



HAL
open science

Une famille de mesures de conflit entre fonctions de croyance

Nadia Ben Abdallah, Anne-Laure Jusselme, Frédéric Pichon

► **To cite this version:**

Nadia Ben Abdallah, Anne-Laure Jusselme, Frédéric Pichon. Une famille de mesures de conflit entre fonctions de croyance. 27e Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA 2018, Nov 2018, Arras, France. pp.111-118. hal-03521897

HAL Id: hal-03521897

<https://hal.science/hal-03521897>

Submitted on 11 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une famille de mesures de conflit entre fonctions de croyance

A family of conflict measures between belief functions

N. Ben Abdallah¹

A.-L. Jousselme¹

F. Pichon²

¹ NATO STO Centre for Maritime Research and Experimentation (CMRE),

Viale San Bartolomeo, 400, La Spezia, Italy

² Université d'Artois, EA 3926,

Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A),

F-62400 Béthune, France

{nadia.benabdallah,anne-laure.jousselme} @cmre.nato.int, frederic.pichon@univ-artois.fr

Résumé :

Nous proposons dans ce papier une famille paramétrée de mesures de conflit dérivée d'une définition de cohérence de fonction de croyance proposée récemment. La famille proposée satisfait un ensemble de propriétés jugées désirables dans la littérature et est de plus monotone. Nous montrons que deux mesures connues du conflit correspondent à des cas particuliers de cette famille et coïncident avec sa borne inférieure et sa limite asymptotique supérieure. Nous établissons également un lien entre les ensembles incohérents minimaux et la cohérence d'une fonction de croyance. La définition des nouvelles mesures est motivée sur un exemple d'estimation multi-source de destination de bateaux.

Mots-clés :

Fonctions de croyance, cohérence logique, cohérence probabiliste, conflit, famille monotone.

Abstract:

We propose a family of measures of conflict derived from a definition of consistent belief functions introduced previously. Besides satisfying desired properties suggested in the literature, the proposed family is monotonic. We also show that the family encompasses two known measures which correspond to two extremes of the family : the lower sharp bound and the upper asymptotic limit, respectively. We also introduce a link between belief functions consistency and their minimal inconsistent sets. We motivate the definition of the novel measures with an example of multi-source vessel destination estimation.

Keywords:

Belief functions, logical consistency, probabilistic consistency, conflict, monotonic family.

1 Introduction

Raisonnement avec des informations conflictuelles ou incohérentes soulève des questions d'ordre théorique et pratique qui sont largement étudiées dans la littérature. Parce que la logique classique est explosive (tout peut se déduire

d'une contradiction), beaucoup de travaux ont porté sur la caractérisation, l'identification et la résolution des incohérences dans les bases de connaissances en logique classique. Les deux dernières décennies ont même connu un intérêt accru pour la quantification de l'incohérence, ayant conduit à plusieurs approches axiomatiques. Par exemple, Hunter et Konieczny [6] ont exploré les ensembles incohérents minimaux dans l'évaluation de l'incohérence des bases de connaissance exprimées en logique propositionnelle. D'autres travaux [9, 8] ont proposé des méthodes rationnelles pour quantifier l'incohérence dans les bases de connaissances incertaines où les propositions sont associées à des probabilités ou des degrés de croyance plutôt que des valeurs de vérité.

Les notions de cohérence et de conflit jouent également un rôle central dans la théorie des fonctions de croyance [13, 14]. Par exemple, en fusion d'information, le conflit est défini comme l'incohérence résultant de la combinaison conjonctive de fonctions de croyance, et peut être un indicateur de la qualité des sources [10]. En révision des croyances, la cohérence entre l'information *a priori* et la nouvelle information intervient dans le choix des mécanismes de révision [7].

Dans ce formalisme, les définitions de cohérence et de conflit ont souvent comme origine l'interprétation logique des fonctions

de croyance : Cuzzolin [2] définit les fonctions de croyance cohérentes comme la contrepartie des bases de connaissances cohérentes [12] alors que Destercke et Burger [4] étendent les propriétés des mesures de conflit entre ensembles classiques aux fonctions de croyance et proposent une définition logique du conflit. Récemment, Pichon et al. [11] ont revisité et étendu certains des résultats de Destercke et Burger, proposant notamment une nouvelle famille de définitions de cohérence et de conflit entre fonctions de croyance qui englobe, entre autres, leur définition logique.

Nous poursuivons ici ce travail récent et proposons une famille paramétrée de mesures de conflit associée à la famille de définitions de cohérence introduite dans [11]. Nous caractérisons aussi cette dernière famille en utilisant les ensembles incohérents minimaux.

