HAL open science

Modelos matemáticos que permiten describir el proceso de difusión de un rumor

Raúl Isea

▶ To cite this version:

Raúl Isea. Modelos matemáticos que permiten describir el proceso de difusión de un rumor. Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC), 2017, pp.17-29. hal-03521036

HAL Id: hal-03521036

https://hal.science/hal-03521036v1

Submitted on 11 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Centro Nacional de Desarrollo e Investigación en Tecnologías Libres (CENDITEL)
Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC), Mérida – Venezuela
ISSN: 2244-7423

Modelos matemáticos que permiten describir el proceso de difusión de un rumor

Raúl Isea
Fundación Instituto de Estudios Avanzados
Hoyo de la Puerta, Baruta. Venezuela.
raul.isea@gmail.com

Fecha de recepción: 14/06/2017
Fecha de aceptación: 19/09/2017
Pág: 17– 29

Resumen

Se analizan tres nuevos modelos matemáticos que permitirán estudiar el proceso de difusión de un rumor a partir del propuesto por Daley y Kendall, y el de Bettencourt y colaboradores. Del modelo de Daley y Kendall se derivaron dos nuevas variantes donde un rumor se difunde entre tres grupos de personas diferentes, y otro que considera que existe un conjunto de personas que lo desmienten. Posteriormente, se examina el modelo de Bettencourt y colaboradores, y se propone una variante donde el rumor se propaga en dos escenarios distintos.

Palabras Clave: Rumor; Daley y Kendall; Autovalores; SEIZ; Bettencourt

Introducción

Hoy en día, la información es dinámica gracias a los avances en las tecnologías de la información. Un claro ejemplo es el Twitter que, como es de conocimiento de todos, comenzó hace una década, y debido a su empleo masivo, el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE) incluyó las siguientes entradas en su edición número 23 en octubre de 2014: tuit, (re)tuit, tuitero(a). De hecho, en esa edición se define tuit como "Mensaje digital que se envía a través de la red social Twitter y que no puede rebasar un número limitado de caracteres".

En vista de que Twitter no restringe ni modera el tipo de contenido que se difunde por esa vía, se comporta más como un canal de información porque añade como ventaja la de poder incluir enlaces a páginas de Internet, fotos y videos.

Si bien es cierto que una red social es aquella que permite el intercambio de datos entre usuarios que hayan decidido establecer una conversación entre sí, Twitter posibilita difundir datos entre personas que aceptan una solicitud de seguimiento de información o no. Por ejemplo, Biz Stone (uno de los cofundadores de la plataforma cuya cuenta de Twitter es @biz) recibe información de tan solo 719 cuentas, pero hasta mayo de 2017 habían leído sus mensajes casi tres millones de usuarios.

La veracidad de la información que se difunde por Twitter, así como por otras redes sociales, solamente se puede validar a través de las cadenas de noticias o "fuentes autorizadas de información" que permiten confirmar o desmentir los contenidos que se propagan a través de esas plataformas tecnológicas.

Con base en lo anterior, resulta necesario desarrollar mecanismos para comprender cómo cuantificar la propagación de rumores gracias a los avances en las tecnologías de la información, para que eventualmente se establezcan criterios que permitan determinar un grado de veracidad en ellas. En este último aspecto (la validación de rumores) aún se está trabajando para poder presentarlo en futuras publicaciones.

El trabajo comienza revisando el modelo propuesto por Daley y Kendall (1965)[1], conocido en la literatura científica por sus siglas DK, y se plantean inmediatamente dos nuevas variantes del mismo. Posteriormente, se expone el modelo presentado por Bettencourt y colaboradores (2006)[2] y adicionalmente una variante de él.

El modelo matemático propuesto por Daley y Kendall

El modelo planteado por Daley y Kendall (DK), propone tres tipos diferentes de población definidos de la siguiente manera (véanse detalles en Bettencourt[2] e Isea, R., (2014)[3])

- *Ignorantes* (U): son aquellas personas que comienzan un rumor en el tiempo (t).
- *Difusores* (V): son aquellos que difunden el rumor, y
- *Represores* (W): son los que escuchan el rumor, pero deciden no continuar difundiéndolo.

DK asumen que un rumor se propaga entre los *ignorantes* y los *difusores* a una tasa igual a $\frac{\beta}{T}$ donde β es la probabilidad con que se propaga un rumor entre T personas. Por otra parte, cuando un *Represor* interactúa con un *Difusor*, deja de transmitirse el rumor. Esto nos indica claramente que dada una información transmitida por un *Ignorante*, los usuarios deciden transmitirla a otras personas o no. En vista de que el rumor pierde su valor o vigencia con el tiempo (caracterizada por una probabilidad igual a γ), las ecuaciones diferenciales que describen el modelo DK son:

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dt} &= -\frac{\beta UV}{T} - \mu U \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{\beta UV}{T} - \frac{yV(V+W)}{T} - \mu V \\
\frac{dW}{dt} &= \frac{\gamma V(V+W)}{T} - \mu W
\end{aligned} \tag{1}$$

Tras resolver este sistema de ecuaciones de acuerdo a la metodología ya revisada y publicada en varios trabajos previos, se obtienen dos puntos críticos o puntos de equilibrio que denotaremos como P_1 y P_2, dados por:

