



HAL
open science

CODES CORRECTEURS D'ERREURS ET JEU DE CARTES (AVEC OU SANS MENSONGE)

Alfredéric Josse, Françoise Pène

► **To cite this version:**

Alfredéric Josse, Françoise Pène. CODES CORRECTEURS D'ERREURS ET JEU DE CARTES (AVEC OU SANS MENSONGE). 2022. hal-03527313

HAL Id: hal-03527313

<https://hal.science/hal-03527313v1>

Preprint submitted on 15 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CODES CORRECTEURS D'ERREURS ET JEU DE CARTES (AVEC OU SANS MENSONGE)

ALFREDÉRIC JOSSE ET FRANÇOISE PÈNE

TABLE DES MATIÈRES

1. Matériel nécessaire	2
2. Déroulement du tour de magie (public : à partir de l'école primaire)	2
3. Comment trouver la bonne carte (public : à partir de l'école primaire)	4
3.1. Par manipulation des cartes	4
3.2. Par calculs	6
3.3. Par programmation sur tableur (Libreoffice)	7
3.4. Par calcul matriciel	8
4. Plus d'activités : Autres nombres de cartes (public : à partir de l'école primaire)	9
4.1. Le même tour avec 2 cartes	9
4.2. Le même tour avec 4 cartes	10
5. Explications mathématiques sur le tour avec 16 cartes (niveau : Terminale Scientifique ou études supérieures)	11
5.1. Comment le tour de 16 cartes a-t-il été réalisé?	11
5.2. Correction de l'erreur	12
6. Cas général de M cartes codées avec N questions (niveau : Terminale Scientifique ou études supérieures)	13
6.1. Nombre minimal de questions pour pouvoir corriger un mensonge (ou une erreur)	13
6.2. Code de Hamming général	13
Annexe A. Variante : tour avec les 16 cartes rouges d'un jeu de 32 cartes	14

Cette activité introduit la notion de codes correcteurs d'erreurs (les codes correcteurs d'erreurs sont utilisés par exemple pour corriger les erreurs dans des transmissions de messages, ou bien permettant d'écouter la musique sur un CD même si celui-ci a été un peu dégradé). Réalisée sous la forme d'un tour de jeu de cartes avec un mensonge autorisé, elle rencontre un franc succès dès le primaire.

Cet article présente deux activités qui ont été développées à l'occasion de la fête de la Science à Brest :

- une activité avec 16 cartes (présentée dans les paragraphes 2 et 3 et expliquée dans le paragraphe 5). Initialement cette activité a été créée à partir de 16 cartes d'un jeu de 32 cartes (par exemple les 16 cartes rouges). Elle a été adaptée en cartes chats-chiens spécifiques afin de simplifier les questions posées. Nous indiquons dans l'annexe A comment on peut procéder dans le cas des 16 cartes rouges d'un jeu de 32 cartes (voir aussi la vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=28K1US-hR1w>).
- une activité à 2 et 4 cartes (présentée dans le paragraphe 4)

1. MATÉRIEL NÉCESSAIRE

Avoir imprimé les 16 cartes chats-chiens, les avoir découpées si on souhaite faire les manipulations; avoir du matériel pour écrire (tableau noir et craies, tableau blanc et crayon effaçable, papier et crayon) et éventuellement avoir un téléphone portable (ou ordinateur) contenant une application tableur.

2. DÉROULEMENT DU TOUR DE MAGIE (PUBLIC : À PARTIR DE L'ÉCOLE PRIMAIRE)

Demandez à une personne de choisir une carte parmi les 16 cartes ci-dessous. Vous allez poser 7 questions à cette personne. La personne doit y répondre par 'oui' ou par 'non'. Elle a le droit de mentir une fois au maximum (elle peut mentir une fois, ou ne jamais mentir, mais elle ne peut pas mentir deux fois ou plus). Vous allez tout de même trouver la carte choisie par la personne.



NB : les couleurs des yeux sont indiquées en face de chaque ligne pour permettre de les identifier après une impression en noir et blanc)

Consigne avant le démarrage : La personne ne doit pas vous dire quelle carte a été choisie, mais peut le dire aux autres personnes dans l'assistance pendant que vous tournez le dos ou que vous vous éloignez un peu. Si la personne choisit de le dire à l'assistance, conseillez lui de choisir dès ce moment s'il y aura ou non mensonge et si oui à quelle question (question 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7) et d'en informer l'assistance, afin d'éviter que quelqu'un dans l'assistance dise 'non, ce n'est pas cela' si la personne ment.

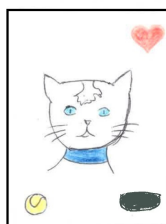
Les 7 Questions : On commence par poser les 4 questions suivantes :

1. Est-ce un chat ? *Par exemple la personne répond oui.*
2. A-t-il un collier ? *Par exemple la personne répond oui.*
3. A-t-il les yeux bleus ? *Par exemple la personne répond oui.*
4. A-t-il une marque sur la tête ? *Par exemple la personne répond oui.*

On marque une pause, on demande à la personne de ne toujours rien révéler à ce stade. On fait alors remarquer à l'assistance que ces 4 questions sont suffisantes pour déterminer la carte s'il était interdit de mentir.

