



**HAL**  
open science

# Un modèle de programmation par recours pour le VRPTW avec temps de service et de trajet évidentiels

Tekwa Tedjini, Sohaib Afifi, Frédéric Pichon, Eric Lefevre

## ► To cite this version:

Tekwa Tedjini, Sohaib Afifi, Frédéric Pichon, Eric Lefevre. Un modèle de programmation par recours pour le VRPTW avec temps de service et de trajet évidentiels. 30e Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA 2021, Oct 2021, Paris, France. pp.225-232. hal-03521737

**HAL Id: hal-03521737**

**<https://hal.science/hal-03521737>**

Submitted on 11 Jan 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un modèle de programmation par recours pour le VRPTW avec temps de service et de trajet évidentiels

## A recourse programming model for the VRPTW with evidential service and travel times

Tekwa Tedjini<sup>1</sup>

Sohaib Affi<sup>1</sup>

Frédéric Pichon<sup>1</sup>

Eric Lefèvre<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ. Artois, UR 3926, Laboratoire de Génie Informatique et d'Automatique de l'Artois (LGI2A)

F-62400 Béthune, France

tekwa.tedjini@ens.univ-artois.fr; { sohaib.affi, frederic.pichon, eric.lefevre }@univ-artois.fr

### Résumé :

Cet article traite le problème de tournées de véhicules avec fenêtres de temps où les durées de service et de trajet sont sujettes à des imperfections. Nous proposons d'utiliser la théorie des fonctions de croyance pour gérer ces imperfections car elle permet une meilleure modélisation des différentes facettes de l'incertitude, notamment l'incertitude probabiliste et l'imprécision. Une extension de la programmation stochastique par recours est utilisée pour modéliser le problème. Le modèle vise à récupérer la faisabilité des routes sur lesquelles un ou plusieurs clients n'ont pas pu être servis à temps à cause de la nature incertaine du problème. Un algorithme mémétique est développé pour résoudre une adaptation des instances de la littérature.

### Mots-clés :

Tournée de véhicule, fenêtre de temps, recours, fonction de croyance, algorithme mémétique.

### Abstract:

This paper addresses the vehicle routing problem with time windows where service and travel times are subject to information imperfections. We propose to handle those imperfections within the framework of belief function as it allows for a better representation of several facets of uncertainty including probabilistic uncertainty and imprecision. An extension of stochastic programming with recourse is used to tackle the problem. This approach aims to regain the feasibility of the routes on which one or more of the customers could not have been serviced on time due to the uncertain nature of the problem. A memetic algorithm is devised to solve an adaptation of literature instances.

### Keywords:

Vehicle routing, Time windows, Recourse, Belief function, Memetic algorithm.

## 1 Introduction

Le problème de tournées de véhicules avec fenêtres de temps (VRPTW) [7] est l'une des variantes les plus étudiées des problèmes de tournées de véhicules (VRP). Les routes du VRPTW sont soumises à des contraintes de

temps et de capacité. Le service des clients doit commencer dans leurs fenêtres de temps, les véhicules doivent retourner au dépôt avant sa fermeture et leur capacité ne doit pas être dépassée. L'objectif est d'optimiser les coûts de routage, c'est-à-dire le coût des véhicules utilisés ainsi que les distances totales parcourues. Le VRPTW est NP-Difficile. En effet, même la recherche d'une solution réalisable pour le problème est NP-complet au sens fort [13].

Très souvent, des facteurs externes tels que les conditions météorologiques ou les incidents inattendus affectent un ou plusieurs paramètres d'entrée tels que le service et les temps de trajet. Les routes planifiées doivent donc tenir compte des variations possibles de ces paramètres. La plupart des articles de recherche ont traité cette question en utilisant la théorie des probabilités et ce, à travers le modèle VRPTW stochastique [9, 16]. Ces modèles utilisent généralement la programmation par contraintes de chance (CCP) [9, 3], où les probabilités (chances) de manquer les fenêtres de temps sont au dessous d'un seuil de confiance, ou la programmation stochastique avec recours (SPR) [9, 18, 4]. Dans l'approche SPR, les routes sont d'abord planifiées, puis, lorsque les vrais temps de service et de trajet sont révélés, des corrections, dites recours, sont effectuées sur les routes sujettes à des violations des fenêtres de temps pour récupérer leur faisabilité. Par exemple, lorsqu'un véhicule arrive en retard chez un client, le service est abandonné et une nouvelle visite

sera reprogrammée pour le servir. Chaque action de recours induit un coût supplémentaire (pénalité) qui est ajoutée aux coûts de routage. Les deux approches CCP et SPR ont leurs avantages et leurs inconvénients, elles peuvent être combinées comme dans [5], ou appliquées séparément selon les besoins du décideur.

La théorie des ensembles a également été utilisée pour traiter l'incertitude des paramètres de temps à travers la programmation robuste donnant naissance au VRPTW robuste [1, 10]. Ce modèle suppose que les paramètres incertains appartiennent à un ensemble prédéfini, c'est-à-dire que les paramètres sont connus de manière imprécise, et fournit des solutions immunisées contre l'imprécision. Cela se fait généralement en optimisant les coûts de routage en considérant des scénarios extrêmes pour le service et les temps de trajet. Néanmoins, l'approche robuste est souvent critiquée à cause de la qualité de ses solutions qui ont tendance à être trop conservatives [19].

