors pour le dernier tu as réussi à tracer les trois tangentes qu'on te proposait
E. Hein Ben j'ai pas fait la troisième je l'avais pas vu
P. En 1 t'as fait la tangente ouais en 2 /
E. Ben après j'ai heu d'après les souvenirs que j'avais des cours de mathématiques
P. Hum
E. c'était presque tout le temps comme ça qu'on traçait les intégrales //
P. Y'a une intégrale là
E. Enfin non pas les intégrales les tangentes
P. Ha bon d'accord // on a le droit d'avoir un lapsus / on avait parlé d'intégrale juste avant / OK donc là t'as tracé deux tangentes comme ça // OK
E. C'est juste que la troisième je l'avais pas vu
P. OK ce n'est pas très grave // Hem / OK / est-ce que t'as d'autres choses que tu pourrais // heu /
E. Heu non rien de spécial //
P. OK ben écoute merci beaucoup

Annexe 4 : Extrait de Entretien de l'étudiant n°4, NUM0, IUT

P. Tu as donné une réponse théorique. En pratique, comment est-ce que tu ferais avec la courbe ?
E. Euh ! Je tracerais la tangente au point T_0.
P. D'accord.
E. Voilà. Après … exactement comment je le ferais …
P. On peut tracer la tangente. Tu sais tracer la tangente ?
E. … Non ! … Non ! …
P. C'est-à-dire. …. C'est quoi la tangente à une courbe ?
E. C'est la dérivée au …
P. en un point.
E. En un point. … **C'est la dérivée en un point, mais comme je n'ai pas la fonction de la courbe…**
P. Donc là, pour les tangentes à cette courbe. Donc, je vois que tu as tracé une tangente au point A. C'est ça ?
E. Ouais !
P. Ok ! Qui a l'air d'être confondu avec la courbe.
E. Ouais, c'est ça !
P. D'accord. Et au point B, au point C ?
[Temps d'hésitation de la part de l'élève]
E. J'ai pas pu les tracer.
P. Ah !
E. **Parce que je confonds encore… Pour moi, tangente égale la dérivée.**
P. Hum, hum !
P. Et, pourquoi tu traces pas la tangente ?
E. Euh ! **Parce qu'en fait, je sais pas comment exactement comment elle va être ! La A, c'est intuitif un peu.**
E. Et pour lui, $f'(2)$ il doit valoir 7.
P. D'accord. Ok !
E. En passant…
P. Et quel est le lien entre $f'(1)$ et la tangente en A, $f'(2)$ et la tangente en B ?
E. Alors, $f'(2)$ il doit valoir 7 en passant par B.
P. Et, qu'est-ce que ça veut dire ?
E. Hum, hum !
[Temps de réflexion de la part de l'élève]
E. Non, je sais pas !
P. Tu sais pas.
E. Je sais pas trop. Mais, je crois que c'est le même problème que tout à l'heure. Le B est sur une pointe.

Atelier 2 : Étude du travail idoine, le cas de la simulation en probabilité

Blandine Masselin[1] et Macarena Flores González[2]

[1]IREM de Rouen, Université de Rouen, LDAR (EA 4434), France

[2]Université de Paris, LDAR (EA 4434), France

L'objectif de cet atelier est de montrer la manière dont nous étudions le travail mathématique en classe à l'aide de la théorie des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak et al., 2016), à travers un exemple concret d'une tâche emblématique pour le collège dans le domaine des probabilités. Nous nous centrons sur l'étude du travail développé par l'enseignant et son influence sur le travail mathématique des élèves en classe.

Ce compte-rendu d'atelier présente successivement le contexte de la recherche, un extrait du corpus contenant un extrait vidéo, des productions écrites du travail en groupe d'élèves, l'analyse de ces données, et une mise en commun des réflexions scientifiques émanant des analyses faites au cours de l'atelier.

Éléments de contexte

Les données sont issues du corpus de la thèse de Blandine Masselin (Masselin, 2019). Le travail de thèse porte sur la simulation en probabilité en cherchant à caractériser le travail mathématique de l'enseignant. Les questions de recherche interrogent les liens entre expérience aléatoire et simulation, simulation et modèle, et simulation et preuve.

Ici, nous nous intéressons à l'exemple du cas de l'enseignante Lucie. Reconnue comme enseignante experte, Lucie est, depuis 2014, membre du groupe « Activités » de l'IREM de Rouen. Elle anime, entre autres, des formations continues dans son académie. En décembre 2015 le chercheur (Masselin) s'est entretenu avec l'enseignante au sujet d'une ressource composée de trois versions différentes du jeu du lièvre et la tortue (MENRES-SEC, 2009, pp. 27-29). En mai 2016, l'enseignante teste le jeu dans sa classe de troisième en proposant sa propre version (voir figure 1). Après la séance de classe de cette enseignante, elle a préparé avec les autres membres du groupe IREM une formation continue courte pour des enseignants du second degré dans le domaine des probabilités en utilisant le jeu du lièvre et de la tortue.

L'extrait du corpus proposé dans cet atelier provient de deux séances d'une classe de troisième d'un collège rural dont Lucie est l'enseignante. Ces deux séances sont d'une durée d'une heure, entrecoupées par la pause méridienne. Il est demandé aux élèves consiste à résoudre la tâche par groupes de trois ou quatre élèves. Pour la suite de l'atelier nous nous concentrons sur un des huit groupes d'élèves, le groupe 6, noté Gr6.

Outils théoriques d'analyse

Un ETM_{idoine} permet de caractériser comment le savoir est enseigné dans une institution avec ses propres visées. Il dépend du travail des élèves mais surtout de celui de l'enseignant (car c'est lui qui est en charge de la planification), et de la mise en œuvre de la situation étudiée.

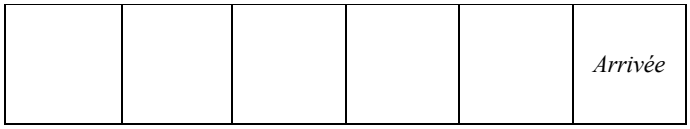
Masselin a ainsi utilisé en particulier le concept d'$ETM_{idoine\ effectif}$[1] (Masselin, 2019, p.51), concept utilisé afin d'analyser le travail effectif dans la classe de l'enseignante.

Lors de l'atelier, nous avons rappelé les trois dimensions ainsi que les plans verticaux définis par Kuzniak et Richard (2014) dans le diagramme de l'ETM car notre analyse consiste à décrire la circulation du travail mathématique effectué à travers les trois plans [Sem-Ins], [Sem-Dis] et [Ins-Dis] (Vivier, ce cahier, p. 55-70). Ce choix d'analyse permet de caractériser le travail de l'enseignant par le biais de l'étude des échanges entre l'enseignante et un groupe d'élèves, ou entre les élèves de ce groupe lors de la résolution de la tâche en classe. Nous rechercherons en quoi certains plans ne seraient pas activés ou évités, et à qui cela incomberait, l'élève ou l'enseignant.

La tâche

Nous avons présenté l'énoncé choisi par l'enseignante pour sa classe comme suit :

Une course du lièvre et de la tortue s'effectue avec un dé à 6 faces sur un parcours à 6 cases.



Cette course de déroule de la manière suivante :

- *A chaque manche de la course, on lance le dé :*
  - ❖ *Si le dé tombe sur 6, le lièvre atteint directement l'arrivée*
  - ❖ *Sinon, la tortue avance d'une case.*
- *Le premier à atteindre la case « Arrivée » gagne.*
- *On réalise autant de manche que nécessaire pour avoir un gagnant.*

Qui a le plus de chances de gagner cette course ?

Figure 1 : Énoncé de Lucie (Masselin, 2019, p. 98).

Kuzniak et Nechache (2016) définissent une tâche emblématique avec les trois critères définis ci-dessous :

- Être disponible dans les ETM de référence : bénéficier d'une reconnaissance qui témoigne de leur adéquation au travail mathématique visé par l'institution scolaire pour les élèves ;
- Être vivante dans les ETM idoines : faire partie des tâches qui sont effectivement proposées d'abord dans les ETM idoines potentiels définis par les manuels mais aussi et surtout dans les classes ordinaires ;

[1] L'$ETM_{idoine\ effectif}$ correspond à la mise en œuvre effective dans une classe de ce qui était prévu par l'enseignant.

- Être potentiellement porteuse d'un travail mathématique complet : ces tâches doivent permettre une circulation entre les pôles et les plans verticaux des ETM, assurant ainsi un travail mathématique complet (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016). (Kuzniak et Nechache, 2016, pp.145-147).

Ainsi, la tâche choisie est emblématique car d'une part elle figure dans des documents institutionnels (document ressource pour l'algorithmique) sous cette forme ou dans le contexte d'une *politique des naissances* (MENRES-LYC-DGESCO, 2012, p.17). D'autre part, cette tâche est vivante dans les ETM idoines car elle est proposée dans les manuels, dans les formations des enseignants. Le troisième critère qui correspond au travail mathématique complet sera précisé ensuite.

Nous avons livré quelques éléments d'analyse *a priori*, faisant ressortir deux modèles possibles pour la simulation numérique. Une course est ici considérée comme étant une partie du jeu qui s'arrête dès que l'un des deux animaux a gagné. La loi géométrique tronquée est un premier modèle où l'expérience aléatoire consiste à répéter dans des conditions identiques une épreuve de Bernoulli, ici de paramètre $1/6$, avec un nombre maximum de répétitions, ce maximum est ici de six. Dans ce modèle, le jeu s'arrête au premier succès (obtention d'un six) car le lièvre a alors gagné ; dans le cas où le nombre maximum de répétitions est dépassé (six), c'est la tortue qui gagne. Un deuxième modèle peut être considéré avec la loi binomiale. L'expérience aléatoire consiste dans ce cas à répéter autant de fois que de cases du jeu (six) des lancers de dé successivement, et de ne pas tenir compte du fait qu'un six soit apparu ou non au lancer précédent. Ainsi, même si le lièvre a potentiellement gagné, les lancers de dé se poursuivent. Intervient dans ce cas une épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer six fois un dé de façon identique et indépendante. Si *Y* est la variable aléatoire qui compte le nombre de six en lançant six fois un dé, *Y* suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/6$. La probabilité que le lièvre gagne $P(L)$ est égale à $P(Y \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$. Les deux modèles sont équivalents du point de vue mathématique.