- Punto crítico P_1:
  $U^* = 0, V^* = 0, W^* = 0$
- Punto crítico P_2:
  $U^* = \frac{\mu T}{\beta+\gamma}, V^* = -\frac{\mu T}{\beta}, W^* = \frac{\gamma\mu T}{\beta(\beta+\gamma)}$

Para determinar si dichos puntos corresponden al equilibro del sistema, se determina el Jacobiano del sistema de ecuaciones descrito por (1), y se evalúa para cada uno de los puntos críticos derivados de dicho sistema de ecuaciones. A modo de ejemplo, y por brevedad del trabajo, solo se mostraran los resultados para el punto P_1, es decir, el Jacobiano (J) obtenido del sistema de ecuaciones (1):

$$J = \begin{vmatrix} \frac{-\beta V}{T} - \mu & \frac{-\beta U}{T} & 0 \\ \frac{\beta V}{T} & -\frac{\gamma(2V+W)-\beta U+\mu T}{T} & \frac{-\gamma V}{T} \\ 0 & \frac{\gamma(2V+W)}{T} & \frac{\gamma V}{T} - \mu \end{vmatrix} \tag{2}$$

Como se indicó en el párrafo anterior, el próximo paso es evaluar el Jacobiano (J) en el primer punto crítico, operación que se denotará como J_{P1}. Finalmente, se determinan los autovalores que nos indican si dicha posición es estable siempre y cuando los autovalores sean negativos. De modo que J_{P1} es simplemente:

$$J_{P_1} = \begin{vmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{vmatrix} \tag{3}$$

La traza de J_{P1} es $-\mu^3$, mientras que el determinante es igual a -3μ. El único autovalor obtenido de la matriz es J_{P1} es $-\mu$ (multiplicidad 3). De modo que el punto P_1 es estable siempre y cuando μ sea un valor positivo. Repitiendo este procedimiento para P_2, los autovalores para este segundo caso son μ y $-\mu$ (cuyas multiplicidades son 1 y 2, respectivamente). Con este último resultado se deduce que P_2 será una solución estable siempre y cuando μ sea positivo.

En la figura 1, se muestra la resolución numérica del sistema de ecuaciones 1 obtenida con la librería Matplotlib del lenguaje de programación de alto nivel Python. En ella se consideró una población de 10 personas y las condiciones iniciales son como sigue: cuatro personas difunden el rumor y una sola lo reprime (T=15). Los parámetros β, γ y μ son, respectivamente, 0.70, 0.14, y 0.10. Esos valores han sido seleccionados al azar y realmente se aprecia cómo se reduce la propagación del rumor con el tiempo (color rojo), así como el propagado por los *Difusores* y *Represores* representados en color verde y azul, respectivamente.

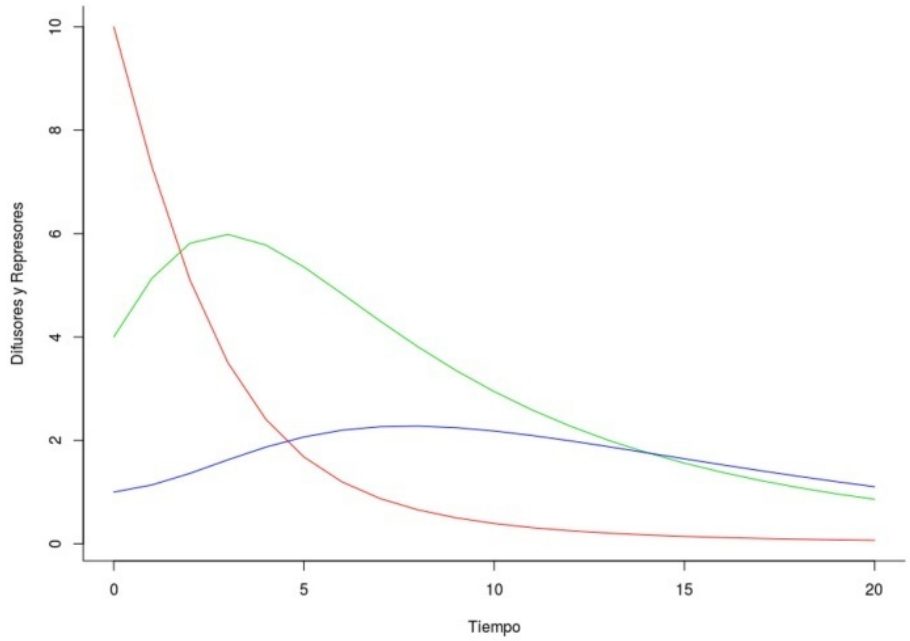

Figura 1: Resolución numérica del sistema de ecuaciones (1).
Véase texto para más detalles.

A continuación se presentan dos nuevas variantes que se introducen en la literatura científica identificadas como *Variante 1* y *Variante 2*. La primera representa un modelo de difusión de un rumor entre tres grupos de personas diferentes, mientras que la segunda variante considera que existe un conjunto de personas que conocen la veracidad del rumor, y por ello pueden desmentirlo.

Primera variante DK. Un rumor entre tres grupos de personas

Se propone un modelo basado en DK donde se difunde un rumor entre tres grupos de personas diferentes, lo que conlleva tres versiones distintas del mismo rumor. Cabe destacar que seleccionamos tres grupos de personas para constatar cómo se puede distorsionar un rumor con el tiempo.