Récemment, des cadres plus généraux de raisonnement sous incertitude ont rejoint le mouvement de la gestion d'incertitudes dans les VRP pour servir d'outils complémentaires aux approches ensembliste/probabiliste existantes, entre autres la théorie des fonctions de croyance [14]. Au-delà de l'imprécision ou de l'incertitude (probabiliste), cette théorie permet de représenter les paramètres affectés par des formes plus subtiles d'imperfection des informations. Dans le contexte des VRP, la théorie des fonctions de croyance a été utilisée, pour la première fois, pour modéliser l'incertitude sur les demandes des clients dans le VRP avec capacité [6]. Des extensions des approches CCP et SPR ont été proposées, donnant lieu aux approches Belief-Constrained Programming (BCP) et Belief Programming with Recourse (BPR). Dans cet article, nous continuons sur cette ligne de travail en étudiant le VRPTW avec temps incertains représentés dans le cadre des fonctions de croyance. Un modèle BCP a déjà été proposé dans [17]. Nous proposons ici une modélisation BPR où les fenêtres de

temps sont dures, c'est-à-dire qu'aucun service précoce ou tardif n'est autorisé. La stratégie de recours consiste à replanifier des visites exclusives pour servir les clients qui n'ont pas pu être servi à temps. Ce problème est très difficile d'un point de vue computationnel, à notre connaissance, même dans le cas stochastique, peu d'articles ont traité la version SPR du VRPTW avec des temps de service et/ou de trajet stochastiques et des fenêtres de temps dures [18, 4, 5]. La plupart des travaux se sont concentrés sur des fenêtres de temps souples en raison de la difficulté du problème. Notons également que notre problème se distingue de celui dans [6] par l'ajout des fenêtres de temps. De plus, l'incertitude sur les temps de service et de trajet fait que ces fenêtres ne sont pas toujours respectées et qu'il faut, le cas échéant, établir la bonne stratégie afin de récupérer la faisabilité des routes. Ainsi le recours est totalement différent de celui utilisé dans [6]. Finalement, nous mettons en place un algorithme mémétique [11] pour résoudre des instances de la littérature que nous avons adaptées au cadre évidentiel.

L'article est organisé comme suit. La Section 2 définit le VRPTW et rappelle les principes de base des fonctions de croyance. Dans la Section 3, nous décrivons l'approche de recours proposée. La Section 4 est consacrée aux résultats expérimentaux. La Section 5 conclut l'article.

## 2 Définitions et notations

Cette section présente le VRPTW ainsi que quelques notions de la théorie des fonctions de croyance utilisées dans ce papier.

### 2.1 Formulation du VRPTW

Soit une flotte de  $K$  véhicules de même coût  $M$  ( $M$  étant une grande valeur) et de même capacité  $Q > 0$ , le VRPTW est modélisé par un graphe  $G = (V, E)$  où  $V = \{0, 1, \dots, n\}$  est l'ensemble des nœuds et  $E = \{(i, j) : i \neq j, i, j \in V\}$  est l'ensemble d'arcs. 0 est le dépôt

et  $V_c = \{1, \dots, n\}$  est l'ensemble des clients. Chaque nœud  $i$  a une demande  $q_i \leq Q$ , une durée de service  $s_i$  et un intervalle (fenêtre) de temps  $[e_i, l_i]$  dans lequel son service peut commencer.  $q_0 = s_0 = 0$  et  $[e_0, l_0] = [0, l_0]$  est l'horizon de temps du dépôt. Nous considérons le cas de fenêtres de temps dures, i.e., si un véhicule  $k$  arrive au nœud  $j$  avant  $e_j$ , il doit attendre jusqu'à  $e_j$  pour effectuer son service et toute arrivée après  $l_j$  est interdite. Chaque arc  $(i, j) \in E$  est caractérisé par une distance  $d_{ij}$  et un temps de trajet  $t_{ij}$  vérifiant les inégalités triangulaires. Une solution du VRPTW est composée de plusieurs routes, chacune d'entre elles vérifiant les contraintes suivantes : 1) Chaque client est servi une fois ; 2) Quand un véhicule  $k$  sert un client  $i$ , il le quitte et se dirige directement vers le prochain sur la route, le véhicule revient au dépôt une fois que tous les clients de la route ont été servis ; 3) La demande totale des clients d'une route ne doit pas excéder  $Q$  ; 4) Le service de chaque client doit commencer à l'intérieur de la fenêtre de temps et tous les véhicules doivent retourner au dépôt avant  $l_0$ . Une description formelle de ces contraintes se trouve dans [17]. L'objectif (1) minimise le coût total des routes :

$$\min \left[ M \cdot \sum_{k \in K} \sum_{j \in V_c} x_{0jk} + \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} d_{ij} x_{ijk} \right] \quad (1)$$

où  $x_{ijk}$  est la variable de décision. Elle vaut 1 si le véhicule  $k$  traverse l'arc  $(i, j)$  et 0 sinon. L'objectif (1) est hiérarchique : le coût des véhicules est d'abord minimisé étant donné que  $M$  est une grande valeur, puis le total des distances parcourues. Cela signifie qu'une solution avec moins de véhicules et une grande distance est toujours privilégiée à une autre avec plus de véhicules et une plus petite distance.