On explique qu'au début il y a 16 cartes possibles, et que chacune des 4 premières réponses permet, s'il n'y a pas de mensonge, de diviser le nombre de possibilités par 2

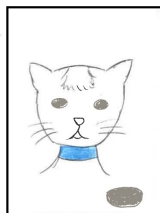
- la première question divise le paquet en 2 [les 8 cartes chien en haut versus les 8 cartes chat en bas]. *Par exemple, il y a 8 cartes chat.*
- la deuxième question élimine à nouveau la moitié [les 8 cartes avec un collier à gauche versus les 8 cartes sans collier à droite]. *Par exemple, il y a 4 cartes chat avec un collier.*
- la troisième question élimine encore la moitié [les lignes 1 et 3 versus les lignes 2 et 4]. *Par exemple, il y a 2 chats avec un collier et les yeux bleus.*
- la quatrième question élimine encore la moitié [les colonnes 2 et 3 au centre versus les colonnes 1 et 4 extérieures]. *Par exemple, il n'y a qu'un chat avec un collier, les yeux bleus et une marque sur la tête.*



On demande à la personne de ne rien révéler. On lui indique la carte qui correspond à ses 4 premières réponses. On ajoute que, comme la personne a le droit de mentir une fois, ce n'est peut-être pas la bonne carte et qu'il faut poser 3 autres questions pour déterminer la carte choisie. Les 3 questions supplémentaires sont :

5. Y a-t-il un coeur sur la carte ? *Par exemple la personne répond non.*
6. Y a-t-il un ballon sur la carte ? *Par exemple la personne répond non.*
7. Y a-t-il un gamelle sur la carte ? *Par exemple la personne répond oui.*

Vous allez conclure quelle était la carte choisie par la personne. *Pour l'exemple, c'était en fait celle-ci :*



Pour trouver la carte malgré le mensonge, nous utilisons un **code correcteur d'erreur**. Au cours du temps, ou au cours de la transmission d'un message, une erreur peut se glisser dans une suite de caractères (ou bits codant une information). Les codes correcteurs d'erreurs vous permettent d'écouter la musique même si votre CD a été abîmé.

L'idée consiste à coder par plus de chiffres que nécessaire afin d'être en mesure de corriger une ou plusieurs erreurs dans chaque suite de bits. Le principe du code correcteur que nous utilisons ici est dû à Richard Hamming (en 1950)¹. Ce code permet de détecter et de corriger une erreur (mais pas plus).

3. COMMENT TROUVER LA BONNE CARTE (PUBLIC : À PARTIR DE L'ÉCOLE PRIMAIRE)

On peut utiliser une méthode basée sur la manipulation des cartes (paragraphe 3.1) ou bien une méthode basée sur des calculs. Nous présentons ici trois manières d'effectuer les calculs : soit par déduction à partir de calculs simples (paragraphe 3.2), soit en programmant des formules par exemple dans un tableur (paragraphe 3.3), soit en effectuant un calcul matriciel (paragraphe 3.4). On peut aussi utiliser simultanément ces deux types de méthodes (en codant une à une chaque réponse et en manipulant les cartes après chaque réponse, et en effectuant les calculs à la fin).

Dans nos explications, nous considérons que la personne a bien respecté la consigne de ne mentir qu'une fois au maximum.

3.1. Par manipulation des cartes. Cette première méthode permet de faire visualiser la diminution du nombre de cartes possibles au fur et à mesure des réponses. À chaque réponse, on tourne les cartes rejetées par la personne :

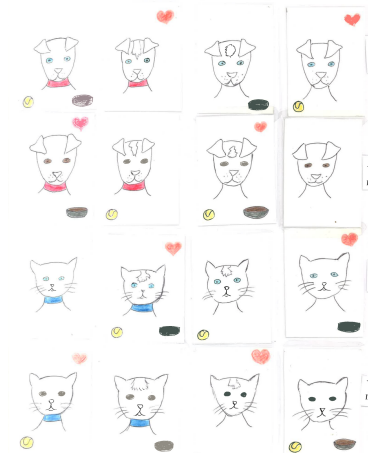
- d'abord on tourne la carte d'un quart de tour la première fois que la personne dit rejette la carte (la carte initialement verticale est posée horizontalement),
- puis on retourne la carte face contre la table la seconde fois que la personne rejette cette carte (la carte en position horizontale est retournée face contre la table).

En effet, la personne n'ayant droit qu'à un mensonge, une carte rejetée 2 fois est éliminée.

Pour l'exemple, on obtient successivement :

1. référence historique : Hamming, Richard Wesley (1950). Error detecting and error correcting codes. Bell System Technical Journal. 29 (2) : 147–160.

