



**HAL**  
open science

## Identification et satisfaction de besoins praxéologiques relatifs aux grandeurs

Anne Crumière, Nicolas Ros, Gisèle Cirade, André Pressiat

### ► To cite this version:

Anne Crumière, Nicolas Ros, Gisèle Cirade, André Pressiat. Identification et satisfaction de besoins praxéologiques relatifs aux grandeurs. Hamid Chaachoua; Annie Bessot; Berta Barquero; Lalina Coulange; Gisèle Cirade; Pierre Job; Anne-Cécile Mathé; André Pressiat; Maggy Schneider; Fabrice Vandebrouk. Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure, 2, La pensée sauvage, pp.397-419, 2021, 978 2 859 193485. hal-03529220

**HAL Id: hal-03529220**

**<https://hal.science/hal-03529220>**

Submitted on 17 Jan 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IDENTIFICATION ET SATISFACTION DE BESOINS PRAXÉOLOGIQUES RELATIFS AUX GRANDEURS

Anne Crumière\*, Nicolas Ros\*\*, Gisèle Cirade\*\*\*, André Pressiat\*\*\*\*

## RÉSUMÉ

Issu des travaux dirigés directement associés au cours de Michèle Artaud, cet article traite des besoins praxéologiques de la position de professeur selon la position de chercheur en didactique, dans le cas des grandeurs et de leur mesure. Il poursuit deux objectifs, celui de l'identification de ces besoins et celui de leur satisfaction. La première partie illustre, à partir d'un exemple, les praxéologies mises en œuvre pour identifier les besoins. La deuxième partie propose une exploration des besoins relatifs à certaines grandeurs, essentiellement au niveau du collège ; des éléments visant la satisfaction de ces besoins praxéologiques sont alors explicités, en allant du niveau technique au niveau théorique. La troisième partie est consacrée à une grandeur particulière, la température, et le territoire de l'enquête sur les besoins s'élargit aux disciplines scientifiques concernées et aux mathématisations récentes des grandeurs. En conclusion, les besoins praxéologiques sont resitués dans une perspective plus large, mettant en valeur le rôle d'interface que les grandeurs jouent entre les besoins sociétaux et l'école, et leur rôle en mathématiques, comme instrument de modélisation de situations du monde et du travail mathématique lui-même.

Mots clefs : besoins praxéologiques ; calcul sur les grandeurs ; grandeurs ; instrument ; théorie anthropologique du didactique (TAD).

## ABSTRACT

Coming from the tutorial directly associated to Michèle Artaud's lecture, this article deals with the praxeological needs of the position of mathematics teacher from the position of didactic researcher, about quantities and their measurement. Two objectives are pursued: first, the identification of these praxeological needs and secondly, their satisfaction. The first part illustrates with an example the praxeologies implemented to identify the needs. The second part is an exploration of the needs about some magnitudes, essentially at the secondary level (11-15 years); elements about the satisfaction of these praxeological needs are then made explicit, from techniques to theory. The third part deals with a particular magnitude, temperature, and the area of inquiry is broadened to related scientific disciplines, and to recent mathematizations of magnitudes. By way of conclusion, praxeological needs are put back in a larger perspective, highlighting the interface role of magnitudes between societal needs and school, and their role in mathematics, both as a modelling instrument of situations of the world and as an instrument of mathematical work itself.

Key words: anthropological theory of the didactic (ATD); calculation with magnitudes; instrument; magnitudes; praxeological needs.

## BESOINS PRAXÉOLOGIQUES

Dans cette première section, nous allons reprendre la notion de *besoin praxéologique* de la position de professeur de mathématiques que Michèle Artaud (2021) a introduite dans son cours. Pour cela, nous commencerons par étudier un exemple en considérant un objet figurant dans le programme d'études de la classe de 6<sup>e</sup> (élèves de 11-12 ans) : la longueur du cercle. Dans les sections suivantes, l'étude d'autres exemples nous permettra d'identifier des besoins praxéologiques relativement à d'autres objets figurant au programme d'études du collège (élèves de 11-15 ans), relevant tous de ce que nous nommerons « les grandeurs ». Comme nous le verrons, nous serons amenés à explorer les rapports que peuvent avoir différentes positions institutionnelles à un objet  $o$  considéré, en distinguant essentiellement celles de professeur,  $p_t$  (l'indice  $t$  fait référence à *teacher*), de noosphérien,  $p_n$ , et de chercheur en didactique,  $p_\xi$ .

---

\* UMR EFTS, Université Toulouse Jean Jaurès.

\*\* SFR AEF, Université Toulouse Jean Jaurès.

\*\*\* UMR EFTS.

\*\*\*\* ARDM.

## 1. La longueur du cercle en classe de 6<sup>e</sup> : étude d'un corpus

Au fil de notre étude, nous avons constitué un corpus rassemblant des documents récents<sup>1</sup> produits par la noosphère : textes émanant du ministère de l'Éducation nationale, extraits de manuels, etc. Nous allons en proposer quelques éléments d'analyse et d'évaluation depuis la position de chercheur en didactique, *p<sub>ξ</sub>*, que nous occupons ici. Examinons tout d'abord des textes publiés par le ministère de l'Éducation nationale. Le programme du cycle 3 (Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse [MENJ], 2018a, p. 105) indique (c'est nous qui soulignons) : « Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle, la *longueur d'un cercle*, en utilisant une formule : – formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle ; – formule de la *longueur d'un cercle*. » Dans les attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup> (MENJ, 2019a, p. 7), la rubrique « ce que sait faire l'élève » précise que ce dernier « connaît la formule de la *longueur d'un cercle* et l'utilise ». La ressource « Grandeurs et mesures au cycle 3 » (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche [MENESR], 2016c) contient aussi quelques occurrences du mot *cercle*, que nous situons ici dans leur contexte (c'est nous qui soulignons) :

- Des formules pour calculer des mesures de grandeurs sont progressivement établies et régulièrement utilisées (aire du rectangle, *longueur du cercle*, volume du pavé droit, etc.). (p. 3)
- Au cycle 3, les mesures peuvent encore être déterminées par un « mesurage », par exemple à l'aide du rapporteur pour les angles, mais plus souvent qu'au cycle 2 ce sont des calculs, s'appuyant sur des mesures et parfois aussi des formules, qui permettent de déterminer les mesures de grandeurs cherchées (*longueur d'un cercle* ; aire d'un triangle, d'un rectangle ou d'un disque ; volume d'un pavé droit). (p. 4)
- Au cycle 3, les élèves rencontrent leurs premières formules pour calculer les mesures de diverses grandeurs : – des longueurs : périmètre du carré, périmètre du rectangle, *longueur du cercle*. (p. 7)
- De même, la *longueur d'un cercle* ne doit pas être  $2\pi r$  seulement, mais bien la longueur du trait tracé au compas quand celui-ci fait un tour complet. (p. 8)

Dégageons maintenant quelques éléments d'une analyse praxéologique (à ce sujet, voir par exemple Chevillard, 2012, leçons 4 et 5), en nous appuyant pour cela sur l'un des exemples de réussite proposés dans les attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup> (MENJ, 2019a, p. 7) :

- Il calcule, à l'aide de la formule et en utilisant 3,14 comme valeur approchée du nombre Pi, la longueur d'un cercle dont :
  - Le rayon est donné (par exemple par calcul mental dans le cas où le rayon est 5 cm, ou à l'aide d'une multiplication posée ou de la calculatrice dans le cas où le rayon est de 7,8 dm) ; ( $L_1 \approx 2 \times 3,14 \times 5$  cm et  $L_2 \approx 2 \times 3,14 \times 7,8$  m [*sic*])
  - Le diamètre est donné (par exemple par calcul mental dans le cas où le diamètre est 20 cm, ou à l'aide d'une multiplication posée ou de la calculatrice dans le cas où le diamètre est de 9,6 m). ( $L_3 \approx 3,14 \times 20$  cm et  $L_4 \approx 3,14 \times 9,6$  m)

Il s'agit ici de calculer la longueur d'un cercle (type de tâches *T*) dont on connaît le rayon ou le diamètre. La technique  $\tau$  pour calculer cette longueur  $\ell$  peut s'analyser ainsi dans le cas où on connaît le rayon  $r$  : écrire la formule  $\ell = 2\pi r$ , remplacer  $\pi$  par 3,14 et  $r$  par sa valeur puis calculer  $\ell$ . Reprenons l'un des cas proposés, celui où le rayon est 5 cm : les auteurs mentionnent alors que  $\ell \approx 2 \times 3,14 \times 5$  cm et le calcul n'est pas effectué. On notera que le calcul dans l'*espèce des longueurs* (concernant les *espèces de grandeurs* et leur *algèbre*, voir Chevillard & Bosch, 2002) permet d'écrire<sup>2</sup> que, si  $r = 5$  cm, alors  $\ell = 2\pi r \approx 2 \times 3,14 \times 5$  cm  $\approx 31$  cm. Mais ici, donc, seul le calcul à effectuer, posé dans l'*espèce des longueurs*, est indiqué. Si l'on explore les attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup> dont cet exemple de réussite est issu, on retrouve cette situation à plusieurs reprises, dans d'autres cas que le calcul de la longueur d'un cercle. Par exemple, dans

<sup>1</sup> Ils datent au maximum d'une dizaine d'années. Nous utiliserons le style « puces » pour présenter les citations issues de ce corpus.

<sup>2</sup> Nous avons choisi d'indiquer *in fine* que  $\ell \approx 31$  cm. La détermination du format de la réponse, et notamment le nombre de chiffres significatifs, ne relève pas du programme de 6<sup>e</sup> et ne sera pas traitée ici, le résultat seul étant donné. On a ici un besoin de la position de professeur auquel René Moreau (2003, pp. 44-46, notamment) apporte des éléments de réponse substantiels concernant l'enseignement des mathématiques et de la physique au niveau du collège et du lycée.

les extraits suivants (*ibid.*), le résultat du calcul est donné mais sans être relié par un signe égal à la suite d'opérations à effectuer (c'est nous qui soulignons) :

- Il peut calculer l'aire de la zone de jeux réservée pour les enfants en effectuant le calcul  $\frac{30 \text{ m} \times 18 \text{ m}}{2}$  qui donne 270 m<sup>2</sup>. (p. 8)
- Le diamètre est donné (par exemple à l'aide d'une multiplication posée dans le cas où le diamètre est de 6 dm :  $A_{\text{disque}} \approx 3,14 \times 3 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}$  soit 28,26 dm<sup>2</sup>). (p. 9)
- Il détermine l'aire de la surface ci-dessous en effectuant la somme de l'aire d'un rectangle et de celle d'un triangle rectangle soit  $(5 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}) + (8,4 \text{ cm} - 5 \text{ cm}) \times (9 \text{ cm} - 4 \text{ cm}) : 2$  ce qui donne 53,5 cm<sup>2</sup>. (p. 9)
- Réponse : il peut effectuer le calcul  $30 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  qui donne 11 250 cm<sup>3</sup>, soit 11,25 dm<sup>3</sup>. (p. 10)

On constate que ce sont bien des grandeurs qui sont considérées, tant dans l'énoncé que dans la réponse, et que les opérations à effectuer portent sur des grandeurs. Mais, à chaque fois, la présentation du résultat est soutenue par un discours, avec quelques expressions emblématiques comme « qui donne » et « soit », et ne se situe pas dans l'*algèbre des espèces de grandeurs*, avec des égalités comme  $3,14 \times 3 \text{ dm} \times 3 \text{ dm} = 28,26 \text{ dm}^2$ . Pour voir apparaître le signe égal, il faut consulter la deuxième partie du document, où figurent quelques égalités notables dans cette algèbre (*ibid.*, p. 11) :

- Réponse :  $18 \text{ m} : 4 = 4,5 \text{ m}$  et  $23,2 \text{ m} : 4 = 5,8 \text{ m}$ .
- Réponse :  $85,56 \text{ €} : 3 = 28,52 \text{ €}$ .
- Réponse :  $1 703 \text{ km}^2 \times 238 \text{ hab/km}^2 = 405 314 \text{ habitants}$ .

En continuant à explorer ce document, on remarque que la gestion des conversions d'unités s'effectue aussi de façon discursive, ainsi qu'en témoigne l'extrait suivant (*ibid.*, p. 8) :

- [L'élève] sait que : 1,5 km<sup>2</sup> correspond à 1 500 000 m<sup>2</sup> ; 10 m<sup>2</sup> correspondent à 0,1 dam<sup>2</sup> ; 45 cm<sup>2</sup> correspondent à 0,0045 m<sup>2</sup> ; 25 mm<sup>2</sup> correspondent à 0,25 cm<sup>2</sup> ; 3,12 dm<sup>2</sup> correspondent à 312 cm<sup>2</sup>.

On retrouve cette réticence à écrire des *égalités* entre deux grandeurs de même espèce, exprimées ici avec des unités différentes, alors qu'on peut écrire, toujours en se plaçant dans l'*algèbre des espèces de grandeurs* :  $1,5 \text{ km}^2 = 1 500 000 \text{ m}^2$  ;  $10 \text{ m}^2 = 0,1 \text{ dam}^2$  ;  $45 \text{ cm}^2 = 0,0045 \text{ m}^2$  ;  $25 \text{ mm}^2 = 0,25 \text{ cm}^2$  ;  $3,12 \text{ dm}^2 = 312 \text{ cm}^2$ . En fait, outre la concision dans l'écriture, on gagne à écrire de telles égalités car ce sont elles qui sont réellement *utiles* dans les calculs sur les grandeurs. On notera aussi que, un peu plus loin (*ibid.*, p. 11), on trouve une égalité pour exprimer une conversion :  $50 \text{ cL} = 0,5 \text{ L}$ , mais que l'exemple qui est donné la laisse en dehors du calcul :

- Un vase pouvant contenir 2 L contient déjà 1,3 L d'eau. Si on verse à nouveau 50 cL, l'eau débordera-t-elle ? (Réponse : Non car  $50 \text{ cL} = 0,5 \text{ L}$  et que  $1,3 \text{ L} + 0,5 \text{ L} = 1,8 \text{ L}$ .)

alors que, en se plaçant dans l'*espèce des volumes*, on peut obtenir le résultat en intégrant les conversions d'unités dans les calculs :  $1,3 \text{ L} + 50 \text{ cL} = 1,3 \text{ L} + 0,5 \text{ L} = 1,8 \text{ L}$ .