Le papier est organisé comme suit. Après un rappel sommaire des fonctions de croyance et des principaux résultats sur la cohérence et le conflit, nous présentons les nouvelles mesures de cohérence et de conflit et étudions leurs propriétés. Nous leur intéressons dans un problème d'estimation multi-source de destination de bateaux et concluons sur de futurs travaux.

2 Rappels

2.1 Fonctions de croyance

Soit x une variable définie sur cadre de discernement supposé fini \mathcal{X} . L'état de connaissance partielle sur la vraie valeur de cette variable est représenté par une fonction de masse (FM) $m : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$ telle que $\sum_{A \subseteq \mathcal{X}} m(A) = 1$. L'ensemble des FM définies sur \mathcal{X} est noté \mathcal{M} .

Un ensemble $A \subseteq \mathcal{X}$ tel que $m(A) > 0$ est appelé *ensemble focal* de m . L'ensemble des éléments focaux est noté $\mathcal{F}(m)$ (ou \mathcal{F}) et sa cardinalité \mathfrak{F} .

Une masse de l'ensemble vide, $m(\emptyset)$, non-nulle permet d'exprimer le fait que la vraie valeur de x puisse être en dehors du cadre de discernement

\mathcal{X} [14].

L'état de connaissance partiel sur x peut être décrit par une FM m et de manière équivalente par d'autres mesures bijectives telles que la plausibilité Pl ou la commonnalité q définies respectivement pour tout $A \in 2^{\mathcal{X}}$ par :

$$Pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B); \quad q(A) = \sum_{B \supseteq A} m(B). \quad (1)$$

La mesure Pl vérifie notamment [5] :

$$m_1 \sqsubseteq m_2 \Rightarrow Pl_1(A) \leq Pl_2(A), \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}. \quad (2)$$

où $m_1 \sqsubseteq m_2$ signifie que m_1 est une spécialisation¹ de m_2 .

La plausibilité des singletons est donnée par la fonction contour pl définie sur \mathcal{X} par :

$$pl(x) = Pl(\{x\}) = q(\{x\}). \quad (3)$$

La combinaison de différentes FM peut se faire en utilisant différents opérateurs dont le choix dépend, entre autres, du comportement des sources qui produisent l'information. En particulier, quand les sources sont indépendantes et fiables, la règle conjonctive, notée \odot , s'applique :

$$m_1 \odot m_2(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B) m_2(C) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X},$$

et la fonction de commonnalité vérifie :

$$q_1 \odot q_2(A) = q_1(A) q_2(A) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}. \quad (4)$$

2.2 Définitions du conflit

Soient m_1 et m_2 deux FM représentant l'information fournie par deux sources indépendantes et fiables notées S_1 et S_2 respectivement.

1. m_1 est une spécialisation de m_2 ssi il existe une matrice carrée non négative $S = [S(A, B)]$, $A, B \in 2^{\mathcal{X}}$, telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{A \subseteq \mathcal{X}} S(A, B) &= 1, \quad \forall B \subseteq \mathcal{X}, \\ S(A, B) &> 0 \Rightarrow A \subseteq B, \quad A, B \subseteq \mathcal{X}, \\ m_1(A) &= \sum_{B \subseteq \mathcal{X}} S(A, B) m_2(B), \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Le conflit entre deux FM s m_1 et m_2 est défini dans [4] comme l'incohérence de la FM résultant de leur combinaison conjonctive. Une mesure de conflit $\kappa : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ entre m_1 et m_2 admet donc l'expression générale :

$$\kappa(m_1, m_2) := 1 - \phi(m_1 \odot m_2), \quad (5)$$

où ϕ est une mesure de cohérence sur \mathcal{M} .

Selon [4], une mesure de conflit doit satisfaire les propriétés suivantes :

P_1^κ (Valeurs extrêmes) : la valeur maximale (respectivement minimale) du conflit κ est atteinte si et seulement les deux FM s m_1 et m_2 sont totalement conflictuelles (respectivement non conflictuelles).

P_2^κ (Symétrie) : $\kappa(m_1, m_2) = \kappa(m_2, m_1)$.

P_3^κ (Monotonie par rapport à l'imprécision) : si $m_1 \sqsubseteq m'_1$, alors $\kappa(m_1, m_2) \geq \kappa(m'_1, m_2)$.

P_4^κ (L'ignorance est "neutre") : si m_2 est vide (i.e., $m_2(\mathcal{X}) = 1$), alors $\kappa(m_2, m_1) = 1 - \phi(m_1)$.

P_5^κ (Insensibilité au raffinement) : si ρ est une fonction de raffinement² de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} , alors $\kappa(m_1, m_2) = \kappa(m_{\rho(1)}, m_{\rho(2)})$.