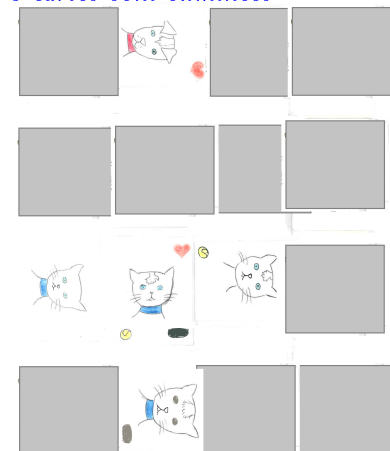
Position initiale des cartes :



Question 2 : collier? 'Oui'
 → On tourne les 'sans collier'.
 4 cartes sont éliminées.



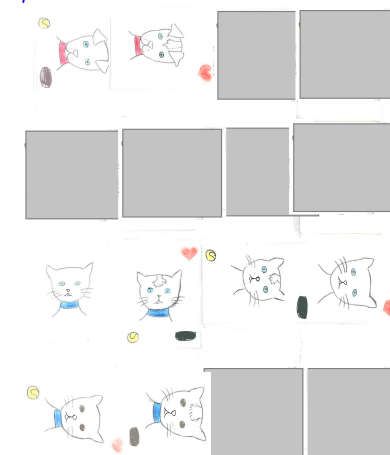
Question 4 : marque? 'Oui'.
 → On tourne les 'sans marque'.
 3 cartes sont éliminées.



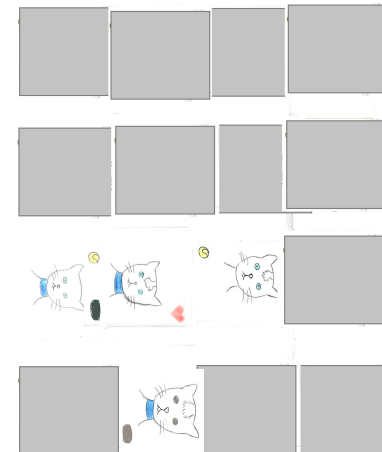
Question 1 : chat? 'Oui'.
 → On tourne les 'chiens'.



Question 3 : yeux bleus? 'Oui'.
 → On tourne les 'yeux marrons'.
 4 cartes sont à nouveau éliminées.



Question 5 : cœur? 'Non'.
 → On tourne les 'cœur'.
 1 carte est éliminée.
 Plus aucune carte n'est dans la position initiale, donc il y a eu mensonge

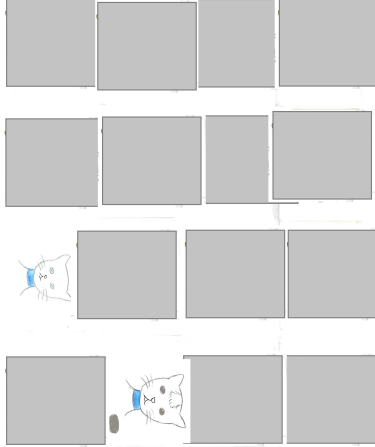


Au bout de 4 questions, une seule carte est à sa position initiale (ni tournée d'un quart de tour, ni face contre la table) : la carte correspondant aux réponses au 4 premières questions.

Question 6 : balle? 'Non'.

→ On tourne les 'avec balle'.

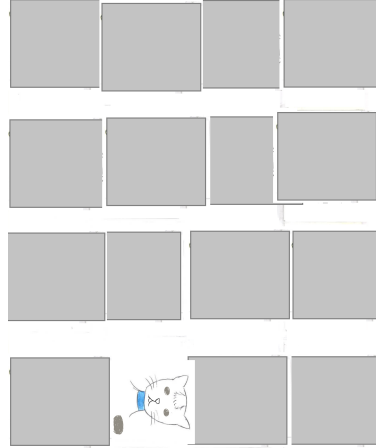
2 cartes sont éliminées.



Question 7 : gamelle? 'Oui'.

→ On tourne la dernière carte 'sans gamelle'.

Il ne reste plus qu'une seule carte non éliminée.



Au bout des 7 questions, une seule carte n'est pas face contre la table : la carte choisie par la personne. Si cette carte est dans sa position initiale, la personne n'a pas menti. Si cette carte est penchée d'un quart de tour, la personne a menti.

Conseil : Disposez les cartes comme indiqué dans la première figure et concentrez-vous sur les cartes auxquelles la personne dit 'non'. La première question concerne soit la moitié en haut soit la moitié en bas ; la seconde question soit la moitié gauche, soit la moitié droite ; la 3ème question soit les lignes 1,3, soit les lignes 2,4 ; la 4ème question soit les 2 colonnes centrales, soit les 2 colonnes extérieures. Les cartes concernées par les 3 autres questions sont un peu moins faciles à localiser mais quand on pose ces 3 questions, beaucoup de cartes ont déjà été éliminées.