## 2.2 Rappel sur les fonctions de croyance

Soit une variable  $x$  définie sur un ensemble  $\mathcal{X}$ . La connaissance au sujet de  $x$  peut être représentée par une fonction de masse  $m^{\mathcal{X}} : 2^{\mathcal{X}} \mapsto [0, 1]$  t.q.  $\sum_{A \subseteq \mathcal{X}} m^{\mathcal{X}}(A) = 1$  qui représente la part de croyance allouée à  $x \in A$ .

Toute partie  $A \subseteq \mathcal{X}$  t.q.  $m^{\mathcal{X}}(A) > 0$  est un élément focal de  $m^{\mathcal{X}}$ .  $m^{\mathcal{X}}$  est dite *Bayésienne* si tous ses éléments focaux sont des singletons, dans ce cas, elle est équivalente à une distribution de probabilité.  $m^{\mathcal{X}}$  est *catégorique* si elle n'a qu'un seul élément focal, i.e., elle est équivalente à un ensemble. La valeur espérée d'une fonction  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  par respect à une fonction de masse  $m^{\mathcal{X}}$  peut être calculée en étendant la notion de l'espérance classique en théorie des probabilités aux notions d'*espérance inférieure* ( $\underline{E}(f, m^{\mathcal{X}})$ ) et *supérieure* ( $\overline{E}(f, m^{\mathcal{X}})$ ) qui se calculent comme suit [2] :

$$\underline{E}(f, m^{\mathcal{X}}) = \sum_{A \subseteq \mathcal{X}} m^{\mathcal{X}}(A) \min_{x \in A} f(x), \quad (2)$$

$$\overline{E}(f, m^{\mathcal{X}}) = \sum_{A \subseteq \mathcal{X}} m^{\mathcal{X}}(A) \max_{x \in A} f(x). \quad (3)$$

Dans la suite de ce papier, toute variable  $x$  représentée par une fonction de masse sera appelée *variable évidentielle*.

## 3 Une approche de recours pour le VRPTW avec temps évidentiels

Nous présentons, dans cette section, une approche de modélisation par recours pour le VRPTW avec temps de service et de trajet évidentiels. Ce modèle est inspiré de [6] et adapté pour prendre en compte l'incertitude sur les temps de service et de trajet ainsi que les contraintes de fenêtres de temps.

### 3.1 Formalisation

Considérons une solution du VRPTW où les contraintes de fenêtres de temps sont relâchées. Soit  $R = \{1, \dots, i, \dots, n, n+1 = 0\}$  une route de cette solution. Supposons, sans perte de généralité, que le  $i^{\text{ème}}$  nœud de  $R$  corresponde au client  $i$  du problème. Pour que  $R$  soit faisable, il est nécessaire de vérifier les conditions sur les fenêtres de temps pour chacun de ses nœuds : si le véhicule opérant sur  $R$  arrive au nœud  $i$  (client ou dépôt) avant  $l_i$  alors

ces conditions sont vérifiées pour  $i$ . Dans le cas contraire, un échec se produit car  $i$  ne peut être servi, une correction (recours) est alors requise : le véhicule passe le nœud  $i$  et se dirige vers le nœud  $i + 1$  son successeur immédiat. La visite du nœud  $i$  sera reprogrammée et s'effectuera par un véhicule exclusif. Le choix d'une telle politique de recours se justifie par l'impossibilité de prédire les échecs étant donné que les temps ne sont révélés que lorsque les véhicules arrivent à leurs destinations. Plus formellement, la situation d'échec au niveau du nœud  $i$  est décrite par une variable binaire  $f_i$  qui vaut 1 si le véhicule arrive plus tard que  $l_i$  et 0 sinon. Le temps d'arrivée à  $i$ , noté par  $a_i$ , est calculé récursivement en cumulant les temps de service et de trajet sur  $R$  jusqu'au nœud  $i$  :

$$a_i = \begin{cases} v_{i-1} + t_{i-1i} & \text{si } i = 2, \dots, n+1, \\ t_{01} & \text{si } i = 1, \end{cases} \quad (4)$$

où  $v_i$  est le temps de départ du nœud  $i$  donné par :

$$v_i = \begin{cases} \max\{e_i, a_i\} + s_i & \text{si } a_i \leq l_i, \\ a_i & \text{si } a_i > l_i. \end{cases} \quad (5)$$