Pour que la propriété P_1^κ soit vérifiée il faut préciser la signification des notions de conflit total et de non conflit total :

Définition 1 (Conflit total [4]). *Soient m_1 et m_2 deux FM s dont les ensembles des éléments focaux sont \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , respectivement. Soit $\mathcal{D}_i = \bigcup_{A \in \mathcal{F}_i} A$ la disjonction des éléments focaux des m_i , $i = 1, 2$. Les FM s m_1 et m_2 sont totalement conflictuelles si $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$.*

Cette définition correspond à la définition suivante de l'incohérence totale d'une FM :

Définition 2 (Incohérence totale [4]). *Une FM m à éléments focaux dans \mathcal{F} est totalement incohérente si $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$, i.e., $m(\emptyset) = 1$.*

2. Une fonction de raffinement ρ de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} est une fonction $\rho : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$ telle que $\{\rho(\{x\}) \mid x \in \mathcal{X}\}$ est une partition de \mathcal{Y} , et $\rho(A) = \bigcup_{x \in A} \rho(\{x\})$, $\forall A \subseteq \mathcal{X}$. Une fonction de masse $m_{\rho(i)}$ est un ρ raffinement de m_i si $\forall A \in \mathcal{F}_i$, $m_i(A) = m_{\rho(i)}(\rho(A))$.

La notion de non-conflit total est moins évidente et différentes définitions ont été proposées. En particulier :

Définition 3 (Non-conflit [4]). *Deux FM s m_1 et m_2 dont les ensembles des éléments focaux sont \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 respectivement, sont non-conflictuelles ssi $\forall (A, B)$ tels que $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.*

Définition 4 (Non-conflit fort [4]). *Deux FM s m_1 and m_2 sont fortement non-conflictuelles ssi*

$$\bigcap_{A \in \{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2\}} A \neq \emptyset.$$

Ces deux définitions correspondent respectivement aux définitions probabiliste et logique de la cohérence totale :

Définition 5 (Cohérence (totale) probabiliste [4]). *Une FM m est P-cohérente si et seulement si $m(\emptyset) = 0$.*

Définition 6 (Cohérence (totale) logique [4]). *Une FM m est L-cohérente si et seulement si $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \neq \emptyset$.*

Il a été montré dans [4] que deux mesures, notées κ_m et κ_π , vérifient les 5 propriétés ci-dessus des mesures de conflit, dont la propriété P_1^κ au sens des Def. 3 et Def. 4 du non-conflit respectivement. Selon (5), ces mesures sont définies via les mesures de cohérence respectivement logique et probabiliste notées ϕ_m et ϕ_π et définies par [4] :

$$\phi_m(m) = 1 - m(\emptyset); \quad \phi_\pi(m) = \max_{x \in \mathcal{X}} pl(x), \quad (6)$$

Ces deux mesures définies par (6) vérifient les propriétés des mesures de cohérence [4, 11], à savoir :

P_1^ϕ Une mesure de cohérence doit être bornée.

P_2^ϕ Une mesure de cohérence doit atteindre sa valeur maximale pour les FM s totalement cohérentes (au sens de la définition de la cohérence totale considérée), et sa valeur minimale pour les FM s totalement incohérentes.

2.3 N-conflit

Les définitions de la cohérence (et donc du conflit associé) logique et probabiliste exigent respectivement que les éléments focaux d'une FM aient une intersection non vide et que chaque élément focal soit non vide. Cependant, des niveaux intermédiaires d'intersection (deux à deux, trois à trois, etc.) peuvent être intéressants à considérer comme le suggère l'exemple suivant.

Exemple 1. *On souhaite estimer la destination d'un bateau parmi les ports suivants : $\mathcal{X} = \{\text{Imperia, Savona, Genova, La Spezia, Livorno}\} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$. On considère deux sources qui fournissent chacune une estimation de la destination encodée par les FMs m_1 et $m_2 : S_1$, un algorithme déduisant la destination du bateau selon sa position par rapport au trafic passé (route maritime) et S_2 un opérateur qui se base sur son expérience et sa connaissance du comportement des bateaux du même type. Les deux sources expriment respectivement : $m_1(\{d_3\}) = 0.2$, $m_1(\{d_1, d_2, d_3\}) = 0.6$, $m_1(\{d_1, d_2\}) = 0.2$, et $m_2(\{d_4\}) = 0.1$, $m_2(\{d_3\}) = 0.1$, $m_2(\{d_1, d_2\}) = 0.8$. Les deux FMs sont équi-cohérentes au sens des cohérences probabiliste et logique : $\phi_m(m_1) = \phi_m(m_2) = 1$ et $\phi_\pi(m_1) = \phi_\pi(m_2) = 0.8$. Il n'est donc pas possible de comparer le degré de cohérence interne des deux sources à partir de ces mesures. Cependant, puisque les paires d'éléments focaux de m_1 ont plus d'intersections non vides que les paires de m_2 , on voudrait que m_1 soit moins "incohérente" que m_2 . Cette observation suggère de nouvelles définitions et caractérisations de la cohérence interne qui puisse permettre de considérer des nuances de cohérence et de conflit.*

