



HAL
open science

Vers une généralisation de l'approximation des fonctions de croyance

Tekwa Tedjini, Sohaib Afifi, Frédéric Pichon, Eric Lefevre

► To cite this version:

Tekwa Tedjini, Sohaib Afifi, Frédéric Pichon, Eric Lefevre. Vers une généralisation de l'approximation des fonctions de croyance. 29e Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA 2020, Oct 2020, Sète, France. pp.199-206. hal-03521875

HAL Id: hal-03521875

<https://hal.science/hal-03521875>

Submitted on 11 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Vers une généralisation de l'approximation des fonctions de croyance

Toward a generalization of belief functions approximation

Tekwa Tedjini¹

Sohaib Afifi¹

Frédéric Pichon¹

Eric Lefèvre¹

¹ Univ. Artois, UR 3926, Laboratoire de Genie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)

F-62400 Béthune, France

tekwa.tedjini@ens.univ-artois.fr; { sohaib.afifi, frederic.pichon, eric.lefevre }@univ-artois.fr

Résumé :

Dans la théorie des fonctions de croyance, on est souvent contraint à travailler avec des fonctions de masse ayant un grand nombre d'ensembles focaux ou à combiner itérativement plusieurs fonctions de masse ce qui engendre l'explosion du nombre d'éléments focaux dans la fonction de masse résultante. Cette limite peut rapidement diminuer l'intérêt pratique d'une représentation crédibiliste des incertitudes. Face à cet aléa, l'approximation des fonctions de croyance constitue un atout. Dans cet article, nous proposons d'étendre les techniques classiques d'approximation, reposant essentiellement sur la comparaison du contenu informatif des fonctions de masse en terme de spécificité, à d'autres relations entre fonctions de croyance telles que l'ordre latticiel. Cela permet de pallier l'inadéquation des techniques classiques dans certaines applications.

Mots-clés :

Fonctions de croyance, Approximation, Spécificité, Relations.

Abstract:

In belief function theory, we are usually constrained to handle mass functions having a large number of focal sets or to combine multiple mass functions which requires an expensive computational effort. This drawback may rapidly hinder the practical use of this theory. Fortunately, approximation techniques can be considered as solutions to this shortcoming. In this paper, we extend the classical approximation techniques, which mainly rely on the comparison of the informative content of mass functions in terms of specificity, to other belief function relations such as lattice order. This allows to overcome the inadequacy of classical techniques in some applications.

Keywords:

Belief function, Approximation, Specificity, Relations.

1 Introduction

Quelque soit le domaine d'application, lors de l'emploi de systèmes d'aide à la décision, on se retrouve constamment face à une masse d'information qu'il est nécessaire d'exploiter au maximum afin d'améliorer la prise de décision. Ce lot d'informations étant souvent sujet à des imprécisions, incertitudes, ambiguïtés, etc, il

convient alors de les traiter afin de prendre une décision fidèle à la réalité. Il existe plusieurs formalismes permettant de représenter ces imperfections et celui de la théorie des fonctions de croyance en est un.

Les travaux de Dempster [2] et Shafer [15] sont à l'origine du développement de la théorie des fonctions de croyance. Ces travaux ont été suivis par de nombreuses contributions, en particulier celle de Smets à travers son *modèle des croyances transférables* [17], qui a justifié de manière axiomatique l'utilité de cette théorie. En dépit de son succès en tant que modèle de raisonnement sous incertitude, qui étend à la fois le cadre probabiliste et ensembliste, l'intérêt pratique de cette théorie est souvent remis en question à cause de l'effort computationnel lié à sa complexité. Il est effectivement difficile de la mettre en œuvre quand on est en présence de plusieurs sources d'informations et que le nombre d'itérations dans le processus de raisonnement est grand.

Afin de pallier ce problème, plusieurs techniques ont été proposées, soit à travers des procédures efficaces permettant de faire des calculs exacts comme [11], soit en utilisant des méthodes d'approximation où on retrouve majoritairement quatre familles. La première famille contient les modèles basés sur la simulation *Monte Carlo* [13][21]. La seconde famille regroupe les modèles où la fonction de masse originale est remplacée par une mesure de probabilité ou une mesure de possibilité [20] [6]. La troisième famille permet de rechercher une meilleure partition du cadre de discernement dans laquelle la fonction de masse

peut être exprimée [4]. Finalement, nous retrouvons les modèles où la fonction de masse originale est simplifiée soit en retirant ou en regroupant les ensembles focaux ayant des masses relativement négligeables [19] [1] [12], soit en réduisant le nombre d'ensembles focaux de manière itérative [8] [14] [3]. On s'intéresse particulièrement à cette dernière famille. Harmanec [8] a établi qu'en plus du caractère simple d'une approximation, deux critères doivent rentrer en jeu pour attester sa qualité : la cohérence (*consistency*) et la proximité (*closeness*) par rapport à la fonction de masse originale. La proximité est généralement mesurée par une distance ou une mesure de similarité, quant au premier critère, la littérature est unanime, elle se base sur la comparaison du contenu informatif en terme de spécificité entre la fonction de masse originale et son approximation.