Dans le contexte de notre étude, pour la simulation, deux artefacts numériques étaient envisageables *a priori* par l'enseignante : le tableur et le logiciel de programmation Scratch[2] introduit par les nouveaux programmes au collège (MENCOL, 2015).

Avec le tableur, le choix du modèle de la loi géométrique tronquée nécessite de réaliser des lancers conditionnés à l'obtention d'un six avec des tests SI (par exemple, en cellule C3 : =SI(B3<6 ; ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) ; " ")). L'emploi de la loi binomiale avec six lancers systématiques pour une course fait appel à six fois la saisie de =ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) puis un décompte du nombre de six obtenus (avec =NB.SI() et un test SI permettant de dénombrer si au moins un six est sorti lors des six lancers) comme indiqué en Tableau 1. Les deux modèles finissent par un test pour déclarer le gagnant.

[2] http://scratch.mit.edu/

Avec le tableur

1er choix de modèle (loi géométrique tronquée)

course	1er lancer	2e éventuel	3e éventuel	4e éventuel	5e éventuel	6e éventuel	gagnant	fréquence L
1	4	1	6				lièvre	1
2	3	5	6				lièvre	1
3	1	3	4	2	1	6	lièvre	1
4	6						lièvre	1
5	1	4	2	5	5	5	tortue	0,8
6	1	3	6				lièvre	0,83333333

La cellule C3 contient le test conditionnel suivant :

=SI(B3<6 ; ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) ; " ")

2e choix de modèle (loi binomiale)

Lancer	Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Lancer 4	Lancer 5	Lancer 6	Nombre de 6	Gagnant	Fréquence lièvre
Course 1	4	1	5	2	5	2	0	tortue	0,733333333
Course 2	6	2	2	3	6	2	2	lièvre	
Course 3	5	5	2	2	5	2	0	tortue	
Course 4	6	4	6	5	6	3	3	lièvre	
Course 5	1	4	4	5	3	4	0	tortue	

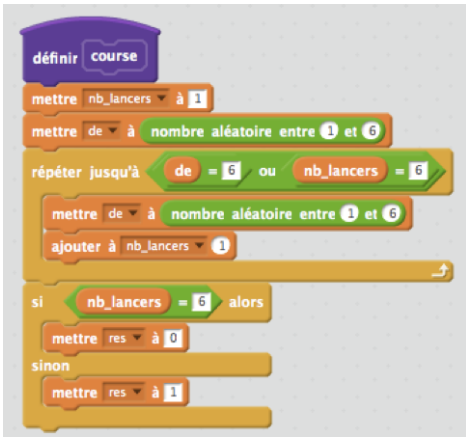
Les cellules H2 et I2 ont les formules suivantes :

H	I
Nombre de 6	Gagnant
=NB.SI(B2:G2;6)	=SI(H2>=1;"lièvre";"tortue")

Tableau 1 : Captures d'écran de simulation avec le tableur et Scratch.

Avec le logiciel Scratch

Modèle (loi géométrique tronquée)



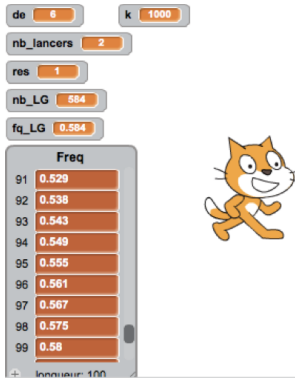


Tableau 2 : Captures d'écran de simulation avec le tableur et Scratch.

Le logiciel Scratch, avec ses fonctionnalités, permet une simulation avec un modèle congruent sémantiquement[3] aux règles du jeu telles qu'elles figurent dans l'énoncé (Tableau 2).

Nous avons mentionné les arbres comme ayant un statut spécial dans les pratiques de l'enseignante car elle mentionne dans l'entretien : « *Les arbres, pour les élèves, c'est, je n'ai pas les moyens de justifier les règles de calcul en troisième donc je ne les utilise pas* ». Elle exclut leur emploi dans sa propre classe.

Concernant l'analyse *a priori* du point de vu des ETM, au moment de l'élaboration de la simulation, l'approche fréquentiste nécessite, selon le design de l'implémentation, une entrée par l'activation de la dimension instrumentale (notamment un travail dans le plan [Sem-Ins]) avec l'élaboration de courses jouées en lançant des dés par exemple au tableur ou avec Scratch qui produisent des données (signes) à interpréter. Cette étape est suivie d'un travail dans le plan [Sem-Dis]. En effet, les résultats numériques obtenus à partir du lancer de dés numériques et traités à l'aide du tableur, demandent à l'élève d'organiser et d'interpréter ces données. Ceci l'amène à convoquer des définitions, théorèmes et propriétés, telles que la fréquence ou la loi faible des grands nombres du référentiel théorique, et ainsi finissant le travail dans le plan [Ins-Dis]. De cette façon, cette analyse *a priori* nous conforte dans l'idée que cette tâche revêt bien un caractère emblématique car elle permet d'activer les trois plans verticaux de l'ETM c'est-à-dire qu'elle permet un travail mathématique complet.

Lors du travail en groupe des élèves, en général, le travail de l'enseignant consiste à enrichir le travail mathématique, notamment du point de vue des dimensions sémiotique et discursive. Concernant la dimension sémiotique, on attend que l'enseignant soutienne la compréhension des règles du jeu (entre le registre langagier et un registre figural lié au parcours) et des procédures de résolution convoquant des arbres ou d'autres représentations du problème.

D'autre part, le rôle de l'enseignant devrait permettre de rapprocher deux types d'approches sur cette tâche, notamment l'approche laplacienne (par calcul des probabilités) et celle fréquentiste.

Le corpus analysé lors de l'atelier

Comme nous l'avons dit, nous nous intéressons aux données relatives à l'un des huit groupes (Gr6). Nous comptons ainsi avec les données suivantes :

- L'écrit 1 correspondant à la feuille de synthèse du groupe 6 (Gr6) produite en fin de 1ère heure (Annexe 1).
- Un extrait vidéo et son script (Annexe 2) qui montre le moment que nous analysons.
- L'écrit 2 (Annexe 3) qui est la production écrite par Gr6 en fin de deuxième heure.

En outre, des éléments de solution sont précisés en Annexe 4.

[3] Notons toutefois un premier *lancer* avant la boucle. Est-ce pour une difficulté de programmation ? On pourrait aussi affecter la variable « de » à 0 et ne pas compter le premier passage dans la boucle conditionnelle ou encore utiliser une autre boucle conditionnelle « faire… jusque… ».

Durant l'atelier, d'une durée d'environ une heure, la consigne donnée aux participants est la suivante :

À partir de ces données :

- *Repérer la circulation du travail dans l'ETM_{idoine}. Situer le travail mathématique (du groupe d'élèves/de l'enseignant) dans des plans verticaux.*
- *Si possible, identifier des moments clés dans le développement du travail mathématique dans l'$ETM_{idoine\ effectif}$.*

Apports théoriques et méthodologique pour les analyses

Un élément fort de cette analyse avec les ETM est de pouvoir repérer des effets de contaminations par l'enseignant dans le déroulement du travail des groupes d'élèves. Le travail initialement entrepris par les groupes d'élèves est orienté de manière intentionnelle dans le plan [Sem-Ins]. Petit à petit le travail de tous les groupes d'élèves converge vers le plan vertical [Sem-Ins]. En quelque sorte, le travail de preuve par approche laplacienne (avec des calculs de probabilité sans simulation) est écarté par l'enseignante.

En effet, si la modélisation permettait d'emprunter deux modèles probabilistes, la loi géométrique tronquée ou la loi binomiale, l'enseignante a, petit à petit, imposé le deuxième modèle au dépend du premier : la plupart des groupes d'élèves a abandonné une procédure impliquant la loi géométrique initialement choisie. L'énoncé choisi par l'enseignante comporte des jeux de registres (registre langagier pour décrire le jeu et ses règles mais aussi un parcours dessiné). Concernant les artefacts pour la simulation, elle a seulement envisagé que ses élèves puissent utiliser un tableur à partir d'une feuille vierge. L'élaboration de la simulation est entièrement renvoyée à l'élève. Les artefacts matériels (des dés) sont présents dans un pot sur le bureau de l'enseignante : elle n'impose pas d'expériences manuelles *a priori.*

De nouveaux apports pour la théorie des ETM

Le groupe Gr6 (mais aussi les autres) a révélé des moments critiques dans la circulation du travail, il nous a incité à étudier finement la circulation du travail dans l'$ETM_{idoine\ effectif}$ quand des élèves travaillent en groupe. Nous avons défini les concepts de blocage et rebond (Masselin, 2019, p.95).

- Un **blocage** est la manifestation d'un arrêt de la circulation du travail sur une tâche par l'élève empêché de le poursuivre.
- Un **rebond** est le développement nouveau du travail d'un individu ou d'un collectif après un arrêt momentané. En cela, il permet d'éviter que l'arrêt ne se transforme en blocage.

Ces notions ont été illustrées par la reconstitution du diagramme de circulation du groupe en lien avec l'écrit 1, l'extrait vidéo du groupe Gr6 et l'écrit 2.