Dans cette perspective, Pichon *et al.* [11] ont proposé récemment une famille de nouvelles définitions de cohérence et de non-conflit :

Définition 7 (*N*-cohérence [11]). *Une FM m est dite cohérente à l'ordre N (ou *N*-cohérente),*

avec $1 \leq N \leq \mathfrak{F}$, si $\forall \mathcal{F}_N \subseteq \mathcal{F}$ tel que $|\mathcal{F}_N| = N$:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}_N} A \neq \emptyset.$$

La famille capture des niveaux d'intersection successifs des éléments focaux. Il est à noter que quand $N = 2$, comme dans l'exemple 1, la définition de 2-cohérence coïncide avec la cohérence de Yager [15].

Définition 8 (*N*-non conflit [11]). *Deux FMs m_1 et m_2 sont dites non-conflituelles à l'ordre N (ou *N*-non conflictuelles), avec $1 \leq N \leq \mathfrak{F}_{12}$, si et seulement si $\forall E_i \in \mathcal{F}_{12}, i = 1, \dots, N : \bigcap_{i=1}^N E_i \neq \emptyset$, où \mathfrak{F}_{12} est la cardinalité de \mathcal{F}_{12} - l'ensemble des éléments focaux de $m_1 \odot_2$.*

De plus, il a été proposé [11] une famille de nouvelles mesures de cohérence ϕ_N et de conflit κ_N définies, respectivement, pour tout $1 \leq N \leq \mathfrak{F}$ et $1 \leq N \leq \mathfrak{F}_{12}$, par :

$$\phi_N(m) = 1 - m^{(N)}(\emptyset), \quad (7)$$

et

$$\kappa_N(m_1, m_2) = 1 - \phi_N(m_1 \odot_2) = m_1^{(N)} \odot_2(\emptyset), \quad (8)$$

$m^{(N)}$ étant le résultat de la combinaison conjonctive de m avec elle-même N fois ($m^{(1)} = m$).

Nous énonçons et prouvons le lemme suivant :

Lemme 1. *m est totalement incohérente ssi $\phi_N(m) = 0$, pour tout $1 \leq N \leq \mathfrak{F}$.*

m_1 et m_2 sont totalement conflictuelles ssi $\kappa_N(m_1, m_2) = 1$, pour tout $1 \leq N \leq \mathfrak{F}_{12}$.

Preuve. \Rightarrow : $m(\emptyset) = 1$, i.e., m est totalement incohérente, implique clairement que $m^{(N)}(\emptyset) = 1 \forall N \geq 1$.

\Leftarrow : Partant de l'hypothèse que $m^{(N)}(\emptyset) = 1$ et $m(\emptyset) \neq 1$, on aboutit à la contradiction suivante : $m(\emptyset) \neq 1$ implique que $\exists A \subseteq \mathcal{X}, A \neq \emptyset$, tel que $m(A) > 0$, auquel cas on a : $m^{(N)}(A) \geq (m(A))^{\mathfrak{F}} > 0$, et donc $m^{(N)}(\emptyset) \neq 1$.

La famille de mesures κ_N vérifie les propriétés suivantes [11] :

P_1^N Pour tout $N \in [1, \mathfrak{F}_{12}]$, κ_N vérifie les propriétés P_1^κ à P_5^κ (pour la Def. 8 du non-conflit).

P_2^N La famille est monotone en N et pour toutes FMs m_1 et m_2 :

$$\kappa_1(m_1, m_2) \geq \kappa_2(m_1, m_2) \cdots \geq \kappa_{\mathfrak{F}_{12}}(m_1, m_2).$$

P_3^N Le non-conflit au sens de la Def. 3 coïncide avec le 1-non conflit en termes de définition et de mesure : $\kappa_1(m_1, m_2) = \kappa_m(m_1, m_2)$.

P_4^N Le non conflit fort coïncide avec le \mathfrak{F}_{12} -non conflit, et donc $\kappa_{\mathfrak{F}_{12}}$ et κ_π mesurent la même notion.

Par contre, la mesure κ_π n'appartient pas à la famille κ_N et, en particulier, les deux mesures κ_π et $\kappa_{\mathfrak{F}_{12}}$ ne sont pas comparables dans le cas général. Dans la suite, nous proposons une nouvelle famille de mesures de conflit dans laquelle les mesures κ_m et κ_π sont ordonnées.