Les échecs pouvant se produire sur  $R$  sont représentés par un vecteur  $f = (f_1, \dots, f_{n+1}) \in \mathcal{F} = \{0, 1\}^{n+1}$  en présence d'information déterministe sur les temps de service et de trajet. Ce vecteur est obtenu par la fonction  $g : \mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1} \mapsto \mathcal{F}$ ,  $(t_{01}, s_1, \dots, s_n, t_{nn+1}) \mapsto f = (f_1, \dots, f_{n+1})$ . Chaque action de recours entraîne une pénalité qui doit être incorporée au coût initial de  $R$ . Soit  $f = (f_1, \dots, f_{n+1}) \in \mathcal{F}$  un vecteur de recours sur  $R$  et soit  $p$  une fonction définie de  $\mathcal{F}$  à  $\mathbb{R}^+$  représentant la pénalité induite par  $f$ . Cette pénalité est composée du coût de l'utilisation d'un véhicule supplémentaire pour servir le nœud  $i$  sujet à un échec ( $f_i = 1$ ) plus la distance d'un aller-retour de  $i$  au dépôt :

$$p(f) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \times (M + 2d_{0i}). \quad (6)$$

Le coût  $\bar{C}(R)$  d'une route  $R$  en présence du vecteur de recours  $f$  est composé du coût initial  $C(R)$  plus la pénalité  $p(f)$  induite par  $f$  :

$$\begin{aligned} \bar{C}(R) &= C(R) + p(f) \\ &= M + \sum_{(i,j) \in E(R)} d_{ij} + \sum_{i=1}^{n+1} f_i \times (M + 2d_{0i}). \end{aligned} \quad (7)$$

Plus généralement, quand les temps de service et de trajet sont évidentiels, la situation d'échec n'est plus déterministe mais évidentielle et elle peut être représentée par une fonction de masse  $m^{\mathcal{F}}$  décrite dans la section 3.2. Dans ce cas, la pénalité  $p(f)$  dans (7) sera remplacée par l'espérance inférieure ou supérieure de  $p$  par respect à  $m^{\mathcal{F}}$  (cf. Section 2.2). Dans cet article, nous optons pour l'espérance supérieure (3), qu'on notera par  $\bar{E}(p, m^{\mathcal{F}})$ , comme attitude prudente vis à vis des éventuels échecs qui pourraient se produire le long de  $R$  :

$$\bar{E}(p, m^{\mathcal{F}}) = \sum_{F \subseteq \mathcal{F}} m^{\mathcal{F}}(F) \times \max_{f \in F} p(f). \quad (8)$$

L'équation (7) est alors remplacée par :

$$\bar{C}(R) = M + \sum_{(i,j) \in E(R)} d_{ij} + \bar{E}(p, m^{\mathcal{F}}). \quad (9)$$

### 3.2 Recours évidentiels

Dans cette section, nous montrons qu'une connaissance épistémique sur les temps de service et de trajet entraîne une situation d'échec évidentielle qui peut être représentée par une fonction de masse et qui, sous certaines hypothèses, peut être calculée avec efficacité. Reprenons la route  $R$  définie dans la Section 3.1 et supposons que le temps de service  $s_i$  et le temps de trajet  $t_{ij}$  sont évidentiels et représentés, respectivement, par les fonctions de masse  $m_{s_i}^{\mathcal{S}_i}$  et  $m_{t_{ij}}^{\mathcal{T}_{ij}}$  définies sur les ensembles  $\mathcal{S}_i$  et  $\mathcal{T}_{ij}$ , t.q.  $|\mathcal{S}_i| \leq \mathcal{S} \in \mathbb{N}_+^*$  et  $|\mathcal{T}_{ij}| \leq \mathcal{T} \in \mathbb{N}_+^*$ . Soit la fonction de masse jointe  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}}$  des temps de service et de trajet sur  $R$ . Quand  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}}$  a un seul élément focal

$T \subseteq \mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}$  t.q.  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}}(T) = 1$ , la situation de recours est imprécise et tous ce qu'on peut dire est que le vrai vecteur de recours  $f$  appartient au sous-ensemble de recours  $F \subseteq \mathcal{F}$  décrit comme suit (avec  $g$  définie telle que dans Section 3.1) :

$$F = g(T) = \bigcup_{(t_{01}, s_1, \dots, s_n, t_{nn+1}) \in T} g(t_{01}, s_1, \dots, s_n, t_{nn+1}). \quad (10)$$

En général, quand  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}}$  a au plus  $c \in \mathbb{N}_+^*$  éléments focaux, la situation de recours est évidentielle et peut être décrite par la fonction de masse  $m^{\mathcal{F}}$  donnée par :  $\forall F \in \mathcal{F}$

$$m^{\mathcal{F}}(F) = \sum_{g(T)=F} m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}}(T). \quad (11)$$

Le calcul de  $m^{\mathcal{F}}$  définie dans (11), nécessite l'évaluation de  $g(T)$  pour chaque élément focal  $T \subseteq \mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}$  de la fonction de masse  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}}$ .  $T$  peut avoir jusqu'à  $\mathcal{S}^n \times \mathcal{T}^{n+1}$  éléments, ce qui rend l'évaluation de (11) en temps raisonnable impossible ( $\mathcal{O}([\mathcal{S}^n \times \mathcal{T}^{n+1}] \times c)$ ). Cependant, en se basant sur une procédure similaire à celle proposée dans [6, Section 3.2.3], détaillée dans le paragraphe suivant, si les temps de trajet et de service sont des intervalles (i.e.,  $s_i \in [\underline{\sigma}_i] = [\underline{\sigma}_i, \bar{\sigma}_i] \subseteq \mathcal{S}_i$  et  $t_{ij} \in [\underline{\theta}_{ij}] = [\underline{\theta}_{ij}, \bar{\theta}_{ij}] \subseteq \mathcal{T}_{ij}$ ) et  $T = [\underline{\theta}_{01}] \times [\underline{\sigma}_1] \times \dots \times [\underline{\sigma}_n] \times [\underline{\theta}_{nn+1}]$  est le produit Cartésien des temps de service et de trajet le long de  $R$ , alors la complexité de l'évaluation de  $g(T)$  redevient  $\mathcal{O}(2^{2n+1} \times c)$ .

