



**HAL**  
open science

## Résolution particulière et traitement non-linéaire du signal : applications RADAR/SONAR

P. del Moral, Jean-Charles Noyer, G Rigal, G. Salut

► **To cite this version:**

P. del Moral, Jean-Charles Noyer, G Rigal, G. Salut. Résolution particulière et traitement non-linéaire du signal : applications RADAR/SONAR. *Traitement du Signal*, 1995, 12 (4), pp.287-301. hal-03516624

**HAL Id: hal-03516624**

**<https://hal.science/hal-03516624v1>**

Submitted on 7 Jan 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Résolution particulière et traitement non-linéaire du signal : Applications RADAR/SONAR

---

### *Particle Resolution and Non-Linear Signal Processing With RADAR/SONAR Applications*

par P. DEL MORAL<sup>1,2</sup>, J.-C. NOYER<sup>1</sup>, G. RIGAL<sup>2</sup>, G. SALUT<sup>1</sup>

1. Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS, 7 Avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse Cedex  
2. Digilog, 21 Rue F.Joliot, BP 16000 13791 Aix en Provence

#### Résumé

Cet article présente une méthode générale de résolution particulière pour l'estimation optimale non-linéaire en traitement du signal. Les processus considérés sont de la classe markovienne à temps discret, dont les problèmes d'estimation en traitement du signal RADAR/SONAR, pris pour illustration, sont des exemples particuliers.

Le propre de la résolution particulière est d'engendrer une exploration naturelle de l'espace de probabilité et de fournir en conséquence tous les estimateurs désirables (maxima de vraisemblance, minimum de variance, . . .) constituant une adaptation dynamique de la loi des grands nombres, son principe algorithmique est indépendant de la complexité dynamique (nature des non-linéarités notamment). C'est du nombre de variables "bruit" pilotant le système que dépend le plus ou moins grand nombre de particules suivant la finesse de résolution. La convergence est inconditionnellement stable sous des hypothèses simples que l'on explicite. A titre d'exemple, deux problèmes non-linéaires d'importance rencontrés en traitement du signal RADAR/SONAR sont traités par cette méthode.

**Mots clés :** Résolution particulière, estimation non-linéaire, filtrage optimal, signaux RADAR/SONAR.

#### Abstract

*This paper introduces a general method for a particle solution to optimal non-linear estimation in signal processing. We deal here with the class of discrete time Markov processes, to which the estimation problems of RADAR/SONAR signal processing belong.*

*The main feature of particle resolution is that it generates a global picture of the probability space and therefore provides all desirable estimators (maximum likelihood, minimum variance, etc . . .). Its algorithmic principle relies on a dynamic version of Monte-Carlo principles and is independent of dynamic complexity (in particular the nature of non-linearities). It is on the number of noise variables that the size of the number of particles depends, according to resolution accuracy. Convergence is unconditionally stable under simple hypotheses.*

*As an example, two important non-linear problems which arise in RADAR/SONAR signal processing are dealt with, using this method.*

**Key words :** Particle resolution, non linear estimation, optimal filtering, RADAR/SONAR signals.

## 1. Introduction

Les bases de l'estimation optimale reposent sur la construction de la probabilité conditionnelle à l'information dont on dispose. Dans le cas des processus gaussiens propres aux modèles linéaires, on peut construire un filtre récursif optimal de l'état à estimer ([17], [18]), comme il est bien connu. Malheureusement dans le cas général, la théorie non-linéaire ne permet plus une solution récursive du problème en dimension finie.

De nombreuses solutions ont été proposées pour résoudre ce problème. Pour les situations les plus "régulières", une des plus

immédiates est de linéariser les modèles autour de l'estimé courant, se ramenant ainsi à un problème localement linéaire (e.g. Kalman étendu [6]). Plus généralement, on peut choisir un développement en moments jusqu'à un certain degré et de construire une approximation tronquée sur la base des  $n$  premiers (cumulants).

Une autre approche consiste à définir une estimation sous-optimale (mais cependant optimale dans sa classe) par restriction de la classe d'estimateurs considérés (exemple : fonctionnelles polynomiales à noyaux séparables ([20])).

---

<sup>0</sup>Cette étude a reçu le soutien financier de la Direction des Constructions Navales (STSN/CTSN, Toulon).

Une approche plus numérique du problème consiste à découper l'espace selon une grille définie au préalable et de construire la probabilité conditionnelle aux mesures, associée à chaque portion de l'espace ([7],[8]).

Les deux premières approches évoquées ne permettent aucune garantie de stabilité en général, et de fortes non-linéarités jointes à des bruits élevés les mettent gravement en défaut. En ce qui concerne la troisième méthode son champ d'application est assez limité (exemple : modèles bilinéaires), pour une efficacité pratique d'utilité générale.

La méthode de résolution particulière ([10], [11]) présentée ici repose sur une exploration de l'espace d'état par particules aléatoires (tirages à la Monte Carlo). Originellement due à G. Salut, d'abord par processus de naissance et mort, puis à nombre de particules constant, elle fut une première fois exposée en 1989 ([16]), puis présentée dans les sessions des Groupes de Recherche Automatique et Traitement du Signal du CNRS ([12], [13], [22]). Bien que son principe se rapproche davantage des méthodes dites à "grille", elle a la particularité d'engendrer un maillage évolutif, fonction du flot stochastique du système étudié et de ses observations. Les outils essentiels de cette méthode sont la règle de Bayes et une adaptation dynamique de la loi des grands nombres. Certains auteurs ont utilisé les mêmes idées mais sans les conditions de convergence ([15],[26]). Enfin, d'autres auteurs ([7], [8]) ont utilisé l'approximation-mesure de Dirac, mais sans la mobilité particulière étudiée ici. Il est important de souligner que la méthode de résolution exposée est la seule dont la convergence ait été prouvée (Cf [9]) sous les hypothèses générales auxquelles on peut s'attendre, notamment pour les processus instables dont il est ici question en trajectographie.