3 Nouvelle famille de mesures

Dans ce qui suit, nous revenons sur les travaux de Pichon et al. [11] et tout d'abord sur la définition 7 de la N -cohérence que nous exprimons en utilisant les ensembles incohérents minimaux qui offrent une interprétation logique de cette notion. Nous décrivons ensuite une famille de mesures de N -cohérence précédemment introduite dans [1] et donnons quelques-unes de ses propriétés qui serviront par la suite à établir les propriétés d'une nouvelle famille de mesures de conflit. En particulier, nous montrons que cette nouvelle famille, contrairement à celle précédemment proposée dans [11], englobe les deux mesures de conflit κ_m et κ_π - comme cas particuliers.

3.1 N -cohérence et ensembles incohérents minimaux

Les ensembles incohérents minimaux ont été introduits comme une caractérisation de la

forme la plus pure de l'incohérence logique dans les bases de connaissance [6]. Par analogie, nous définissons les ensembles incohérents minimaux d'une fonction de croyance :

Définition 9. Les ensembles incohérents minimaux (EIMs) d'une FM m sont définis par :

$$\mathcal{MI}(m) = \left\{ \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}; \bigcap_{A_i \in \mathcal{F}'} A_i = \emptyset, \forall \mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}' : \bigcap_{A_i \in \mathcal{F}''} A_i \neq \emptyset \right\}.$$

L'ensemble des EIM de cardinalité N est :

$$\mathcal{MI}_N(m) = \{ \mathcal{F}' \in \mathcal{MI}(m); |\mathcal{F}'| = N \}$$

Soit s la cardinalité du plus petit EIM de m , i.e.,

$$s := \min_{\mathcal{F}' \in \mathcal{MI}(m)} |\mathcal{F}'|.$$

Une FM m est P -cohérente ssi $\mathcal{MI}_1(m) = \emptyset$ et elle est L -cohérente ssi $\mathcal{MI}(m) = \emptyset$. D'autre part, m est N -cohérente pour tout $N < s$ et N -incohérente pour tout $N \geq s$.

3.2 Mesures de N -cohérence

Une famille de mesures de cohérence pour la Def. 7 de la cohérence a été proposée dans [1] :

Définition 10 ([1]). La mesure ψ_N de N -cohérence d'une FM m , pour $N \in \mathbb{N}_{>0}$, est la mesure $\psi_N : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$\psi_N(m) := (1 - m^{(N)}(\emptyset))^{\frac{1}{N}}. \quad (9)$$

La mesure ψ_N n'est autre que la racine N -ième de la mesure (7) et peut être exprimée en fonction de ψ_1 comme suit :

$$\psi_N(m) = (\phi_N(m))^{\frac{1}{N}} = ((\psi_1(m^{(N)}))^{\frac{1}{N}}). \quad (10)$$

Cette nouvelle famille de mesures englobe la mesure de cohérence probabiliste puisque $\psi_1(m) = \phi_m(m)$. Elle peut être exprimée par une relation de récurrence impliquant les EIM.

Proposition 1. Les mesures ψ_N vérifient les propriétés P_1^ϕ et P_2^ϕ pour la définition de N -cohérence.

Preuve. Il est facile de montrer à partir de la relation (10) que les deux propriétés qui sont vérifiées pour ψ_1 restent vraies pour tout ψ_N .

Comme pour la famille ϕ_N , la famille ψ_N est monotone en N , cependant la preuve est moins évidente.

Proposition 2. Pour toute FM m et pour tout $N \geq 1$:

$$\psi_N(m) \geq \psi_{N+1}(m).$$

Preuve. Pour toutes FM m_1 and m_2 :

$$m_{1 \odot 2}(\emptyset) \geq 1 - (1 - m_1(\emptyset))(1 - m_2(\emptyset)).$$

Il y a égalité entre les deux termes de l'inéquation lorsque les éléments focaux des deux FM ont une intersection non vide, auquel cas la combinaison conjonctive ne génère pas d'élément focal vide et $m_{1 \odot 2}(\emptyset)$ est le résultat de la propagation des (éventuels) ensembles vides de chaque FM. Quand $m_1 = m_2$, il est facile de montrer par récurrence, et utilisant l'inégalité précédente et la relation entre $m(\emptyset)$ et $m^{(N)}(\emptyset) : m^{(N)}(\emptyset) \geq 1 - (1 - m(\emptyset))^N$, (i.e., $\phi_1(m) \geq (\phi_N(m))^{\frac{1}{N}}$). Quand $m_1 = m$ et $m_2 = m^{(N)}$, la première inégalité implique que : $m_{1 \odot 2}(\emptyset) = m^{(N+1)}(\emptyset) \geq 1 - (1 - m^{(N)}(\emptyset))(1 - m(\emptyset))$. À partir de la relation de récurrence entre $m(\emptyset)$ et $m^{(N)}(\emptyset)$, on peut déduire que :

$$m^{(N+1)}(\emptyset) \geq 1 - (1 - m^{(N)}(\emptyset))(1 - m^{(N)}(\emptyset))^{\frac{1}{N}},$$

i.e., $\psi_{N+1}(m) \leq \psi_N(m)$.