Soit  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nn+1}}$  une fonction de masse catégorique dont l'unique élément focal est  $T = [\underline{\theta}_{01}] \times [\underline{\sigma}_1] \times \dots \times [\underline{\sigma}_n] \times [\underline{\theta}_{nn+1}]$ . Notons que les temps d'arrivée (resp. de départ) sont également imprécis :  $a_i \in [\underline{\alpha}_i] = [\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i]$  (resp.  $v_i \in [\underline{v}_i] = [\underline{v}_i, \bar{v}_i]$ ) où les bornes  $\underline{\alpha}_i$  et  $\bar{\alpha}_i$  (resp.  $\underline{v}_i$  et  $\bar{v}_i$ ) sont obtenues par le raisonnement décrit ci-dessous. Rappelons que dans ce cas, la situation de recours est imprécise et décrite par le sous-ensemble  $F \subseteq \mathcal{F}$  donné dans (10). Dans ce qui suit, nous allons adapter la procédure d'évaluation proposée dans [6, Section 3.2.3] à notre problème pour calculer  $F$  de

manière efficace.

Supposons que le véhicule desservant  $R$  traverse l'arc  $(i-1, i)$ . Le temps d'arrivée  $a_i$  au nœud  $i$  induit les possibilités suivantes :

1. Si  $\bar{\alpha}_i \leq l_i$  : aucun recours n'est requis pour  $i$ , donc  $f_i = 0$  et  $v_i \in [\max\{e_i, \underline{\alpha}_i\} + \underline{\sigma}_i, \max\{e_i, \bar{\alpha}_i\} + \bar{\sigma}_i]$ .
2. Si  $\underline{\alpha}_i > l_i$  :  $i$  ne peut être servi, donc un recours est requis, i.e.,  $f_i = 1$  et  $v_i \in [\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i]$ .
3. Si  $\underline{\alpha}_i \leq l_i < \bar{\alpha}_i$  : la situation de recours au niveau de  $i$  est imprécise :
  - (a) Si la vraie valeur du temps d'arrivée appartient à  $[\underline{\alpha}_i, l_i]$ , aucun recours n'est requis pour  $i$ , i.e.,  $f_i = 0$  et  $v_i \in [\max\{e_i, \underline{\alpha}_i\} + \underline{\sigma}_i, l_i + \bar{\sigma}_i]$ .
  - (b) Si la vraie valeur du temps d'arrivée appartient à  $]l_i, \bar{\alpha}_i]$ , le service de  $i$  est passé et une action de recours est requise, i.e.,  $f_i = 1$  et  $v_i \in ]l_i, \bar{\alpha}_i]$ .

En répétant ce raisonnement pour tous les nœuds de  $R$ , à partir du premier client jusqu'au dépôt, on obtient toutes les situations de recours possibles par respect à l'ensemble  $T$ . Cette procédure est détaillée dans Algorithme 1 et son exécution induit un arbre de  $n+1$  niveaux. Chaque niveau  $i$  représente une situation de recours que peut rencontrer le véhicule en arrivant à  $i$ . Chaque sommet d'un niveau  $i$  contient une information sur la variable  $f_i$  ainsi que sur les intervalles de temps d'arrivée et de départ. L'évaluation est étendue d'un niveau à un autre et s'arrête une fois que le dépôt est atteint ( $i = n+1$ ). Nous supposons qu'il n'y a pas de raison particulière pour qu'un véhicule arrive en retard au premier client donc  $f_1 = 0$ , cette hypothèse permet de garantir la faisabilité des routes contenant un seul client. Considérons une branche de l'arbre induit par Algorithme 1. La concaténation des variables  $f_i$  de la racine jusqu'au niveau  $n+1$  induit le vecteur de recours  $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$  décrivant une possibilité de recours sur  $R$ . En utilisant une preuve similaire à celle de [6, Proposition 6], on peut démontrer que l'ensemble  $F$  vérifie

$F = g(\llbracket \theta_{01} \rrbracket \times \llbracket \sigma_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket \sigma_n \rrbracket \times \llbracket \theta_{nm+1} \rrbracket)$ .  
Notons que dans le cas où  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n \times \mathcal{T}_{nm+1}}$  a de multiple éléments focaux, le raisonnement précédent est appliqué à chacun d'entre eux.

---

**Algorithme 1** Procédure d'Évaluation (PE)

---

**Entrée:** Nœud  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ , temps de service  $[\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i]$ , temps de trajet  $[\underline{\theta}_{ij}, \bar{\theta}_{ij}]$ .  
**Sortie:** Un arbre décrivant tous les recours sur  $R$ .