Para ser breves, solo consideraremos un rumor (U) que puede llegar a generar tres informaciones distintas que se propagan al mismo tiempo (V_1, V_2 y V_3). Por ende, tenemos tres grupos de represores distintos dados por W_1, W_2 y W_3. Los parámetros β_1, β_2 y β_3 , serán las probabilidades con que se extienden cada uno de los tres rumores, teniendo presente que T=U+V_1 + V_2 + V_3 + W_1 + W_2 + W_3 . Con el fin de simplificar el manejo de las ecuaciones, se ha considerado que todos los rumores se van disipando en el tiempo a una misma tasa fija dada por el parámetro μ.

El modelo planteado vendrá descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= -\frac{\beta_1 U V_1}{T} - \frac{\beta_2 U V_2}{T} - \frac{\beta_3 U V_3}{T} - \mu U \\
\frac{dV_1}{dt} &= -\frac{\beta_1 U V_1}{T} - \frac{\gamma_1 V_1 (V_1 + W_1}{T} - \mu V_1 \\
\frac{dV_2}{dt} &= -\frac{\beta_2 U V_2}{T} - \frac{\gamma_2 V_2 (V_2 + W_2}{T} - \mu V_2 \\
\frac{dV_3}{dt} &= -\frac{\beta_3 U V_3}{T} - \frac{\gamma_3 V_3 (V_3 + W_3}{T} - \mu V_3 \\
\frac{dW_1}{dt} &= \frac{\gamma_1 V_1 (V_1 + W_1}{T} - \mu W_1 \\
\frac{dW_2}{dt} &= \frac{\gamma_2 V_2 (V_2 + W_2}{T} - \mu W_2 \\
\frac{dW_3}{dt} &= \frac{\gamma_3 V_3 (V_3 + W_3}{T} - \mu W_3
\end{aligned} \tag{4}$$

Repitiendo el procedimiento anterior, solo se logran determinar cuatro puntos críticos, cuyos autovalores son los siguientes:

- Punto crítico P_1:
  $U^* = 0, V_1^* = 0, V_2^* = 0, V_3^* = 0, W_1^* = 0, W_2^* = 0, W_3^* = 0$
  Autovalor: $-\mu$ (multiplicidad 7)
- Punto crítico P_2:
  $P_2 : U^* = \frac{\mu T}{\beta_1+\gamma_1}, V_1^* = -\frac{\mu T}{\beta_1}, V_2^* = 0, V_3^* = 0, W_1^* = \frac{\mu T \gamma_1}{\beta_1(\beta_1+\gamma_1)}, W_2^* = 0, W_3^* = 0$
  Autovalores: $-\mu, \mu, -\frac{\mu(\beta_1-\beta_3+\gamma_1)}{\beta_1+\gamma_1}, -\frac{\mu(\beta_1-\beta_2+\gamma_1)}{\beta_1+\gamma_1}$ (multiplicidad 4,1,1 y 1, respectivamente)
- Punto crítico P_3:
  $U^* = \frac{\mu T}{\beta_2+\gamma_2}, V_1^* = 0, V_2^* = -\frac{\mu T}{\beta_2}, V_3^* = 0, W_1^* = 0, W_2^* = \frac{\mu T \gamma_2}{\beta_2(\beta_2+\gamma_2)}, W_3^* = 0$
  Los autovalores son $-\mu, \mu, -\frac{\mu(\beta_2-\beta_3+\gamma_2)}{\beta_2+\gamma_2}, -\frac{\mu(\beta_2-\beta_1+\gamma_2)}{\beta_2+\gamma_2}$ (multiplicidad 4,1, 1 y 1, respectivamente)

- Punto crítico P_4:
  $U^* = \frac{\mu T}{\beta_3+\gamma_3}, V_1^* = 0, V_2^* = 0, V_3^* = -\frac{\mu T}{\beta_3}, W_1^* = 0, W_2^* = 0, W_3^* = \frac{\mu T \gamma_3}{\beta_3(\beta_3+\gamma_3)}$
  Los autovalores son $-\mu, \mu, -\frac{\mu(\beta_3-\beta_2+\gamma_3)}{\beta_3+\gamma_3}, -\frac{\mu(\beta_3-\beta_1+\gamma_1)}{\beta_3+\gamma_3}$ (multiplicidad 4,1, 1 y 1, respectivamente)

Como se desprende de la metodología indicada anteriormente, el valor de μ debe ser positivo y mayor que cero. Además, se determinan las condiciones de estabilidad para los puntos críticos P_2, P_3 y P_4 en función de los parámetros β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2 y γ_3

En la figura 2, se observa cómo se difunde un rumor entre tres grupos diferentes de personas, si se considera una población total de 21 personas. Se han considerado las siguientes condiciones iniciales tomadas al azar, cuyos valores fueron 4, 2 y 1 para describir la población que difunde el rumor tanto en el primero, segundo y tercer grupo, respectivamente; mientras que para los *Dispersores* fueron 2, 1 y 1. Los valores de los parámetros β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 y μ son 0.70, 0.50, 0.20, 0.34, 0.12, 0.12 y 0.10, respectivamente. Simplificando, en la figura 2 solo se muestra cómo disminuye la evolución en la población donde se propaga el rumor (color rojo), mientras que los grupos de personas identificados como V_1, V_2, V_3 y W_1 están representados en color verde, magenta, azul claro y azul oscuro, respectivamente. En un futuro trabajo se analizará este modelo con más detalle.