Revenons maintenant sur le calcul de la longueur d'un cercle en examinant deux propositions trouvées sur des sites d'assistance scolaire :

- Extrait d'une page web du site [calculateur.com](http://calculateur.com) :  
Exemple de calcul du périmètre d'un cercle :  
Soit un cercle C de centre O et de rayon  $R = 7 \text{ cm}$   
Périmètre  $P = 2 \times \pi \times 7 = 43,96 \text{ cm}$  (avec Pi arrondi à 3,14). (Calculatrice en ligne, 2020)
- Extrait d'une page web du site [assistancescolaire.com](http://assistancescolaire.com) à destination des élèves de CM2 :  
La formule pour calculer le périmètre d'un cercle est :  $2r \times \pi$   
C'est-à-dire 2 fois le rayon ( $r$ ) multiplié par 3,14 ( $\pi = 3,14$ )  
Ex. : un cercle qui a un rayon de 5 cm a un périmètre de :  $2 \times 5 \times 3,14 = 31,4 \text{ cm}$ . (Assistance scolaire personnalisée, 2020)

Si les deux extraits font apparaître qu'on considère bien des grandeurs ( $R = 7 \text{ cm}$  et  $P = \dots = 43,96 \text{ cm}$  ; un rayon de 5 cm et un périmètre de 31,4 cm), les calculs eux-mêmes sont posés avec les nombres :  $2 \times \pi \times 7$  ;  $2 \times 5 \times 3,14$ . (Notons aussi qu'on n'hésite pas à assimiler une grandeur et sa mesure dans une unité donnée :  $2 \times \pi \times 7 = 43,96 \text{ cm}$  ;  $2 \times 5 \times 3,14 = 31,4 \text{ cm}$ .) Ce que l'on peut constater ici, à savoir qu'*on ne calcule pas sur les grandeurs* – et même qu'*on ne pose pas le calcul avec les grandeurs* (à cet égard, la situation n'est pas la même dans les attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup>) –, s'avère être une pratique fortement répandue dans la

noosphère : le refoulement des grandeurs, en l'occurrence de l'algèbre des espèces de grandeurs, y est à l'œuvre. On trouve souvent une variante de cette pratique, où le calcul est effectué *sur les mesures* et où l'on ajoute *in fine* l'unité pour fournir le résultat dans le cadre des grandeurs. On le voit par exemple dans les deux extraits suivants d'un manuel de 6<sup>e</sup> (Barnet et al., 2017) :

- Extrait de la rubrique « Cours » :

On cherche la longueur d'un cercle de rayon 3 m.

$$2 \times \pi \times R = 2 \times \pi \times 3 = 6 \times \pi \approx 6 \times 3,14 \approx 18,84$$

La longueur du cercle est environ égale à 18,84 m. (p. 168)

- Extrait de la rubrique « Savoir-faire » :

Calculer la longueur d'un cercle de diamètre 8 m.

Solution. On utilise la formule : on remplace  $\pi$  par 3,14 et  $D$  par la mesure du diamètre.

$$\pi \times D = \pi \times 8 \approx 3,14 \times 8 \approx 25,12$$

La longueur de ce cercle est d'environ 25,12 m. (p. 169)

On notera que ce qui est proposé ici est « mathématiquement correct » : à une première ligne de calcul *numérique* succède une formulation rhétorique présentant le résultat dans le cadre des grandeurs. Ici, cela se fait sans introduire de notations pour les grandeurs considérées, les seules notations utilisées portant sur les *mesures* de ces grandeurs. Par contraste, rappelons que le document d'accompagnement « Grandeurs et mesures », paru initialement en 2007, insiste sur le fait qu'il faut considérer la formule de la longueur d'un cercle comme une *relation entre deux grandeurs* :

La question de la longueur du cercle fait appel à la notion de longueur d'une courbe, que l'on définit comme limite des (mesures des) longueurs des lignes polygonales inscrites dans la courbe lorsque le pas de ces lignes tend vers 0, et sort donc du cadre théorique précédent. Cependant, la formule relative à la longueur (ou périmètre) d'un cercle  $P = 2 \times \pi \times R$  peut être utilisée comme dans les exemples précédents, en tant que relation entre deux longueurs. Ainsi, la longueur d'un cercle de rayon 6 cm est [égale à]  $2 \times \pi \times 6$  cm, soit  $12 \times \pi$  cm. Le périmètre de l'hexagone régulier inscrit est égal à  $6 \times R$  et celui du cercle est un peu plus grand :  $2 \times \pi \times R$ . Ce fait peut être mobilisé pour faciliter la mémorisation de la formule. (MENESR, 2007/2016, p. 8)

Si l'on retrouve ce que l'on a pointé au début de cette section, à savoir une formulation plutôt rhétorique que symbolique, d'autres passages dans ce document d'accompagnement n'hésitent pas à proposer explicitement des calculs en se plaçant implicitement dans l'algèbre des espèces de grandeurs et en mentionnant quelques éléments du *logos*, ce qui est des plus importants pour la profession :

Ainsi, par exemple, la formule  $v = \frac{d}{t}$  peut s'interpréter de deux manières. Ou bien  $d$ ,  $v$  et  $t$  désignent des mesures (avec des unités convenables) des grandeurs que ces lettres évoquent directement : il s'agit alors d'un calcul purement numérique ; ou bien, comme c'est le cas dans de nombreuses disciplines et dans l'enseignement des mathématiques dans des pays voisins (Voir l'annexe 5, dernier exemple), les lettres désignent les grandeurs elles-mêmes et la formule  $v = \frac{d}{t}$  constitue une définition de la vitesse, *indépendante des unités choisies*. Par exemple, la vitesse d'une balle de tennis lors du service d'un joueur est de 197 km/h. La formule  $v = \frac{d}{t}$  permet d'obtenir facilement la conversion de cette vitesse en m/s, à l'aide du calcul suivant :

$$v = 197 \text{ km/h} = \frac{197 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{197\,000 \text{ m}}{3\,600 \text{ s}} = \frac{197\,000}{3\,600} \text{ m/s}$$

soit environ 54,7 m/s, résultat beaucoup plus significatif pour le spectateur. Il est possible de mathématiser cette notion de grandeur quotient, de même que celle de grandeur produit, qui généralise le cas des aires et des volumes, et qui, avec les grandeurs composées, fait l'objet du paragraphe 5. (*Ibid.*, p. 2)

## 2. Mise en évidence de besoins praxéologiques

Nous venons d'analyser rapidement quelques éléments d'un corpus que nous avons constitué pour les besoins de l'étude, et cela va nous permettre de dégager ce que nous considérons

comme étant des *besoins* concernant l'*équipement praxéologique* de la profession<sup>3</sup>. Précisons tout d'abord ce que l'on entend par *besoin praxéologique* (Artaud, 2021), en commençant par rappeler ce que, en théorie anthropologique du didactique (TAD), on appelle une *instance* et le *rapport d'une instance à un objet* :

... une instance  $\hat{i}$  est soit une personne  $x$  (on a alors  $\hat{i} = x$ ), soit une position institutionnelle  $(I, p)$ .  
Étant donné une instance  $\hat{i}$  et un objet  $o$  (qui peut être n'importe quoi d'existant pour au moins une personne ou une institution), on appelle *rapport* de  $\hat{i}$  à  $o$ , et on note  $R(\hat{i}, o)$ , l'ensemble des liens entre  $\hat{i}$  et  $o$  (ce que  $\hat{i}$  fait ou sait faire avec  $o$ , les idées ou les sentiments qui lui viennent au sujet de  $o$ , etc.).  
(Chevallard, 2021, pp. 96-97)

Dans l'exemple que nous venons d'étudier, nous nous sommes efforcés d'analyser le rapport<sup>4</sup>  $R_I(p_n, o)$  où, dans l'institution  $I$ ,  $p_n$  est la position de noosphérique occupée par les différents auteurs considérés et  $o$  est l'objet « longueur du cercle » – qui fait partie d'un objet plus large, les « grandeurs », que nous avons aussi été amenés à explorer à cette occasion. Depuis notre position de chercheur en didactique,  $p_\xi$ , nous avons dégagé quelques éléments d'évaluation. Concernant les attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup>, si les calculs sont *présentés avec* des grandeurs, et non pas avec des mesures, bien souvent ils ne sont pas menés dans l'algèbre des espèces de grandeurs et on perd toute la puissance du calcul *sur* les grandeurs. Concernant les deux sites d'assistance scolaire cités précédemment, le calcul est posé (et effectué) dans le domaine numérique et le résultat final propose une égalité entre une grandeur et sa mesure dans une unité donnée. Dans le manuel de 6<sup>e</sup> cité juste après, les calculs sont effectués dans le domaine numérique et c'est dans la phrase de conclusion que l'unité est rajoutée. Cela révèle un *besoin* de l'instance  $\hat{u} = p_n$  selon l'instance  $\hat{w} = p_\xi$ , comme le définit M. Artaud (2021) :

On pourra dire que  $\hat{w}$  juge que le rapport de  $\hat{u}$  à  $o_l$  [objet longueur] n'est pas conforme à un rapport à  $o_l$  qu'elle souhaiterait voir exister, et que nous noterons génériquement  $R(*\hat{s}, o_l)$ , où  $*\hat{s}$  est en quelque sorte la *position qui devrait exister*, selon ce qu'imagine  $\hat{w}$ . C'est dans ce cas que nous parlerons d'un *besoin de  $\hat{u}$  selon  $\hat{w}$* . (p. 201)

Comme on le voit, la notion d'instance est cruciale dans la définition d'un besoin. Prenons par exemple deux sous-positions de la position  $p_n$  de noosphérique que l'on vient de considérer :

- Les auteurs des attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup> écrivent :  
«  $A_{\text{disque}} \approx 3,14 \times 3 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}$  soit  $28,26 \text{ dm}^2$ . »
- Les auteurs d'un manuel de 6<sup>e</sup> écrivent : « On cherche la longueur d'un cercle de rayon 3 m.  
 $2 \times \pi \times R = 2 \times \pi \times 3 = 6 \times \pi \approx 6 \times 3,14 \approx 18,84$ . La longueur du cercle est environ égale à 18,84 m. »

Selon nous, en position  $p_\xi$  de chercheur en didactique, une personne qui occuperait la position  $*\hat{s}$  écrirait<sup>5</sup> :

$$A_{\text{disque}} \approx 3,14 \times 3 \text{ dm} \times 3 \text{ dm} \approx 28 \text{ dm}^2 ;$$

$$2 \times \pi \times R = 2 \times \pi \times 3 \text{ m} \approx 2 \times 3,14 \times 3 \text{ m} \approx 19 \text{ m}.$$

Le rapport  $R_I(p_n, o)$  n'est donc pas conforme au rapport  $R(*\hat{s}, o)$  que nous souhaiterions voir exister<sup>6</sup>.

Notons maintenant qu'un rapport se décrit en termes de praxéologies : « Soit  $\pi_{\hat{w}}(p)$  l'équipement praxéologique de la position  $(I, p)$  tel que le voit l'instance  $\hat{w}$ . Le rapport  $R_I(p, o)$  est alors, pour  $\hat{w}$ , la "résultante" de l'ensemble des praxéologies  $\wp \in \pi_{\hat{w}}(p)$  qui mettent en jeu l'objet  $o$  » (Chevallard, 2021, p. 97). Cela nous amène à travailler sur les besoins pour lesquels « la nature du manque [est] une praxéologie, relative à un domaine des mathématiques – les grandeurs et leur mesure dans ce cours – ou de la direction d'étude des mathématiques –

<sup>3</sup> Nous désignons par *profession* la profession de professeur de mathématiques.

<sup>4</sup> Dans le cas d'une position institutionnelle  $\hat{i} = (I, p)$ , le rapport  $R(\hat{i}, o)$  est aussi noté  $R_I(p, o)$ .

<sup>5</sup> Concernant le format des résultats, voir la note 2.