3.2. Par calculs. On code chaque réponse par 1 si la réponse est 'oui', 0 si la réponse est 'non'. On note $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$ les 7 réponses ainsi codées :

- r_1 vaut 1 si la réponse à la question 1 est 'oui' et vaut 0 sinon,
- r_2 vaut 1 si la réponse à la question 2 est 'oui' et vaut 0 sinon,
- et ainsi de suite.

On calcule alors les 3 nombres suivants (appelés sommes de contrôles) :

- (1) $r_1 + r_3 + r_5 + r_7$
- (2) $r_2 + r_3 + r_6 + r_7$
- (3) $r_4 + r_5 + r_6 + r_7$

Ces sommes vérifient les propriétés suivantes :

- Si $r_1 + r_3 + r_5 + r_7$ vaut 0, 2 ou 4 (c'est-à-dire si ce nombre est pair), alors la personne n'a pas menti aux questions 1, 3, 5 et 7. Si $r_1 + r_3 + r_5 + r_7$ vaut 1 ou 3 (c'est-à-dire si ce nombre est impair), alors la personne a menti à la question 1 ou 3 ou 5 ou 7.
- Si $r_2 + r_3 + r_6 + r_7$ vaut 0, 2 ou 4, alors la personne n'a pas menti aux questions 2, 3, 6 et 7. Sinon, la personne a menti à l'une de ces questions.
- Si $r_4 + r_5 + r_6 + r_7$ vaut 0, 2 ou 4, alors la personne n'a pas menti aux questions 4, 5, 6 et 7. Sinon, la personne a menti à l'une de ces questions.

Ceci nous permet de détecter s'il y a une erreur et si oui de la trouver par déduction.

Exemple : Nous considérons à nouveau le cas où la personne a répondu : 'oui', 'oui', 'oui', 'oui', 'non', 'non', 'oui', ce qu'on code par

$$r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1, r_4 = 1, r_5 = 0, r_6 = 0, r_7 = 1.$$

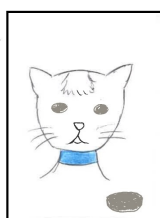
Les 3 calculs donnent alors

$r_1 + r_3 + r_5 + r_7 = 1 + 1 + 0 + 1 = 3$ est impair \rightarrow 1 mensonge parmi les questions 1,3,5,7.

$r_2 + r_3 + r_6 + r_7 = 1 + 1 + 0 + 1 = 3$ est impair \rightarrow 1 mensonge parmi les questions 2,3,6,7.

$r_4 + r_5 + r_6 + r_7 = 1 + 0 + 0 + 1 = 2$ est pair \rightarrow pas de mensonge aux questions 4,5,6,7.

On conclut que la personne a menti à la question 3, les yeux ne sont pas bleus mais marrons. La carte choisie est :



Commentaire : La méthode avec calcul peut vous permettre de demander à plusieurs personnes de choisir chacune une carte, vous notez leurs réponses respectives, faites les calculs, puis indiquez la carte choisie par chacune des personnes. Cette méthode correspond à un produit matriciel (modulo 2, pour plus de détails, on pourra consulter le paragraphe 3.4), elle aussi programmable si on le souhaite (voir paragraphe suivant).

3.3. Par programmation sur tableur (Libreoffice). Formules :

	A	B	C	
1		chat		1
2		collier		1
3		yeux bleus		1
4		marque		1
5		coeur		0
6		balle		0
7		gamelle		1
8			=MOD((C1+C3+C5+C7);2)	
9			=MOD((C2+C3+C6+C7);2)	
10			=MOD((C4+C5+C6+C7);2)	
11				
12	mensonge à la question :		=C8+C9*2+C10*4	

Les formules apparaissant aux lignes 8, 9 et 10 correspondent aux trois sommes de contrôles vues dans le paragraphe 3.2. La dernière formule tableur apparaissant à la ligne 12 de l'image ci-dessus donne soit 0 s'il n'y a pas de mensonge, soit le numéro de la réponse à laquelle la personne a menti s'il y a un mensonge. L'explication mathématique de cette formule est donnée à la fin du paragraphe 5.2.

Valeurs pour l'exemple :

	A	B	C
1		chat	1
2		collier	1
3		yeux bleus	1
4		marque	1
5		cœur	0
6		balle	0
7		gamelle	1
8			1
9			1
10			0
11			
12	mensonge à la question :		3

On voit qu'il faut corriger la réponse à la question 3. On la corrige et cela donne :

	A	B	C
1		chat	1
2		collier	1
3		yeux bleus	0
4		marque	1
5		cœur	0
6		balle	0
7		gamelle	1
8			0
9			0
10			0
11			
12	mensonge à la question :		0

On constate que les 3 sommes sont nulles. L'erreur a été corrigée.

3.4. Par calcul matriciel. On rappelle qu'effectuer un calcul modulo 2 signifie qu'on écrit 1 si le nombre est impair et 0 si le nombre est pair.