Récemment, Destercke et al. [5] ont introduit une approche simple permettant d'étendre toute relation entre ensembles, aux fonctions de croyance. Le concept de comparaison des fonctions de croyance, qui concernait jusqu'alors essentiellement le contenu informatif, s'en est vu considérablement généralisé en donnant la possibilité de comparer les fonctions de croyance en choisissant par exemple celle qui est la plus cohérente par respect à une relation donnée, telle que l'ordre latticiel (*lattice order*).

Dans cet article, nous proposons d'étendre la généralisation proposée dans [5] au cadre des approximations. Notre motivation vient du fait que les approximations classiques peuvent engendrer des résultats incorrects dans certaines applications. Cela est dû au fait qu'elles sont fondées sur la recherche d'une fonction de masse moins spécifique que l'originale, alors que, par exemple, il faudrait naturellement plutôt rechercher une fonction de masse dominante. Nous reviendrons sur ce point plus tard dans le papier.

Cet article est organisé comme suit. La section 2 rappelle les définitions de base de la théorie des fonctions de croyance et des relations entre

ensembles. La section 3 décrit le principe de comparaison des fonctions de croyance. La section 4 généralise le concept d'approximation et une illustration sur un cas particulier est donnée dans la section 5. Finalement, la section 6 conclut l'article.

2 Définitions et notations

2.1 Théorie des fonctions de croyance

Soit $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fini de valeurs possibles d'une variable x connue avec incertitude. \mathcal{X} est appelé cadre de discernement. La connaissance au sujet de x peut être représentée par une fonction $m^{\mathcal{X}}$, dite *fonction de masse*, définie de l'ensemble de toutes les parties de \mathcal{X} dans $[0, 1]$: $m^{\mathcal{X}} : 2^{\mathcal{X}} \mapsto [0, 1]$ et vérifiant : $\sum_{A \subseteq \mathcal{X}} m^{\mathcal{X}}(A) = 1$ et $m^{\mathcal{X}}(\emptyset) = 0$.

Toute partie $A \in \mathcal{X}$ telle que $m^{\mathcal{X}}(A) > 0$ est un élément focal. D'autres représentations de l'information peuvent être construites à partir de $m^{\mathcal{X}}$ comme la croyance $Bel^{\mathcal{X}}(A)$ et la plausibilité $Pl^{\mathcal{X}}(A)$, $\forall A \subseteq \mathcal{X}$ telles que

$$Bel^{\mathcal{X}}(A) = \sum_{\emptyset \neq B \subseteq A} m^{\mathcal{X}}(B), \quad (1)$$

$$Pl^{\mathcal{X}}(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m^{\mathcal{X}}(B). \quad (2)$$

$Bel^{\mathcal{X}}(A)$ est la croyance minimale soutenant le fait que $x \in A$ et $Pl^{\mathcal{X}}(A)$ s'interprète comme la part de croyance qui pourrait potentiellement être allouée à A .

2.2 Relations entre ensembles

Une relation \mathbf{R} entre sous-ensembles de \mathcal{X} est un sous-ensemble $\mathbf{R} \subseteq 2^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{X}}$. Soient A et B deux parties de \mathcal{X} , nous noterons $A \mathbf{R} B$ si $(A, B) \in \mathbf{R}$.

Une relation peut avoir plusieurs propriétés, comme la *symétrie* ($A \mathbf{R} B \Rightarrow B \mathbf{R} A$), la *réflexivité* ($A \mathbf{R} A$, $\forall A \subseteq \mathcal{X}$), la *transitivité* ($A \mathbf{R} B$ et $B \mathbf{R} C \Rightarrow A \mathbf{R} C$, avec $C \subseteq \mathcal{X}$), etc. Il est également possible de construire des

relations plus complexes à partir de ces propriétés par exemple une relation \mathbf{R} est dite d'équivalence si et seulement si elle regroupe ces trois propriétés (consulter [5] pour plus de détails).