- 1:  $i = 1$ ;
- 2:  $[\underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1] = [\underline{\theta}_{01}, \bar{\theta}_{01}]$ ;
- 3:  $f_1 = 0$ ;
- 4:  $[\underline{v}_1, \bar{v}_1] = [\max\{e_1, \underline{\alpha}_1\} + \underline{\alpha}_1, \max\{e_1, \bar{\alpha}_1\} + \bar{\alpha}_1]$ ;
- 5: Créer la racine de l'arbre  $T$  ( $[\underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1], [\underline{v}_1, \bar{v}_1], f_1$ );  $i++$ ;
- 6: tant que ( $i > 1$  et  $i \leq n+1$ ) faire
- 7:  $[\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i] = [\underline{v}_{i-1} + \underline{\theta}_{i-1i}, \bar{v}_{i-1} + \bar{\theta}_{i-1i}]$ ;
- 8: si  $\bar{\alpha}_i \leq l_i$  alors
- 9:  $f_i^{\text{gauche}} = 0$ ;
- 10:  $[\underline{v}_i^{\text{gauche}}, \bar{v}_i^{\text{gauche}}] = [\max\{e_i, \underline{\alpha}_i\} + \underline{\alpha}_i, \max\{e_i, \bar{\alpha}_i\} + \bar{\alpha}_i]$ ;
- 11:  $\mathcal{T}^{\text{gauche}} = PE([\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i], [\underline{v}_i^{\text{gauche}}, \bar{v}_i^{\text{gauche}}], f_i^{\text{gauche}}, i++)$ ;
- 12: Attacher  $\mathcal{T}^{\text{gauche}}$  comme branche de gauche de  $T$ ;
- 13: sinon si  $\underline{\alpha}_i > l_i$  alors
- 14:  $f_i^{\text{droite}} = 1$ ;
- 15:  $[\underline{v}_i^{\text{droite}}, \bar{v}_i^{\text{droite}}] = [\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i]$ ;
- 16:  $\mathcal{T}^{\text{droite}} = PE([\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i], [\underline{v}_i^{\text{droite}}, \bar{v}_i^{\text{droite}}], f_i^{\text{droite}}, i++)$ ;
- 17: Attacher  $\mathcal{T}^{\text{droite}}$  comme branche de droite de  $T$ ;
- 18: sinon
- 19:  $[\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i] = [\underline{v}_{i-1} + \underline{\theta}_{i-1i}, l_i]$ ;
- 20:  $f_i^{\text{gauche}} = 0$ ;
- 21:  $[\underline{v}_i^{\text{gauche}}, \bar{v}_i^{\text{gauche}}] = [\max\{e_i, \underline{\alpha}_i\} + \underline{\alpha}_i, l_i + \bar{\alpha}_i]$ ;
- 22:  $\mathcal{T}^{\text{gauche}} = PE([\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i], [\underline{v}_i^{\text{gauche}}, \bar{v}_i^{\text{gauche}}], f_i^{\text{gauche}}, i++)$ ;
- 23: Attacher  $\mathcal{T}^{\text{gauche}}$  comme branche de gauche de  $T$ ;
- 24:  $[\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i] = [l_i, \bar{v}_{i-1} + \bar{\theta}_{i-1i}]$ ;
- 25:  $f_i^{\text{droite}} = 1$ ;
- 26:  $[\underline{v}_i^{\text{droite}}, \bar{v}_i^{\text{droite}}] = [l_i, \bar{\alpha}_i]$ ;
- 27:  $\mathcal{T}^{\text{droite}} = PE([\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i], [\underline{v}_i^{\text{droite}}, \bar{v}_i^{\text{droite}}], f_i^{\text{droite}}, i++)$ ;
- 28: Attacher  $\mathcal{T}^{\text{droite}}$  comme branche de droite de  $T$ ;
- 29: fin si
- 30: fin tant que

---

**Exemple 1** Illustrons l'Algorithme 1 sur une route  $R = \{1, 2, 3, 0\}$ , où les fenêtres de temps sont  $[e_0, l_0] = [0, 200]$ ,  $[e_1, l_1] = [5, 30]$ ,  $[e_2, l_2] = [40, 95]$ ,  $[e_3, l_3] = [80, 120]$ . Les temps de service et de trajet sont représentés par la fonction de masse  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{T}_{12} \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{T}_{23} \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{T}_{30}}(T) = 1$ , t.q.  $T = [15, 20] \times [20, 25] \times [40, 50] \times [30, 35] \times [10, 20] \times [15, 20] \times [10, 15]$ .  $\mathcal{F} = \{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$  ( $\mathcal{F}$  est l'ensemble de tous les recours possibles sur  $R$ , t.q.  $f_1 = 0$ ). L'élément focal  $T$  induit l'arbre de la Figure 1. Cet arbre a deux branches représentant deux situations de recours sur  $R$ . La concaténation des variables  $f_i$  de la racine jusqu'aux feuilles en commençant par la branche de gauche induit l'ensemble