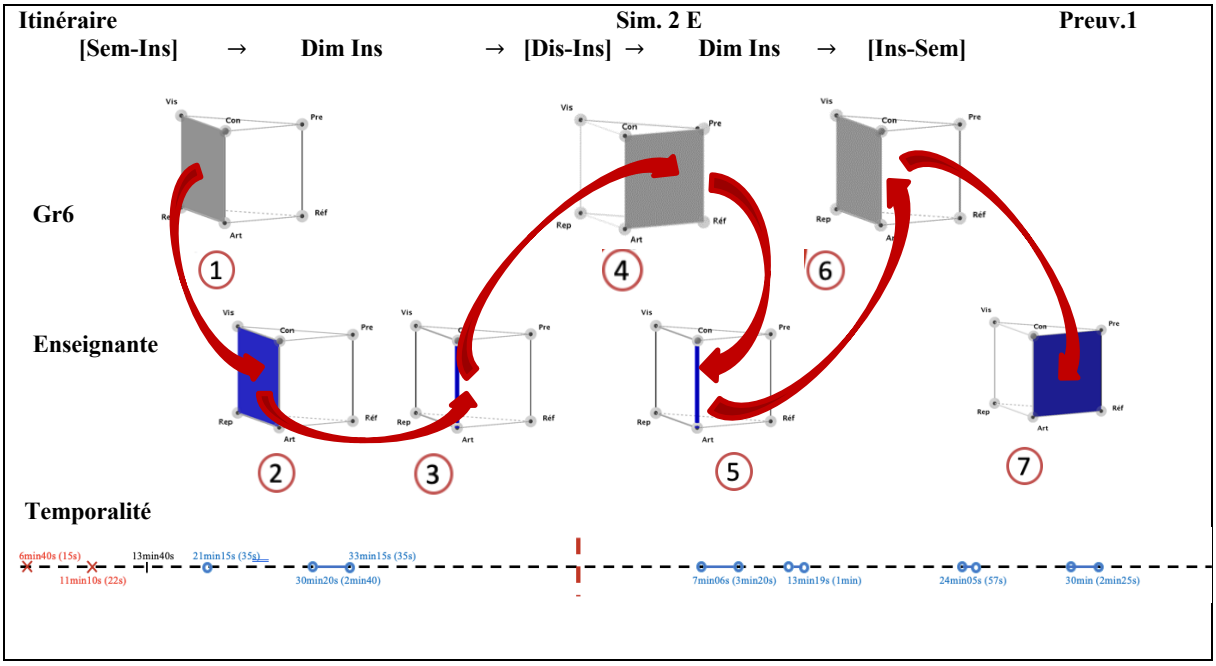


Figure 2 : Diagramme de la circulation du groupe Gr6, (Masselin, 2019, p.119).

Dans la figure 2, nous pouvons observer (en lisant de gauche à droite et en suivant ainsi la ligne de « temporalité » indiquée au niveau inférieur) que le groupe tente au départ d'élaborer une simulation au tableur : leur travail est initié dans le plan [Sem-Ins] (1ère vignette). Après un premier lancer de dé au tableur, il se retrouve bloqué pour relancer de manière conditionnelle un deuxième dé. L'enseignante impose alors le modèle de la loi binomiale en faisant structurer le fichier tableur avec six colonnes, insistant sur la dimension instrumentale (2ème et 3ème vignettes). Comme indiqué en figure 2 (4ème vignette), cela crée une résistance de la part d'une élève du groupe. L'élève en question, qui anticipe sur les résultats de la preuve expérimentale en se situant dans le plan [Ins-Dis], émet comme frein que cette modification changera les valeurs des probabilités. Nous identifions à ce moment précis un *blocage* du travail mathématique. L'enseignante n'avait *a priori* pas imaginé une telle simulation avec la loi géométrique tronquée au tableur avant la séance. Elle contraint le groupe à emprunter un modèle probabiliste lors de la simulation et intervient sur leur fichier tableur pour aider à automatiser l'obtention du vainqueur (5ème vignette de la figure 2) en indiquant d'utiliser la fonctionnalité NB.SI du tableur et provoque ainsi un *rebond* tout en activant principalement la dimension instrumentale (6ème vignette). Au final, l'enseignante incite à une validation dans le plan [Ins-Dis] (7ème vignette).

Outils méthodologiques pour analyser l'ETM$_{idoine}$

Nous avons réalisé un chronogramme pour pouvoir considérer le travail « dans son ensemble » et pas uniquement celui pour un unique groupe d'élèves. Le chronogramme est ainsi un outil qui permet un repérage chronologique des interventions de l'enseignant, et de l'évolution de celles-ci dans leur contenu mathématique, et ce au fil du temps. Par conséquent, il permet un travail fin d'analyse didactique quand un travail en groupe est décidé par l'enseignant dans sa classe. Il permet de repérer les natures successives des interventions de l'enseignant et leur impact dans le travail mathématique développé dans chaque groupe. Il est un indicateur de

l'actualisation des connaissances de l'enseignant durant la séance de classe après son passage dans chaque groupe d'élèves en train de résoudre une tâche.

Ce chronogramme nous permet, d'une part, de mieux comprendre le travail de l'enseignante sur la simulation et ses ajustements de modèles entrepris dans l'ETM$_{idoine}$ (durant les deux heures) ; et d'autre part, il permet aussi de relever la distribution du temps des interventions de l'enseignant dans chaque groupe et d'en préciser la répartition entre chaque groupe.

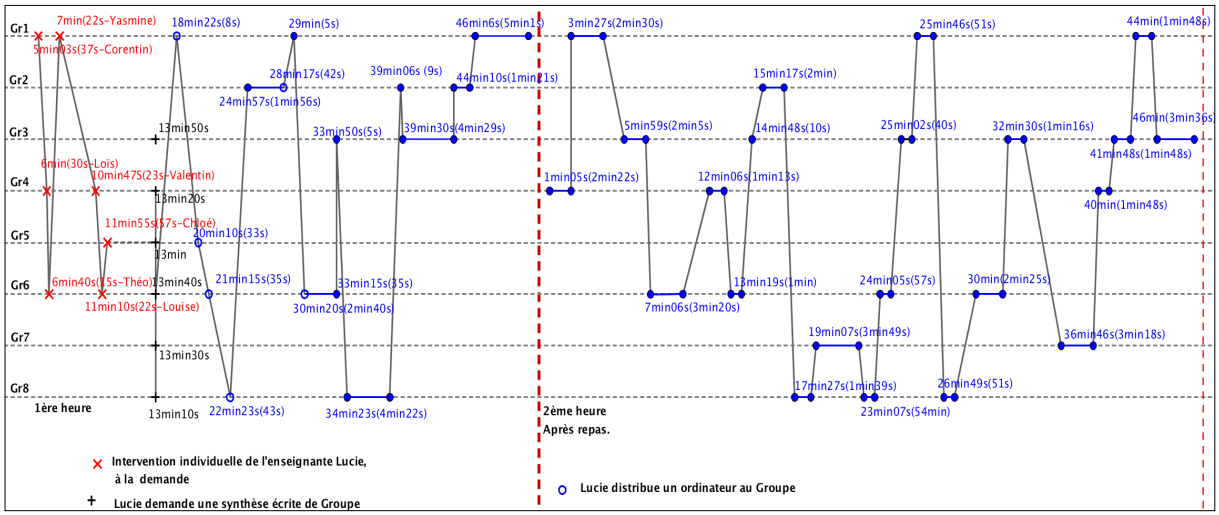


Figure 3 : Chronogramme de Lucie (Masselin, 2019, Figure 3.5, p. 107).

Dans la figure 3, les huit groupes différents dans la classe sont chacun représentés par une ligne du temps horizontale (droite en pointillé). Les premières interventions de l'enseignante sont repérées par des croix rouges quand il s'agit d'interventions très ponctuelles lors d'une phase de travail individuel (les 13 premières minutes). Les points bleus ou segments représentent les moments plus longs d'intervention de l'enseignant dans un groupe. Nous pouvons ainsi reconstituer les différents temps de passage de l'enseignant d'un groupe à l'autre et repérer les enchainements d'interventions.

Nous précisons l'étude du Gr6 en figure 4 avec un zoom du chronogramme général.

Photo extraite de la vidéo visionnée dans l'atelier (Lucie s'adresse aux élèves du Gr6).

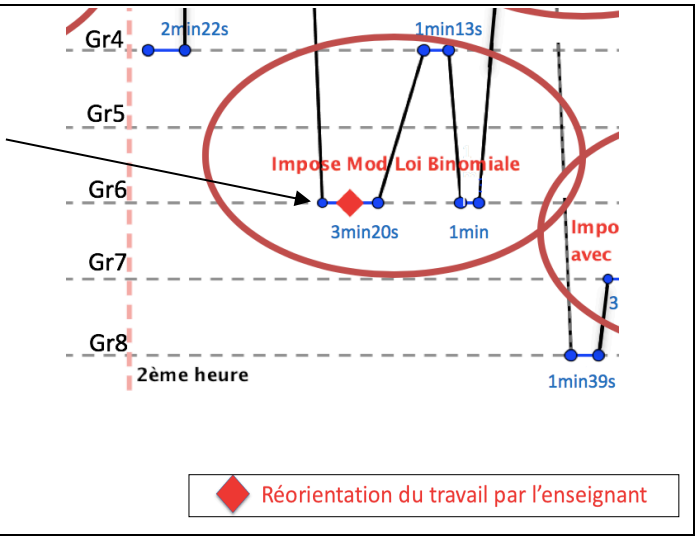


Figure 4 : Zoom sur la circulation du travail dans le groupe Gr6.

Dans l'extrait du chronogramme (figure 4), après 7min 06s, l'enseignante est intervenue dans le groupe Gr6 durant 3min20s et a alors imposé la loi binomiale lors de la tentative de simulation au tableur par les élèves à partir d'un fichier vierge. Cette intervention de 3min20s correspond à l'extrait-vidéo visionné en atelier. L'enseignante quitte le groupe, puis se rend dans le groupe Gr4 durant 1min13s avant de revenir pour un temps d'échange plus court dans le Gr6.

Plus globalement, l'élaboration du chronogramme a permis de mettre en lumière le fait que l'enseignante a réalisé des ajustements de modèles, et ce, de manière répétée dans plusieurs groupes. Ainsi cet outil méthodologique a montré un effet de contamination par l'enseignante du travail des groupes.