Dans ce qui suit, nous étudions les relations entre les nouvelles mesures et les mesures de cohérence rappelées précédemment.

Nous commençons par présenter un résultat qui relie les termes ψ_N et ϕ_π :

Proposition 3. Pour toute FM m et pour tout $N \geq 1$:

$$\psi_N(m) \geq \phi_\pi(m) \geq \frac{\psi_N(m)}{(\mathfrak{F}_N^*)^{\frac{1}{N}}},$$

où \mathfrak{F}_N^* dénote le nombre d'éléments focaux non vides de $m^{(N)}$. Aussi, la série $\psi_N(m)$ converge asymptotiquement vers $\phi_\pi(m)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(m) = \phi_\pi(m).$$

Preuve. On commence par démontrer le résultat pour $N = 1$. Si \mathfrak{F}^* est le nombre d'éléments focaux non vides de m , alors : $\psi_1(m) \geq \phi_\pi(m) \geq \frac{\psi_1(m)}{\mathfrak{F}^*}$. Le terme de gauche de l'inégalité est un résultat connu [4]. Celui de droite découle de la relation : $\phi_\pi(m) \geq \max_{A \in \mathcal{F}} (m(A)) \geq \frac{1 - m(\emptyset)}{\mathfrak{F}^*}$. Le résultat pour $N \geq 1$ se déduit du résultat pour $N = 1$ appliqué à la FM $m^{(N)}$, combiné à l'équation (10) et la relation : $\phi_\pi(m^{(N)}) = (\phi_\pi(m))^N$ (conséquence de (4) et (3)).

Pour la deuxième partie de la proposition, $\psi_N(m)$ est une série décroissante et bornée, donc elle converge. Puisque le nombre d'éléments focaux de $m^{(N)}$ cesse d'augmenter à partir de \mathfrak{F} auto-combinaisons de m , $\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathfrak{F}_N^*)$ est une constante et $\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathfrak{F}_N^*)^{\frac{1}{N}} = 1$.

En combinant les Propositions 2 et 3, il apparaît que la mesure ϕ_π correspond à la borne asymptotique supérieure de la famille ψ_N .

Proposition 4. Pour toute FM m :

$$\phi_m(m) = \psi_1(m) \geq \dots \geq \psi_{\mathfrak{F}}(m) \geq \phi_\pi(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(m).$$

Exemple 2. Considérant l'exemple précédent : $\psi_1(m_1) = 1 > \psi_2(m_1) = 0.959 > \psi_3(m_1) = \psi_{\mathfrak{F}_1}(m_1) = 0.958 > \phi_\pi(m_1) = 0.8$; et $\psi_1(m_2) = 1 > \psi_2(m_2) = 0.812 > \psi_3(m_2) = \psi_{\mathfrak{F}_2}(m_2) = 0.801 > \phi_\pi(m_2) = 0.8$. En utilisant les mesures ψ_2 et ψ_3 , il devient possible de comparer m_1 and m_2 en terme de cohérence interne : en particulier, l'intuition que m_1 serait moins incohérente que m_2 est confirmée par les mesures ψ_2 et ψ_3 .

Maintenant que nous avons présenté quelques propriétés des nouvelles mesures de cohérence, nous nous intéressons à présent à l'étude des mesures de conflit associées.

3.3 Mesures de conflit

Nous commençons par démontrer que les mesures de conflit associées à la famille ψ_N vérifient les propriétés P_1^κ à P_5^κ .

Proposition 5. *Pour tout $N \geq 1$, la mesure χ_N définie par :*

$$\begin{aligned}\chi_N(m_1, m_2) &= 1 - \psi_N(m_1 \odot_2) \\ &= 1 - (1 - m_{1 \odot_2}^N(\emptyset))^{\frac{1}{N}}\end{aligned}$$

vérifie les propriétés P_1^κ à P_5^κ pour la définition 8 du non-conflit.

Preuve. P_1^κ : $\chi_N(m_1, m_2) = 0 \Leftrightarrow \psi_N(m_1 \odot_2) = 1 \Leftrightarrow m_{1 \odot_2}^N(\emptyset) = 0$, ce qui est équivalent à : $\forall E_i \in \mathcal{F}_{12}$, $\bigcap_{i=1}^N E_i \neq \emptyset$ et qui correspond à la définition 8 du N -non-conflit.

$\chi_N(m_1, m_2) = 1 \Leftrightarrow \psi_N(m_1 \odot_2) = 0 \Leftrightarrow m_{1 \odot_2}^N(\emptyset) = 1$, ce qui donne en utilisant le Lemme 1 que $m_{1 \odot_2}$ est totalement incohérente, i.e., $m_{1 \odot_2}(\emptyset) = 1$. D'après la définition de \odot , $m_{1 \odot_2}(\emptyset) = 1$ si et seulement si m_1 and m_2 sont totalement conflictuelles.