3 Comparaison des fonctions de croyance

Le principe d'engagement minimal [16] stipule que lorsqu'on est en présence de plusieurs fonctions de croyance compatibles avec un ensemble de contraintes données, il faut choisir celle qui est la moins informative. Afin de mettre en œuvre ce principe, il va falloir utiliser des outils permettant de comparer le contenu informatif des fonctions de croyance. Parmi ces outils, on retrouve la notion de *spécialisation* [7]. Elle généralise la relation d'inclusion \subseteq entre ensembles aux fonctions de croyance et ce, en comparant leurs contenus informatifs d'un point de vue de spécificité. Une fonction de masse $m_1^{\mathcal{X}}$ est dite *au moins aussi spécifique* (informative) qu'une fonction de masse $m_2^{\mathcal{X}}$, ce que l'on note $m_1^{\mathcal{X}} \sqsubseteq m_2^{\mathcal{X}}$ si et seulement s'il existe une matrice stochastique (gauche) $[S(A, B)]$ avec $A, B \subseteq \mathcal{X}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\sum_{A \subseteq \mathcal{X}} S(A, B) = 1, \quad \forall B \subseteq \mathcal{X}, \quad (3)$$

$$S(A, B) > 0 \Rightarrow A \subseteq B, \quad \forall A, B \subseteq \mathcal{X}, \quad (4)$$

$$m_1^{\mathcal{X}}(A) = \sum_{B \subseteq \mathcal{X}} S(A, B)m_2^{\mathcal{X}}(B), \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}. \quad (5)$$

$S(A, B)$ est la proportion de la masse $m_2^{\mathcal{X}}(B)$ qui est transférée de l'ensemble B vers l'ensemble $A \subseteq B$. Notons que si $m_1^{\mathcal{X}} \sqsubseteq m_2^{\mathcal{X}}$ alors :

$$[Bel_1^{\mathcal{X}}, Pl_1^{\mathcal{X}}] \subseteq [Bel_2^{\mathcal{X}}, Pl_2^{\mathcal{X}}]. \quad (6)$$

Destercke et al. [5] ont montré qu'en plus de la comparaison du contenu informatif, il est également intéressant d'exploiter d'autres relations entre les fonctions de croyance, étendant celles que l'on peut retrouver entre ensembles, comme les relations d'ordre, d'équivalence, de

cohérence, etc. Pour cela, ils ont proposé une définition qui étend les relations ensemblistes aux fonctions de croyance.

Définition 1 Soient $m_1^{\mathcal{X}}$ et $m_2^{\mathcal{X}}$ deux fonctions de masse et \mathbf{R} une relation entre sous-ensembles de \mathcal{X} .

Nous disons que $m_1^{\mathcal{X}} \widetilde{\mathbf{R}} m_2^{\mathcal{X}}$ s'il existe une matrice stochastique (gauche) S , telle que $\forall A, B \subseteq \mathcal{X}$.

$$m_1^{\mathcal{X}}(A) = \sum_{B \subseteq \mathcal{X}} S(A, B)m_2^{\mathcal{X}}(B), \quad (7)$$

$$S(A, B) > 0 \wedge m_2^{\mathcal{X}}(B) > 0 \Rightarrow \mathbf{R}A, B. \quad (8)$$

$S(A, B)$ est la proportion de la masse $m_2^{\mathcal{X}}(B)$ qui est transférée de l'ensemble B vers l'ensemble A tel que $\mathbf{R}A, B$ [5].

Notons que la notion de spécialisation est un cas particulier de cette définition, en remplaçant $\widetilde{\mathbf{R}}$ par \subseteq et \mathbf{R} par \subseteq dans (8).

Dans le cas où \mathcal{X} est ordonné, il est également possible, à partir de la Définition 1, de récupérer une relation déjà étudiée dans [9], en comparant deux sous ensembles $A, B \subseteq \mathcal{X}$ définis tels que $A = \{\underline{a}, \dots, \bar{a}\}$ ($\underline{a} \leq \bar{a}$) et $B = \{\underline{b}, \dots, \bar{b}\}$ ($\underline{b} \leq \bar{b}$), en terme d'ordre latticiel [5]. En effet, on dira que $m_1^{\mathcal{X}}$ est *au moins aussi petite* que $m_2^{\mathcal{X}}$, ce que l'on notera $m_1^{\mathcal{X}} \preceq m_2^{\mathcal{X}}$, avec $\widetilde{\mathbf{R}}$ remplacée par \preceq et \mathbf{R} remplacée par \leq_d où $A \leq_d B$ si $\underline{a} \leq \underline{b}$ et $\bar{a} \leq \bar{b}$. Notons qu'avec cette relation, nous avons la propriété suivante sur la croyance et la plausibilité entre m_1 et m_2 [9] :

$$[Bel_2^{\mathcal{X}}, Pl_2^{\mathcal{X}}] \leq_d [Bel_1^{\mathcal{X}}, Pl_1^{\mathcal{X}}]. \quad (9)$$