<sup>6</sup> Bien sûr, on a pu ici voir des différences entre les auteurs de textes officiels et les auteurs de manuels : la position  $p_n$  de noosphérique n'est pas uniforme (c'est le cas de toutes les positions). Mais, pour la suite de notre travail, il ne nous semble pas pertinent de distinguer différentes sous-positions dans cette noosphère et nous nous en tiendrons à la position  $p_n$ .

toujours à propos des grandeurs et de leur mesure ici » (Artaud, 2021, p. 199). L'auteure précise ensuite que « c'est ce [qu'elle nomme] un *besoin praxéologique de  $\hat{u}$  selon  $\hat{w}$*  : l'instance  $\hat{w}$  juge que le rapport de l'instance  $\hat{u}$  à un objet  $o$  n'est pas conforme au rapport  $R(*\hat{s}, o)$  qu'elle souhaiterait voir exister parce que, selon elle, il manque des ingrédients praxéologiques dans  $R(\hat{u}, o)$  » (*ibid.*, p. 201), et poursuit en faisant référence à un exemple présenté antérieurement :

Notamment un type de tâches au moins apparaît problématique selon  $\hat{w}$ , au sens où la technique mise en œuvre par  $\hat{u}$  apparaît « ne pas aller », ou « ne pas aller pour accomplir certains spécimens », et ainsi mériter un développement qui appelle, dans l'immense majorité des cas, un développement de l'environnement technologico-théorique. (*Ibid.*, pp. 201-202)

Si l'on reprend l'étude précédemment présentée, on a en fait considéré comme type de tâches « calculer la longueur d'un cercle » et on peut analyser ainsi la technique proposée dans le premier extrait d'un site d'assistance scolaire (résumé de la façon suivante pour le spécimen considéré :  $P = 2 \times \pi \times 7 = 43,96$  cm) : si  $R = r$  u est le rayon de mesure  $r$  quand on a choisi une unité de longueur  $u$ , on écrit que  $P = 2 \times \pi \times r$  et on effectue le calcul numérique  $2 \times 3,14 \times r$  avant d'écrire que  $P = p$  u où  $p$  est le résultat du calcul numérique. Comme nous l'avons indiqué, en tant que (auteurs en position)  $p_\xi$ , la *technique* mise en œuvre par (l'auteur en position)  $p_n$  nous apparaît ne pas convenir. Nous avons présenté plus haut une autre technique, conforme à un rapport  $R(*\hat{s}, o)$  que, en position  $p_\xi$ , nous souhaiterions voir exister. Du point de vue technologico-théorique, toujours selon  $p_\xi$ , il est important de préciser que le calcul se fait sur les grandeurs, ici  $P$  et  $R$  : il faut en quelque sorte poser ce calcul *dans l'espèce de grandeurs considérée* et aller « jusqu'au bout » de ce calcul *sur les grandeurs*. Au sujet de ces deux techniques et de leurs environnements technologico-théoriques respectifs, nous pouvons reprendre une remarque de M. Artaud à propos d'un exemple :

La différence entre ces deux techniques paraît ainsi tenir à ce que contient l'*environnement technologico-théorique* (l'ensemble constitué de la technologie relative à la technique identifiée et de la théorie relative à cette technologie), que nous désignerons un peu grossièrement ainsi : d'un côté, on a les notions de longueur et d'opérations sur les longueurs, tandis que de l'autre, ce sont les opérations sur les mesures (des nombres, donc) qui produisent la technique, une longueur étant en quelque sorte assimilée à sa mesure dans une unité qui n'est pas précisée. On pourrait donc conclure de cet exemple que, *selon  $\hat{w}$ ,  $\hat{u}$  a besoin d'une technique produite par les opérations sur les longueurs pour déterminer des longueurs*. (*Ibid.*, p. 201)

Notons que nous avons choisi d'étudier le rapport  $R_I(p_n, o)$ , où  $p_n$  est la position de noosphérien, en nous efforçant de dégager comment l'évalue la position  $p_\xi$  de chercheur en didactique. Pour cela, nous avons constitué un corpus de documents issus de la noosphère. Mais cela nous permettra de dégager les *besoins praxéologiques de la position de professeur*,  $p_t$ , selon  $p_\xi$ , qui est en fait l'objectif de notre travail. En effet :

Dans une profession, ce que sait un professionnel n'est guère différent de ce que sait la profession. Ou, pour user des concepts de la TAD, le rapport personnel de tel professeur à tel objet – mathématique ou didactique – de son métier est pour l'essentiel superposable au rapport institutionnel qui est celui de la profession à cet objet. (Chevallard & Cirade, 2010, p. 44)

Dans les documents proposés par la noosphère, notamment dans les « textes officiels » fournis par le ministère de l'Éducation nationale, qui s'adressent directement aux professeurs, les ingrédients praxéologiques qui sont proposées sont bien sûr à adapter en classe, mais ces textes donnent des signaux forts aux professeurs et c'est cela qui est important dans les relations entre les positions de professeur,  $p_t$ , et de noosphérien,  $p_n$ . Et une question se pose à la suite de l'analyse que nous venons de proposer : incite-t-on les professeurs à calculer avec des grandeurs ? Pour prendre un exemple, si la formulation adoptée par les auteurs, en position de noosphérien  $p_n$ , des attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup>, avec « ce qui donne », « soit », etc., est correcte, il nous semble qu'elle a potentiellement des effets négatifs sur le rapport entretenu par la position de professeur,  $p_t$ , avec l'objet « grandeurs ».

Nous allons maintenant poursuivre le travail d'identification des besoins praxéologiques de la position de professeur dans le cas des grandeurs en explorant, comme nous l'avons fait

jusqu'à présent, un corpus de documents issus de la noosphère, après avoir précisé le terrain d'étude auquel nous allons nous restreindre.

## UNE EXPLORATION

Depuis plus de trente ans<sup>7</sup>, les grandeurs font partie intégrante des programmes du collège et en constituent même un domaine à part entière depuis le milieu des années 2000. Concernant le lycée, les programmes de mathématiques en vigueur à la rentrée 2019 proposent quelques occurrences du mot « grandeur(s) », telle la suivante figurant dans le programme de seconde : « Les situations internes [aux mathématiques] sont l'occasion de réactiver les connaissances du collège, notamment sur les thèmes "Espace et géométrie" et "Grandeurs et mesures" (longueurs, aires, volumes, angles, vitesses) » (MENJ, 2019b, p. 5). Par ailleurs, les programmes de physique-chimie de seconde et de première (spécialité) mentionnent des « capacités mathématiques » mettant en jeu des grandeurs : « utiliser une grandeur quotient pour déterminer le numérateur ou le dénominateur » ; « effectuer le quotient de deux grandeurs pour les comparer » (MENJ, 2019c, pp. 5-6). On voit bien que les élèves doivent maîtriser, à l'entrée en seconde, un certain nombre de praxéologies relatives au calcul sur les grandeurs et donc que ces praxéologies doivent être mises en place au collège. Nous avons donc choisi de nous placer au niveau du collège pour identifier certains besoins praxéologiques, en considérant *a priori* les trois questions suivantes :

- Quelles sont les *praxéologies mathématiques à enseigner* relativement à ce thème ?
- Quelles sont les *praxéologies pour l'enseignement*, notamment celles de nature mathématique, qui sont utiles ou indispensables au professeur pour aborder l'étude de ce thème ?
- Quelles sont les *praxéologies pour la profession* relativement à ce thème ?

en nous appuyant pour cela sur la description de l'équipement praxéologique du professeur de mathématiques proposée par Yves Chevillard et Gisèle Cirade (2010) :

On a pu proposer une description de l'équipement praxéologique d'un professeur en distinguant savoirs *à enseigner* et savoirs *pour enseigner*. Souvent reprise depuis, cette distinction est insuffisamment élaborée pour permettre un repérage réaliste des praxéologies utiles à un professeur de mathématiques, notamment parce que les « savoirs pour enseigner » y sont souvent réduits aux « savoirs pédagogiques, organisationnels et relationnels » (Bourdoncle & Demailly 1998, p. 14). Or, pour enseigner des mathématiques, il y a, parmi les savoirs pertinents, des savoirs *mathématiques* qui ne sont pas des mathématiques *à enseigner* : le premier outil pour enseigner des mathématiques, *ce sont les mathématiques elles-mêmes*. Pour cette raison, nous placerons d'abord dans une catégorie unique, ouverte, celle *des praxéologies pour la profession*, l'ensemble des praxéologies dont la profession peut avoir avantage à s'équiper. Bien entendu, cette catégorie contient la sous-catégorie des praxéologies *à enseigner* ; mais elle est loin de s'y réduire : au plan mathématique, elle inclut ainsi les connaissances indispensables pour *identifier* les praxéologies à enseigner. L'ensemble (flou, et évolutif) des praxéologies mathématiques *à enseigner* peut alors s'inclure dans une autre sous-catégorie, celle des praxéologies *pour l'enseignement*, qui comprend, avec les *praxéologies didactiques* relatives à telle ou telle praxéologie mathématique *à enseigner*, les praxéologies mathématiques directement utiles pour concevoir et construire ces praxéologies didactiques (dont l'élaboration suppose aussi des praxéologies *pour la profession* qui ne sont pas à strictement parler des praxéologies *pour l'enseignement*). (p. 45)

Dans notre analyse, nous nous efforcerons de mettre en évidence ce qui existe, ce qui pourrait exister, ce qui devrait exister, l'objectif étant de dégager des besoins praxéologiques de la position de professeur,  $p_t$ , selon la position de chercheur en didactique,  $p_\xi$ , dans laquelle nous nous plaçons. Le premier exemple porte sur la conversion des durées, le second sur le calcul d'un volume d'eau et le troisième sur le cas important de l'espèce des longueurs. Afin de dégager certains besoins, nous proposons dans chaque cas quelques éléments d'analyse des

---

<sup>7</sup> La rubrique « Grandeurs et mesures » figurait déjà dans le tableau synoptique proposé à la fin des compléments au programme de 6<sup>e</sup> publiés en 1987 (Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 1989, pp. 30-31).



praxéologies mathématiques considérées – sans aucunement préjuger de leur présentation en classe.

### 1. Convertir une durée

Concernant les durées, les attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup> (MENJ, 2019a) signalent que l'élève doit « [savoir réaliser] des conversions nécessitant deux étapes de traitement » (p. 7) et proposent les deux exemples de réussite suivants (p. 8) :

- Il transforme des heures en semaines, jours et heures :  
Combien font 609 h en semaines, jours et heures ? (609 heures correspondent à 3 semaines 4 jours et 9 heures)
- Il transforme des secondes en heures, minutes et secondes :  
Combien font 34 990 s en heures, minutes et secondes ? (9 heures 43 minutes et 10 secondes).

Pour chacune des deux tâches, seule la réponse est donnée. On peut penser que la difficulté pour le professeur ne réside pas dans l'obtention de la réponse, mais plutôt dans la production d'une technique intelligible, fiable et efficace (Chevallard, 1999, pp. 259-262) et d'un environnement technologico-théorique qui lui permette, notamment, d'utiliser pleinement le calcul sur les grandeurs de l'espèce *durée*. Dégageons deux techniques possibles, sans forcément nous en tenir à ce qu'on pourrait attendre en classe de 6<sup>e</sup>.

On peut obtenir le résultat en effectuant des divisions euclidiennes bien choisies, ce que l'on résume dans les égalités suivantes qui portent sur des grandeurs (en l'occurrence, des *durées*) et permettent d'obtenir le nombre d'heures, puis de jours et, enfin, de semaines :

$$609 \text{ h} = 25 \times 24 \text{ h} + 9 \text{ h} = 25 \text{ j} + 9 \text{ h} = 3 \times 7 \text{ j} + 4 \text{ j} + 9 \text{ h} = 3 \text{ sem} + 4 \text{ j} + 9 \text{ h}.$$

On pourrait aussi, toujours en calculant sur des grandeurs, mais en utilisant des grandeurs quotients, procéder de la façon suivante et obtenir le nombre de semaines, puis de jours et, enfin, d'heures (on ne fournit que les calculs à effectuer) :

$$\begin{aligned} 1 \text{ sem} &= 7 \text{ j} = 7 \times 1 \text{ j} = 7 \times 24 \text{ h} = 168 \text{ h} \\ 609 \text{ h} : 168 \text{ h/sem} &= 3,625 \text{ sem} = 3 \text{ sem} + 0,625 \text{ sem} \text{ (reste à convertir en jours).} \\ 0,625 \text{ sem} \times 7 \text{ j/sem} &= 4,375 \text{ j} = 4 \text{ j} + 0,375 \text{ j} \text{ (reste à convertir en heures)} \\ 0,375 \text{ j} \times 24 \text{ h/j} &= 9 \text{ h} \\ \text{Conclusion : } 609 \text{ h} &= 3 \text{ sem } 4 \text{ j } 9 \text{ h.} \end{aligned}$$

En explicitant ces deux propositions, on note une difficulté concernant les ostensifs : écrit-on 3 sem + 4 j + 9 h ou 3 sem 4 j 9 h ? Les deux réponses vivent dans des contextes différents – dans le contexte du calcul sur les grandeurs pour le premier cas, dans un contexte familier pour le second cas – ce qui n'empêche pas de les faire coexister ainsi que le propose, par exemple, une des ressources thématiques pour le cycle 4, « Grandeurs et mesures », avec les égalités suivantes : « 1 h = 60 min donc 1,7 h = 1 h + 0,7 h = 1 h + 0,7 × 1 h = 1 h + 0,7 × 60 min = 1 h + 42 min = 1 h 42 min » (MENESR, 2016b, p. 3). Les exemples proposés dans cette ressource, centrés sur la conversion d'une mesure décimale en une mesure sexagésimale et réciproquement (ce qui constitue un type de tâches important pour la formation du citoyen), n'explicitent la technique que dans un cas « simple », avec un seul *changement de base* : 1 h = 60 min. On n'est pas confronté à des conversions incluant divers changements de base à manipuler conjointement, comme dans les deux exemples de réussite susmentionnés. Nous pointons là un *besoin praxéologique*, sur les plans technique et technologique, relativement aux praxéologies mathématiques à enseigner, mais nous ne nous attarderons pas plus sur ce point, pour passer à une autre question, mettant en jeu simultanément plusieurs espèces de grandeurs, et notamment une grandeur quotient.