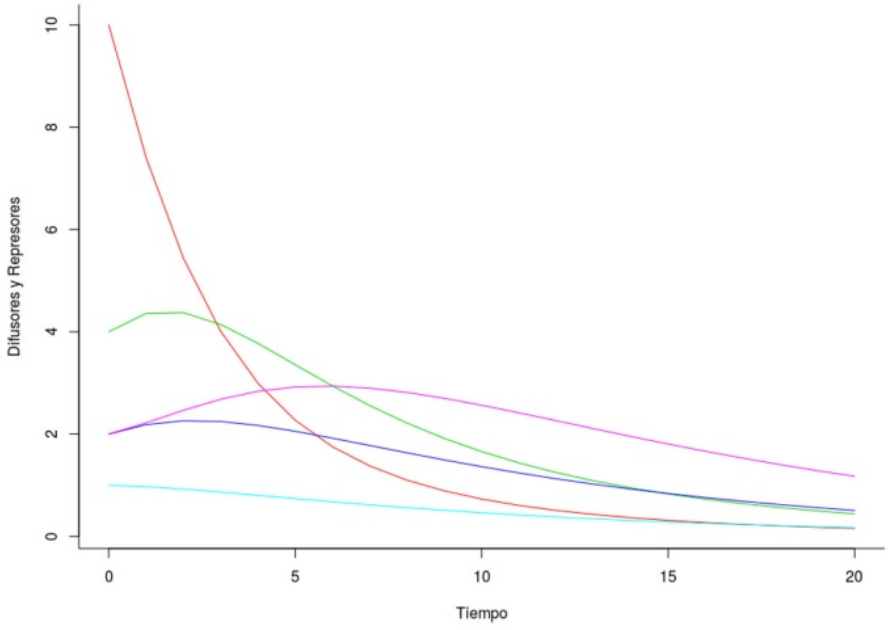

Figura 2: Se representa la solución numérica de la variante 1 del modelo DK (véanse detalles de los parámetros en el texto.)

Variante 2. Contrarrestando el proceso de difusión de un rumor

Este modelo comienza a estudiar el entorno hipotético donde se considera un rumor (U) que circula entre dos grupos de personas (V_1 y V_2), pero ahora los *Represores* lo desmienten, con una tasa de validación representada por los parámetros ε_1 y ε_2, respectivamente. Las ecuaciones en este caso son:

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= -\frac{\beta_1 U V_1}{T} - \frac{\beta_2 U V_2}{T} - \epsilon_1 W_2 - \mu U \\
\frac{dV_1}{dt} &= \frac{\beta_1 U V_1}{T} - \frac{\gamma_1 V_1 (V_1 + W_1}{T} - \mu V_1 \\
\frac{dV_2}{dt} &= \frac{\beta_2 U V_2}{T} - \frac{\gamma_2 V_2 (V_2 + W_2}{T} - \mu V_2 \\
\frac{dW_1}{dt} &= \frac{\gamma_1 V_1 (V_1 + W_1}{T} + W_1(\epsilon_1 - \mu) \\
\frac{dW_2}{dt} &= \frac{\gamma_2 V_2 (V_2 + W_2}{T} + W_2(\epsilon_2 - \mu)
\end{aligned} \tag{5}$$

Este sistema de ecuaciones genera cuatro puntos críticos, pero solamente se examinaron tres porque la última solución es de muy complejo cálculo. De modo que los tres puntos críticos derivados del sistema de ecuaciones diferenciales (3) son los siguientes:

- Punto crítico P_1:
  $U^* = 0, V_1^* = 0, V_2^* = 0, W_1^* = 0, W_2^* = 0$
  Autovalor: $-\mu$, ϵ_1 - μ, ϵ_2 - μ (multiplicidad 3, 1 y 1, respectivamente)
- Punto crítico P_2:
  $U^* = \frac{\mu T}{\beta_1+\gamma_1}, V_1^* = -\frac{\mu(\mu-\epsilon_1)T}{\beta_1(\mu-\epsilon_1)-\gamma_1\epsilon_1}, V_2^* = 0, W_1^* = \frac{\mu^2 T\gamma_1}{\beta_1^2(\mu-\epsilon_1)+\gamma_1[\beta_1(\mu-2\epsilon_1)-\epsilon_1\gamma_1]}, W_2^* = 0$
  Solo se pudieron obtener tres autovalores: $-\mu, \epsilon_2 - \mu, -\frac{\mu(\beta_1-\beta_2+\gamma_1)}{\beta_1+\gamma_1}$ (multiplicidad 1,1 y 1, respectivamente)
- Punto crítico P_3:
  $U^* = \frac{\mu T}{\beta_2+\gamma_2}, V_1^* = 0, V_2^* = -\frac{\mu(\mu-\epsilon_2)T}{\beta_2(\mu-\epsilon_2)-\gamma_2\epsilon_2}, W_1^* = 0, W_2^* = \frac{\mu^2 T\gamma_2}{\beta_2^2(\mu-\epsilon_2)+\gamma_2[\beta_2(\mu-2\epsilon_2)-\epsilon_2\gamma_2]}$
  Solo se pudieron obtener tres autovalores $-\mu, \epsilon_1 - \mu, -\frac{\mu(\beta_2-\beta_1+\gamma_2)}{\beta_2+\gamma_2}$ (multiplicidad 1,1 y 1, respectivamente)