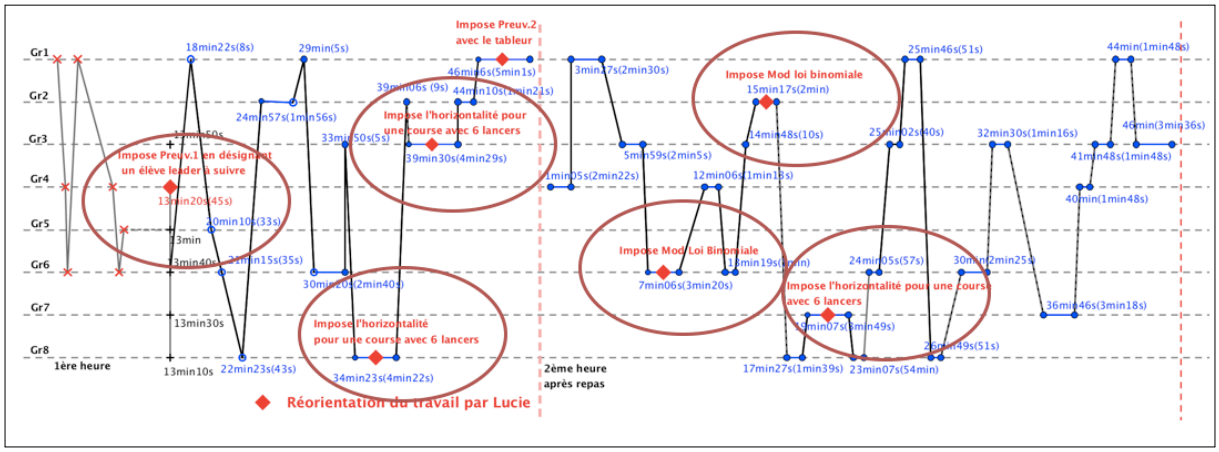


Figure 5 : Rebonds, Chronogramme, 1ère et 2e heure de classe (Masselin, 2019, p. 129).

Dans la figure 5, nous avons ainsi mis en évidence un **monitoring didactique indirect**[4] (Masselin, 2019, p.340) du modèle exercé par l'enseignante qui modifie le travail de six groupes d'élèves sur les huit groupes. Si elle ne semble *a priori* pas imposer initialement un modèle probabiliste, ce fait est visible dans le chronogramme présenté. Ce contrôle du modèle par l'enseignante prend sa source dans la préparation de sa séance, d'où la qualification de monitoring indirect dans ce cas.

Notre étude n'a pas uniquement mis en avant des blocages et rebonds dans l'ETM_{idoine} : elle a révélé l'existence de **confinements** (Masselin, 2019, p.95) sachant qu'un confinement dans l'ETM est défini comme la manifestation d'une restriction du travail de l'élève dans un plan, sur une unique dimension ou encore sur un modèle donné.

[4] Le monitoring didactique (Masselin, 2019, p.340) est une action de contrôle par l'enseignant du travail en classe, qui consiste à surveiller, en continu ou à intervalles rapprochés, par mesure d'indices, des procédures d'élèves ou des observations de phénomènes divers.

Commentaires des participants de l'atelier : liens entre la TO et la TA-DM

Lors du travail en groupe après la prise de connaissance du corpus, nous constatons que la tâche est rapprochée du « problème des partis » (Parzysz, 2009), problème datant de 1654, où une correspondance entre Pascal et Fermat concerne la répartition des mises lors d'un jeu de hasard interrompu.

Lors de l'interrogation sur les connaissances anciennes des élèves et sur l'objectif qui était visé par l'enseignante de la part des participants de l'atelier, nous avons constaté nous constatons que ces deux aspects sont importants pour préciser le contexte et ainsi pouvoir approfondir les analyses (ces données ne sont pas disponibles pour l'atelier).

Après l'analyse du corpus, plusieurs idées ont émergé. D'abord, à partir de l'extrait vidéo du groupe d'élèves effectuant une simulation au tableur, il est évoqué un manque de maîtrise de l'enseignante de la fluctuation. En effet, elle a créé une perturbation avec des lancers « pour rien », alors que les élèves ont tenté une simulation au plus près des règles du jeu dans leur premier fichier tableur. Les élèves faisaient un premier lancer 1000 fois, puis un deuxième conditionné à l'obtention d'un six au lancer précédent. Cela a amené les participants à mentionner que cette situation aurait été une bonne occasion d'aborder le concept de fluctuation, mais qu'au lieu de cela, l'enseignante a, de fait, imposé un autre modèle dans le fichier de simulation. Il a alors été souligné que le travail des élèves semblait contraint. L'extrait vidéo illustre ce moment clé de la séance en classe où l'enseignant fait opérer un changement de modèle aux élèves.

D'autre part, l'absence d'arbre est remarquée. Ce fait semble provenir d'une certaine interprétation de l'ETM de référence par l'enseignante influence l'ETM_{idoine} ou d'une conception que l'enseignante a de l'enseignement des probabilités.

Dans l'atelier il est relevé, dans la vidéo, des gestes et des expressions d'un scepticisme d'une des élèves du groupe après l'intervention de l'enseignante. La donnée de l'enregistrement vidéo est plus précis qu'un simple enregistrement audio, et ceci est rapproché de la Théorie de l'Objectivation (Radford, ce cahier, p. 19-41) qui prend en considération en particulier les gestes.

L'atelier a permis des analyses croisées et des tentatives de rapprochements entre le cadre des ETM et de la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (Vandebrouck, ce cahier, p. 43-54) autour des données travaillées. Ainsi une possibilité de liens entre TA-DM et ETM semble possible afin d'enrichir l'étude dans l'ETM_{idoine} (plus que dans l'ETM personnel) à travers les interactions de classe. La TA-DM s'intéressait notamment à l'analyse des déroulements et aux moments d'exposition des connaissances. Des ponts possibles ont été mentionnés lors des échanges dans l'atelier. Une analyse des connaissances anciennes dans une perspective d'introduction de connaissances nouvelles permettrait d'étudier plus en profondeur la ZPD des élèves (Robert et Vandebrouck, 2014).

Le corpus de Masselin semble offrir beaucoup de perspectives d'études tant en enseignement qu'en recherche et il serait intéressant d'en faire une nouvelle analyse avec la TA-DM.

Conclusion : perspectives et limites

Dans ce texte, nous avons présenté une méthodologie pour étudier l'ETM_{idoine} en réponse à la nécessité d'une analyse de la mise en mise en œuvre d'une tâche à destination d'une classe divisé en groupe d'élèves. Notamment l'outil d'analyse chronologique de la séance, permet de rendre compte non seulement de l'emploi du temps de l'enseignant avec ses élèves, mais aussi, du travail mathématique que les élèves développent lors des interventions de l'enseignant.

Nous avons montré aussi, à travers cette méthodologie d'analyse, que nous repérerons des nouveaux éléments pour caractériser le travail produit d'un sujet, à savoir : *blocages*, *rebonds* et *confinements*. Ainsi, la tâche choisie n'a pas été exploitée du point de vue de sa caractéristique emblématique car le troisième critère concernant la complétude du travail (activation des trois plans verticaux de l'ETM) ne s'est pas produit.

Une des limites de cet atelier vient du fait que nous avons considéré une seule enseignante, d'où le besoin d'étudier d'autres types d'ETM_{idoine} avec plusieurs enseignants, en particulier un $ETM_{idoine\ potentiel}$ élaboré par un collectif[5] (Masselin, 2019, p. 329). Cela permettrait d'étudier des possibles stabilités ou régularités dans les pratiques des enseignants.

Notre étude de cas, telle qu'elle a été présentée dans l'atelier, nous a conduites à considérer notre première analyse *a priori* de la tâche comme insuffisante et nécessiterait d'être approfondie, possiblement avec l'emploi d'autres théories. De manière complémentaire, une perspective de cette étude serait de prendre en compte les interactions dans l'ETM entre individus (élèves/enseignants) pour préciser le développement du travail mathématique autour de la tâche présentée. Cette piste a été développée par Masselin (2019) avec le concept d'ETM_{idoine} attendu qui correspond à un ensemble de phases. Les rôles respectifs des enseignants et des élèves y sont décrits dans la circulation du travail dans l'ETM.

Nous envisageons aussi de possibles perspectives d'analyse des données de l'extrait du corpus présenté dans cet atelier, en particulier avec la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TA-DM), qui pourrait permettre d'analyser l'influence de l'ETM_{idoine} sur différentes activités mathématiques que les élèves développent, nous y reviendrons dans la section suivante.

[5] Dans ce travail, un $ETM_{idoine\ potentiel}$ est un ETM_{idoine} négocié entre plusieurs enseignants, où sont réalisés des compromis entre les individus et où émergent des choix qui conduisent à son façonnage. Il revête un caractère collectif. L'$ETM_{idoine\ potentiel}$ peut aussi être influencé par les manuels d'enseignement ou les documents d'accompagnements pour les classes.

Références

Kuzniak, A. Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines et personnels : existences et usages. *In Gómez-Chacón et al. (Eds). Actes du cinquième symposium ETM5, 18-22 juillet, Florina, Grèce*, 145-155.

Kuzniak, A. Nechache, A., & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM – Mathematics Education, 48*(6), 861-874.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(6), 721-737.

Masselin, B. (2019). *Étude du travail de l'enseignant sur la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphose d'un problème au fil d'une formation en probabilité.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02507438

MENRES-LYC-MEN-DGESCO. (07-2009). Mathématiques, Ressources pour la classe de Seconde, 27-29.

http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/txtoff/prog/lycee/2de_09/doc_ress_algo_v25.pdf

MENRES-LYC-DGESCO (02-2012). Statistiques et probabilités, Ressources pour la classe de Première générale et technologique, 17-19.

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/59/6/Ressource_Statistiques_Probabilites_1eres_208596.pdf

MENCOL- DGESCO. (11-2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).

https://www.education.gouv.fr/bo/15/Hebdo48/MENE1530367A.htm

Parzysz, B. (2009). De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation. *Repères-IREM*, 74, 91-103.

Robert A., & Vandebrouck F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 239–285.

Annexe 1 : Écrit 1 Groupe 6 (état en fin de 1ère heure)

G6 (1)

on fait cette expérience un grand nombre de fois, alors on utilise la méthode fréquentiste.

on effectue 1000 fois le 1er lancé.
puis on soustrait au nombre de lancé total (1000) le nombre de parties gagnées par le lièvre.

soit 1000 - 181 = 819

on effectue 819 fois le 2ème lancé, étant donné que 181 parties ont déjà été gagnées.
on répète cette expérience 6 fois.

819 - 136 = 683

683 - 130 = 553

553 - 92 = 461

461 - =

on effectue des soustractions successives.