P_2^κ :

$$\begin{aligned}\chi_N(m_1, m_2) &= 1 - (1 - m_{1 \odot_2}^N(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - (1 - \odot_{i=1}^N m_{1 \odot_2}(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - (1 - \odot_{i=1}^N (m_1 \odot m_2)(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - (1 - \odot_{i=1}^N (m_2 \odot m_1)(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - (1 - \odot_{i=1}^N m_{2 \odot_1}(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - (1 - m_{2 \odot_1}^N(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= \chi_N(m_2, m_1).\end{aligned}$$

P_3^κ : \odot est monotone par rapport à \sqsubseteq [3, Proposition 2] et donc $m_1 \sqsubseteq m'_1 \Rightarrow m_1 \odot m_2 \sqsubseteq m'_1 \odot m_2, \forall m_2 \in \mathcal{M}$. En utilisant [10, Lemma 3], on obtient :

$$\odot_{i=1}^N m_1 \odot m_2 \sqsubseteq \odot_{i=1}^N m'_1 \odot m_2.$$

Donc $m_{1 \odot_2}^N \sqsubseteq m_{1' \odot_2}^N$, ce qui implique en utilisant (2) que

$$\begin{aligned}Pl_{1 \odot_2}^N(\mathcal{X}) &\leq Pl_{1' \odot_2}^N(\mathcal{X}) \\ \Leftrightarrow 1 - m_{1 \odot_2}^N(\emptyset) &\leq 1 - m_{1' \odot_2}^N(\emptyset) \\ \Leftrightarrow (1 - m_{1 \odot_2}^N(\emptyset))^{\frac{1}{N}} &\leq (1 - m_{1' \odot_2}^N(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ \Leftrightarrow \chi_N(m_1, m_2) &\geq \chi_N(m_{1'}, m_2).\end{aligned}$$

P_4^κ : La FM m_1 telle que $m_1(\mathcal{X}) = 1$ est l'élément neutre de \odot donc :

$$\begin{aligned}\chi_N(m_1, m_2) &= 1 - (1 - m_{1 \odot_2}^N(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - (1 - (\odot_{i=1}^N m_1 \odot_2)(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - (1 - (\odot_{i=1}^N m_2)(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - (1 - m_2^N(\emptyset))^{\frac{1}{N}} \\ &= 1 - \psi_N(m_2).\end{aligned}$$

P_5^κ : On a

$$\begin{aligned}1 - (1 - \chi_N(m_1, m_2))^N &= m_{1 \odot_2}^N(\emptyset) = \\ &= \sum_{\bigcap_{i=1}^N (A_i \cap B_i) = \emptyset} \prod m_1(A_i) m_2(B_i)\end{aligned}\quad (11)$$

et

$$\begin{aligned}1 - (1 - \chi_N(m_{\rho(1)}, m_{\rho(2)}))^N &= \\ m_{\rho(1) \odot \rho(2)}^N(\emptyset) &= \\ \sum_{\bigcap_{i=1}^N (\rho(A_i) \cap \rho(B_i)) = \emptyset} \prod m_{\rho(1)}(\rho(A_i)) m_{\rho(2)}(\rho(B_i)).\end{aligned}\quad (12)$$

$\forall (A_1, B_1, \dots, A_N, B_N) \in \times_{i=1}^N \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$,

on a :

- ou bien $\bigcap_{i=1}^N (\rho(A_i) \cap \rho(B_i)) \neq \emptyset$, auquel cas, puisque $\{\rho(\{x\}) \mid x \in \mathcal{X}\}$ est une partition de \mathcal{Y} , $\exists x \in \mathcal{X}$ tel que $x \in A_i$ et $x \in B_i, i = 1, \dots, \mathfrak{F}_{12}$, i.e., $\bigcap_{i=1}^N (A_i \cap B_i) \neq \emptyset$;
- ou $\bigcap_{i=1}^N (\rho(A_i) \cap \rho(B_i)) = \emptyset$, auquel cas $\nexists x \in \mathcal{X}$ tel que $x \in A_i$ et $x \in B_i, i = 1, \dots, \mathfrak{F}_{12}$, i.e., $\bigcap_{i=1}^N (A_i \cap B_i) = \emptyset$.