Le calcul des 3 sommes de contrôle du paragraphe 3.2 correspond à effectuer le produit matriciel suivant modulo 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + r_3 + r_5 + r_7 \\ r_2 + r_3 + r_6 + r_7 \\ r_4 + r_5 + r_6 + r_7 \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit aussi

$$r_1V_1 + r_2V_2 + r_3V_3 + r_4V_4 + r_5V_5 + r_6V_6 + r_7V_7,$$

avec

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul (modulo 2) est égal à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ s'il n'y a pas de mensonge, ou bien est égal

à V_j s'il y a mensonge à la question j (ceci est expliqué dans le paragraphe 5.2).

En pratique : pour utiliser et expliquer les calculs matriciels à des personnes qui ne les connaissent pas, il peut être plus pratique

— d'écrire :

$$\begin{array}{ccccccc}
 r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 \\
 \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}
 \end{array}$$

et d'expliquer que sur chaque ligne de la matrice (en gras), on compte le nombre de 1 en-dessous d'un r_j qui vaut 1 aussi, et que le résultat d'une ligne est 0 si ce nombre est pair et 1 s'il est impair. On garde la matrice, et on efface les r_j entre deux personnes qui choisissent une carte. (On peut écrire aussi les réponses données simultanément par différentes personnes au-dessus de la matrice et effectuer les calculs une fois qu'on a toutes les réponses)

— on peut aussi barrer ou effacer les colonnes correspondant à un 'non' (sans même écrire les 0 et 1) ; alors, pour chaque ligne, le résultat est 0 si le nombre de 1 restants est pair et 1 s'il est impair. On utilise dans ce cas une matrice par série de réponses (on peut réécrire la matrice entre 2 personnes ou on bien utiliser des feuilles sur lesquelles la matrice a été écrite en de nombreux exemplaires).

Pour l'exemple, nous avons

$$r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1, r_4 = 1, r_5 = 0, r_6 = 0, r_7 = 1,$$

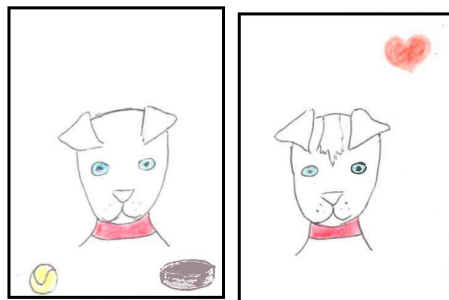
ce qui donne (modulo 2) :

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}
 \end{array}
 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \text{ ou bien }
 \begin{array}{cccc}
 \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{1}
 \end{array}
 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve que le mensonge correspond à la question associée au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est la 3ème colonne de la matrice, donc la personne a menti à la question 3.

4. PLUS D'ACTIVITÉS : AUTRES NOMBRES DE CARTES (PUBLIC : À PARTIR DE L'ÉCOLE PRIMAIRE)

4.1. **Le même tour avec 2 cartes.** Montrez deux cartes à votre assistance, par exemple :



Demandez à l'assistance, combien de questions au minimum il faut poser pour être sûr de déterminer la carte choisie parmi ces deux cartes dans le même jeu avec un mensonge possible (mais avec 2 cartes au lieu de 16 cette fois).

Très souvent, l'assistance répond 2. Alors, on teste :

1. Est-ce la carte de gauche? **Par exemple, la personne dit 'oui'.**

et on recommence :

2. Est-ce la carte de gauche? **Par exemple, la personne dit 'non'.**

Si les deux réponses sont identiques, on sait quelle est la carte et on sait qu'il n'y a pas eu de mensonge.

Mais si les deux réponses sont différentes, on sait qu'il y a eu un mensonge, mais on ne sait pas quelle est la carte.

Ces 2 questions correspondent à **un code détecteur d'erreur**, il nous faudra poser une troisième question pour obtenir un code **correcteur d'erreur**.

Donc on pose la question une troisième fois :

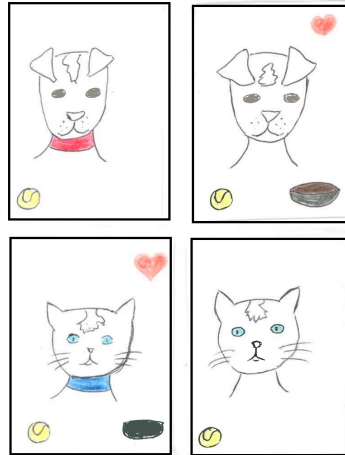
3. Est-ce la carte de gauche? **Par exemple, la personne dit 'oui'.**

Après cette troisième question, on sait quelle est la carte choisie.

Pour l'exemple, la carte choisie est celle de gauche et il y a eu un mensonge à la deuxième question.

En résumé, pour savoir quelle est la bonne carte parmi 2 si un mensonge est possible, on a besoin de 3 questions, alors qu'une seule suffit s'il est interdit de mentir (2 questions sont suffisantes pour détecter une erreur mais pas pour la corriger).