Annexe 2 Script Vidéo Groupe 6

Échange entre l'enseignante Lucie et le groupe 6 (E1, E2 et E3)

Lucie : Pour savoir vous avez mis un nombre Si, d'accord et ensuite pour savoir qu'est ce que vous avez fait ?

E1 : Ici sur la feuille on a fait le nombre de parties total puis on a fait « moins » par exemple, là 160 vu que ce nombre de parties a déjà été gagné et on a pris le nombre de parties qu'il restait au total et on a refait exactement la même chose.

Lucie : D'accord donc là, vous avez fait une 2eme manche mais seulement pour les parties qui n'ont pas été gagnées par le lièvre. Donc au premier vous en aviez 820 qui n'avaient pas été gagnées par le lièvre donc vous en avez rejoué 820, enfin 819 quoi.

E1 : Oui

Lucie : D'accord et après pour toutes les parties qui n'ont pas été gagnées ni sur la première manche ni sur la deuxième manche, vous avez inventé une troisième manche.

E1 : C'est ça.

Lucie : Alors là vous êtes embêtés car du coup tout a bougé. Comment on va s'y prendre alors pour que justement j'ai un fichier qui résiste ?

E1 à E2 : Je ne sais pas

Lucie : Alors je peux vous donner le conseil de reprendre les 1000 parties à chaque fois, vous rejouez pour chacune des manches les 1000 parties. Même pour celles qui sont gagnées, ce n'est pas grave, vous rejouez quand même la deuxième manche même si elle a été gagnée dès la première manche. Ça ne vous coûte rien au niveau de coûts de calculs de l'ordinateur, on est d'accord ? Donc là sur les 136 parties qui vous manques, 136, vous allez combler le manque en rejouant les parties. Et plutôt que de regarder manche par manche pour savoir si la partie est gagnée par le lièvre, vous jouez les six parties et c'est à la fin des six parties que vous allez regarder si le lièvre a gagné ou pas gagné. D'accord, ça va ?

Donc l'avantage c'est que je fais des manches qui ne me servent à rien car si effectivement si le lièvre gagne dès la première manche, toutes les autres, tout l'algorithme de calculs que je fais faire au tableur, je n'en avais pas besoin. Mais comme ça ne lui demande pas de temps, de toute façon ce n'est pas très grave.

E1 : Oui

Une fois que l'enseignante quitte le groupe.

E2 à E1 : Tu fais 1000 fois les six, tu fais six fois, tu fais six colonnes de 1000.

E1 : Donc là tu enlèves

E2 : Elle ne t'a pas dit « fais étape par étape », elle a dit « On regarde à la fin si le … »

E1 : D'accord

E2 : Et s'il ne gagne pas la première manche, on s'en fiche.

E1 : Pourquoi s'il gagne la première manche, on s'en fiche ? Parce que s'il gagne la première manche, il gagne.

E1 : Oui mais elle a dit que ça ne nous coûte rien.

E1 : Oui mais par rapport aux résultats, ça nous coûte.

E2 : Et bien je ne sais pas. C'est ce qu'on voulait faire au début.

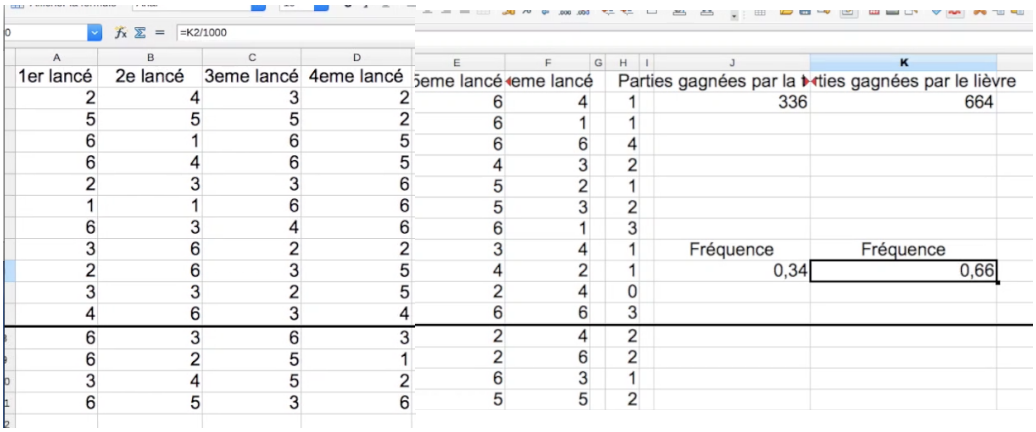
E1 : Pour moi ça ne va pas parce que s'il a gagné au premier, il n'y a plus besoin de faire le reste. Si là il y a six les cinq autres plages, elles sont inutiles. Sauf que là, on ne va pas pouvoir mettre NB.SI(6) parce qu'il aura déjà gagné ici.

E2 : Je ne sais pas, j'ai compris mais.

État initial du tableur quand Lucie arrive dans le groupe 6 (début de la 2e heure)

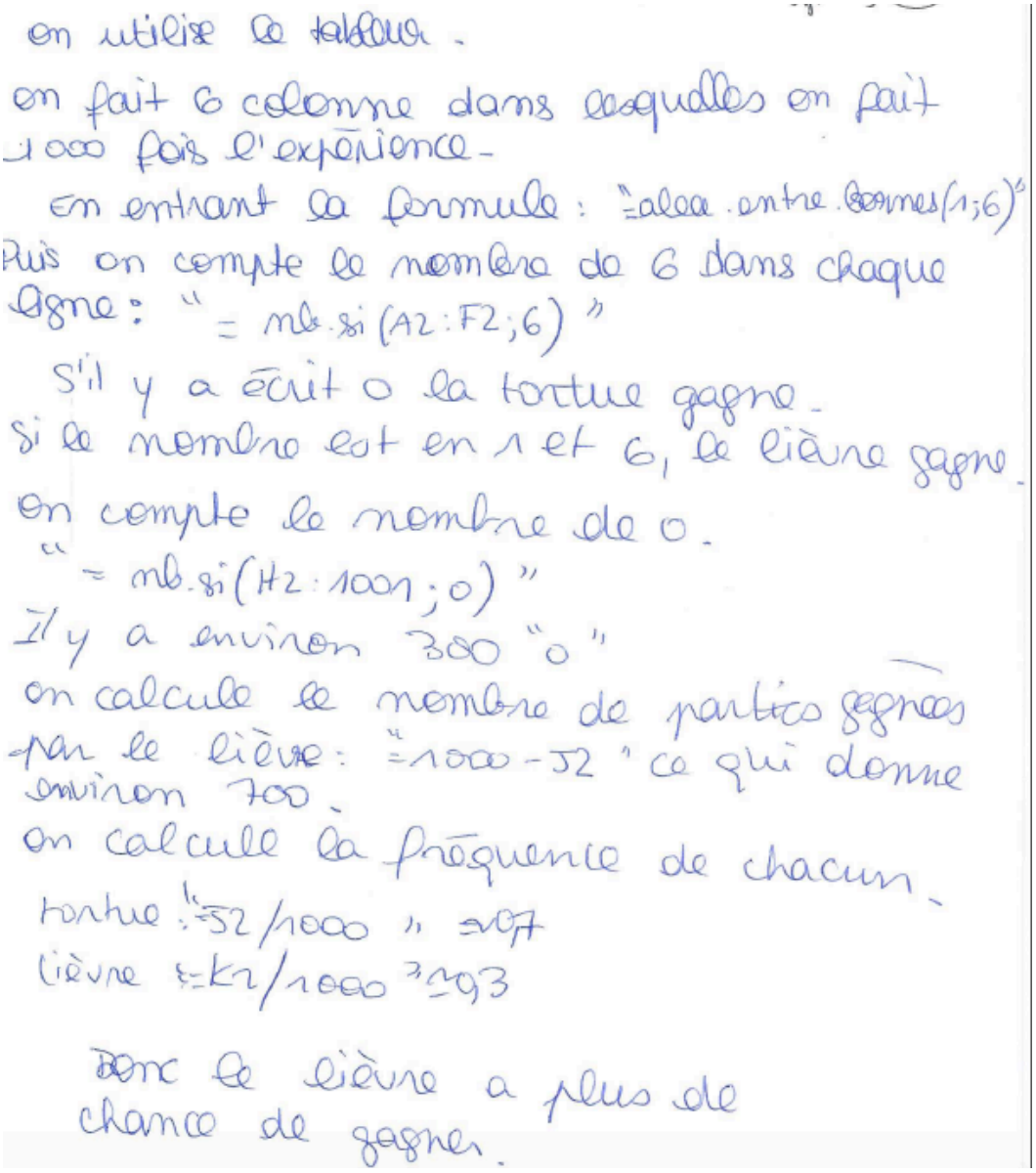
lancé		parties gagnées par le lièvre		2eme lancé		parties gagnées par le lièvre		3eme lancé		parties ga
6		172		4		124		6		
2				5				5		
1				2				3		
2				6				1		
6				4				3		
2				5				4		
4				3						
3				4						
3				4						
6										
6										
4										
4										
4										
2										
1										
5										
6										
3										
2										
1										

État final du tableur du groupe 6 (en fin de deuxième heure)



1er lancé	2e lancé	3eme lancé	4eme lancé	5eme lancé	6eme lancé		Parties gagnées par la lièvre	Parties gagnées par le lièvre
2	4	3	2	6	4	1	336	664
5	5	5	2	6	1	1		
6	1	6	5	6	6	4		
6	4	6	5	4	3	2		
2	3	3	6	5	2	1		
1	1	6	6	5	3	2		
6	3	4	6	6	1	3		
3	6	2	2	3	4	1	Fréquence	Fréquence
2	6	3	5	4	2	1	0,34	0,66
3	3	2	5	2	4	0		
4	6	3	4	6	6	3		
6	3	6	3	2	4	2		
6	2	5	1	2	6	2		
3	4	5	2	6	3	1		
6	5	3	6	5	5	2		

Annexe 3 : Écrit 2 Groupe 6 (état en fin de 1ère heure)



on utilise le tableur.
on fait 6 colonne dans lesquelles on fait 1000 fois l'expérience.
En entrant la formule : "=aleat.entre.bornes(1;6)"
Puis on compte le nombre de 6 dans chaque ligne : " = nb.si(A2:F2;6) "
S'il y a écrit 0 la tortue gagne.
Si le nombre est en 1 et 6, le lièvre gagne.
On compte le nombre de 0.
" = nb.si(H2:1001;0) "
Il y a environ 300 "0"
on calcule le nombre de parties gagnées par le lièvre : "=1000-52" ce qui donne environ 700.
On calcule la fréquence de chacun.
tortue : "52/1000" = 0,07
lièvre : 52/1000 = 0,93

Donc le lièvre a plus de chance de gagner.