En la figura 3, se muestra la resolución numérica del sistema de ecuaciones (3). En este caso, las condiciones iniciales (tomadas al azar) fueron 15, 4, 3, 2 y 1 para U, V_1, V_2, W_1 y W_2, respectivamente. Los valores de los parámetros β_1, β_2, γ_1, γ_2 y μ fueron 0.70, 0.50, 0.34, 0.30 y 0.10, respectivamente. Para concluir, se aprecia cómo disminuye la población donde se propaga el rumor (color rojo), mientras Para concluir, se aprecia cómo disminuye la población donde se propaga el rumor (color rojo), mientras Se aprecia entonces cómo disminuye la población donde se propaga el rumor (color rojo), mientras que los grupos de personas identificados como V_1, V_2, V_3 y W_1 están representados en color verde, magenta, azul claro y azul oscuro, respectivamente.

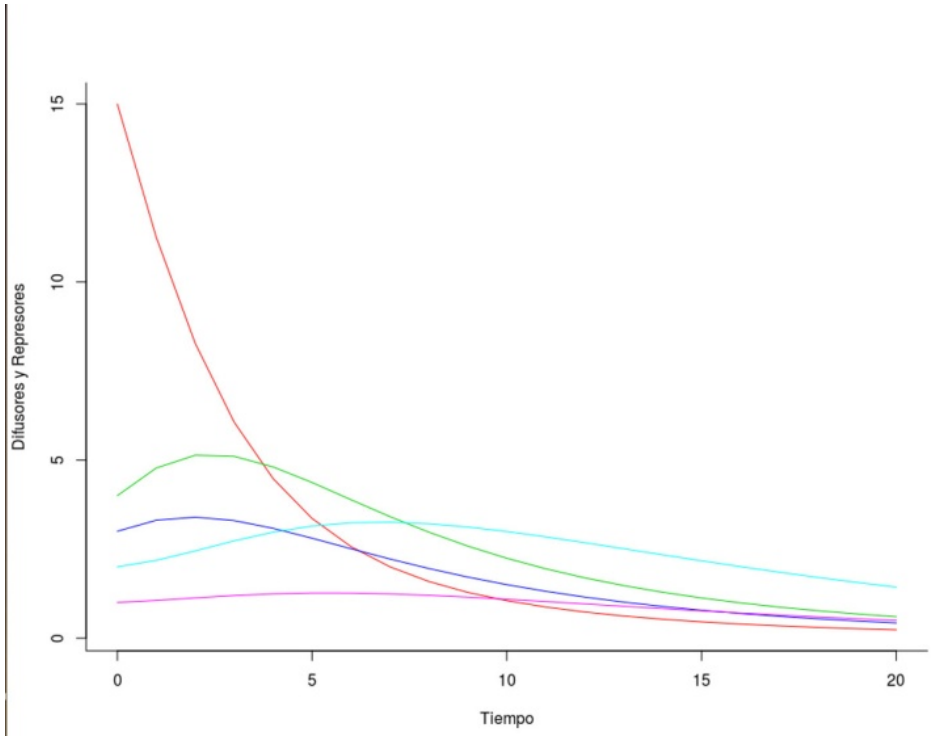

Figura 3: Se representa la solución numérica de la variante 2 del modelo DK.
Véanse detalles de los parámetros en el texto.

El modelo matemático propuesto por Bettencourt y colaboradores

Bettencourt y colaboradores[2] diseñaron el modelo SEIZ (siglas de Susceptible, Expuesto, Infectado y Escéptico) para estudiar la difusión de rumores, comparando el rumor con una enfermedad. Se parte de la idea de que la población potencial vulnerable al rumor (S) puede ser infectada, es decir, que un grupo humano al creer una determinada noticia o historia la va a difundir (I) hasta que finalmente llegue a otro grupo, los *Escépticos* (representados por la letra Z), que decidirá dejar de propagarla.

Conviene tener en cuenta los siguientes aspectos:

(i) Se denota con la letra (p) la tasa de personas propensas a creer en un rumor.

(ii) Los parámetros (b) y (I) denotan las probabilidades que caracterizan a las poblaciones *Expuestas* y *Escépticas*, respectivamente.