4.2. Le même tour avec 4 cartes.



Et demandez à l'assistance, combien de questions au minimum il faut poser pour être sûr de déterminer la carte choisie parmi ces quatre cartes dans le même jeu avec un mensonge possible.

Attention : la règle est toujours que les questions sont déterminées a priori (il ne s'agit pas d'adapter les questions aux réponses) et on doit y répondre par 'oui' ou par 'non'. La question *quelle est la carte ?* est interdite!

On voit assez vite que 2 questions suffisent si les mensonges ne sont pas autorisés, comme par exemple :

1. Est-ce un chat? **Par exemple, la personne dit 'oui'.**

et on recommence :

2. A-t-il un collier? **Par exemple, la personne dit 'oui'.**

Après ces deux questions, la personne a toujours dit 'oui' à une carte (**pour l'exemple, au chat avec collier**) la personne a dit 'non' 2 fois à une carte (**pour l'exemple, au chien sans collier**) qui est éliminée. Enfin elle a dit 'non' 1 fois aux deux autres cartes.

Par essais successifs, on n'arrive pas à moins de 3 questions supplémentaires pour pouvoir corriger une erreur. Par exemple, les 3 questions suivantes supplémentaires suivantes conviennent :

3. Y a-t-il un coeur ? **Par exemple, la personne dit 'non' (les 3 cartes non éliminées ont été refusées une fois).**
4. Est-ce un chat ? **Par exemple, la personne dit 'oui' (il reste 2 cartes possibles).**
5. A-t-il un collier ? **Par exemple, la personne dit 'oui' (la bonne carte est le chat avec collier).**

Pour 4 cartes, on ajoute 3 questions pour corriger 1 mensonge possible, comme dans le cas de 16 cartes. On verra dans le paragraphe 6.1 qu'on ne peut pas faire moins.

5. EXPLICATIONS MATHÉMATIQUES SUR LE TOUR AVEC 16 CARTES (NIVEAU : TERMINALE SCIENTIFIQUE OU ÉTUDES SUPÉRIEURES)

On rappelle qu'effectuer un calcul modulo 2 signifie qu'on écrit 1 si le nombre est impair et 0 si le nombre est pair.

5.1. Comment le tour de 16 cartes a-t-il été réalisé ?

Choix des 4 premières questions

Nous avons choisi 4 caractères ayant chacun 2 possibilités pour caractériser chacune de nos 16 cartes : chat/chien, avec/sans collier, yeux bleus/marrons, avec/sans marque sur la tête. Ainsi chacune de nos 16 cartes est caractérisée par les réponses r_1, r_2, r_3, r_4 aux 4 premières questions, c'est-à-dire que, pour chacune des 16 cartes, on définit les valeurs de r_1, r_2, r_3, r_4 comme suit :

- $r_1 = 1$ signifie que la carte est un chat (sinon $r_1 = 0$),
- $r_2 = 1$ signifie qu'il y a un collier (sinon $r_2 = 0$),
- $r_3 = 1$ signifie que les yeux sont bleus (sinon $r_3 = 0$),
- $r_4 = 1$ signifie qu'il y a une marque sur la tête (sinon $r_4 = 0$).

Choix des 3 dernières questions : Attribution des symboles cœur, balle et gamelle

On choisit r_5, r_6, r_7 , de sorte que les 3 sommes de contrôle du paragraphe 3.2 soient nulles. On veut que :

$$\begin{cases} r_1 + r_3 + r_5 + r_7 = 0 & \text{mod } 2 \\ r_2 + r_3 + r_6 + r_7 = 0 & \text{mod } 2 \\ r_4 + r_5 + r_6 + r_7 = 0 & \text{mod } 2 \end{cases} .$$

En résolvant ce système dont les inconnues sont r_5, r_6, r_7 (r_1, r_2, r_3, r_4 étant supposées connues), on obtient :

$$\begin{aligned} r_5 &= r_2 + r_3 + r_4 \\ r_6 &= r_1 + r_3 + r_4 \\ r_7 &= r_1 + r_2 + r_4 . \end{aligned}$$

Ces 3 nombres r_5, r_6, r_7 doivent correspondre aux vraies réponses aux questions 5, 6 et 7 (quand il n'y a pas de mensonge). Ceci impose l'attribution des symboles cœur, balle et gamelle comme suit :

- **on met un cœur** aux cartes pour lesquelles $r_5 = r_2 + r_3 + r_4$ vaut 1 , c'est-à-dire aux cartes qui :
 - soit ont à la fois *un collier et les yeux bleus et une marque*,
 - soit ont une seule de ces 3 caractéristiques, c'est-à-dire qu'on met aussi un cœur aux cartes qui :
 - soit ont *un collier mais ni les yeux bleus ni une marque*,
 - soit ont *les yeux bleus, mais ni collier ni marque*,