### 2. Une histoire de robinet

La deuxième partie des attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup> (MENJ, 2019a, p. 11) classe les exemples de réussite en deux rubriques, « problèmes additifs » et « problèmes multiplicatifs ». La

deuxième propose un « exemple de réussite » mettant en jeu la grandeur quotient *débit* ou, plus exactement (si l'on s'en tient à l'énoncé), les espèces de grandeurs *volume* et *durée* :

- Un robinet mal fermé laisse échapper 1 mL d'eau toutes les 10 s. Est-ce vrai que cela représente plus de 8 L d'eau perdue par jour ? (*Réponse : Oui, car le robinet laisse échapper 6 mL en 1 min soit 360 mL en 1 h d'où 8 640 mL (8,64 L) en 24 h.*)

Les auteurs proposent donc une réponse en la justifiant par un discours, que l'on pourrait avantageusement expliciter de la façon suivante : le robinet laisse échapper 6 mL en 1 min, donc 60 fois 6 mL en 60 min, soit 360 mL en 1 h, donc 24 fois 360 mL en 24 h, soit 8 640 mL (8,64 L) en 24 h, ce qui donne 8,64 L par jour. Dans une telle formulation, « certains éléments technologiques sont intégrés dans la technique » (Chevallard, 1999, p. 226), ainsi qu'il en va

... traditionnellement en arithmétique élémentaire, où le même *petit discours* a une double fonction, à la fois technique et technologique, en ce qu'il permet à la fois de *trouver* le résultat demandé (fonction technique) et de *justifier* que c'est bien là le résultat attendu (fonction technologique), comme lorsqu'on dit : « Si 8 sucettes coûtent 10 F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 fois 10 F. » (*Ibid.*, p. 226)

Mais revenons à ce robinet mal fermé et donnons une visibilité aux deux espèces de grandeurs, *durée* et *volume*, sur lesquelles on travaille. On a une situation de proportionnalité entre la durée d'écoulement et le volume écoulé (c'est en fait le modèle choisi) : si la durée est multipliée par un nombre, le volume écoulé est multiplié par le même nombre. Autrement dit, la fonction  $\phi$  qui, à une durée d'écoulement  $t$  associe le volume écoulé  $V$ , possède la propriété d'*homogénéité* : pour tout nombre  $k$  et toute durée  $t$ , on a :  $\phi(k t) = k \phi(t)$ . La première étape de la technique, qui peut s'exprimer rhétoriquement de la façon suivante : « comme 1 min = 6 (10 s), en 1 min le robinet laisse échapper 6 (1 mL), c'est-à-dire : 6 mL », peut alors s'exprimer symboliquement comme suit :  $\phi(1 \text{ min}) = \phi(6 (10 \text{ s})) = 6 \phi(10 \text{ s}) = 6 (1 \text{ mL}) = 6 \text{ mL}$ . Bien entendu, d'autres ostensifs peuvent être convoqués. On peut ainsi utiliser un tableau de proportionnalité mettant en jeu des grandeurs, et ce dès le début du cycle 3. On en donne ci-dessous l'état final :

		↖ × 6 ↗	↖ × 60 ↗	↖ × 24 ↗
Volume écoulé	1 mL	6 mL	360 mL	8 640 mL
Durée d'écoulement	10 s	1 min	1 h	1 j
		↖ × 6 ↗	↖ × 60 ↗	↖ × 24 ↗

**Tableau 1.** – Une histoire de robinet : calcul du volume d'eau perdue chaque jour à l'aide d'un tableau (1).


Ce tableau avec les grandeurs, qui utilise sans le dire l'homogénéité de la fonction  $\phi$ , est un moyen d'éviter les notations avec parenthèses des multiplications successives sur les grandeurs :  $6 (1 \text{ mL}) = 6 \text{ mL}$  ;  $60 (6 \text{ mL}) = 360 \text{ mL}$  ;  $24 (360 \text{ mL}) = 8 640 \text{ mL}$ , en indiquant chacune d'elles par une flèche avec un opérateur multiplicatif, et par son résultat (intermédiaire). Dans l'« exemple de réussite », la solution donnée par les auteurs sous-entend chacune de ces multiplications en n'en donnant à chaque fois que le résultat. Ces multiplications portent bien sur des grandeurs, et l'on utilise abondamment, sans l'explicitier, la propriété suivante : pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  de nombres positifs et pour toute grandeur  $g$  d'une espèce de grandeurs  $G$ ,  $\lambda(\mu g) = (\lambda\mu)g$ . Les remarques que nous venons de proposer relèvent de la catégorie des « praxéologies pour l'enseignement, qui comprend, avec les *praxéologies didactiques* relatives à telle ou telle praxéologie mathématique à enseigner, les *praxéologies mathématiques* directement utiles pour concevoir et construire ces *praxéologies didactiques* » (Chevallard & Cirade, 2010, p. 45). Il nous semble qu'il y a à cet égard un *besoin praxéologique* de la position de professeur, dont témoigne notamment, comme on l'a vu, la réticence à écrire des *opérations sur les grandeurs*, et dont l'origine est sans doute le manque de légitimité, pour la position  $p_i$ , d'écritures témoignant d'opérations sur des objets qu'elle ne considère pas comme de véritables

objets mathématiques. La rencontre lors de leur formation universitaire du fait que chacune des espèces de grandeurs scalaires<sup>8</sup> est une demi-droite vectorielle (voir par exemple Chevallard & Bosch, 2002) nous semble constituer une condition essentielle du développement du calcul sur les grandeurs dans la profession et d'une meilleure prise en charge des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques lors des phases de modélisation. On terminera ce paragraphe en indiquant une autre technique : en notant que  $1 \text{ j} = 86\,400 \text{ s} = 8\,640 \times 10 \text{ s}$ , on en déduit que le volume cherché est  $V = 8\,640 \times 1 \text{ mL} = 8\,640 \text{ mL}$ . Ici, nul n'est besoin de tableau.

On peut procéder autrement en travaillant sur le *débit*, grandeur qui est le quotient du volume par la durée. Nous proposerons plusieurs techniques, en notant  $V$  le volume cherché.

– De même que l'on a « distance parcourue = vitesse  $\times$  durée de parcours », on définit le débit par : « volume d'écoulement = débit  $\times$  durée d'écoulement ». Ici le débit est de  $1 \text{ mL}/10 \text{ s}$ , ou encore  $\frac{1}{10} \text{ mL/s}$ . Comme  $1 \text{ j} = 86\,400 \text{ s}$ , on a :  $V = \frac{1}{10} \text{ mL/s} \times 86\,400 \text{ s} = \left(\frac{1}{10} \times 86\,400\right) \text{ mL} = 8\,640 \text{ mL} = 8,64 \text{ L}$ .

– On peut bien entendu choisir d'autres ostensifs, et utiliser un tableau de proportionnalité mettant en jeu des grandeurs, en remplaçant le coefficient de proportionnalité des tableaux numériques par la grandeur quotient du volume par la durée, c'est-à-dire le débit.

Durée d'écoulement	10 s	86 400 s	 $\times \frac{1}{10} \text{ mL/s}$
Volume écoulé	1 mL		

**Tableau 2.** – Une histoire de robinet : calcul du volume d'eau perdue chaque jour à l'aide d'un tableau (2).

Le calcul à effectuer est le même que celui que l'on vient de présenter. Mais on peut aussi, en se plaçant dans l'algèbre des grandeurs de Hassler Whitney (1968b) (voir Chevallard & Bosch, 2002), écrire la fameuse « égalité des produits en croix », qui est encore vraie. Cela donne :

$$1 \text{ mL} \times 86\,400 \text{ s} = 10 \text{ s} \times V$$

$$V = \frac{1 \text{ mL} \times 86\,400 \text{ s}}{10 \text{ s}} = 1 \text{ mL} \times \frac{86\,400 \text{ s}}{10 \text{ s}} = 1 \text{ mL} \times 8\,640 = 8\,640 \text{ mL} = 8,64 \text{ L}$$

Cette technique, qui relève de l'algèbre des grandeurs, est plus abstraite car elle fait intervenir le *produit* d'une grandeur *volume* par une grandeur *durée*, produit qui existe dans l'algèbre des grandeurs, mais qui n'existe pas dans la vie sociale. On aboutit au résultat par un chemin faisant intervenir des opérations n'ayant pas de contreparties dans la réalité, comme c'est bien souvent le cas en mathématiques – il suffit de penser à certaines étapes de la résolution par l'algèbre d'un problème mathématique ou extramathématique. Ce que nous évoquions précédemment pour la position  $p_t$ , à savoir le manque de légitimité de telles écritures, est sans doute un frein à la diffusion de techniques de ce type.

– On peut aussi effectuer une conversion sur le débit, en passant de l'unité  $\text{mL/s}$  à l'unité  $\text{L/j}$  :  $\frac{1 \text{ mL}}{10 \text{ s}} = \frac{6 \text{ mL}}{1 \text{ min}} = \frac{360 \text{ mL}}{1 \text{ h}} = \frac{8640 \text{ mL}}{1 \text{ j}} = \frac{8,64 \text{ L}}{1 \text{ j}} = 8,64 \frac{\text{L}}{\text{j}}$ . Il semble envisageable de mettre en place cette technique (ici juste ébauchée, sur un spécimen) en cycle 4, le programme mentionnant : « notion de grandeur produit et de grandeur quotient » (MENJ, 2018b, p. 152). À cet égard, la ressource d'accompagnement du cycle 4, « Grandeurs et mesures », propose de tels éléments praxéologiques :

<sup>8</sup> Les grandeurs en question – qualifiées de « scalaires » pour les distinguer des grandeurs vectorielles, tensorielles voire spinorielles – sont les grandeurs de base telles que la longueur, la masse, la durée, le prix (montant d'une facture), etc., et celles qu'on peut en déduire comme produit : aire, volume ou capacité, etc. Mais aussi des grandeurs quotients de telles grandeurs : vitesse (en  $\text{m/s}$ ), densité (en  $\text{hab/km}^2$ ), débit (en  $\text{m}^3/\text{s}$ ), prix massique (en  $\text{€/kg}$ ), prix à la pièce (en  $\text{€/Pce}$ ), prix surfacique (en  $\text{€/m}^2$ ), etc., grandeurs qui, dans certaines spécialités, sont appelées *intensives*, alors que les grandeurs de base, qui sont additives, sont qualifiées d'*extensives*. Les cas du temps et de la température seront évoqués plus loin.

Par exemple pour trouver le temps nécessaire pour parcourir 700 m à une vitesse constante de 4,5 km/h, on peut [...] connaître uniquement l'égalité  $v = \frac{d}{t}$  et l'utiliser :  $v = 4,5 \text{ km/h} = \frac{4,5 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{4500 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{500 \text{ m}}{400 \text{ s}} = \frac{100 \text{ m}}{80 \text{ s}} = \frac{700 \text{ m}}{560 \text{ s}}$ . Il reste ensuite à convertir 560 s en 9 min 20 s (MENESR, 2016b, p. 4)

Notons que de tels éléments praxéologiques figurent dans les manuels, mais généralement de façon « dégradée », comme dans l'extrait suivant (Sésamath, 2016, p. 204) où il s'agit de « convertir des grandeurs composées » :

▪ « La masse volumique du fer vaut  $7,84 \text{ g.cm}^{-3}$  » signifie que  $1 \text{ cm}^3$  de fer a une masse de 7,84 g.

$$\text{Ainsi, } 7,84 \text{ g.cm}^{-3} = \frac{7,84 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = \frac{0,00784 \text{ kg}}{0,000001 \text{ m}^3} = \frac{0,00784 \text{ kg}}{0,000001 \text{ m}^3} = 7\,840$$

La masse volumique du fer vaut donc  $7\,840 \text{ kg.m}^{-3}$ .

On retrouve le même point soulevé à propos du calcul de la longueur d'un cercle : les auteurs n'assument pas le calcul sur les grandeurs « jusqu'au bout ».

Nous venons d'examiner quelques ingrédients praxéologiques qui, selon nous, devraient ou pourraient exister. De nombreux besoins praxéologiques de la position de professeur apparaissent, à la fois au niveau des mathématiques à enseigner et, plus largement, des mathématiques pour l'enseignement. Nous allons poursuivre le travail de repérage des besoins en revenant sur l'espèce des longueurs et en mettant en évidence d'autres phénomènes que ceux que nous avons dégagés jusqu'à présent.

### 3. Le cas de l'espèce des longueurs

Parmi toutes les espèces de grandeurs, la *longueur* joue un rôle fondamental du fait qu'elle permet de représenter des grandeurs de différentes espèces et leurs relations par le biais de diagrammes et de graphiques. Dans la première section, nous avons travaillé sur la longueur d'un cercle ; nous allons ici essentiellement porter notre attention sur la longueur d'un segment.

Dans la ressource d'accompagnement « Grandeurs et mesures au cycle 3 » (MENESR, 2016c), notée G&M-C3 dans la suite, les formules relatives aux périmètres et aires sont explicitement présentées comme portant sur les mesures et non pas sur les grandeurs : « Le travail mené avec ces formules permet, en représentant une mesure par un mot, comme dans Longueur  $\times$  largeur, puis par une lettre,  $L \times l$ , de préparer les élèves au travail qui sera mené au cycle 4 sur le calcul littéral » (p. 8). Tel n'est plus le cas dans la ressource relative au cycle 4 (MENESR, 2016b), où l'utilité des unités dans ces formules de périmètre et d'aire est défendue sans que la transition avec ce qui est préconisé en 6<sup>e</sup> soit précisée. Le « calcul avec unités » est mis en œuvre pour traiter les conversions d'aires, de durée, de vitesse – sans qu'aucun retour ne soit fait sur les conversions de longueurs – et également pour traiter des problèmes portant sur les grandeurs quotients, en l'illustrant avec la vitesse comme nous l'avons vu précédemment.

Le moment décisif concernant le passage des longueurs à leurs mesures se fait donc au cycle 3, et il est évoqué dans les ressources G&M-C3 et « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 » (MENESR, 2016a), notée F&D-C3 dans la suite. Dans G&M-C3, qui reprend l'argumentation déjà développée dans le document relatif au cycle 2, le passage des manipulations concrètes aux définitions et opérations sur les longueurs n'est pas marqué ; par exemple, la définition de l'addition de deux longueurs n'est évoquée qu'à travers une rapide allusion à des segments mis bout-à-bout. Plus généralement, d'autres ingrédients praxéologiques dont la gestion est délicate, et fortement dépendante des connaissances du professeur sur la grandeur *longueur*, sont passés sous silence. On peut citer a) le passage des « objets longs » aux segments de droite qui les modélisent, la longueur étant la seule grandeur « extensive » qu'on puisse rattacher à un segment ; b) une définition de segments de même longueur (modélisation de la superposabilité des objets longs), alors qu'on ne dispose pas encore de leur mesure, ce qui disqualifie l'emploi de l'adjectif « isométriques » (on peut parler de segments superposables, ou de segments ayant la propriété de libre mobilité, si l'on veut éviter à la fois le qualificatif « égaux » selon la tradition d'Euclide, et le qualificatif

« congruents » forgé par Hilbert) ; c) l'absence d'une définition claire de la somme de deux longueurs, et de celle, corrélatrice, de la définition du périmètre d'un polygone comme somme des longueurs de ses côtés. On notera qu'on peut définir ainsi l'addition des longueurs  $l$  et  $m$  : on choisit un segment  $[AB]$  de longueur  $l$  et, sur la droite  $(AB)$ , le point  $C$  tel que  $B$  soit entre  $A$  et  $C$  et tel que  $[BC]$  ait pour longueur  $m$  ; alors  $l + m$  est la longueur du segment  $[AC]$  et on dit que les représentants  $[AB]$  et  $[BC]$  des longueurs  $l$  et  $m$  sont mis bout-à-bout. Par ailleurs, alors qu'on ne peut pas mettre bout-à-bout un segment avec lui-même, on peut ajouter sa longueur à elle-même en ayant recours à un autre segment de même longueur. Cela permet de définir l'addition itérée de longueurs égales (et donc la multiplication par un entier), ainsi que la notation associée.