$F^* = \{(f_1, f_2, f_3^1, f_0^1), (f_1, f_2, f_3^2, f_0^2)\} = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ . Plus formellement, en utilisant (11) avec  $g$  la fonction donnée dans la Section 3.1 et  $m^{\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{T}_{12} \times \mathcal{S}_2 \times \mathcal{T}_{23} \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{T}_{30}}(T) = 1$ , on obtient la fonction de masse  $m^{\mathcal{F}}$  définie par :

$$\begin{aligned} m^{\mathcal{F}}(F^*) &= m^{\mathcal{F}}(\{(f_1, f_2, f_3^1, f_0^1), (f_1, f_2, f_3^2, f_0^2)\}) \\ &= m^{\mathcal{F}}(\{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}) = 1. \end{aligned}$$

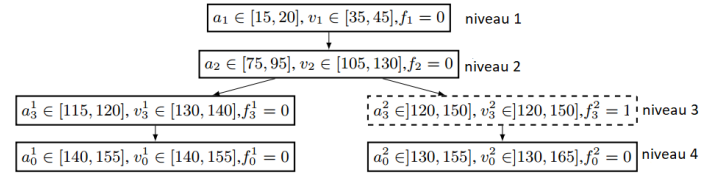


Figure 1 – L'arbre de recours par respect à  $T$ .

## 4 Résultats numériques

Nous proposons d'utiliser un algorithme mémétique (MA) [11] pour résoudre le modèle de recours présenté dans la Section 3. Ce choix est motivé par l'efficacité du MA à résoudre plusieurs variantes du VRP, en particulier le VRPTW [12, 8, 5]. Notons qu'une variante de cet algorithme a déjà été utilisée dans [17] pour la résolution du VRPTW avec temps évidentiels sous l'approche BCP. Le MA opère sur une population initiale d'individus (solutions) qui évolue en subissant une série de modifications à l'aide d'opérateurs de croisement et de mutation, pour créer une nouvelle population. Celle-ci est ensuite améliorée en explorant le voisinage de ses individus à l'aide des procédures de recherche locale (LS), ce qui permet d'échapper aux optima locaux et de fournir des solutions de bonne qualité. Nous invitons le lecteur à consulter [12, 8, 5] pour de plus amples informations sur les outils de sélection, de croisement et de mutation. Le pseudo-code du MA est donné dans [17]. Nous avons adapté des instances de la littérature [15] pour prendre en compte la nature évidentielle des temps de service et de trajet. Ces instances sont composées de six catégories :  $C1, R1, RC1, C2, R2$  et  $RC2$ .

Les catégories de type 1 ont des fenêtres de temps étroites alors que les catégories de type 2 ont des fenêtres de temps plus larges. D'autres classifications peuvent être établies en fonction de la position des clients (cf. [15]). Nous avons conservé les mêmes données que dans les instances originales, à l'exception des temps de service et de trajet qui sont adaptés au cadre évidentiel comme dans [17]. Nous avons fixé le coût des véhicules  $M$  à 1000 comme dans [5]. Cette grande valeur permet d'optimiser le nombre de véhicules en premier lieu, suivi de la distance totale et des pénalités. Le MA effectue 15 tests pour chacune des instances du problème et s'arrête après  $n^2$  itérations sans amélioration,  $n$  étant le nombre de clients par instance. La taille de la population est fixée à  $n$ . La procédure LS s'exécute pendant  $n$  itérations avec une probabilité de 0.2 tandis que la probabilité de mutation est fixée à 0.01. Les détails explicites concernant l'algorithme d'initialisation, la procédure LS ainsi que le réglage des paramètres ne sont pas fournis ici en raison de l'espace limité. Les coûts moyens par catégorie pour les instances de 50 et 100 clients sont présentés dans le Tableau 1. Nous avons enregistré pour chaque catégorie, le nombre moyen de véhicules utilisés  $\#\bar{V}$ , la distance moyenne parcourue  $\overline{Dist}$ , la moyenne des pénalités  $\overline{Pen}$  ainsi que le temps d'exécution moyen  $CPU(s)$  en secondes. Les résultats obtenus montrent que les coûts des solutions sont tout à fait acceptables compte tenu du temps d'exécution. Nous remarquons que les instances de type 1 ont des coûts plus élevés, que ce soit en termes de  $\#\bar{V}$ ,  $\overline{Dist}$  ou  $\overline{Pen}$ , que celles de type 2 (nous le remarquons clairement dans les classes  $R1$  et  $RC1$ ). Cette augmentation se justifie par le fait que ces instances ont des fenêtres de temps plus serrées, donc les solutions nécessitent plus de véhicules et elles sont également sujettes à de nombreux échecs. Nous pouvons également noter que le temps  $CPU$  est plus élevé dans les instances de type 2, et plus particulièrement, lorsque le nombre de clients est grand. Ceci est dû au fait que cette classe a des fenêtres de temps plus

**Tableau 1** – Résultats moyens pour 100 clients selon les différentes catégories

Catégorie	Résultats pour 50 – 100 clients			
	$\#\bar{V}$	$\overline{Dist}$	$\overline{Pen}$	$CPU(s)$
C1-50	6.16	490.16	9.49	6.11
C1-100	12.04	1128.81	5.06	134.10
C2-50	2.78	436.78	1.79	16.99
C2-100	4.67	759.42	0.00	326.26
R1-50	11.88	1164.98	751.71	15.13
R1-100	22.31	2054.62	1578.82	252.28
R2-50	3.24	784.21	66.96	78.88
R2-100	5.80	1246.85	165.32	2000.22
RC1-50	10.41	1080.51	601.26	13.21
RC1-100	21.55	2216.88	1063.47	233.30
RC2-50	3.70	770.51	91.90	112.40
RC2-100	6.58	1449.87	188.59	1431.39

grandes, par conséquent, l'espace de recherche est plus grand et nécessite une exploration plus profonde que celui des instances de type 1.