- soit ont *une marque mais ni collier ni les yeux bleus*.
- **on met une balle** aux cartes pour lesquelles $r_6 = r_1 + r_3 + r_4$ vaut 1, c'est-à-dire aux cartes qui :
 - soit sont un *chat aux yeux bleus et avec marque sur la tête*,
 - soit ont une seule de ces 3 caractéristiques, c'est-à-dire qu'on met aussi une balle aux cartes qui :
 - soit ont un *chat qui n'a ni les yeux bleus ni une marque*,
 - soit ont *les yeux bleus, mais qui ne sont pas un chat et n'ont pas de marque*
 - soit ont *une marque mais qui ne sont pas un chat et qui n'ont pas les yeux bleus*.
- **on met une gamelle** aux cartes pour lesquelles $r_7 = r_1 + r_2 + r_4$ vaut 1, c'est-à-dire aux cartes qui :
 - soit sont un *chat avec un collier et une marque sur la tête*,
 - soit ont une seule de ces 3 caractéristiques, c'est-à-dire qu'on met aussi une gamelle aux cartes qui :
 - soit sont un *chat qui n'a ni de collier ni de marque*,
 - soit ont un *collier, mais qui ne sont pas un chat et n'ont pas de marque*,
 - soit ont *une marque mais ne sont pas un chat et n'ont pas de collier*.

5.2. Correction de l'erreur. On a vu que les vraies réponses $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$ (sans mensonge) aux 7 questions vérifient la nullité des sommes de contrôle :

$$\begin{cases} r_1 + r_3 + r_5 + r_7 = 0 & \text{mod } 2 \\ r_2 + r_3 + r_6 + r_7 = 0 & \text{mod } 2 \\ r_4 + r_5 + r_6 + r_7 = 0 & \text{mod } 2 \end{cases} .$$

Ces 3 égalités peuvent être ré-écrites comme suit sous forme vectorielle :

$$r_1 V_1 + r_2 V_2 + r_3 V_3 + r_4 V_4 + r_5 V_5 + r_6 V_6 + r_7 V_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'égalité étant vraie modulo 2, avec

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, V_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et donc, si la personne ment à la question j , cela signifie que r_j est remplacé par $r_j + 1$ modulo 2, et donc cela fait que le résultat de la somme ci-dessus est V_j au lieu d'être le vecteur nul.

Formule donnant la question à laquelle la personne a menti.

Notons $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7$ les réponses données par la personne (pouvant contenir un mensonge).

Remarquons que $V_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}$ contient le code binaire de j , c'est-à-dire que $a_j, b_j, c_j \in \{0, 1\}$ et que $j = a_j + 2 \times b_j + 4 \times c_j$.

Notons $a, b, c \in \{0, 1\}$ les résultats des 3 sommes de contrôle, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} r_1 + r_3 + r_5 + r_7 = a & \text{mod } 2 \\ r_2 + r_3 + r_6 + r_7 = b & \text{mod } 2 \\ r_4 + r_5 + r_6 + r_7 = c & \text{mod } 2 \end{cases} .$$

Si $a = b = c = 0$ (pas de mensonge), on aura $a + 2 \times b + 4 \times c = 0$.

Si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = V_j$ (mensonge à la question j), on aura $a + 2 \times b + 4 \times c = j$.

6. CAS GÉNÉRAL DE M CARTES CODÉES AVEC N QUESTIONS (NIVEAU : TERMINALE SCIENTIFIQUE OU ÉTUDES SUPÉRIEURES)

6.1. Nombre minimal de questions pour pouvoir corriger un mensonge (ou une erreur). On code M cartes avec les réponses codées par 0 ou 1 à N questions (i.e. par N bits) : r_1, \dots, r_N . Cela fait $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^N$ différents codes. On veut tout d'abord qu'un code corresponde à une seule carte.

Mais on veut plus : on veut que le code soit corrigeable s'il y a une erreur. Ainsi, la carte dont le code sans erreur est r_1, \dots, r_N sera aussi reconnue par les codes (avec 1 erreur) obtenus à partir de r_1, \dots, r_N en changeant un 0 en 1 ou un 1 en 0.

Donc à chaque carte, correspond au moins à $N + 1$ codes distincts (le code sans erreur, le code avec une erreur en r_1, \dots , le code avec une erreur en r_N). Donc $M(N + 1) \leq 2^N$, i.e. $M \leq 2^N / (N + 1)$.

Si $M = 4$, on a $2^4 / (4 + 1) < 4 \leq 2^5 / (5 + 1)$. Ce qui prouve qu'il faut $N = 5$ questions au minimum, confirmant l'expérience précédente.

Dans le jeu avec 16 cartes, on a : $M = 16$, $N = 7$ et $M(N + 1) = 2^7 = 2^N$.

6.2. Code de Hamming général. Plus généralement, le code Hamming permet de coder, en autorisant une erreur, $M = 2^{2^m - m - 1}$ cartes par $N = 2^m - 1$ questions. Remarquons que ces M cartes peuvent être codées par $2^m - m - 1$ questions si les mensonges ne sont pas autorisés, ainsi sur les $N = 2^m - 1$ questions, seules m sont ajoutées pour corriger une erreur, ce nombre m devient négligeable par rapport à $N = 2^m - 1$ quand m grandit.