Annexe 4 : Éléments de solution du « jeu du lièvre et de la tortue »

Simulation au tableur : approche fréquentiste

Modèle choisi : la loi géométrique tronquée

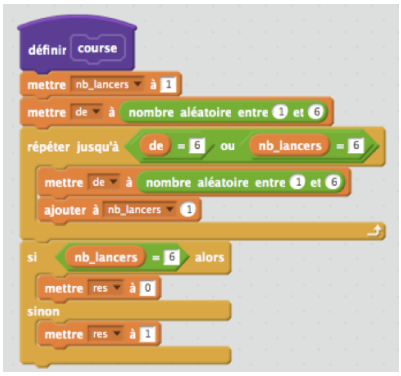
course	1er lancer	2e éventuel	3e éventuel	4e éventuel	5e éventuel	6e éventuel	gagnant	fréquence L
1	4	1	6				lièvre	1
2	3	5	6				lièvre	1
3	1	3	4	2	1	6	lièvre	1
4	6						lièvre	1
5	1	4	2	5	5	5	tortue	0,8
6	1	3	6				lièvre	0,83333333

Modèle choisi : la loi binomiale

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Lancer	Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Lancer 4	Lancer 5	Lancer 6	Nombre de 6	Gagnant	Fréquence lièvre
2	course 1	2	3	3	2	4	1	0	tortue	0,59925
3	course 2	6	1	1	5	1	4	1	lièvre	
4	course 3	5	2	2	6	2	3	1	lièvre	

Simulation avec le logiciel Scratch :

Modèle choisi : la loi géométrique tronquée



Exemple fichier Scratch, Annexe 2.1 (Masselin, 2019, Fig 23 p. 49)

Calcul des probabilités :

Si Y est une variable aléatoire binomiale de paramètre n=6 et p=1/6 :

- P(Tortue gagne)=P(Y=0)= $\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} \approx 0{,}335$
- P(Lièvre gagne)=P($Y \geq 1$)=$\frac{31031}{46656} \approx 0{,}665$

Une méthode d'analyse du travail personnel des élèves en géométrie[1]

Alain Kuzniak[1], Blandine Masselin[2], Assia Nechache[3] et Laurent Vivier[1]

[1]Université de Paris, LDAR (EA 4434), France

[2]IREM de Rouen, Université de Rouen, LDAR (EA 4434), France

[3]CY Cergy Paris Université, LDAR (EA 4434), France

Introduction

Dans ce texte, nous proposons une méthodologie pour l'étude de l'ETM personnel mis en œuvre lors de la réalisation d'une tâche en géométrie. Son exposition a fait l'objet d'un travail dans un atelier à l'Ecole d'Eté de didactique, en deux sessions. Dans la suite, nous ne revenons pas sur le cadre théorique que l'on trouvera dans le texte de Vivier (ce cahier, p. 55-70) – où la tâche et la production analysée ci-dessous y sont exposées pour illustrer les paradigmes géométriques et les genèses de l'ETM.

Dans un premier temps (session 1 de l'atelier), la méthode s'appuie sur une *analyse descendante* permettant de reconstituer le travail d'un étudiant. Puis, dans un deuxième temps (session 2 de l'atelier), une *analyse ascendante* permet de caractériser le travail mathématique de cet étudiant.

La tâche est issue d'un projet ECOS-Sud avec le Chili (2001-2003, Castela et al., 2006). Elle est à l'origine de l'idée d'Espaces de Travail Mathématique car son étude a mis en évidence des différences de travail dans les deux pays, Chili et France, qui vont au-delà des différences de paradigme. Voici la tâche géométrique d'Alphonse :

> *Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300m 900m, 610m, 440m. Il a beaucoup de mal à trouver son aire.*
>
> *Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?*

Figure 1 : La tâche d'Alphonse.

On note qu'une donnée manque pour pouvoir calculer l'aire du quadrilatère. Les trois dimensions de la théorie des ETM peuvent faire émerger la nécessité d'une donnée complémentaire pour résoudre la tâche d'Alphonse : la dimension instrumentale avec l'usage d'un logiciel comme Geogebra ou des idées mécaniques (artefacts, instruments) ; la dimension discursive avec des connaissances sur les quadrilatères mobilisés ; la dimension sémiotique, en réalisant différentes figures.

[1] Ce texte est extrait d'un atelier présenté à l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques organisée par l'ARDM en octobre 2019.

Il y a une rupture avec le contrat didactique usuel mais, pour une population de futurs enseignants dont est issue le corpus, on s'attend a priori à une prise de conscience de cette impossibilité d'autant plus que la formation initiale des enseignants de l'étude avait insisté sur l'intérêt des problèmes à données manquantes. Après cette prise de conscience, pour poursuivre le travail géométrique pour l'obtention de l'aire, on peut par exemple donner la mesure d'une diagonale :

Une information complémentaire :

Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630m.

Figure 2 : Information complémentaire pour poursuivre le travail.

La tâche d'Alphonse a fait l'objet d'une étude sur deux ans concernant des étudiants de Master 1, professorat du premier degré, en France et en Colombie. Les éléments exposés sont extraits du corpus de Kuzniak & Nechache (2018, 2020). Les étudiants ont réalisé une production écrite individuelle suivi d'une mise en commun (années 1 et 2) et d'un écrit réflexif (année 2 seulement). Les étudiants ayant reçu l'énoncé incomplet (Figure 1) n'ont majoritairement pas demandé de donnée complémentaire (2/85 étudiants français ont dit qu'il manquait une donnée et 3 sur une petite vingtaine d'étudiants colombiens). L'année 2 de l'expérimentation, les chercheurs ont modifié leur méthodologie de recueil en demandant un écrit réflexif car, l'année 1, lors de la mise en commun des étudiants, certains ne se sont pas exprimés d'où l'apparition d'une demande d'écrit réflexif. Ce changement de méthodologie permet de repérer les blocages et d'éclairer plus précisément le travail effectué.

Analyse descendante : découpage du travail mathématique en épisodes et actions

Un épisode est une sous-tâche que l'étudiant se donne pour résoudre la tâche. Un épisode est constitué des actions que l'étudiant effectue pour réaliser la sous-tâche. Dans la session 1 de l'atelier de l'école d'été, les participants ont été invités à repérer dans la production de Francis (annexe 1) les épisodes planifiés par l'étudiant pour effectuer la tâche et à décrire les actions du sujet dans chaque épisode.

La mise en commun de la description des épisodes et des actions est une interprétation de la réalité du travail mathématique. Elle nécessite de préciser le grain d'analyse. En particulier, il est important d'avoir un découpage permettant au mieux de décrire le travail compte tenu du public étudié. Par exemple, pour un étudiant-professeur du premier degré, il est suffisant de repérer l'action « tracé d'un cercle de centre A et passant par B » alors qu'il pourrait être utile pour un élève de cycle 3 de préciser cette action avec d'autres actions plus fines comme « placer la pointe du compas sur le point A ».

Kuzniak et Nechache (2018) proposent un découpage en trois épisodes de cette production. Selon eux, le premier épisode est la construction d'une figure à l'échelle et contient deux actions :

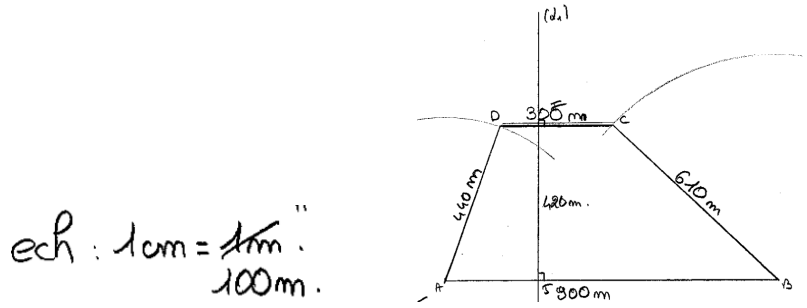


Figure 3. – Extrait 1 de la production de Francis (actions 1 et 2).

Episode 1 : ***Action 1*** : choix d'une échelle pour réaliser la figure

Action 2 : construction de la figure par ajustement avec une règle et un compas

L'épisode 2 est la justification de la nature du quadrilatère et comporte deux actions :

Action 3 : Explication orale (différée) de la construction du quadrilatère par Francis : *« J'ai pris la grande base 900m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle.* »

Action 4 : Justification orale (différée) de la nature du quadrilatère par Francis : « *J'ai tracé une perpendiculaire à la grande base et cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme les deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elles, donc cela a fait un trapèze.* » qui est soutenu par son écrit (figure 4).

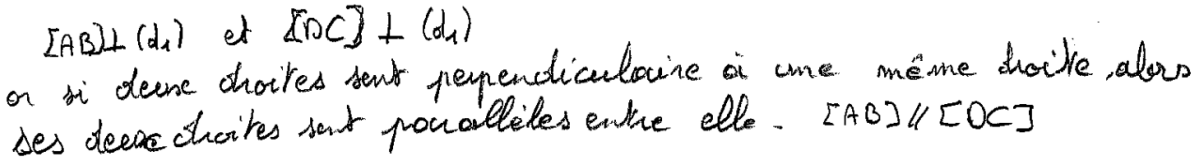


Figure 4. – Extrait 2 de la production de Francis (action 4).

Notons que ces actions ont été explicitées de manière différée, donc des écarts sont possibles avec la réalité du travail mathématique effectué par l'étudiant. Cela pose la question méthodologique des données nécessaires pour identifier le travail mathématique ainsi que le fait que, quoique l'on fasse, il existera toujours des zones d'ombre[2].

L'épisode 3 est celui du calcul de l'aire du quadrilatère (figure 5) et se décompose en deux actions :

Action 5 : Mesure de la hauteur du trapèze.