4 Généralisation de l'approximation des fonctions de croyance

Classiquement, pour approximer une fonction de masse m , il faut construire une nouvelle fonction de masse m' *au moins aussi spécifique* que m , i.e $m \sqsubseteq m'$ et ayant un nombre raisonnable d'ensembles focaux. m' peut être construite en conservant les éléments focaux

les plus représentatifs de m , i.e, ceux qui ont des masses importantes, et en éliminant ou regroupant les éléments focaux similaires ou ceux qui ont des masses relativement faibles [19] [1] [12]. Il est également possible de réduire le nombre d'ensembles focaux itérativement, en choisissant à chaque étape les deux ensembles focaux les moins éloignés, par respect à une distance, et en les remplaçant par un ensemble focal qui les inclut [8] [14] [3]. On peut également encadrer la fonction de masse m par une approximation intérieure m'' , telle que $m'' \sqsubseteq m \sqsubseteq m'$ et où m'' est obtenue en transférant la masse des ensembles focaux à regrouper à leur intersection [3]. Toutes ces techniques hiérarchiques favorisent un compromis entre la qualité et le temps de calcul de m' et/ou de m'' .

Dans cette section, nous proposons d'étendre ces approximations à d'autres relations $\tilde{\mathbf{R}}$ entre m et m' . Cette proposition est motivée par le fait que les approximations classiques, concentrées essentiellement sur le contenu informatif, peuvent engendrer des erreurs dans certaines applications, comme dans le cas d'un problème d'optimisation combinatoire que nous avons étudié [18]. En effet, la propriété que l'on a sur les fonctions de plausibilité de m et de m' ($Pl^{\mathcal{X}} \leq Pl'^{\mathcal{X}}$) fait qu'il est possible de retenir, en utilisant m' , des solutions qui sont, en temps normal, rejetées en utilisant m . Par conséquent, il est important d'introduire une méthode plus générale permettant d'approximer m par une fonction m' qui lui est plus/moins spécifique, grande, petite, équivalente, etc, et ainsi permettre l'utilisation de l'approximation dans un plus large éventail d'applications.

En s'inspirant de la définition formelle d'une approximation donnée par Dencœur [3], on peut définir une généralisation de l'approximation classique comme suit.

Définition 2 Soient une partition $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_K\}$ de l'ensemble $\mathbb{N}_n =$

$\{1, \dots, n\}$, i.e $P_k \cap P_l = \emptyset$ et $\bigcup_{k=1}^K P_k = \mathbb{N}_n$ et une fonction de masse m dont les éléments focaux sont donnés par l'ensemble $\mathcal{F}(m) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

Soit m' une autre fonction de masse ayant des ensembles focaux $\mathcal{F}(m') = \{B_1, \dots, B_K\}$ vérifiant, pour tout $k = 1, \dots, K$:

$$A_i \mathbf{R} B_k, \forall i \in P_k, \quad (10)$$

$$m'(B_k) = \sum_{i \in P_k} m(A_i). \quad (11)$$

m' est appelée $\tilde{\mathbf{R}}$ -approximation de m .

L'appellation $\tilde{\mathbf{R}}$ -approximation vient du fait que m' contient moins d'ensemble focaux que m et du fait que $m \tilde{\mathbf{R}} m'$ puisque m et m' sont des fonctions de masse vérifiant les conditions de la Définition 1. En effet, pour toute partie P_k ($k = 1, \dots, K$), il est possible de récupérer $m(A_i)$ à partir de $m'(B_k)$ en transférant la proportion $S(A_i, B_k) = \frac{m(A_i)}{m'(B_k)} = \frac{m(A_i)}{\sum_{j \in P_k} m(A_j)} > 0$ de $m'(B_k) > 0$, à l'ensemble A_i , tel que $A_i \mathbf{R} B_k$.

Cas particuliers. À partir de la Définition 2, on peut identifier des cas déjà étudiés dans la littérature. Par exemple :

Si \mathbf{R} est une relation d'inclusion extérieure, i.e $A_i \subseteq B_k$, où B_k est l'ensemble focal donné par l'union de tous les ensembles focaux A_i de la partition P_k , c-à-d : $B_k = \bigcup_{i \in P_k} A_i$, dans ce cas

nous avons $\tilde{\mathbf{R}} = \sqsubseteq$, i.e $m \sqsubseteq m'$, qui correspond aux approximations extérieures de la littérature.

Un autre cas peut être identifié lorsque \mathbf{R} est une relation d'inclusion intérieure, i.e $A_i \supseteq B_k$, où B_k est l'ensemble focal donné par l'intersection de tous les ensembles focaux A_i de la partition P_k , c-à-d : $B_k = \bigcap_{i \in P_k} A_i$, alors nous avons

$\tilde{\mathbf{R}} = \supseteq$, i.e $m \supseteq m'$ qui est l'approximation intérieure de Dencœur.