Ainsi, $\forall (A_1, B_1, \dots, A_N, B_N)$, quand la masse $\prod_{i=1}^N m_{\rho(1)}(\rho(A_i)) m_{\rho(2)}(\rho(B_i))$ est allouée à \emptyset , alors il en est de même

pour $\prod_{i=1}^N m_1(A_i)m_2(B_i)$; et quand la masse $\prod_{i=1}^N m_{\rho(1)}(\rho(A_i))m_{\rho(2)}(\rho(B_i))$ n'est pas allouée à \emptyset , il en est de même pour $\prod_{i=1}^N m_1(A_i)m_2(B_i)$. Donc $\forall(A_1, B_1, \dots, A_N, B_N) :$

$$\prod_{i=1}^N m_{\rho(1)}(\rho(A_i))m_{\rho(2)}(\rho(B_i)) = \prod_{i=1}^N m_1(A_i)m_2(B_i),$$

Comme pour la famille des mesures de cohérence, la famille de mesures χ_N est monotone et admet comme premier terme et limite asymptotique supérieure les mesures de conflit κ_m et κ_π , respectivement.

Proposition 6. *Pour toutes FMs m_1 et m_2 :*

$$\chi_1(m_1, m_2) = \kappa_m(m_1, m_2) \leq \chi_2(m_1, m_2) \leq \dots$$

$$\chi_{\mathfrak{S}_{12}}(m_1, m_2) \leq \kappa_\pi(m_1, m_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \chi_N(m_1, m_2)$$

Preuve. *La preuve découle directement du résultat de la proposition 4.*

La nouvelle famille de mesures χ_N permet de saisir une gradation du conflit entre FMs bornée par les mesures extrêmes κ_m et κ_π . D'autre part, les mesures du conflit $\chi_{\mathfrak{S}_{12}}$ et κ_π sont ordonnées - un résultat qui n'était pas vérifié avec la famille précédemment proposée dans [11].

4 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une nouvelle famille paramétrée de mesures de conflit des fonctions de croyance. La famille vérifie les cinq propriétés des mesures de conflit, est monotone et englobe deux mesures connues, κ_m et κ_π comme cas particuliers. Nous avons aussi introduit un lien entre les ensembles incohérents minimaux initialement définis dans la littérature sur les bases de connaissances logiques et la cohérence des fonctions de croyance.

Ce travail ouvre la voie à plusieurs extensions. La première est l'interprétation géométrique de la famille de mesures et l'étude de l'ordre partiel induit par le vecteur χ_N . Le choix de la "meilleure" mesure considérant les coûts

computationnels et la sémantique, entre autres critères, est un autre problème qu'on se propose d'aborder dans le futur.

Remerciements :

Ce travail est financé par le Commandement allié Transformation de l'OTAN – This work is supported by the NATO Allied Command Transformation (ACT).

Références

- [1] N. Ben Abdallah, A.-L. Jousselme, F. Pichon. An ordered family of consistency measures of belief functions. *Proc. of the 5th Int. Conference on Belief Functions (BELIEF 2018)*, LNAI 11069, pp 1-9, 2018.
- [2] F. Cuzzolin. Consistent transformations of belief functions. *Preprint arXiv :1407.8151*, 2014.
- [3] T. Denœux. Inner and outer approximation of belief structures using a hierarchical clustering approach. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9(4) : 437-460, 2001.
- [4] S. Destercke, T. Burger. Toward an axiomatic definition of conflict between belief functions. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 43(2) : 585-596, 2013.
- [5] D. Dubois, H. Prade. A set-theoretic view of belief functions : logical operations and approximations by fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, 12(3) : 193-226, 1986.
- [6] A. Hunter, S. Konieczny. Measuring inconsistency through minimal inconsistent sets. *Proc. of the 11th Int. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR' 08)*, pp. 358-366, 2008.
- [7] J. Ma, W. Liu, D. Dubois, H. Prade. Revision rules in the theory of evidence. *22nd IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (IC-TAI), 2010*, (1) : 295-302.
- [8] J. Ma, W. Liu, P. Miller. A characteristic function approach to inconsistency measures for knowledge bases. *Proceedings of SUM*, pp. 473-485, 2012.
- [9] T. Matthias. Measuring inconsistency in probabilistic knowledge bases. *Proc. of the Twenty-Fifth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 530-537, 2009.
- [10] F. Pichon, S. Destercke, T. Burger. A consistency-specificity trade-off to select source behavior in information fusion. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 45(4) : 598-609, 2015.
- [11] F. Pichon, A.-L. Jousselme, N. Ben Abdallah. Several shades of conflict. *Under revision*, 2018.
- [12] A. Saffiotti. A belief-function logic. *Proceedings of AAI*, pp. 642-647, 1992.
- [13] G. Shafer. *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [14] P. Smets, R. Kennes. The transferable belief model. *Artificial Intelligence*, 66(2) : 191-234, 1994.
- [15] R. R. Yager. On considerations of credibility of evidence. *International Journal of Approximate Reasoning*, 7(1/2) : 45-75, 1992.