Par exemple, pour $m = 5$, pour coder en binaire un nombre compris entre 1 et $67\ 108\ 864 = 2^{2^5 - 5 - 1}$, on a besoin de $2^5 - 5 - 1 = 26$ bits. Pour coder ce nombre avec correction d'une erreur dans la suite de bits, on code avec $2^5 - 1 = 31$ bits.

Pour construire le code pour m général, on stocke l'information dans $2^m - m - 1$ bits (valant chacun 0 ou 1) et on complète par m bits. Les bits sont notés $r_1, \dots, r_{2^m - 1}$. On considère la matrice A_N contenant les codes en binaire des nombres compris entre 1 et $N = 2^m - 1$. Le code est sans erreur si le produit matriciel suivant est nul modulo 2 :

$$A_N \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{2^m - 2} \\ r_{2^m - 1} \end{pmatrix}.$$

c'est-à-dire si les sommes suivantes sont nulles modulo 2 :

- (1ère ligne) la somme $r_1 + r_3 + r_5 + \dots + r_{2^m - 1}$ des bits r_i d'indice i impairs,
- (2ème ligne) la somme des bits r_i avec i de la forme $i = \sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k$ avec $a_k \in \{0, 1\}$ et $a_1 = 1$, c'est-à-dire la somme des r_i avec i tels qu'il existe un entier p tel que $4p + 2 \leq i < 4p + 4$,
- etc,

Plus généralement, pour tout $j = 1, \dots, m$, la somme suivante doit être nulle

- la somme des bits r_i avec i dont le développement en base 2 comporte un 1 en position j , c'est-à-dire la somme des r_i avec i de la forme $i = \sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k$ avec $a_k \in \{0, 1\}$ et $a_j = 1$, c'est-à-dire la somme des r_i avec i tels qu'il existe un entier p_i tel que $2^j p_i + 2^{j-1} \leq i < 2^j p_i + 2^j$.

Contrairement au cas où $m = 3$ (cas des 16 cartes, voir paragraphe 5.1), on ne peut pas toujours résoudre ce système en prenant pour inconnues les m derniers bits.

Cependant, on peut procéder comme dans le paragraphe 5.1 en changeant un peu l'ordre des questions. On peut par exemple mettre les $2^m - m - 1$ bits suffisants pour coder l'information dans les bits r_i avec i qui n'est pas une puissance de 2, puis définir r_{2^j} (pour $j = 0, \dots, m - 1$) comme la somme des r_i avec $i \neq 2^j$ de la forme $i = \sum_{k=0}^{m-1} a_k 2^k$ avec $a_k \in \{0, 1\}$ et $a_j = 1$.

ANNEXE A. VARIANTE : TOUR AVEC LES 16 CARTES ROUGES D'UN JEU DE 32 CARTES

Si on souhaite faire ce tour avec les 16 cartes rouges (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as de cœur et 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as de carreau) d'un jeu de 32 cartes, le tour précédent peut être exécuté en posant les 7 questions suivantes :

1. La carte est-elle un carreau ?
2. La carte est-elle l'une des cartes suivantes : valet, dame, roi, as ?
3. La carte est-elle l'une des cartes suivantes : 9, 10, valet dame ?
4. La carte est-elle l'une des cartes suivantes : 8, 9, dame, roi ?
5. La carte est-elle l'une des cartes suivantes : 8, 10, dame, as ?
6. La carte est-elle l'une des cartes suivantes :
8 de cœur, 10 de cœur, valet de cœur, roi de cœur,
7 de carreau, 9 de carreau, dame de carreau, as de carreau ?
7. La carte est-elle l'une des cartes suivantes :
8 de cœur, 9 de cœur, valet de cœur, as de cœur,
7 de carreau, 10 de carreau, dame de carreau, roi de carreau ?

On peut poser ces questions en ayant préparé et en montrant, à chaque question, une photographie des 8 cartes (une photographie des cartes de carreau pour la première question, puis une photographie avec les cartes valet, dame, roi, as de carreau ou de cœur pour la deuxième question, etc.). En pratique, on fait défiler ces photographies de 8 cartes correspondant à chaque question et on demande à chaque fois : 'est-ce l'une de ces cartes ?'

Pour passer d'une variante à l'autre, on identifie :

- chat/chien avec carreau/cœur
- avec/sans collier par [valet, dame, roi, as]/[7, 8, 9, 10],
- yeux bleus/marrons par [8, 9, valet, dame]/[7, 10, roi, as]
- avec/sans marque sur la tête par [8, 10, dame, as]/[7, 9, valet, roi]

UNIV BREST, UNIVERSITÉ DE BREST, LMBA, UMR CNRS 6205, 6 AVENUE LE GORGEU,
29238 BREST CEDEX, FRANCE

Email address: alfrederic.josse@univ-brest.fr, francoise.pene@univ-brest.fr