Si de plus, on suppose que \mathcal{X} est ordonné et

que $\tilde{\mathbf{R}} = \preceq$, il est également possible d'approximer m par une fonction de masse m' telle que $m \preceq m'$, où \preceq définit la généralisation de l'ordre latticiel aux fonctions de croyance. Cette approximation sera détaillée dans la section suivante.

Une idée intuitive pour utiliser cette approximation généralisée, pourrait être de conserver les $K - 1$ ensemble focaux de m , qui ont les masses les plus importantes, et de substituer les ensembles restants par un ensemble focal B t.q $A_i \mathbf{R} B, i = K, \dots, n$. Cette technique est inspirée de la *summerization* [12]. Cependant, afin de proposer une approximation de meilleure qualité, nous proposons de la combiner avec la procédure hiérarchique (extérieure) introduite dans [3].

L'idée de notre méthode est de conserver les p ensembles focaux les plus importants (avec $p < K < n$), puis, de réduire itérativement le reste des ensembles focaux. À chaque itération, une mesure de similarité ou une distance (en fonction du besoin) entre deux ensembles focaux A_i et A_j est calculée (le lecteur est invité à consulter [22] pour une panoplie de mesures de similarités). Les deux ensembles focaux (A_{i^*}, A_{j^*}) les plus proches, par respect à la mesure calculée, seront ensuite remplacés par un ensemble B_{iter} , t.q $A_{i^*} \mathbf{R} B_{iter}$ et $A_{j^*} \mathbf{R} B_{iter}$ et où $m(B_{iter}) = m(A_{i^*}) + m(A_{j^*})$. Le processus est réitéré jusqu'à ce que la taille de la nouvelle fonction de masse soit égale à K . Le pseudocode de l'approche est donné dans l'Algorithme 1.

Algorithme 1 approche générale d'approximation $O(n^3)$

Entrée: $m = \{A_i, m(A_i), i = \overline{1, n}\}$ une fonction de masse, p, K deux entiers t.q : $p < K < n$, \mathbf{R} une relation et S une mesure de similarité.

Sortie: Une fonction de masse m' de taille K .

- 1: Initialisation : $m' \leftarrow \emptyset$;
 - 2: Ajouter les p ensembles focaux les plus importants à m' et les retirer de m ;
 - 3: $iter \leftarrow n - p$;
 - 4: Calculer la matrice des distances / similarités M t.q : $M(i, j) \leftarrow S(A_i, A_j) \forall i, j = \overline{1, n - p}$;
 - 5: **répéter**
 - 6: Choisir A_{i^*} and A_{j^*} les plus proches;
 - 7: Ajouter B_{iter} à m t.q $A_{i^*} \mathbf{R} B_{iter}$ et $A_{j^*} \mathbf{R} B_{iter}$;
 - 8: $m(B_{iter}) \leftarrow m(A_{i^*}) + m(A_{j^*})$;
 - 9: Retirer A_{i^*} et A_{j^*} de m ;
 - 10: Mettre à jour M ;
 - 11: $iter \leftarrow iter - 1$;
 - 12: **jusqu'à** ($iter = K - p$);
 - 13: Ajouter les ensembles focaux de m à m' ;
-

5 Étude de cas : approximation par ordre latticiel

Dans cette section, nous allons illustrer la généralisation de l'approximation introduite dans la section précédente, pour un cas particulier dans lequel la relation \mathbf{R} est donnée par \preceq . Autrement dit, on veut approximer m par une fonction de masse m' qui lui est *plus grande* par respect à l'ordre latticiel. Dans ce cas, la propriété (9) est vérifiée.

5.1 Approximation par ordre latticiel

Soit $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble ordonné ($x_1 \leq \dots \leq x_n$) et m une fonction de masse définie sur \mathcal{X} et dont les éléments focaux sont donnés par $\mathcal{F}(m) = \{A_1, \dots, A_n\}$ t.q $A_i = \{\underline{a}_i, \dots, \bar{a}_i\}$, qu'on notera par $[[\underline{a}_i, \bar{a}_i]]$ avec $\underline{a}_i \leq \bar{a}_i$. En utilisant la Définition 2, il est possible de construire une $\tilde{\mathbf{R}}$ -approximation m' de m , telle que $m \preceq m'$, dont les ensembles focaux sont de la forme : $B_k = [[\underline{b}_k, \bar{b}_k]] = \{\underline{b}_k, \dots, \bar{b}_k\}$, avec $\underline{b}_k \leq \bar{b}_k$, et vérifiant pour tout $i \in P_k$ et tout $k = 1, \dots, K$, $A_i \leq_d B_k$, i.e $\underline{a}_i \leq \underline{b}_k$ et $\bar{a}_i \leq \bar{b}_k$.