De ese modo, el sistema de ecuaciones que describe el modelo SEIZ vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{T} - bS\frac{Z}{T} - \mu S \\
\frac{dE}{dT} &= \frac{(1-p)\beta SI}{T} + \frac{(1-l)bSZ}{T} - \rho E\frac{I}{T} - \mu E \\
\frac{dI}{dt} &= p\beta S\frac{I}{T} + \rho E\frac{I}{T} - \mu I \\
\frac{dZ}{dt} &= lbS\frac{Z}{T} - \mu Z
\end{aligned} \tag{6}$$

La solución del sistema de ecuaciones (4) es un poco más laboriosa que en los casos anteriores, y es posible derivar cuatro puntos críticos con sus respectivos autovalores:

- Punto crítico P_1:
  S^*=0,E^*=0,I^*=0,Z^*=0
  El único autovalor es: $-\mu$ (multiplicidad 4)
- Punto crítico P_2:
  $S^* = 0, E^* = \frac{\mu T}{\rho}, I^* = \frac{-\mu T}{\rho}, Z^* = 0$
  Los autovalores son: $\mu, -\mu, -\mu\frac{\rho-\beta}{\rho}$(donde las multiplicidades son 1, 2 y 1, respectivamente)
- Punto crítico P_3:
  $S^* = \frac{\mu(\rho-\mu)}{\beta(\rho-\beta\rho)}, I^* = \frac{-\mu T}{\beta}, Z^* = 0$
  Los autovalores son $\mu, -\mu, -\mu[1 + \frac{bl(\rho-\beta)}{\beta(\beta p-\rho)}]$, (cuyas multiplicidades son 1, 2 y 1, respectivamente)
- Punto crítico P_4:
  $S^* = \frac{\mu T}{bl}, E^* = \frac{\mu T(l-1)}{bl}, I^* = 0, Z^* = -\frac{\mu T}{b}$
  Solo fue posible determinar los tres primeros autovalores μ y $-\mu, \frac{\mu[\beta p+\rho(l-1)-bl]}{bl}$ (cuyas multiplicidades son 1, 1 y 1, respectivamente) por lo complejo de las ecuaciones que se estaban analizando.

En la figura 4, se muestra la figura obtenida para este modelo matemático. En este caso, las condiciones iniciales (tomadas al azar) fueron 15, 4, 3 y 1 para S,E,I,Z, respectivamente. Los valores de los parámetros β, b, p, l, ρ y μ fueron 0.70, 0.34, 0.30, 0.20, 0.30 y 0.10, respectivamente. Se aprecia entonces cómo disminuye el rumor (color rojo), mientras que los grupos de personas identificados como S,E,I,Z están representados en color verde, magenta, azul claro y azul oscuro, respectivamente.

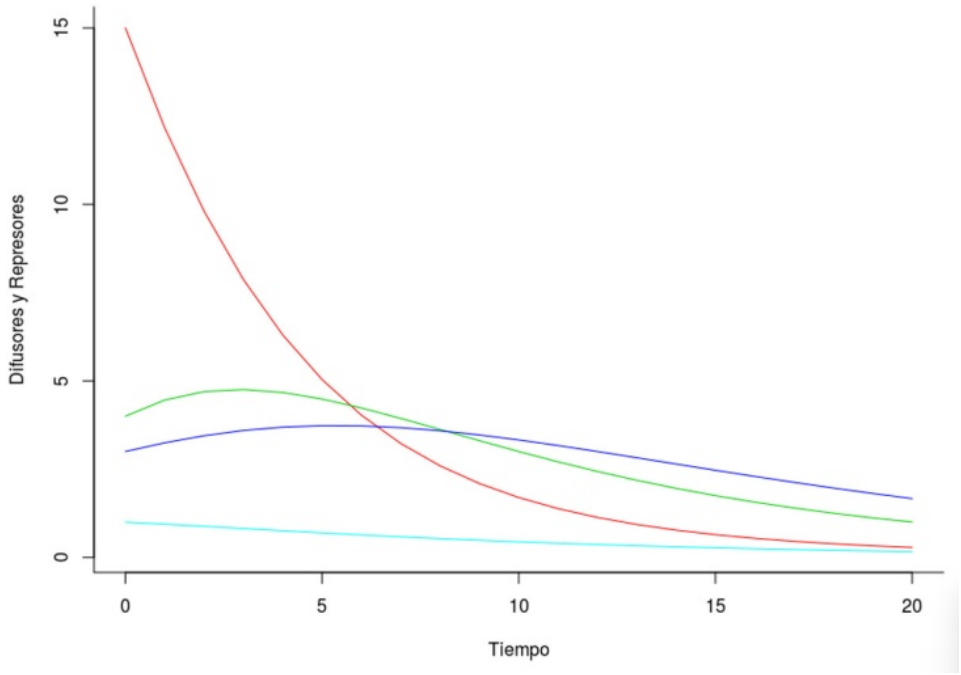

Figura 4: Se representa la solución numérica del modelo SEIZ.
Véanse detalles de los parámetros en el texto.

Solo resta exponer una nueva variante que consiste en emplear el modelo SEIZ, donde un mismo rumor (S) es propagado entre dos grupos de personas diferentes (I_1 y I_2), lo cual no se ha planteado anteriormente en la literatura científica.