La question de la division d'une longueur par un entier non nul et du produit par une fraction se manifeste dans le deuxième document, F&D-C3 (pp. 2-3). Des fractions d'une longueur sont mobilisées ainsi dans le premier exemple : on considère que « l'unité » est la longueur du segment donné et, à l'aide d'un dessin, on fait apparaître le partage de la longueur en cinq parts égales, puis le cinquième et les trois cinquièmes de cette longueur. On dit dans le registre de la langue que l'on obtient « un cinquième d'unité », ou « trois cinquièmes de l'unité », et la seule notation proposée est celle de la fraction  $\frac{3}{5}$  ; pour la longueur considérée et les fractions de longueur obtenues, aucune notation n'est proposée. Alors que les opérations sur la longueur en question n'exigent pas de la considérer comme l'unité, la considération de cette « unité » est ici un moyen pour introduire un nouveau nombre : la fraction  $\frac{3}{5}$ . Cette dernière obtenue, le lien entre la fraction de longueur et la longueur initiale n'est proposé que dans le registre de la langue, par le truchement du mot « unité ». Ce registre est mal adapté au calcul, alors que la définition du produit d'une longueur  $\ell$  par une fraction, et l'introduction d'écritures telles que  $\frac{3}{5}\ell$  permettront ensuite des écritures telles que  $\frac{125}{100}m$ , l'unité «  $m$  » représentant une longueur particulière, choisie pour des raisons dépassant les seules mathématiques. Une remarque concernant la définition d'une fraction de longueur : on définit usuellement  $\frac{m}{n}\ell$  comme étant  $m(\frac{1}{n}\ell)$ , mais on peut aussi la définir comme  $\frac{1}{n}(m\ell)$  et il convient donc auparavant de démontrer que ces deux longueurs sont égales – leurs produits par  $n$  sont égaux à  $m\ell$ . Une justification est proposée dans F&D-C3, dans la section « La fraction pour exprimer un quotient », où il s'agit de s'assurer que « sept tiers c'est 1 partagé en 3 pris 7 fois ou encore 7 fois le tiers de 1 (fraction partage), et c'est la même chose que 7 partagé en 3, ou encore le tiers de 7 (fraction quotient) » (p. 16), en s'appuyant sur une vérification expérimentale de « l'égalité des longueurs d'un segment qui mesure sept tiers de l'unité et d'un segment mesurant le tiers de sept unités » (p. 16), soit  $7\left(\frac{1}{3}u\right) = \frac{1}{3}(7u)$ . Pour mieux rendre compte du discours des auteurs, il conviendrait sans doute de remplacer subrepticement l'unité de longueur  $u$  par le nombre 1, brouillant ainsi la signification du mot *unité*. C'est dans le droit fil du choix fait par les auteurs : pour travailler sur les nombres, on convoque les grandeurs mais sitôt le travail réalisé, on se dépêche d'oublier les grandeurs.

Concernant le mesurage proprement dit, les assertions suivantes nous semblent rendre compte de besoins de la position  $p_i$  concernant les praxéologies pour l'enseignement : a) il n'y a pas de choix naturel d'unité de longueur ; b) il faut problématiser l'égalité entre la mesure d'une somme de longueurs et la somme de leurs mesures (une même unité ayant été choisie) ; c) une unité de longueur est une longueur ; d) une unité de longueur n'est pas le nombre 1, ce dernier n'étant que la mesure de cette unité :  $u = 1 u$  ; e) une fois une unité choisie, pour mesurer une longueur, on peut faire subir à l'unité n'importe quelle opération précédemment définie – l'ajouter à elle-même, la multiplier ou la diviser par un entier non nul, la multiplier par une fraction, etc. –, cela afin d'obtenir une longueur égale à la longueur à mesurer.

L'introduction de l'unité légale, le mètre, ne suffit pas aux divers usages sociaux et ses multiples et sous-multiples sont introduits, souvent en privilégiant l'emploi de la multiplication par une puissance de 10, comme dans l'égalité  $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$ . L'introduction de la définition d'une fraction de longueur et sa notation permet de symétriser cette relation en écrivant  $1 \text{ m} = \frac{1}{1000} \text{ km}$ . Ainsi, la conversion de 125 cm en mètre peut être conduite avec la technique suivante :  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ , donc  $1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m}$  et  $125 \text{ cm} = 125 (1 \text{ cm}) = 125 \left(\frac{1}{100} \text{ m}\right) = \frac{125}{100} \text{ m} = 1,25 \text{ m}$ . Plus tard, une fois l'écriture avec virgule des fractions décimales introduite, et la pratique de la multiplication par 0,01 installée, on pourra procéder ainsi :  $125 \text{ cm} = 125 (1 \text{ cm}) = 125 (0,01 \text{ m}) = (125 \times 0,01) \text{ m} = 1,25 \text{ m}$ . Du point de vue de sa fiabilité, mais aussi de son intelligibilité, on peut comparer cette technique avec celles suggérées dans G&M-C3, que les extraits suivants évoquent, sans les séparer de leur mise en place en classe :

- Les activités de mesurage permettent de comprendre qu'en prenant une unité de mesure dix fois plus grande, on trouve un nombre d'unités dix fois plus petit :  $100 \text{ cm}$  c'est  $10 \times 1 \text{ dm}$  ou encore  $1 \times 1 \text{ m}$  ; de la même façon,  $143 \text{ mL} = 14,3 \text{ cL}$ , car  $1 \text{ cL} = 10 \text{ mL}$ . Ces exercices contribuent à renforcer la compréhension de notre système décimal de position. (p. 5)
  - Les tableaux des unités [ou tableaux de conversion] sont des outils efficaces pour institutionnaliser la suite des préfixes dès le cours moyen, mais les conversions s'appuyant sur des relations connues ou le sens des préfixes restent néanmoins requises, et non l'utilisation mécanique de tableaux de conversion. [...]
- Les conversions sont aussi travaillées tout au long du cycle dans le cadre du calcul mental, ou du calcul en ligne :  $2 \text{ m} + 125 \text{ cm} = 2 \text{ m} + 1,25 \text{ m} = 3,25 \text{ m}$ . (p. 7)

On a vu précédemment que l'introduction du centimètre comme fraction du mètre, et sa notation fractionnaire, permet précisément d'objectiver le « sens des préfixes » et les « relations connues ». Comment la conversion en mètre de 125 cm est-elle faite ici ? Mémorisation d'exemples semblables, ou emploi implicite de la règle suivante, considérée comme une évidence : si l'unité est multipliée par 100, la mesure est divisée par 100 ? Alors qu'elle est présentée comme une alternative ayant davantage de sens que celle employant un tableau de conversion, il n'est pas sûr que les techniques proposées, dont la justification laisse à désirer, soient perçues comme telles par les professeurs.

On constate que les *besoins mathématiques* de la position de professeur relativement aux *praxéologies mathématiques pour l'enseignement* se situent non seulement au niveau des techniques et des technologies associées, mais également au niveau *théorique*. Il est en effet crucial de pouvoir disposer d'une théorie où les longueurs et les opérations les concernant sont définies sans recours à leur mesure, théorie qui ne fait généralement pas partie du curriculum personnellement vécu (CPV) du professeur (voir Chevallard, 2021). Cela pose la question de la *diffusion* et de la *réception* des savoirs dans un domaine où de nombreux travaux se situant dans le cadre très général des *praxéologies pour la profession* ont été réalisés (voir notamment<sup>9</sup> Chevallard & Bosch, 2002 et MENESR, 2007/2016), mais sans que l'intérêt, la nécessité et la pertinence de ces savoirs n'apparaissent cruciaux à la position de professeur.

## LE CAS DE LA GRANDEUR *TEMPÉRATURE*

Cette section sera consacrée à une grandeur présente au quotidien dans la vie sociale, la *température*. Dans la profession, on attire l'attention sur cette grandeur en la présentant comme une grandeur *non mesurable* et en la qualifiant de grandeur *repérable*, sans pour autant définir ce qualificatif. De nombreuses questions se posent alors et, pour mener notre enquête, nous partirons d'un énoncé, proposé comme un exemple de question flash au cycle 4, portant sur les deux échelles usuelles de température.

---

<sup>9</sup> On peut aussi consulter la première partie de l'article de H. Whitney (1968a), qui traite de la co-construction des nombres et des grandeurs. Les deux articles de Whitney (1968a et b) ont valu à son auteur en 1969 le prix Lester R. Ford Award, récompensant les auteurs faisant preuve d'excellence dans l'exposition du sujet traité.

## 1. Vers l'identification des besoins

Cet énoncé est issu d'une des ressources d'accompagnement de 2016, intitulée « Grandeurs et mesures. Exemples de questions flash. Expression d'une grandeur en fonction d'une autre » (MENESR, 2016d, p. 1) :

- 3. Le degré Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) et le degré Fahrenheit ( $^{\circ}\text{F}$ ) sont deux unités de température. Une température en  $^{\circ}\text{F}$  est obtenue en multipliant par 1,8 une température  $t$  exprimée en  $^{\circ}\text{C}$  puis en ajoutant 32. Exprimer en fonction de  $t$  la température  $f(t)$  en  $^{\circ}\text{F}$ .

On constate tout d'abord que cet énoncé est ambigu. La lettre  $t$  désigne-t-elle une température ou sa mesure en  $^{\circ}\text{C}$  ? Conformément à l'habitude, bien installée dans la profession, consistant à confondre une grandeur avec sa mesure selon une unité donnée, il semble bien que ce soit la *mesure* de la température, ici en  $^{\circ}\text{C}$ . Par ailleurs, il ne s'agit pas d'exprimer une *grandeur* en fonction d'une autre, mais de fournir un programme de calcul permettant de passer de la mesure «  $t$  » en  $^{\circ}\text{C}$  d'une température à sa mesure «  $f(t)$  » en  $^{\circ}\text{F}$  (le document soigne peu la typographie) : on multiplie  $t$  par 1,8 puis on ajoute 32. Il s'agit donc pour la classe de déterminer l'expression algébrique de ce programme de calcul, et d'utiliser cette expression pour définir une fonction. La fonction est celle qui, à la mesure  $t$  d'une température sur l'échelle Celsius associe la mesure correspondante  $f(t)$  sur l'échelle Fahrenheit. Dans le document, une phrase en bas de la page 1 confirme cette interprétation : « Ce travail est à la fois l'occasion de travailler sur le calcul littéral et les fonctions dans le cadre de grandeurs et mesures. »

Cet énoncé, bien représentatif des supports proposés au professeur par diverses sources noosphériques, est épuré de son contexte, de façon que ce dernier ne vienne pas troubler le petit travail demandé. Mais la dévolution de cette tâche peut difficilement se passer d'une explicitation de ce contexte. Ainsi, par exemple, si un élève pose des questions telles que : « pourquoi multiplier par 1,8 ? », « pourquoi ajouter 32 ? », le professeur va devoir fournir des précisions sur ces deux échelles de température. À ce sujet, on peut par exemple consulter l'article *Degré Fahrenheit* de Wikipédia qui permet de comprendre que les choix faits par Fahrenheit ne se justifient pas entièrement par des raisons d'ordre mathématique ou physique :

Fahrenheit a décidé de définir son échelle par deux températures de référence :

- une température basse, qu'il définit en laboratoire comme la température de solidification d'un mélange eutectique d'un volume égal de chlorure d'ammonium et d'eau (*aquae & salis armoniaci*). Cette température correspondrait initialement à la plus basse qu'il ait mesurée durant l'hiver de 1708 à 1709 dans sa ville natale de Dantzig ;
- une température haute, celle d'un homme en bonne santé, prise sous l'aisselle ou dans la bouche (*in ore vel sub axillis hominis in statu sano*).

Il divisa d'abord cet intervalle en 12 unités avant de se raviser et de subdiviser chacune de ces unités en 8 degrés. La différence entre les deux températures de référence est dès lors fixée à  $12 \times 8$ , soit 96 degrés ( $^{\circ}\text{F}$ ).

Fahrenheit observa que, dans son échelle, l'eau gèle, à pression atmosphérique normale, à 32 degrés et bout à 212 degrés, soit une différence de 180 degrés. (« Degré Fahrenheit », 2020)

Reprenons maintenant les questions que nous avons attribuées à un élève, et examinons comment le professeur peut s'y prendre pour y répondre. On peut imaginer donner par exemple les informations suivantes – ici exprimées dans le registre de la langue vernaculaire :

La température à laquelle l'eau gèle (en première approximation) :  $0^{\circ}\text{C}$  et  $32^{\circ}\text{F}$ .

La température à laquelle elle bout :  $100^{\circ}\text{C}$  et  $212^{\circ}\text{F}$ .