## 5 Conclusions

Nous avons proposé une approche de recours pour le VRPTW avec des temps de service et de trajet évidentiels. Le modèle est inspiré de [6] et adapté pour prendre en compte l'incertitude sur les temps de service et de trajet ainsi que les contraintes supplémentaires sur les fenêtres de temps. Une stratégie de recours basée sur la replanification des clients non servis est utilisée pour récupérer la faisabilité des routes. Notre modèle permet, au-delà de l'imprécision ou l'incertitude probabiliste, de modéliser des informations plus complexes qui sont affectées par d'autres formes d'imperfections. Nous avons utilisé un algorithme mémétique pour résoudre une adaptation des instances de la littérature. Combiner à la fois la programmation sous contrainte de croyance et les approches de recours dans un seul modèle comme dans [5] est une perspective intéressante.

## Références

- [1] A. AGRA, M. CHRISTIANSEN, R. FIGUEIREDO, K.-L. HVATTUM, M. POSS et C. REQUEJO : The robust vehicle routing problem with time windows. *Comput*



- Oper Res*, 40:856–866, 2013.
- [2] T. DENOEUX : Analysis of evidence-theoretic decision rules for pattern classification. *Pattern Recognition*, 30(7):1095–1107, 1997.
- [3] F. ERRICO, G. DESAULNIERS, M. GENDREAU, W. REI et L. M. ROUSSEAU : The vehicle routing problem with hard time windows and stochastic service times. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 7(3):223–251, 2018.
- [4] F. ERRICO, G. DESAULNIERS, M. GENDREAU, W. REI et L.M. ROUSSEAU : A priori optimization with recourse for the vehicle routing problem with hard time windows and stochastic service times. *Eur. J. Oper. Res*, 249(1):55–66, 2016.
- [5] A. GUTIERREZ, L. DIEULLE, N. LABADIE et N. VELASCO : A multi-population algorithm to solve the VRP with stochastic service and travel times. *Computers and Industrial Engineering*, 125:144–156, 2018.
- [6] N. HELAL, F. PICHON, D. PORUMBEL, D. MERCIER et E. LEFEVRE : The capacitated vehicle routing problem with evidential demands. *Int J Approx Reason*, 95:124–151, 2018.
- [7] B. KALLEHAUGE : Formulations and exact algorithms for the vehicle routing problem with time windows. *Comput Oper Res*, 35(7):2307–2330, 2008.
- [8] N. LABADI, C. PRINS et M. REGHIOUI : A memetic algorithm for the vehicle routing problem with time windows. *Rairo operations Research*, 42:415–431, 2008.
- [9] X. LI, P. TIAN et S. C.H. LEUNG : Vehicle routing problems with time windows and stochastic travel and service times : Models and algorithm. *International Journal of Production Economics*, 125(1):137–145, 2010.
- [10] D. LU et F. GZARA : The robust vehicle routing problem with time windows : Solution by branch and price and cut. *Eur. J. Oper. Res*, 275(3):925–938, 2019.
- [11] P. MOSCATO et C. COTTA : A gentle introduction to memetic algorithms. In F. GLOVER et G.A. KOCHENBERGER, éditeurs : *Handbook of Metaheuristics*, volume 57 de *ISOR*, pages 105–144. Springer, Boston, MA, 2003.
- [12] C. PRINS : A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem. *Comput Oper Res*, 31(12):1985–2002, 2004.
- [13] M.W.P. SAVELSBERGH : Local search in routing problems with time windows. *Annals of Operations Research*, 4(1):295–305, 1985.
- [14] G. SHAFER : A mathematical theory of evidence. *Princeton University Press*, 1976.
- [15] M.M. SOLOMON : Algorithms for the vehicle routing and scheduling problem with time window constraints. *Operations Research*, 35(2):254–265, 1987.
- [16] D. TAŞ, N. DELLAERT, T. VAN WOENSEL et T. DE KOK : Vehicle routing problem with stochastic travel times including soft time windows and service costs. *Comput Oper Res*, 40(1):214–224, 2013.
- [17] T. TEDJINI, S. AFIFI, F. PICHON et E. LEFEVRE : A belief-constrained programming model for the VRPTW with evidential service and travel times. In *Proc. of 28es rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications*, pages 217–224, Alès, France, 2019.
- [18] X. WANG et A. C. REGAN : Assignment models for local truckload trucking problems with stochastic service times and time window constraints. *Transportation Research Record*, 1771(1):61–68, 2001.
- [19] W. WIESEMANN, D. KUHN et M. SIM : Distributionally robust convex optimization. *Operations Research*, 62(6):1358–1376, 2014.