Variante SEIZ con dos tipos de dispersores

Esta última variante que se analiza en el presente trabajo, consiste en un modelo donde un mismo rumor es difundido por dos grupos de personas diferentes, representados por los subíndices 1 y 2, respectivamente. En este caso, las ecuaciones vendrían dadas por:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta_1 S I_1}{T} - bS\frac{Z_1}{T} - \frac{\beta_2 S I_2}{T} - bS\frac{Z_2}{T} - \mu S \\
\frac{dE_1}{dt} &= \frac{(1-p_1)\beta_1 S I_1}{T} + \frac{(1-l_1)bSZ_1}{T} - \rho E_1\frac{I_1}{T} - \mu E_1 \\
\frac{dE_2}{dt} &= \frac{(1-p_2)\beta_2 S I_2}{T} + \frac{(1-l_2)bSZ_2}{T} - \rho E_2\frac{I_2}{T} - \mu E_2 \\
\frac{dI_1}{dt} &= \rho_1\beta_1 S\frac{I_1}{T} + \rho E_1\frac{I_1}{T} - \mu I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= \rho_2\beta_2 S\frac{I_2}{T} + \rho E_2\frac{I_2}{T} - \mu I_2 \\
\frac{dZ_1}{dt} &= l_1 bS\frac{Z_1}{T} - \mu Z_1 \\
\frac{dZ_2}{dt} &= l_2 bS\frac{Z_2}{T} - \mu Z_2
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Al igual que en el caso anterior, solo se indican ocho puntos críticos con sus respectivos autovalores:

- Punto crítico P_1:
  $S^* = 0, E_1^* = 0, E_2 = 0, I_1^* = 0, I_2^* = 0, Z_1^* = 0, Z_2^* = 0$
  El único autovalor es: $-\mu$ (multiplicidad 7)
- Punto crítico P_2:
  $S^* = 0, E_1^* = \frac{\mu T}{\rho}, E_2 = 0, I_1^* = -\frac{\mu T}{\rho}, I_2^* = 0, Z_1^* = 0, Z_2^* = 0$
  Los autovalores son: $-\mu, \mu, -\frac{\mu(\rho-\beta_1)}{\rho}$ (donde las multiplicidades son 5, 1 y 1, respectivamente)
- Punto crítico P_3:
  $S^* = \frac{\mu(\rho-\beta_1)T}{\beta_1(\rho-p_1\beta_1)}, E_2^* = \frac{-\mu(p_1-1)T}{\rho-p_1\beta_1}, E_2^* = 0, I_1^* = \frac{-\mu T}{\beta_1}, I_2^* = 0, Z_1^* = 0, Z_2^* = 0$
  Los autovalores son $-\mu, \mu, \frac{\mu[\beta_1(\beta_1 p_1-\beta_2 p_2)+\rho(\beta_2 p_2-\beta_1)]}{\beta_1(\rho-\beta_1 p_1)}, \frac{\mu[\beta_1(\beta_1 p_1-bl_1)+\rho(bl_1-\beta_1)]}{\beta_1(\rho-\beta_1 p_1}$, $\frac{\mu[\beta_1(\beta_1 p_1-bl_2)+\rho(bl_1-\beta_1)]}{\beta_1(\rho-\beta_1 p_1)}$ (multiplicidad 2, 1, 1, 1, 1 y 1, respectivamente).
- Punto crítico P_4 :
  $S^* = 0, E_1^* = 0, E_2^* = \frac{\mu T}{\rho}, I_1^* = 0, I_2^* = \frac{-\mu T}{\rho}, Z_1^* = 0, Z_2^* = 0$

Los autovalores son $-\mu, \mu, -\frac{\mu(\rho-\beta_2)}{\rho}$ (multiplicidad 5, 1 y 1, respectivamente).

- Punto crítico P_5 :
  $S^* = \frac{\mu(\rho-\beta_2)T}{\beta_2(\rho-p_2\beta_2)}, E_1^* = 0, E_2^* = -\frac{\mu(p_2-1)T}{\rho-p_2\beta_2}, I_1^* = 0, I_2^* = -\frac{\mu T}{\beta_2},$
  $Z_1^* = 0, Z_2^* = 0$
  Los autovalores son $-\mu, \mu, \frac{\mu(\rho-\beta_2)}{\beta_2}, \frac{\mu[\beta_2(\beta_2p_2-\beta_1p_1)+\rho(\beta_2p_2-\beta_2)]}{\beta_2(\rho-\beta_2p_2)}, \frac{\mu[\beta_2(\beta_2p_2-bl_2)+\rho(bl_2-\beta_2)]}{\beta_2(\rho-\beta_2p_2)},$
  $\frac{\mu[\beta_2(\beta_2p_2-bl_2)+\rho(bl_2-\beta_2)]}{\beta_2(\rho-\beta_2p_2)}$ (multiplicidad 2, 1, 1, 1, 1 y 1, respectivamente).
- Punto crítico P_6 :
  $S^* = 0, E_1^* = \frac{\mu T}{\rho}, E_2^* = \frac{\mu T}{\rho}, I_1^* = -\frac{\mu T}{\rho}, I_1^* = -\frac{\mu T}{\rho}, Z_1^* = 0, Z_2^* = 0$
  Los autovalores son $-\mu, \mu, \frac{\mu(\rho-\beta_1-Beta_2)}{\rho}$ (multiplicidad 4, 2 y 1, respectivamente).
- Punto crítico P_7 :
  $S^* = \frac{\mu T}{bl_1}, E_1^* = \frac{\mu(l_1-1)T}{bl_1}, E_2^* = 0, I_1^* = 0, I_2^* = 0, Z_1^* = -\frac{-\mu T}{b}, Z_2^* = 0$
  Los autovalores son $-\mu, \mu, \frac{\mu(\beta_1p_1+\rho(l_1-1)-bl_1)}{bl_1}, \frac{\mu(\beta_2p_2-bl_1)}{bl_1}, \frac{\mu(l_2-l_1)}{l_1}$ (multiplicidad 3, 1, 1, 1 y 1, respectivamente, respectivamente)
- Punto crítico P_8 :
  $S^* = \frac{\mu T}{bl_2}, E_1^* = 0, E_2^* = \frac{\mu(l_2-1)T}{bl_2}, I_1^* = 0, I_2^* = 0, Z_1^* = 0, Z_2^* = -\frac{\mu T}{b}$
  Los autovalores son $-\mu, \mu, \frac{\mu(\beta_2p_2+\rho(l_2-1)-lb_2)}{bl_2}, \frac{\mu(\beta_1p_1-bl_2)}{bl_2}, \frac{\mu(l_1-l_2)}{l_2}$ (multiplicidad 3, 1, 1 1 y 1, respectivamente).