Nous proposons d'utiliser l'Algorithme 1 en remplaçant la relation \mathbf{R} par l'ordre latticiel \leq_d et d'utiliser la mesure de Jaccard [10] donnée par : $S_{\text{Jaccard}}(A_i, A_j) = \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i \cup A_j|}$ afin de capturer les ressemblances et les diversités entre les ensembles focaux. Le couple d'ensembles focaux (A_{i^*}, A_{j^*}) ayant une similarité maximale est choisi et il est donc remplacé par l'ensemble B_{iter} qui peut être construit comme suit :

$$B_{iter} = \begin{cases} A_{j^*} & A_{i^*} \leq_d A_{j^*}, & (12) \\ A_{i^*} & A_{j^*} \leq_d A_{i^*}, & (13) \\ [[\underline{a}_{i^*}, \bar{a}_{j^*}]] & A_{i^*} \subseteq A_{j^*}, & (14) \\ [[\underline{a}_{j^*}, \bar{a}_{i^*}]] & A_{j^*} \subseteq A_{i^*}. & (15) \end{cases}$$

Le processus est réitéré jusqu'à ce que la taille de la nouvelle fonction de masse soit égale à K . Notons que dans le cas où la fonction de masse m a des éléments focaux qui sont tous disjoints,

on pourrait remplacer la mesure de *Jaccard* par une distance géométrique, telle qu'une distance euclidienne ou autres [22], pour choisir m' la plus proche de m .

5.2 Exemple illustratif

Soit la fonction de masse m de taille $n = 8$ définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \llbracket 1, 5 \rrbracket & m(A_1) &= 0.2 \\
 A_2 &= \llbracket 0, 3 \rrbracket & m(A_2) &= 0.1 \\
 A_3 &= \llbracket 4, 9 \rrbracket & m(A_3) &= 0.2 \\
 A_4 &= \llbracket 8, 10 \rrbracket & m(A_4) &= 0.1 \\
 A_5 &= \llbracket 2, 5 \rrbracket & m(A_5) &= 0.15 \\
 A_6 &= \llbracket 6, 8 \rrbracket & m(A_6) &= 0.1 \\
 A_7 &= \llbracket 3, 10 \rrbracket & m(A_7) &= 0.05 \\
 A_8 &= \llbracket 0, 4 \rrbracket & m(A_8) &= 0.1
 \end{aligned} \tag{18}$$

Supposons qu'on a $K = 4$ et $p = 2$.

Commençons par ajouter les p ensembles focaux les plus importants à m' , soit A_1 et A_3 , puis supprimons les de m .

Étape 1 : $iter = n - p = 6$, on calcule la matrice des similarités M :

E. focaux	A_2	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8^*
A_2^*	-	0	0.33	0	0.09	0.8
A_4	-	-	0	0.2	0.375	0
A_5	-	-	-	0	0.33	0.5
A_6	-	-	-	-	0.375	0
A_7	-	-	-	-	-	0.18
A_8	-	-	-	-	-	-

Les ensembles focaux (A_2, A_8) sont les plus similaires avec $S_{\text{Jaccard}}(A_2, A_8) = 0.8$. Dans ce cas, étant donné (12), A_2 est remplacé par A_8 dans m et $m(A_8) = m(A_2) + m(A_8) = 0.2$. m devient alors :

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \llbracket 8, 10 \rrbracket & m(A_4) &= 0.1 \\
 A_5 &= \llbracket 2, 5 \rrbracket & m(A_5) &= 0.15 \\
 A_6 &= \llbracket 6, 8 \rrbracket & m(A_6) &= 0.1 \\
 A_7 &= \llbracket 3, 10 \rrbracket & m(A_7) &= 0.05 \\
 A_8 &= \llbracket 0, 4 \rrbracket & m(A_8) &= 0.2
 \end{aligned}$$

Étape 2 : $iter = 5$, M est mise à jour :

E. focaux	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8^*
A_4	-	0	0.2	0.375	0
A_5^*	-	-	0	0.33	0.5
A_6	-	-	-	0.375	0
A_7	-	-	-	-	0.18
A_8	-	-	-	-	-

Le maximum de similarité est obtenu entre A_5 et A_8 avec $S_{\text{Jaccard}}(A_5, A_8) = 0.5$. Dans ce cas, A_5 remplace A_8 et $m(A_5) = m(A_5) + m(A_8) = 0.35$. m devient alors :

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \llbracket 8, 10 \rrbracket & m(A_4) &= 0.1 \\
 A_5 &= \llbracket 2, 5 \rrbracket & m(A_5) &= 0.35 \\
 A_6 &= \llbracket 6, 8 \rrbracket & m(A_6) &= 0.1 \\
 A_7 &= \llbracket 3, 10 \rrbracket & m(A_7) &= 0.05
 \end{aligned}$$