Action 6 : Calcul de l'aire du trapèze

[2] Cette question n'est évidemment pas particulière à la didactique des mathématiques.

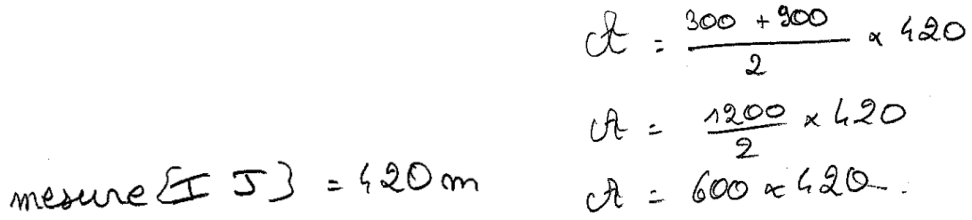


Figure 5. – Extrait 3 de la production de Francis (actions 5 et 6).

Après repérage des épisodes et actions, il convient de compléter l'analyse descendante en cours en indiquant, pour chaque action, son interprétation en termes d'ETM (notamment les dimensions convoquées ou genèses activées). L'exemple de l'action 2 du premier épisode soulève la non unicité d'une dimension convoquée lors du travail puisque les dimensions, ou genèses, instrumentale et sémiotique interviennent toutes deux simultanément. De même pour l'action 6 où l'on peut interpréter l'usage de la formule donnant l'aire d'un triangle comme un artefact symbolique (dimension instrumentale) ou comme un travail dans la dimension discursive. L'annexe 2 présente les diapositives de la mise en commun de l'analyse descendante présentée aux participants de l'atelier. Il est à noter que le découpage en épisodes déterminé par ces derniers étaient quasiment identiques à celui de Kuzniak et Nechache (2018). On peut synthétiser cette analyse descendante de la manière suivante :

> Francis construit à l'échelle une figure en ayant *a priori* l'idée de la nature de la figure à obtenir (i.e. le trapèze). Pour cela, il utilise les outils technologiques (compas, règle, équerre) de la dimension instrumentale (épisode 1). Puis il propose une justification de la nature de la figure (épisode 2) et calcule l'aire de cette figure (épisode 3) basée encore une fois sur les outils technologiques de la dimension instrumentale.

Le niveau des actions permet de rentrer dans l'interprétation du travail mathématique effectué par l'étudiant. Les six actions peuvent être regroupées en trois épisodes. La méthodologie permet d'identifier les éléments des ETM du travail mathématique d'un sujet et notamment les genèses et les plans verticaux.

Analyse ascendante : caractérisation du travail mathématique

L'analyse ascendante a pour objectif, en reprenant chaque épisode, de caractériser le travail mathématique d'un étudiant. Nous nous appuyons toujours sur le travail de Francis.

Dans l'épisode 1 (construction d'une figure à l'échelle), le référentiel théorique est un activateur d'un travail simultané et dynamique entre les deux dimensions sémiotique et instrumentale.

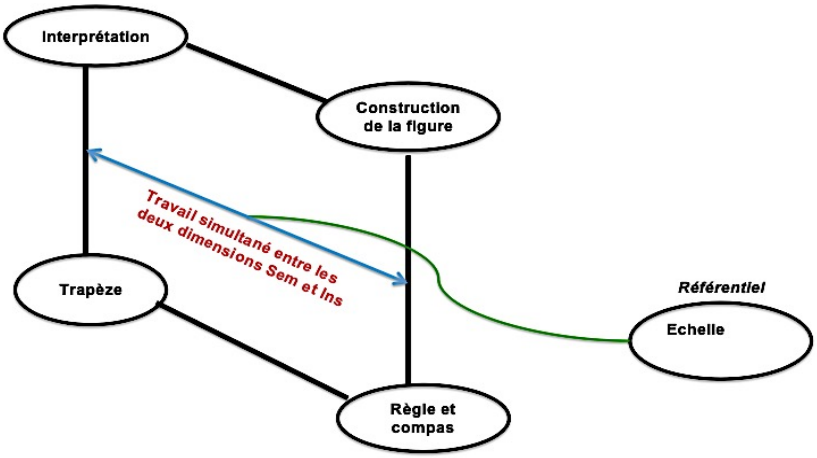


Figure 6. – Une synthèse du travail géométrique de Francis (Kuzniak & Nechache, 2020), épisode 1.

Dans l'épisode 2 (justification de la nature de la figure), il y a production d'un discours dans le plan [Sem-Ins] qui explicite la construction permettant d'obtenir un trapèze (action 3), puis production d'un deuxième discours dans le plan [Dis-Ins] qui justifie la construction du trapèze (action 4).

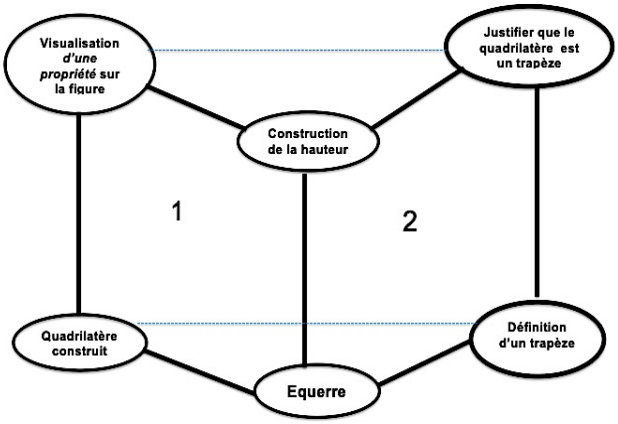


Figure 7. – Une synthèse du travail géométrique de Francis, Kuzniak & Nechache (2020), épisode 2.

Dans l'épisode 3 est produit le calcul de l'aire du quadrilatère (actions 5 et 6), Francis fait usage d'une formule de calcul d'aire associée à l'objet trapèze et prend des mesures sur le representamen (ici le dessin du trapèze construit dans l'épisode 1) à l'aide des outils technologiques de la dimension instrumentale.

Figure 8. – Une synthèse du travail géométrique de Francis, Kuzniak & Nechache (2020), épisode 3.

Conclusion sur le travail de Francis

La méthodologie d'analyse de la production de Francis est ici double :

- en partant de l'étudiant, l'identification des épisodes et actions permet un travail sur les trois dimensions et constitue l'analyse descendante ;
- l'analyse ascendante permet de repérer que le travail de Francis est relativement complet car il est situé dans les trois plans de l'ETM.

Le processus suivi par Francis est *conforme* au travail mathématique attendu dans le paradigme géométrique GI. En revanche, le résultat n'est pas *correct* car Francis raisonne sur une figure particulière et obtient une valeur de l'aire. De plus, le résultat n'est pas correct car il manque de contrôles théorique et instrumental (les conditions de construction d'un quadrilatère et la précision de la construction auxquels on peut ajouter l'usage non conforme des instruments géométriques). Il y a donc nécessité de prendre en compte des paradigmes pour l'étude du travail en contexte et l'on remarque en particulier que l'épisode 1 est plutôt lié au paradigme GI. L'épisode 2 peut paraître plutôt lié au paradigme GII, mais de fait de nombreux éléments de preuve s'appuie sur des éléments pris visuellement ou instrumentalement sur la figure.

Enfin, on peut se poser la question du rôle de l'objet trapèze dans le travail effectué par Francis. S'agit-il d'un objet central autour duquel l'ensemble des épisodes est organisé comme le laisse supposer son discours ? ou bien a-t-il pris progressivement conscience de cet objet trapèze au cours de son travail puis, avec cette prise de conscience, il a reconstruit un discours ? Il est difficile de trancher sur ce point. Il n'est même pas sûr qu'une vidéo du travail mathématique de Francis aurait pu aider à répondre à cette question. En revanche, des écrits réflexifs produits immédiatement après la construction montrent que certains étudiants ont produit leur travail en supposant explicitement que la figure devait être particulière.

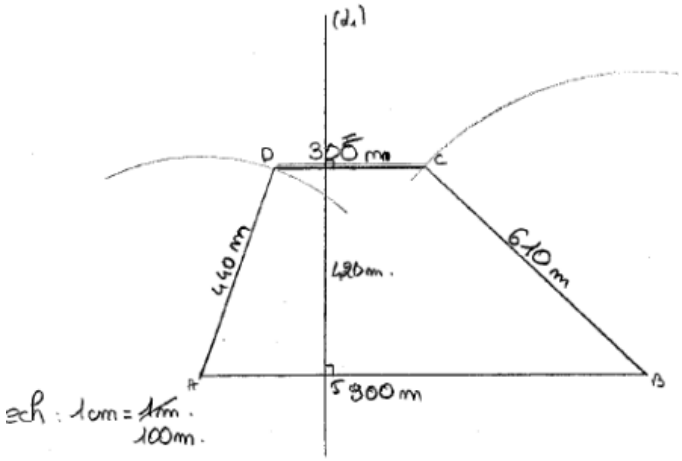
Références

Castela, C., Consigliere, L., Guzman, I., Houdement, C., Kuzniak, A. & Rauscher J.-C. (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée en France et au Chili. Cahier DIDIREM spécial n°6. IREM de Paris 7.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2020). Développer un travail mathématique complet et conforme chez les étudiants de première année des master enseignement en France. Revue de Mathématique pour l'école, 223.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2018). Le terrain d'Alphonse ou les infortunes de la mesure. 45e colloque de COPIRELEM, Blois, juin 2018

Annexe 1 Production de Francis (tâche d'Alphonse) Extrait du corpus de Nechache & Kuzniak



[AB] ⊥ (d1) et [DC] ⊥ (d1)
or si deux droites sont perpendiculaire à une même droite alors des deux droites sont parallèles entre elle. [AB] // [DC]
On mesure [IJ] = 420 m. I ∈ [DC] et J ∈ [AB].

$$\mathcal{A} = \frac{300 + 900}{2} \times 420$$

$$\mathcal{A} = \frac{1200}{2} \times 420$$

$$\mathcal{A} = 600 \times 420.$$

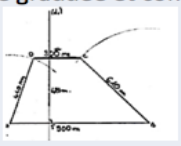
Extrait du discours de Francis lors de la mise en commun

Professeur : Est-ce que pensez que vous auriez peut-être besoin d'une information supplémentaire pour pouvoir réussir.
Etudiant 1 : Il faudrait la forme du quadrilatère.
Professeur : La forme du quadrilatère. Est-ce que vous avez une idée de ce que ça pourrait être ? Est-ce que cela peut être un carré ?
Etudiants : Non.
Professeur : Un rectangle, Un losange.
Etudiants : Non.
Professeur : Tout cela vous savez calculer les aires. Ensuite, un trapèze ?
Etudiant 2 : Cela pourrait mais...
Etudiant 3 : Oui mais avec les mesures cela ne coïncide pas.
Francis. Si cela fait un trapèze ...
Professeur : Cela fait un trapèze ?