On voit apparaître le nombre 32 dans la température à laquelle l'eau gèle ; on constate aussi que la différence entre  $100^{\circ}\text{C}$  et  $0^{\circ}\text{C}$ , soit  $100^{\circ}\text{C}$ , est égale à la différence entre  $212^{\circ}\text{F}$  et  $32^{\circ}\text{F}$ , soit  $180^{\circ}\text{F}$ . La présence des nombres 32 et 1,8 dans le programme de calcul devient déjà un peu moins mystérieuse. Mais ce début d'explication est insuffisant.

Plusieurs manières de faire sont possibles, en travaillant avec la grandeur température, et non seulement avec leurs mesures en  $^{\circ}\text{F}$  ou  $^{\circ}\text{C}$ . En voici une.

La différence de température  $100^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C}$ , c'est-à-dire  $100^{\circ}\text{C}$ , est égale à la différence de température  $212^{\circ}\text{F} - 32^{\circ}\text{F}$ , soit  $180^{\circ}\text{F}$  :  $100^{\circ}\text{C} = 180^{\circ}\text{F}$ . Donc  $1^{\circ}\text{C} = 1,8^{\circ}\text{F}$ .

La différence de température  $t\text{ °C} - 0\text{ °C}$ , c'est-à-dire  $t\text{ °C}$ , est d'une part égale à  $t(1,8\text{ °F})$ , soit  $(1,8 t)\text{ °F}$ .  
 Et d'autre part, elle est égale à  $f(t)\text{ °F} - 32\text{ °F}$ , c'est-à-dire  $[f(t) - 32]\text{ °F}$ .  
 Donc  $[f(t) - 32]\text{ °F} = (1,8 t)\text{ °F}$ ,  $f(t) - 32 = 1,8 t$ , et finalement :  $f(t) = 1,8 t + 32$ .

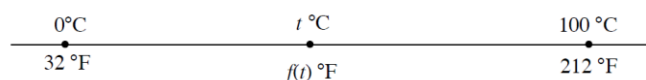


Figure 1. – La double graduation de la droite.

La double graduation de la droite dans la figure 1 est parlante pour visualiser les différences de températures qui sont égales. Elle est également mobilisée dans des thermomètres à double graduation tels que celui représenté dans la figure 2, qui permet de convertir une température d'une échelle à l'autre, même si on ne dispose ni de l'expression de la fonction  $f$ , ni de celle de sa réciproque.

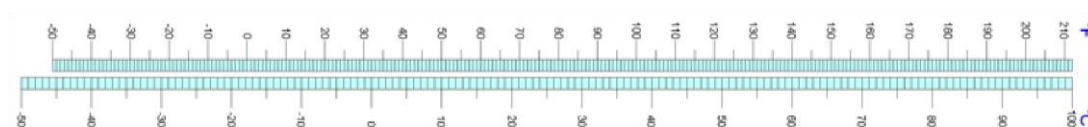


Figure 2. – Un thermomètre à double graduation.

On peut trouver d'autres présentations des mêmes calculs, en sollicitant une mise en tableau :


Différences de températures en °C	100 °C	$t\text{ °C}$	 $\times 1,8\text{ °F/°C}$
Différences de températures en °F	180 °F	$[f(t) - 32]\text{ °F}$	

Tableau 3. – Lien entre les différences de température dans les deux échelles, Celsius et Fahrenheit.

On passe de la première ligne à la seconde en multipliant par  $1,8\text{ °F/°C}$ . Il en résulte :  $[f(t) - 32]\text{ °F} = 1,8\text{ °F/°C} \times t\text{ °C} = 1,8 t\text{ °F}$  et donc  $f(t) - 32 = 1,8 t$ . En fait, la grandeur quotient ainsi mobilisée n'est qu'une autre écriture du nombre 1 : en effet,  $1\text{ °C} = 1,8\text{ °F}$  peut s'écrire  $1,8\text{ °F}/1\text{ °C} = 1$ , ou encore  $1,8\text{ °F/°C} = 1$ . Cette écriture plus complexe du nombre 1 présente l'avantage de matérialiser la conversion d'unité, en faisant apparaître l'unité  $\text{°F/°C}$  qui permet, en opérant sur une différence de températures en °C, d'obtenir une différence de températures en °F.

On vient ici d'obtenir le résultat proposé dans l'énoncé, mais en supposant, sans l'expliciter, que la différence de températures en °F est *proportionnelle* à la différence de températures en °C – ce qui est effectivement plus visible sur le tableau ci-dessus que sur les calculs précédemment menés<sup>10</sup>. En d'autres termes, la température en °F est une fonction *affine* de la température en °C. Comment le justifier ? On a là un des *besoins praxéologiques* de la position de professeur concernant la grandeur *température* : la connaissance et l'identification des caractéristiques de la grandeur *température* utiles pour procéder à sa mathématisation sont bien souvent absentes.

## 2. Vers la satisfaction des besoins

Pour satisfaire ce besoin praxéologique de la position de professeur, il est nécessaire de mener une enquête sur la grandeur *température* et son écologie. Cette enquête, dont nous rendons compte ci-dessous, amène à considérer des mathématiques pour la profession dont le niveau

<sup>10</sup> On avait par exemple indiqué que, comme  $100\text{ °C} = 180\text{ °F}$ , alors  $1\text{ °C} = 1,8\text{ °F}$ . Mais on n'avait pas indiqué que, comme  $100\text{ °C} = 212\text{ °F}$ , alors  $1\text{ °C} = 2,12\text{ °F}$ . Dans le premier cas, il s'agit de *différences* de températures, alors que, dans le deuxième cas, il s'agit de températures.



trophique est parfois élevé. Il va de soi que la réponse apportée par l'enquête doit être transposée pour être incluse dans l'équipement praxéologique du professeur, mais cela excède le travail effectué ici.

L'enseignement relatif à la grandeur *température* dans la classe de mathématiques est souvent fort limité. Quant aux professeurs, durant leur formation, sans doute ont-ils été alertés sur son caractère particulier, que l'on résume par cette formulation : la température n'est pas une grandeur *mesurable*, mais seulement une grandeur *repérable*.

Dans la brochure intitulée « Grandeur – Mesure, tome VI » de la collection « Mots » (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public [APMEP], 1982), on trouve dans le paragraphe III - 8 intitulé « Grandeurs mesurables » la locution « grandeur repérable », locution assez peu employée en dehors de la sphère enseignante :

On sait donner une signification à « Ce matériau est aussi dur que cet autre ». La dureté donne la possibilité de définir une échelle (échelle de Mohs, pour les roches), ou un indice (indice de Brinell, pour les métaux) ; mais on ne saurait parler de la somme de deux duretés.

On sait reconnaître que deux points sont au même potentiel électrique (on dit : la différence de potentiel entre ces deux points est nulle) : il ne passerait aucun courant dans un fil métallique qui les joindrait. Mais on ne sait pas définir la somme de deux potentiels.

La dureté, le potentiel électrique sont des grandeurs repérables, mais pas sommables. (p. 24)

La page 25 est consacrée aux grandeurs mesurables (III - 8.2), en prenant comme exemple générique les longueurs (relation d'équivalence sur les segments, ordre total, addition, multiplication par un réel positif). Puis, subrepticement, en page 26, on fait un tri dans les grandeurs repérables : il ne sera plus question de la dureté. En revanche, sans leur donner un nom spécial, on s'intéresse à des grandeurs repérables particulières, ayant en commun une propriété qui va les rapprocher des grandeurs mesurables.

III - 8.3. Le potentiel électrique n'est pas une grandeur mesurable (car il est non sommable), mais la différence de potentiel, ou tension électrique, est mesurable.

De même, la température, celle dont parle le météorologue, n'est pas une grandeur mesurable (car elle est non sommable) ; mais la différence de température (on dit : intervalle de température) est une grandeur mesurable.

On sait dire que deux événements se produisent à un même instant, mais on ne donne pas de signification à la somme de deux instants. Par contre, la durée, c'est-à-dire le temps écoulé entre deux instants, est une grandeur mesurable. (*Ibid.*, p. 26)

On voit bien que cette création de la catégorie « grandeur repérable » manque de finesse, puisque le paragraphe 8.3 exclut certaines d'entre elles pour se focaliser sur une sous-catégorie regroupant des grandeurs de grande importance (le temps, les températures, notamment), sous-catégorie dans laquelle on s'intéresse à des différences de grandeurs repérables, qui deviennent des grandeurs mesurables. Le physicien y rajouterait volontiers les différences de longueurs<sup>11</sup>, qui constituent aussi une grandeur mesurable.

Si on se tourne maintenant vers des praticiens des grandeurs ne fuyant pas leur théorisation, on ne peut pas faire l'impasse sur les travaux du psychophysicien S. S. Stevens qui, dans *On the Theory of Scales of Measurement* (1946), a proposé une classification beaucoup plus fine de ce qu'il appelle des « échelles de mesure », résumée dans le tableau 4.

Type d'échelle	Opérations empiriques de base	Transformations admissibles (groupe)	Exemples <sup>12</sup>
Échelle absolue	Comptage	Transformation identique	Dénombrement

<sup>11</sup> En physique, les composantes d'un vecteur  $\overline{AB}$  de l'espace ne sont pas des différences de nombres réels, mais des *différences de longueurs*, c'est-à-dire des éléments de la droite vectorielle des longueurs, ensemble des éléments de la forme  $x$  cm,  $x$  parcourant  $\mathbf{R}$ , noté  $\mathbf{R}[\text{cm}]$  ; ensemble qui est exactement le même que  $\mathbf{R}[\text{m}]$ .

<sup>12</sup> Les points d'interrogation figurant dans cette colonne signifient que les sujets qu'ils indiquent étaient discutés chez les psychophysiciens à cette époque-là.

Type d'échelle	Opérations empiriques de base	Transformations admissibles (groupe)	Exemples <sup>12</sup>
Échelle de rapports	Détermination de rapports égaux	Similitudes (ou homothéties de rapport positif) : $f(x) = ax, a > 0$	Masse, température sur l'échelle de Kelvin, durée (intervalle de temps), longueur, volume, force d'un son, luminosité d'un signal (selon Stevens).
Échelle d'intervalles	Détermination d'intervalles égaux (ou de différences égales)	Transformations « linéaires positives », c'est-à-dire $f(x) = ax + b, a > 0$	Température (°C, °F), temps (calendaire) Tests d'intelligence standardisés ?
Échelle ordinale	Détermination d'un ordre (plus grand, plus petit)	Applications strictement croissantes	Dureté d'un métal, qualité de l'air, qualité de cuir, laine, etc., stress, douleur, grades militaires Résultats bruts de test d'intelligence ?
Échelle nominale	Détermination de l'égalité	Bijections (groupe symétrique)	Numérotation de maillots de sportifs, codages numériques, sexe, adhésion à un parti politique.

**Tableau 4.** – Classification des échelles de mesure proposée par S. S. Stevens (1946).

On voit que la dureté est classée dans les échelles ordinales, dans lesquelles toute échelle déduite de l'une d'entre elles par une fonction strictement croissante fait aussi l'affaire.

Les grandeurs les plus utilisées font appel à des échelles de rapports. Le changement d'unité se manifeste par le groupe des homothéties de rapport positif, dont les éléments sont caractérisés par un seul paramètre<sup>13</sup>. La température sur l'échelle de Kelvin est une échelle de rapports.

Les grandeurs qui nous intéressent (températures en °C ou °F, mais aussi temps calendaire) sont classées dans les échelles d'intervalles. Le groupe de transformations admissibles pour passer d'une échelle qui convient à une autre est un groupe dont les éléments se définissent à l'aide de deux paramètres, que les anglo-saxons appellent le groupe des « transformations linéaires positives » – chez eux, « linéaire » veut parfois dire « affine » –, le qualificatif « positif » visant le coefficient de  $x$  et non pas la transformation.

La demi-droite vectorielle attachée à chacune des grandeurs extensives (longueur, masse, etc.) va être remplacée par une droite affine, ou plutôt par « un morceau de droite affine » si l'on se réfère à la circulaire du 22 novembre 1971, relative au programme de 4<sup>e</sup> de l'époque des mathématiques modernes, où la droite affine était définie comme famille de bijections. L'extrait suivant de cette circulaire (Ministère de l'Éducation, 1975, p. 65) rappelle cette définition :

**Présentation mathématique d'une droite affine**

Par définition, une droite affine  $\Delta$  est un ensemble  $E$  muni d'une famille  $\phi$  de bijections de  $E$  sur  $\mathbf{R}$  telle que :

- a) pour tout  $f$  élément de  $\phi$ , et pour tout élément  $(a, b)$  de  $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ , l'application définie par  $g(M) = af(M) + b$  appartient aussi à  $\phi$  ;
- b) réciproquement, si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux éléments quelconques de  $\phi$ , il existe  $(\alpha, \beta)$  appartenant à  $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ , tel que :  $f_2(M) = \alpha f_1(M) + \beta$ .

Le groupe des bijections considéré est plus gros que le groupe des transformations admissibles relatif à la grandeur température, car il contient toutes les fonctions affines non constantes, et non seulement celles qualifiées précédemment de positives. Plus loin sur la même page, les auteurs de la circulaire poursuivent ainsi :

P et Q étant deux points quelconques d'une droite affine  $\Delta$ , la différence  $f(Q) - f(P)$  dépend du choix de  $f$  dans  $\phi$  ; au contraire, R et S étant deux points distincts de  $\Delta$ , le rapport  $\frac{f(Q) - f(P)}{f(S) - f(R)}$  est un réel

<sup>13</sup> La théorie de la mesure des grandeurs est traitée par Bourbaki dans le chapitre 5 de Topologie générale, qui a pour titre « Groupes à un paramètre ». Dans cet ouvrage (Bourbaki, 1971), un tel groupe est un groupe localement isomorphe à  $\mathbf{R}$ .

indépendant du choix de  $f$  dans  $\phi$  ; on le note parfois  $\frac{PQ}{RS}$ . L'invariance de ce rapport dans l'ensemble  $\phi$  donne une propriété affine du quadruplet  $(P, Q, R, S)$ .