Étape 3 : $iter = 4$, on met à jour M :

E. focaux	A_4	A_5	A_6	A_7^*
A_4^*	-	0	0.2	0.375
A_5	-	-	0	0.33
A_6^*	-	-	-	0.375
A_7	-	-	-	-

A_4 et A_7 (ou A_6 et A_7) sont les plus similaires avec $S_{\text{Jaccard}}(A_4, A_7) = 0.375$. Dans ce cas, A_4 remplace A_7 , $m(A_4) = m(A_4) + m(A_7) = 0.15$. m devient :

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \llbracket 8, 10 \rrbracket & m(A_4) &= 0.15 \\
 A_5 &= \llbracket 2, 5 \rrbracket & m(A_5) &= 0.35 \\
 A_6 &= \llbracket 6, 8 \rrbracket & m(A_6) &= 0.1
 \end{aligned}$$

Étape 4 : $iter = 3$, la matrice M est mise à jour :

E. focaux	A_4	A_5	A_6^*
A_4^*	-	0	0.2
A_5	-	-	0
A_6	-	-	-

A_4 et A_6 sont les plus similaires avec $S_{\text{Jaccard}}(A_4, A_6) = 0.2$. Dans ce cas, A_4 remplace A_6 , $m(A_4) = m(A_4) + m(A_6) = 0.25$. m devient :

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \llbracket 8, 10 \rrbracket & m(A_4) &= 0.25 \\
 A_5 &= \llbracket 2, 5 \rrbracket & m(A_5) &= 0.35
 \end{aligned}$$

Étape 4 : $iter = 2 = K - p$, la procédure s'arrête. On ajoute les ensembles focaux A_4 et A_5 à m' . La fonction de masse m' qui approxime m (définie par (18)) par respect à l'ordre latticiel, est donnée par :

$$\begin{aligned} A_1 &= \llbracket 1, 5 \rrbracket & m'(A_1) &= 0.2 \\ A_3 &= \llbracket 4, 9 \rrbracket & m'(A_3) &= 0.2 \\ A_4 &= \llbracket 8, 10 \rrbracket & m'(A_4) &= 0.25 \\ A_5 &= \llbracket 2, 5 \rrbracket & m'(A_5) &= 0.35 \end{aligned}$$

5.3 Résultats numériques

Nous avons testé notre méthode d'approximation dans le cadre de la résolution approchée d'un problème d'optimisation combinatoire qui est le problème de tournées de véhicules avec fenêtres de temps où les temps de service et de trajet sont modélisés par des fonctions de croyance [18]. Dans ce problème, le temps de début de service de chaque client est calculé pour vérifier s'il respecte ou non la fenêtre de temps. Ce temps combine toutes les fonctions de masse des temps de trajet et de service cumulés, depuis que le véhicule quitte le dépôt jusqu'à l'arrivée au client en question. Nous avons alors utilisé une approximation pour maîtriser le nombre d'ensemble focaux dans cette combinaison. Les tests ont été effectués sur une adaptation des instances de la littérature (cf [18] pour plus de détails sur la construction des instances) et le Tableau 1 résume les résultats trouvés pour certaines instances *Inst* : sans approximation (*sans Appx*) et en utilisant l'approximation par ordre latticiel (*Avec Appx*). Le nombre d'itérations sans amélioration a été fixé à 50. *nbv* désigne le nombre moyen de véhicules et *dist* est la distance moyenne parcourue par les véhicules dans une solution. *cpu(s)* est le temps moyen de calcul (en secondes). Nous avons effectués 15 exécutions pour chacune des instances en fixant p à 3 et K à 8.

Les tests numériques effectués montrent que l'utilisation d'une approximation améliore nettement le temps de calcul sans pour autant nuire à la qualité, par rapport aux solutions obtenues

Tableau 1 – Comparaison des résultats avec et sans approximation

Inst	Sans Appx			Avec Appx		
	nbv	dist	cpu(s)	nbv	dist	cpu(s)
C102	7	549.88	260.7	7.2	570.4	26.2
C103	6.6	510.67	254.7	6.6	528.57	29.2
C104	5.6	452.45	668.5	5.92	471.06	48.77
C204	3.14	440.75	356.71	3.6	511.6	61.0
R104	10	905.66	970.83	11	947.63	27.5
R108	9.6	879.6	108.8	10.5	903.7	32.7
R204	3.4	626.19	742.13	3.9	609.74	66.5
R207	4.5	746.6	299.4	4.7	784.06	44.8
R208	2.8	599.43	1512.27	3.1	634.58	70.5
R211	4.33	731.81	135.07	4.8	778.13	40.1
RC204	3.8	568.41	494.4	4.2	627.95	60.1
RC208	4.07	637.23	173.0	5	560.26	69.4

sans le recours à une approximation.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une approche générale pour approximer les fonctions de croyance. Cette approche s'appuie sur l'extension des relations ensemblistes aux fonctions de croyance et permet de simplifier une fonction de masse quelque soit la nature de sa relation avec son approximation. L'approche étudiée comprend des cas particuliers déjà traités dans la littérature, entre autres, les approximations extérieure et intérieure. Une illustration de cette approche a été proposée à travers l'étude d'un cas particulier où une fonction de masse est remplacée par une autre qui lui est plus grande par respect à l'ordre latticiel (*lattice order*). L'étude de ce cas a été motivée par une limite des approches classiques à proposer une simplification compatible avec les contraintes de l'application étudiée.