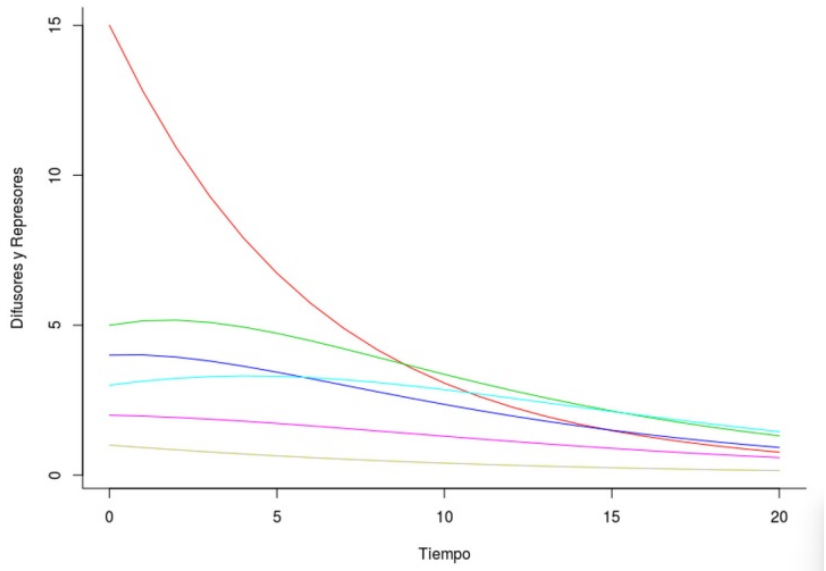

Figura 5: Se representa la solución numérica de la variante 1 del modelo SEIZ (véanse detalles de los parámetros en el texto.)

En la figura 5, se muestra la figura resultante de este modelo. En este caso, las condiciones iniciales (tomadas al azar) fueron 15, 5, 4, 3, 2, 1 y 1 para S, E_1, E_2, I_1, I_2, Z_1 y Z_2, respectivamente. Los valores de los parámetros β_1, β_2, b, p_1, p_2, l_1, l_2, ρ y μ fueron 0.7, 0.5, 0.34, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1, 0.3 y 0.1, respectivamente. Aquí se aprecia cómo disminuye la población donde se propaga el rumor (color rojo), mientras que los grupos de personas identificados como S, E_1, E_2, I_1, I_2, Z_1 y Z_2 están representados en color verde, magenta, azul claro y azul oscuro, fucsia y gris, respectivamente.

Conclusiones

A lo largo del trabajo se han planteado y analizado tres nuevos modelos matemáticos que hasta la fecha no se habían contemplado en la literatura científica, basados en los de Daley y Kendall, y Bettencourt y colaboradores.

Es importante destacar que en la primera variante del modelo de Daley y Kendall, definido como *Variante* 1, el rumor se propaga entre tres grupos de personas, aunque el modelo puede generalizarse para cualquier número de personas. Por otra parte, la *Variante* 2 puede ayudar a determinar el número de personas necesarias para desmentir un rumor específico, lo cual esperamos poder desarrollar en un futuro cercano.

La variante derivada del modelo de Bettencourt y colaboradores puede ayudar a comparar resultados con otros modelos matemáticos, como por ejemplo, los derivados del de DK. Para ello, es necesario cuantificar el rumor per se a través de cualquier herramienta tecnológica, quizás las tendencias en Twitter, resultados de encuestas o censos entre comunidades, por citar algunas modalidades. De esa manera, se podrá diseñar e implementar una estrategia computacional que permita identificar y valorar la información que se esté difundiendo por cualquier medio/vía de comunicación.

Bibliografía

[1] Daley DJ y D.G. Kendall (1965). *DG. Stochastic rumours.* Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, 1, pp.42-55.

[2] Bettencourt L, Cintrón-Arias L, Kaiser DI y Castillo-Chávez C., (2006). *The power of a good idea: Quantitative modeling of the spread of ideas from epidemiological models.* PHYSICA A, 364, pp. 513-536.

[3] Isea, R., (2014). *Análisis matemático de la difusión de un rumor entre dos grupos de personas.* Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC) 2014, 8(5), pp. 85-89. Disponible en: https://convite.cenditel.gob.ve/revistaclic/index.php/revistaclic/article/view/552/511