Francis. Oui, j'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle et puis j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base et cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elles donc cela fait un trapèze...

Professeur : Donc Francis ici en faisant un dessin à l'échelle et en mettant les mesures qu'il a trouvées prouve avec ses instruments que c'est un trapèze.

Annexe 2 : Mise en commun lors de l'analyse descendante (session 1)

Episode 1	Actions	Interprétation en termes d'ETM
Construction de la figure à l'échelle	**Action 1 :** Choix d'une échelle pour réaliser la figure. ech · 1cm = ~~1m~~ 100m.	Réf
	Action 2 : Construction de la figure par ajustement (règle graduée et compas) 	**[Sem← → Ins]** Il exerce un contrôle visuel (Sem) et instrumental avec ses outils technologiques

Episode 2	Actions	Interprétation en termes d'ETM
Justification de la nature du quadrilatère	**Action 3 :** Explication de la construction du quadrilatère (F « *J'ai pris la grande base…* »).	**[Sem← → Ins]** Usage simultané des outils sémiotiques (Sem) et technologiques (Ins). Contrôles visuels/instrumentaux sur le representamen (trapèze)
	Action 4 : Justification de la nature du trapèze (F «*… comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite…* »).	**[Ins← → Dis]** Usage de l'équerre pour vérifer le parallélisme (Ins) Usage de la définition du trapèze (outil théorique)

Episode 3	Actions	Interprétation en termes d'ETM
Calcul de l'aire du quadrilatère	**Action 5 :** Mesure de la hauteur sur la figure. mesure [I J] = 420 m	**Ref -> (Ins)** Usage de la règle graduée (outil technologique) pour mesurer une longueur
	Action 6 : Calcul de l'aire d'un trapèze $\mathcal{A} = \frac{300+900}{2} \times 420$ $\mathcal{A} = \frac{1200}{2} \times 420$ $\mathcal{A} = 600 \times 420$	**(Ins) ou [Ins-Dis]** Usage de la formule de calcul de l'aire d'un trapèze (outil technologique)

Deuxièmes Journées Espace de Travail Mathématique

21 et 22 octobre 2019

Organisées par le groupe ETM du LDAR et soutenues par l'UFR de mathématiques de l'Université de Paris

Lors de ces deuxièmes journées d'étude, les deux thèmes suivants seront abordés :

- Thème 1 : Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif.
- Thème 2 : La question méthodologique dans la théorie des ETM

Thème 1 : Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif

Responsables : Alain Kuzniak et Assia Nechache

La définition et la portée de la notion de travail mathématique en didactique des mathématiques sont au centre des préoccupations des chercheurs proches de la théorie des ETM. Cette notion de travail mathématique nécessite d'être mise en relation avec d'autres notions proches qui sont couramment utilisées en didactique des mathématiques comme action, activité, pratique, praxis, etc.

Luis Radford et Fabrice Vandebrouck, proposeront leurs interprétations du travail mathématique et discuteront cette notion dans le cadre de leurs approches théoriques respectives, la théorie de l'objectivation (TO) et la théorie française de l'activité (TAF). Laurent Vivier développera la portée et l'usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM.

Thème 2 : La question méthodologique dans la théorie des ETM

Responsables : Macarena Flores González et Laurent Vivier

La théorie des ETM propose une analyse du travail mathématique produit par les sujets engagés dans des activités de résolution de tâches mathématiques. Mais elle s'intéresse aussi au travail de référence attendu par les diverses institutions éducatives ainsi qu'au travail mathématique proposé par les enseignants à leurs élèves. Assia Nechache précisera les questions d'ordre méthodologique attachées à l'analyse de ces différentes formes de travail en présentant sa propre approche de la question. Deux ateliers proposeront une analyse de corpus développé dans le cadre du projet BayFrance (Université de Würzburg et LDAR) et de la thèse de Blandine Masselin.

Ces questions méthodologiques ne sont pas spécifiques de la théorie des ETM et Luis Radford introduira ce thème de manière plus générale en dégageant la spécificité des questions méthodologiques dans le cadre des théories en didactique des mathématiques.

Organisation des journées[3]

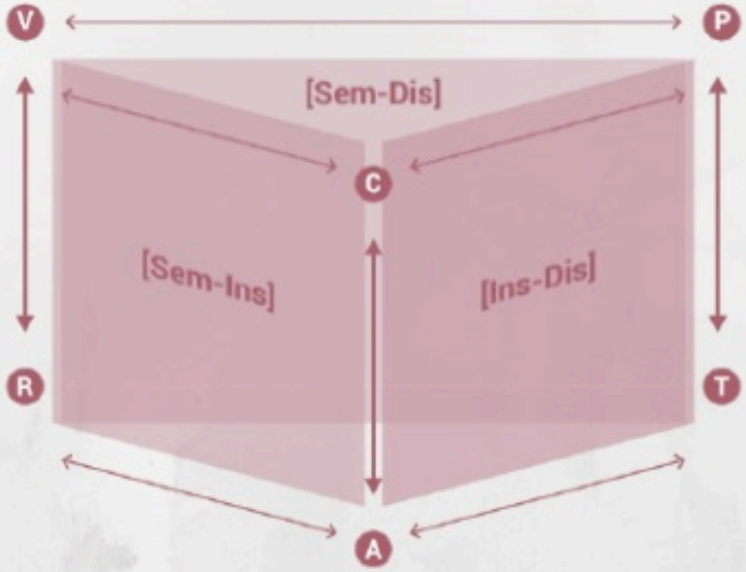
Lundi 21 octobre 2019 (Salle 2017, bâtiment Sophie Germain)

8h45-9h15	Accueil Café
9h15-9h45	Présentation des journées et introduction du thème1
9h45-10h45	Mini-conférence de Luis Radford sur la théorie de l'objectivation
10h45-11h	Pause-café
11h-12h	Mini-conférence de Fabrice Vandebrouck sur la théorie de l'activité
12h- 13 h30	Repas
14h-15h	Mini-conférence de Laurent Vivier sur la théorie des Espaces de Travail Mathématique
15h-15h45	Discussion sur le thème par groupes
15h45-16h	Pause-café
16h- 17h	Synthèse de la journée

Mardi 22 octobre 2019 (Salle 2017, bâtiment Sophie Germain)

8h45-9h	Accueil Café
9h-9h15	Introduction du thème 2
9h15-10h	Mini-conférence de Luis Radford
10h -10h45	Mini-Conférence Assia Nechache
10h45-11h	Pause-café
11h-12h30	Étude du travail personnel (travail sur corpus)
12h30-14h	Repas
14h-15h30	Étude du travail idoine (travail sur corpus)
15h30-15h45	Pause-café
15h 45-16h30	Discussion et synthèse du thème 2
16h30-17h	Synthèse générale et perspectives (collaboration, articles, colloques, ETM7, …)

[3] Les journées JETM 2 ont réuni 21 chercheurs.



DEUXIÈMES JOURNÉES D'ÉTUDE SUR LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

JETM 2

REGARDS CROISÉS SUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

et

LA QUESTION MÉTHODOLOGIQUE DANS LA THÉORIE DES ETM

Organisées par le groupe ETM du LDAR et soutenues par l'UFR de mathématiques de l'Université Paris Diderot.

Intervenants :

Luis Radford
Assia Nechache
Fabrice Vandebrouck
Laurent Vivier

21 et 22 octobre 2019
À partir de 8h45 - Salle 2017
Bâtiment Sophie Germain - Université Paris Diderot

LDAR
PARIS DIDEROT
UNIVERSITÉ D'ARTOIS
UNIVERSITÉ DE ROUEN
UPEC
UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Les participants des JETM 2

TITRE :

Regards croisés sur le travail mathématique en contexte éducatif

AUTEURS:

Alain Kuzniak, Assia Nechache, Luis Radford, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier, Philippe Hoppenot, Blandine Masselin, Macarena Flores González

RÉSUMÉ :

Ce cahier rend compte d'exposés et ateliers qui ont eu lieu lors des Deuxièmes Journées d'Étude sur le Travail Mathématique. Cette rencontre était coordonnée par le groupe ETM du LDAR et elle réunissait des jeunes chercheurs et des chercheurs intéressés par la question du travail mathématique et par les échanges entre approches théoriques différentes.

La notion de travail mathématique est d'abord mise en perspective grâce aux regards croisés de trois théories : la Théorie de l'Objectivation (TO), la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TA-DM) et la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM).

Puis, à partir des résumés d'ateliers, des exemples sont présentés pour illustrer certaines méthodes d'analyse du travail mathématique (de l'élève et de l'enseignant) avec la théorie des Espaces de Travail Mathématique.

Ce cahier est une source de réflexions, reflétant les échanges des JETM2, pour faire avancer les travaux en cours dans ce champ de recherche.

MOTS- CLÉS :

Travail mathématique, Travail conjoint, Action, Activité, Mise en fonctionnement de connaissances, Tâche, Apprentissage, Aspects épistémologique et cognitif, Paradigme géométrique, Théorie des Espaces de Travail Mathématique, Théorie de l'Objectivation, Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques, Tangente, Simulation en probabilité, Méthodologie d'analyse du travail mathématique

Éditeur: IREM de Paris
Responsable de la publication: C. Hache
IREM de Paris – Case 7018
Université de Paris
75205 Paris cedex 13
irem_de_paris@u-paris.fr
https://irem.u-paris.fr/

Dépôt légal : 2020
ISBN : 978-2-86612-394-9