Références

- [1] M. BAUER : Approximation algorithms and decision making in the Dempster-Shafer theory of evidence -An empirical study. *Int J Approx Reason*, 17(2-3):217–237, aug 1997.
- [2] A. P. DEMPSTER : Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38:325–339, 1967.

- [3] T. DENÈUX : Inner and outer approximation of belief structures using a hierarchical clustering approach. *Int J Uncertain Fuzz*, 9(4):437–460, nov 2001.
- [4] T. DENÈUX et A. Ben YAGHLANE : Approximating the combination of belief functions using the fast Möbius transform in a coarsened frame. *Int J Approx Reason*, 31(1):77 – 101, 2002.
- [5] S. DESTERCKE, F. PICHON et J. KLEIN : From set relations to belief function relations. *Int J Approx Reason*, 110:46–63, jul 2019.
- [6] D. DUBOIS et H. PRADE : Consonant approximations of belief functions. *Int J Approx Reason*, 4(5-6):419–449, sep 1990.
- [7] D. DUBOIS et H. PRADE : A set-theoretic view of belief functions : Logical operations and approximations by fuzzy sets. *Int J Gen Syst*, 12(3):193–226, 1986.
- [8] D. HARMANEC : Faithful approximations of belief functions. *Uncertain Artif Intell*, 15, 1990.
- [9] N. HELAL, F. PICHON, D. PORUMBEL, D. MERCIER et E. LEFEVRE : The capacitated vehicle routing problem with evidential demands. *Int J Approx Reason*, 95:124–151, 2018.
- [10] P. JACCARD : Étude comparative de la distribution florale dans une portion des alpes et des jura. *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles*, 37:547–579, 1901.
- [11] R. KENNES : Computational aspects of the Möbius transformation of graphs. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst*, 22(2):201–223, 1992.
- [12] J. D. LOWRANCE, T. D. GARVEY et T. M. Strat N. WILSON : A framework for evidential reasoning systems. In T. KEHLER et AL., éditeurs : *Proc of AAAI'86*, volume 2, pages 896–903. AAAI, August 1994.
- [13] S. MORAL et N. WILSON : Markov chain Monte-Carlo algorithms for the calculation of Dempster-Shafer belief. In Barbara HAYES-ROTH et Richard E. KORF, éditeurs : *Proc of the 12th National Conference on A.I.*, volume 1, pages 269–274, Seattle, WA, USA, 1994. AAAI Press / The MIT Press.
- [14] S. PETIT-RENAUD et T. DENÈUX : Handling Different Forms of Uncertainty in Regression Analysis : A Fuzzy Belief Structure Approach. pages 340–351. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [15] G. SHAFER : A mathematical theory of evidence. *Princeton University Press*, 1976.
- [16] P. SMETS : Belief functions : the disjunctive rule of combination and the generalized bayesian theorem. *Int J Approx Reason*, 9:1–35, 1993.
- [17] P. SMETS et R. KENNES : The transferable belief model. *Artif. Intell*, 66:191–243, 1994.
- [18] T. TEDJINI, S. AFIFI, F. PICHON et E. LEFEVRE : A belief-constrained programming model for the VRPTW with evidential service and travel times. *LFA 19*, pages 217–224, 2019.
- [19] B. TESSEM : Approximations for efficient computation in the theory of evidence. *Artif. Intell*, 61(2):315–329, june 1993.
- [20] F. VOORBRAAK : A computationally efficient approximation of Dempster-Shafer theory. *Int J Man Mach Stud*, 30(5):525–536, may 1989.
- [21] N. WILSON : A Monte Carlo algorithm for Dempster-Shafer belief. In B. D'AMBROSIO, P. SMETS et P. BONISSONE, éditeurs : *Proc. of the 7th Conference on Uncertainty in AI, UAI'91*, pages 414–417. Morgan Kaufmann, 1991.
- [22] R. ZWICK, E. CARLSTEIN et D. V. BUDESCU : Measures of similarity among fuzzy concepts : A comparative analysis. *Int J Approx Reason*, 1(2):221 – 242, 1987.