Les auteurs de la circulaire prennent le temps de justifier l'invariance du rapport de deux différences, propriété qui est sollicitée quand on compare des variations relatives de températures, pour garantir l'indépendance du résultat d'une telle comparaison par rapport au choix de l'échelle ( $^{\circ}\text{C}$  ou  $^{\circ}\text{F}$ ) utilisée. Plus loin (pp. 67-68), les auteurs donnent des exemples de droites affines :

Dans la conception courante, le temps, ensemble des instants, est un exemple de droite affine ; la date d'un instant (c'est-à-dire son abscisse)  $y$  est repérée quand ont été choisis une unité de temps (la seconde, l'année...), un instant origine (les historiens partent de la naissance de J.-C., les astronomes de 1900...), un sens (vers le passé, vers l'avenir).

En première approximation, l'ensemble des températures est un exemple de morceau de droite affine : une température  $\theta$  peut être repérée, par exemple, soit en degrés Celsius (0 correspond à la glace fondante, 100 à la vapeur d'eau bouillante, dans les conditions normales) par un nombre  $t_1$ , soit en degrés Fahrenheit par un nombre  $t_2$  ; on a alors :  $t_1 = \frac{5}{9}(t_2 - 32)$  ou  $t_2 = \frac{9}{5}t_1 + 32$ .

On peut remarquer que les auteurs de la circulaire, à propos des températures, d'une part emploient le verbe « repérer », et d'autre part, qu'ils n'abordent pas la question de la restriction du groupe des bijections au groupe des transformations admissibles pour les températures.

Tel n'est pas le cas d'Hermann Weyl qui, dans l'introduction de son ouvrage *Espace, temps, matière* (1922), prend le temps de détailler durant deux pages la question de la mesure du temps :

La mesure du temps repose sur ces deux relations : ordre et égalité. Essayons de faire saisir clairement la notion de mesure. Le temps est homogène : [...] chacune des propriétés que l'on peut déduire logiquement des deux relations fondamentales s'appliquent à tous les instants de temps, ou ne s'appliquent à aucun. Il en est de même pour les intervalles de temps. [...] Il en va autrement dès que 3 instants sont en jeu. Soit un intervalle quelconque OE (O antérieur à E<sup>14</sup>), il est toujours possible de situer d'autres instants P par rapport au segment OE, d'une manière conceptuelle. On pourra faire correspondre à tout instant P un nombre  $t$  et un seul de manière que, entre O, E et P on ait la relation  $OP = t \text{ OE}$ .

Le nombre n'est pas autre chose qu'un symbole qui permet de condenser les relations d'ordre et d'égalité, ainsi que d'établir explicitement une relation entre trois instants. P est l'instant d'abscisse  $t$  dans le système de coordonnées dont OE est le segment unitaire.

Les nombres nous donnent la possibilité de distinguer, conceptuellement, c'est-à-dire objectivement et clairement, tous les points du continuum temporel, relativement au segment unitaire OE. (p. 6)

Weyl traite ensuite la question du groupe des transformations admissibles, comme le montrent les extraits ci-dessous :

Je crois que l'on saisit bien, par cette définition de la mesure du temps, comment la mathématique s'introduit dans la physique. Pour mesurer une grandeur, il faut faire une différence essentielle entre le « donné » d'un objet (expérience individuelle) d'une part, et d'autre part la conceptualisation de ce donné. Cette dernière opération n'est possible que relativement à des objets qui sont immédiatement représentés. C'est pourquoi à la mesure, est attachée toujours une *théorie de relativité*. Le problème que celle-ci se pose en général pour un objet quelconque est le suivant<sup>15</sup> : Quels sont les caractères qui doivent être explicités afin de pouvoir caractériser, avec un degré arbitraire de précision et d'une manière conceptuelle, un objet particulier P se trouvant dans la portion continûment étendue de la réalité, qui est en question ? Ce qui permet l'explicitation, c'est le système de coordonnées, la définition conceptuelle s'appelle la coordonnée (ou abscisse) de P dans ce système. Deux systèmes de coordonnées différents sont objectivement équivalents. [...] Quelle relation y a-t-il entre les coordonnées d'un seul et même objet P, dans deux systèmes de coordonnées différents ?

Ici, dans le domaine du temps, la première question est résolue immédiatement : le système de coordonnées consiste en un intervalle de temps OE (origine et unité) ; à la deuxième, pour le même

<sup>14</sup> L'emploi de la lettre E vient de l'allemand « Einheit », pour désigner l'unité. En français, OE serait remplacé par OU.

<sup>15</sup> Weyl, dans une note, renvoie à la phénoménologie de Husserl (Weyl, 1922, p. 281).

domaine, on répond par la transformation  $t = at' + b$  ( $a > 0$ ),  $a$  et  $b$  étant des constantes,  $t$  et  $t'$  les coordonnées du même point arbitraire dans deux systèmes. Si l'on donne à  $a$  et  $b$  toutes les valeurs réelles ( $a > 0$ ), l'on obtient un ensemble de transformations qui est un *groupe*. (*Ibid.*, pp. 6-7)

Weyl décrit avec précision ce groupe qui est le groupe des transformations linéaires positives, et annonce que le problème de la relativité sera étendu dans la suite de l'ouvrage à tout l'univers physique : dès qu'on aura posé un système de coordonnées pour les formes de cet univers, espace et temps, la réalité physique sera représentable conceptuellement par des nombres. Il conclut ainsi son introduction :

Tous les commencements sont obscurs. Précisément le mathématicien qui dans sa science si développée opère logiquement avec ses notions, a besoin de se rappeler que les origines viennent de plus loin que ne lui montrent ses méthodes. La première chose à faire, c'est de chercher à comprendre ; malgré les fluctuations de la philosophie et ses oscillations de système en système, nous ne devons pas renoncer à cette recherche, si la connaissance ne se transforme pas en un chaos incompréhensible. (*Ibid.*, p. 8)

Revenons à la question des échelles au sens de Stevens, qui ont fait l'objet de critiques du point de vue de l'insuffisance de leur fondement théorique. C'est en partie pour répondre à ces critiques que les auteurs de *Foundations of Measurement* ont rebâti une théorie du « mesurage » (voir Krantz, Duncan Luce, Suppes & Tversky, 1971/2007 ; Suppes, Krantz, Duncan Luce & Tversky, 1989/2007 ; Duncan Luce, Krantz, Suppes & Tversky, 1990/2007). Les échelles de rapports y trouvent leur place dans ce que les auteurs appellent les structures extensives (volume 1, chapitre 3, pp. 71-135). Les échelles d'intervalles sont traitées avec les structures de différences positives, algébriques ou absolues (volume 1, chapitre 4, pp. 136-198). Le traitement est axiomatique. Les grandeurs sont modélisées par des structures algébriques (ensembles avec des relations d'ordre et des opérations satisfaisant des conditions bien précises, serrant au plus près les conditions dans lesquelles la théorie sera pratiquement mise en œuvre), et à chaque fois un théorème garantissant l'existence d'une mesure est démontré. La question des différentes applications mesures possibles (et donc des transformations admissibles pour passer de l'une à l'autre) fait l'objet d'un autre théorème, alors que chez Stevens ce n'était pas le cas.

La question des températures n'est pas évoquée dans leurs trois volumes, pourtant très complets. Mais il est clair que les échelles de température en °C et °F renvoient aux structures de différences algébriques. L'ouvrage a surtout une portée théorique, visant à assurer la solidité des façons de mesurer dans les sciences humaines principalement, secteur dans lequel la question est la plus difficile. En revanche, les questions de mesurage en thermodynamique sont abordées, mais à un niveau théorique trop élevé pour notre propos.

La température thermodynamique  $T$  de l'échelle Kelvin (grandeur intensive<sup>16</sup> mesurable, qu'on appelle « température absolue », dont l'unité est le kelvin, notée K) est reliée aux anciennes échelles de température (°C et donc °F). La température Celsius, symbole  $t$ , est définie par  $t = T - T_0$ , où  $T_0 = 273,15$  K (température thermodynamique de référence, proche du point de congélation de l'eau). L'unité de température Celsius, °C, est égale à l'unité kelvin par définition. Une différence ou un intervalle de température peut s'exprimer aussi bien en kelvin qu'en degré Celsius, la valeur numérique de la différence étant la même (voir Bureau international des poids et mesures, 2019, pp. 20-21). On comprend alors (enfin) la signification de la définition initiale de la température  $t$  en tant que « grandeur repérable » :  $t$  n'est pas

---

<sup>16</sup> À ce sujet, Brunet et al. (2015, p. 26) proposent un paragraphe intitulé « Grandeurs extensives et intensives », que nous reproduisons : « Si on jette la moitié d'un système macroscopique à pression et température fixées (on vide une bouteille d'eau, par exemple), sa masse est divisée par deux, ainsi que son volume, son énergie interne, son entropie, etc. : ces quantités sont dites *extensives*. À l'opposé, la température et la pression ne varient pas ; ce sont des grandeurs qui ne dépendent pas de la quantité macroscopique de matière considérée. Ce sont des quantités dites *intensives*. Le rapport de deux quantités extensives est une quantité intensive : par exemple, la densité numérique (nombre de particules par unité de volume), la masse volumique, l'énergie moyenne par particule. »

mesurable (car non additive), mais une différence de telles températures  $t' - t$ , égale à la différence des températures thermodynamiques correspondantes  $T' - T$  l'est. Et ces différences ont des valeurs numériques égales...

Comment la température thermodynamique est-elle définie ? L'introduction du *Cours de physique statistique* de Éric Brunet, Jérôme Beugnon et Élie Wandersman (2015) fournit une réponse, dont les principaux éléments sont exposés ci-dessous.

Considérons une assemblée de  $N$  particules de masse  $m$ , et de vitesse  $v_i$  (vecteurs). La vitesse moyenne est :  $\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i$ . Dire que la vitesse moyenne est nulle veut dire que le centre de gravité du système est immobile. On suppose cette condition réalisée.

$\bar{E}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2$  est l'énergie cinétique moyenne de translation des particules. On définit une vitesse typique, appelée vitesse quadratique moyenne, notée  $v_q$ , qui est la vitesse qu'aurait une particule ayant une énergie de translation  $\bar{E}_c$ .

$v_q^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2$  ;  $v_q^2$  est la moyenne des carrés des vitesses des particules et :  $\bar{E}_c = \frac{1}{2} m v_q^2$ .

À l'équilibre thermodynamique, la température absolue  $T$  du système peut être définie par l'égalité :  $\bar{E}_c = \frac{1}{2} m v_q^2 = \frac{3}{2} k_B T$ , où  $k_B$  désigne la constante de Boltzmann.  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ . À  $T = 300 \text{ K}$ ,  $\frac{3}{2} k_B T \approx 6 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ .

On peut calculer la vitesse quadratique moyenne d'une molécule de diazote (28 g/mol) et celle d'une molécule de dihydrogène (2 g/mol). On a  $v_q^2 = \frac{\frac{3}{2} k_B T}{\frac{1}{2} m} = \frac{3 k_B T}{m}$ . Il convient de calculer la masse d'une molécule de diazote et de dihydrogène, que l'on obtient en divisant la masse molaire par la constante d'Avogadro, qui vaut  $6,02 \times 10^{23}$  particules par mole. Pour le diazote, on trouve les résultats suivants<sup>17</sup> (à gauche, avec une calculatrice, en utilisant la première expression de  $v_q^2$  ; à droite, le calcul obtenu, en tapant directement dans la barre de recherche de Google la racine carrée de sa deuxième expression, en y faisant figurer les unités, qui sont prises en charge) :

$$m = \frac{28 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}}{6,02 \cdot 10^{23} / \text{mol}} \gg 4,6 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$v_q^2 \gg \frac{6 \cdot 10^{-21} \text{ J}}{2,3 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} \gg 2,7 \cdot 10^5 (\text{ms}^{-1})^2$$

$$v_q \gg 520 \text{ ms}^{-1}.$$

Ainsi, la vitesse quadratique moyenne d'une molécule de diazote à 300 K est de 520 m/s environ. Les mêmes calculs permettent d'obtenir la vitesse quadratique moyenne d'une molécule de dihydrogène à 300 K : elle est de 1900 m/s, environ. Ces résultats peu intuitifs montrent l'originalité et l'intérêt de l'approche thermodynamique de la température, et expliquent la difficulté à saisir intuitivement son articulation avec les anciennes définitions de la température avec les échelles Celsius ou Fahrenheit, situation dans laquelle se trouvent tous ceux qui n'ont pas étudié cette approche thermodynamique de la température.

Les auteurs du cours de physique statistique notent dans leur introduction, en renvoyant à la partie du cours portant sur les statistiques quantiques : « Correcte pour les gaz, les liquides, les verres et les solides dans une très large gamme de température et de pression, cette définition [de la température] devient inappropriée à basse température » (p. 9). Nous en resterons là.

<sup>17</sup> Pour ce qui concerne la gestion des chiffres significatifs, voir Moreau (2003).

## SATISFACTION DES BESOINS : CHOIX INSTITUTIONNELS, CHOIX POSSIBLES

Nous allons ici tenter une synthèse de notre travail et proposer des pistes pour le prolonger. Les analyses faites précédemment montrent que de nombreux besoins apparaissent concernant différentes grandeurs associées à des objets usuellement manipulés en classe lorsqu'on analyse les mathématiques à enseigner et les mathématiques pour l'enseignement. On a vu précédemment à propos des longueurs, espèce de grandeurs<sup>18</sup> qui joue en mathématiques un rôle essentiel, que les besoins sont importants, notamment en étudiant des ressources d'accompagnement du cycle 3. Le manque de cohérence entre les ressources d'accompagnement du cycle 3 et du cycle 4 a été pointé, mais ces deux documents partagent cependant une même caractéristique : les grandeurs y sont considérées comme *moyens* dans des stratégies d'enseignement, donc comme des outils didactiques pour faire comprendre la mesure des longueurs, des durées, des aires et des vitesses, essentiellement. Cela renvoie à la distinction faite par Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999) entre instruments et moyens :

Il convient [...] de distinguer, dans l'analyse des objets ostensifs mobilisés dans une activité mathématique concrète, ceux qui, comme les notations, les symbolismes et certaines expressions verbales acquièrent un statut mathématique clair et jouent le rôle d'*instruments* de l'activité, de ceux qui, bien que fonctionnant comme *moyens* indispensables au travail mathématique, sont considérés comme un accompagnement presque contingent de l'activité. [...] La mathématisation conduit à reléguer les objets matériels, les gestes et certains graphismes au simple statut de *moyens* du travail mathématique, en accordant le statut d'*instrument* aux seuls ostensifs appartenant aux registres de l'écrit et, de façon beaucoup moins nette, aux registres du graphique et de l'oral. Dans la terminologie de la théorie des situations, nous dirons que les instruments ostensifs sont considérés et traités comme des éléments du savoir mathématique alors que les moyens restent au niveau des connaissances. (p. 105)

Dans le corpus rassemblant des documents récents produits par la noosphère que nous avons étudié, les grandeurs, dans l'activité mathématique, sont considérées comme des *moyens*, sans jamais devenir des *instruments*. En revanche, le calcul « avec les unités », présenté comme un moyen au sens ordinaire du terme (donner du sens aux calculs entrepris, éviter des erreurs récurrentes, etc.), joue le rôle d'*instrument*. Certes, le développement de certains exemples montre que les grandeurs jouent un rôle plus important dans l'activité mathématique elle-même, mais sans que les auteurs mettent ce point en valeur. Par exemple, il est bien indiqué que la modélisation avec des grandeurs « permet de renforcer le sens des opérations lors de la résolution d[un] problème [de rubans], en différenciant des opérations mathématiques qui paraîtraient identiques sans les unités » (MENESR, 2016c, p. 5), comme lorsqu'on écrit  $35 \text{ cm} : 7 \text{ cm} = 5$  et  $35 \text{ cm} \div 7 = 5 \text{ cm}$ , plutôt que  $35 \div 7 = 5$ . Cela étant, procéder avec les grandeurs (et pas seulement avec les unités) permet non seulement de « renforcer le sens des opérations » en employant des « écritures bien plus parlantes » (valence sémiotique des ostensifs), mais également de mener à bien les calculs en s'assurant qu'on obtient bien un nombre de rubans dans le premier cas et la longueur d'un ruban dans le second (valence instrumentale des ostensifs) – concernant les ostensifs, voir Bosch & Chevallard, 1999, pp. 107-114.

Le rabattement du « calcul sur les grandeurs » sur un « calcul avec les unités » est la traduction sémantique de la transformation de praxéologies mathématiques en éléments de praxéologies didactiques. Cette transformation diminue fortement les contraintes institutionnelles sur les grandeurs et, comme on l'a vu, de nombreux documents noosphériens en profitent en se dispensant même du « calcul avec unités » : manuels, sites internet, mais également corrigés d'épreuves du diplôme national du brevet – voir par exemple le corrigé proposé par l'APMEP (2019, p. 2) et celui proposé par l'IREM de la Réunion (Moriceau, 2019,

---

<sup>18</sup> Notons que l'absence de la notion d'*espèce de grandeurs* dans les programmes prive le professeur d'outils puissants, à la fois sur le plan mathématique – afin de justifier le calcul sur les grandeurs – et sur le plan langagier – ne serait-ce que pour distinguer les différentes grandeurs étudiées.

p. 3) pour l'exercice 3 du sujet donné le 1<sup>er</sup> juillet 2019 en métropole et à la Réunion. Il en est de même de la technique de « calcul avec les unités » comme alternative à l'emploi des tableaux de conversion (voir dans la section 2.3, *Le cas de l'espèce des longueurs*, la technique suggérée dans MENESR, 2016c, p. 5). On a vu comment on peut en introduire une autre, relevant du *calcul sur les grandeurs*, à condition de traiter ces dernières comme des objets mathématiques auxquels sont associés des ostensifs ayant à la fois une valeur sémiotique et une valeur instrumentale. Cette technique remplacerait avantageusement la technique des tableaux, qui ne vit qu'à l'école et ne survit guère en dehors d'elle.

L'étude de la grandeur *température* montre que l'enquête à l'origine de l'identification et de la satisfaction de besoins ouvre l'horizon vers des questions allant bien au-delà de l'inscription d'un thème dans un programme d'enseignement. On découvre ainsi des modélisations et mathématisations successives, au fur et à mesure que le champ des grandeurs se structure et que les savoirs sur la température se développent. On y évoque également ses traitements didactiques à l'école mais également dans d'autres institutions, noosphériques ou universitaires.

Il n'est cependant nul besoin de faire référence à des grandeurs aussi complexes que la température pour justifier la présence à l'école des grandeurs. Ces dernières constituent une interface entre les mathématiques scolaires et les besoins mathématiques du citoyen, du consommateur et de nombreuses professions (commerce, artisanat, professions médicales et paramédicales, etc.). Un exemple frappant qui devrait interpeller et interroger : un ticket de caisse de supermarché (voir figure 3) contient souvent davantage de grandeurs et de calculs sur les grandeurs que les cahiers de mathématiques d'un élève durant sa scolarité obligatoire.

WILLIAM'S ROUGE			
0.662kg x 3.30€/kg	2.18	kg(pcs)	€/kg(pcs)
BELCHARD			€
0.898kg x 2.10€/kg	1.89	-----	-----
		MOZZARELLA	
		1pcs	3,30
		BRIE DE MEAUX	
		0,145 kg	18,80
			2,73

Figure 3. – Présence des grandeurs et de calculs sur les grandeurs dans des tickets de caisse.

Comme l'indiquent Y. Chevillard et M. Bosch (2002),

... si la technique dominante des calculs *sans* unités, c'est-à-dire des calculs sur des *mesures* et non sur des grandeurs, peut donc bien être justifiée, on retiendra surtout que la technique des calculs *avec* unités, ou, comme on disait autrefois, sur des nombres concrets (tels 5 cm, 57 km/h, etc.), c'est-à-dire sur des grandeurs, est la plus « normale », et en tout cas la plus pertinente, par la *fiabilité* qu'elle procure, en particulier lorsque l'opérateur est un débutant dans le domaine où il calcule. (pp. 75-76)

Même si la profession prend peu, ou mal, en charge cette interface entre les mathématiques scolaires et les besoins mathématiques du citoyen, les grandeurs occupent *de facto* une place fondamentale dans l'enseignement des mathématiques, en intervenant fonctionnellement dans la modélisation des systèmes lors de l'étude de situations du monde. Et si, actuellement, le calcul sans unités, sur les nombres, renvoie dans l'ombre le calcul sur les grandeurs, l'envahissement de la sphère médiatique et scientifique par les nombres ne peut pas laisser de côté les grandeurs, car savoir ce que ces nombres mesurent est plus que jamais d'actualité à l'heure du « numérique », dans une perspective citoyenne. Les grandeurs s'invitent alors dans le débat, et donc dans les savoirs nécessaires pour le réguler.

## RÉFÉRENCES

- ARTAUD, M. (2021). Des grandeurs et de leur mesure : besoins praxéologiques de la position de professeur et leur satisfaction. Dans H. Chaachoua, A. Bessot et al. (Éds), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (pp. 197-226). Grenoble : La pensée sauvage.

- ASSISTANCE SCOLAIRE PERSONNALISÉE. (2020). *Calculer la longueur d'un cercle*. [https://www.assistancescolaire.com/...](https://www.assistancescolaire.com/)
- ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC. (1982). *Mots. Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs. Tome VI. Grandeur mesure*. [http://numerisation.univ-irem.fr/...](http://numerisation.univ-irem.fr/)
- ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC. (2019). *Corrigé du brevet des collèges Métropole La Réunion 1<sup>er</sup> juillet 2019*. [https://www.apmep.fr/...](https://www.apmep.fr/)
- BARNET, C., BILLA, N., LAYAN, M.-C., ROBERTOU, M., DEMOULIN, P., FLOUS, A., LAULHERE, A. & VILLATTES, A. (2017). *Maths, Cycle 3, 6<sup>e</sup>*. Collection Mission Indigo. Paris : Hachette.
- BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Objet d'étude et problématique. Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124. [https://revue-rdm.com/...](https://revue-rdm.com/)
- BOURBAKI, N. (1971). *Éléments de mathématique. Livre III : Topologie générale*. Paris : Hermann.
- BRUNET, É., BEUGNON, J. & WANDERSMAN, É. (2015). *Cours de Physique Statistique*. [http://www.lps.ens.fr/...](http://www.lps.ens.fr/)
- BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. (2019). *Le Système international d'unités (SI) (9<sup>e</sup> édition)*. [https://www.bipm.org/...](https://www.bipm.org/)
- CALCULATRICE EN LIGNE. (2020). *Calcul du périmètre d'un cercle (ou d'un disque)*. [https://www.calculateur.com/...](https://www.calculateur.com/)
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266. [https://revue-rdm.com/...](https://revue-rdm.com/)
- CHEVALLARD, Y. (2012). *Didactique fondamentale. Module 1 : Leçons de didactique*. [http://yves.chevallard.free.fr/...](http://yves.chevallard.free.fr/)
- CHEVALLARD, Y. (2021). La question curriculaire à la lumière de la TAD : défigement praxéologique et questionnement du monde. Dans H. Chaachoua, A. Bessot et al. (Éds), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure* (pp. 93-111). Grenoble : La pensée sauvage.
- CHEVALLARD, Y. & BOSCH, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, 59, 43-76. [https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/...](https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/)
- CHEVALLARD, Y. & CIRADE, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet & L. Trouche (Éds), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques*. Rennes/Paris : PUR/INRP.
- DEGRÉ FAHRENHEIT. (2020, 25 août). Dans *Wikipédia*. [https://fr.wikipedia.org/...](https://fr.wikipedia.org/)
- DUNCAN LUCE, R., KRANTZ, D. H., SUPPES, P. & TVERSKY, A. (2007). *Foundations of Measurement, Volume III, Representation, Axiomatization and Invariance*. New York, NY : Dover. (Édition originale 1990)
- KRANTZ, D. H., DUNCAN LUCE, R., SUPPES, P. & TVERSKY, A. (2007). *Foundations of Measurement, Volume I, Additive and polynomial representations*. New York, NY : Dover. (Édition originale 1971)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. (1975). *Mathématiques. Classes du premier cycle. Horaires, programmes, instructions*. Paris : INRDP.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS. (1989). *Mathématiques. Classes des collèges 6<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>*. Paris : CNDP.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE. (2018a). *Programme du cycle 3*. [https://cache.media.eduscol.education.fr/...](https://cache.media.eduscol.education.fr/)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE. (2018b). *Programme du cycle 4*. [https://cache.media.eduscol.education.fr/...](https://cache.media.eduscol.education.fr/)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE. (2019a). *Attendus de fin d'année de 6<sup>e</sup>. Annexe 12 : mathématiques. Bulletin officiel n° 22 du 29 mai 2019*. [https://cache.media.eduscol.education.fr/...](https://cache.media.eduscol.education.fr/)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE. (2019b). *Programme de mathématiques de seconde générale et technologique*. [https://cache.media.education.gouv.fr/...](https://cache.media.education.gouv.fr/)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE. (2019c). *Programme de physique-chimie de seconde générale et technologique*. [https://cache.media.education.gouv.fr/...](https://cache.media.education.gouv.fr/)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE. (2016). *Grandeurs et mesures au collège*. [http://cache.media.education.gouv.fr/...](http://cache.media.education.gouv.fr/) (Édition originale 2007)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE. (2016a). *Fractions et nombres décimaux au cycle 3*. [https://cache.media.eduscol.education.fr/...](https://cache.media.eduscol.education.fr/)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE. (2016b). *Grandeurs et mesures*. [https://cache.media.eduscol.education.fr/...](https://cache.media.eduscol.education.fr/)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE. (2016c). *Grandeurs et mesures au cycle 3*. [https://cache.media.eduscol.education.fr/...](https://cache.media.eduscol.education.fr/)
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE. (2016d). *Grandeurs et mesures. Exemples de questions flash. Expression d'une grandeur en fonction d'une autre*. [http://cache.media.education.gouv.fr/...](http://cache.media.education.gouv.fr/)
- MOREAU, R. (2003). Mesures, erreurs et incertitudes en physique-chimie. Dans Ministère de la jeunesse, de l'Éducation nationale et de la recherche (Éd.), *La pluridisciplinarité dans les enseignements scientifiques. Tome 2 : La place de l'expérience* (pp. 39-69). [https://media.eduscol.education.fr/...](https://media.eduscol.education.fr/)
- MORICEAU, A. (2019). *Correction du DNB juillet 2019. IREM de la Réunion*. [http://irem.univ-reunion.fr/...](http://irem.univ-reunion.fr/)
- SÉSAMATH. (2016). *Le manuel de cycle 4*. Paris : Magnard. Sésamath. [https://mep-outils.sesamath.net/...](https://mep-outils.sesamath.net/)
- STEVENS, S. S. (1946). On the Theory of Scales of Measurement. *Science*, 103(2684), 677-680. doi:10.1126
- SUPPES, P., KRANTZ, D. H., DUNCAN LUCE, R. & TVERSKY, A. (2007). *Foundations of Measurement, Volume II, Geometrical, Threshold, and Probabilistic Representations*. New York, NY : Dover. (Édition originale 1989)
- WEYL, H. (1922). *Temps, espace, matière. Leçons sur la théorie de la relativité générale*. Paris : Albert Blanchard. [https://archive.org/...](https://archive.org/)
- WHITNEY, H. (1968a). The Mathematics of Physical Quantities. Part I. Mathematical models for measurement. *The American Mathematical Monthly*, 75, 115-138. [https://www.maa.org/...](https://www.maa.org/)
- WHITNEY, H. (1968b). The Mathematics of Physical Quantities. Part II. Quantity Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly*, 75, 227-256.