Après un bref rappel sur le problème de l'estimation dynamique, nous présentons dans cet article l'essentiel de la méthode de résolution particulière évoquée. Seuls les résultats algorithmiques sont présentés ici (on pourra trouver les démonstrations mathématiques de convergence dans [9]).

Cette approche par la résolution particulière est particulièrement adaptée aux problèmes où :

- i) de fortes non-linéarités sont présentes.
- ii) le souci d'optimalité est essentiel.

C'est notamment le cas pour le traitement fin du signal RADAR/SONAR, lorsque l'on doit tenir compte simultanément d'un faible rapport signal/bruit et de la dynamique des cibles.

## 2. Rappel sur la théorie de l'estimation dynamique

D'une manière générale, l'estimation dynamique consiste à évaluer un processus  $X$  indirectement lié à un processus d'observation  $Y$ , évoluant dans le temps. Le caractère optimal de cet estimateur

de  $X$ , noté  $\hat{X}$ , dépend évidemment du critère à optimiser (minimum de variance de l'erreur par exemple). On parle de filtrage lorsque seule la valeur de  $X$  à l'instant courant  $t$ , importe. On sait par ailleurs que les équations de prédiction et de lissage sont fondées sur l'opération fondamentale de filtrage. Enfin, l'estimation paramétrique est un cas trivial de filtrage (filtrage d'une constante inconnue).

Nous rappelons ici le problème de filtrage à temps discret de processus markoviens.

Soit  $X$  un processus stochastique markovien à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ) défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  par :

$$\begin{cases} X_t = F_t(X_{t-1}, \pi_t) & (t \geq 1) \\ X_0 \text{ Condition initiale} \end{cases} \quad (1)$$

où  $F_t$  désigne une applicable mesurable (fonction de transition) de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  et  $\pi_t$  un bruit (de dynamique) de loi connue à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , et dont les réalisations temporelles sont indépendantes.

Le processus  $X$  est observé à travers un processus  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  de la forme :

$$Y_t = H_t(X_t, \nu_t) \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

où  $H_t$  est une application mesurable de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^p$  et  $\nu_t$  est un bruit (de mesure) de loi connue à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , et dont les réalisations temporelles sont indépendantes.

Par souci de simplicité, nous étudierons le cas où le bruit de mesure est additif et gaussien de moyenne nulle et de variance  $R_t$ .

**Notations :** Nous noterons par la suite

$$\text{et } \begin{aligned} \underline{t} &\triangleq (0, \dots, t) \\ Y_{\underline{t}} &\triangleq (Y_0, Y_1, \dots, Y_t). \end{aligned} \quad (3)$$

Soit  $\mathcal{F}_t^Y$  la filtration engendrée par les observations jusqu'à l'instant  $t$ .

Le problème d'estimation (au sens du minimum de variance de l'erreur d'estimation) consiste à déterminer la mesure de probabilité conditionnelle aux observations  $dP(X_t | Y_{\underline{t}})$ , ou de manière particulière sa marginale  $dP(X_t | Y_t)$ . L'estimateur optimal de  $X_t$  sachant  $Y_{\underline{t}}$ , noté  $\hat{X}_t$ , s'écrit :

$$\hat{X}_t \triangleq E(X_t | \mathcal{F}_t^Y) = \int_{X_t} X_t dP(X_t | Y_{\underline{t}}) = \int_{X_t} X_t dP(X_t | Y_t) \quad (4)$$

Le problème de filtrage étant un problème dynamique, il est important de mettre en évidence des relations récursives permettant de calculer à chaque instant cette mesure de probabilité. On peut décomposer cette opération en deux parties :

- Une partie prédictive fondée sur les équations de dynamique (Eq. 1), afin d'engendrer a priori la mesure de probabilité à l'instant  $t$ , connaissant les  $t-1$  dernières observations. La construction

de cette mesure se fait grâce au semi-groupe de Chapman-Kolmogorov :

$$dP(X_t | Y_{t-1}) = \int_{X_{t-1}} dP(X_t | X_{t-1})dP(X_{t-1} | Y_{t-1}) \quad (5)$$

où  $dP(X_t | X_{t-1})$  représente la probabilité de transition de l'état  $X_{t-1}$  à  $X_t$ .

– Une partie correctrice reposant sur la règle de Bayes :

$$dP(X_t | Y_t) = \frac{dP(Y_t | X_t)}{dP(Y_t | Y_{t-1})}dP(X_t | Y_{t-1}) \quad (6)$$

où  $dP(Y_t | Y_{t-1})$  n'est rien d'autre qu'un terme de normalisation.

On peut alors réécrire  $dP(X_t | Y_t)$  sous la forme :

$$dP(X_t | Y_t) = \frac{\prod_{\tau=0}^t dP(Y_\tau | X_\tau) \prod_{\tau=1}^t dP(X_\tau | X_{\tau-1})dP(X_0)}{\int_{X_t} \prod_{\tau=0}^t dP(Y_\tau | X_\tau) \prod_{\tau=1}^t dP(X_\tau | X_{\tau-1})dP(X_0)} \quad (7)$$

Il est clair au vu de l'équation 7, que le problème de filtrage de processus markoviens à temps discret repose sur la connaissance de deux mesures :

$$\begin{cases} dP(X_\tau | X_{\tau-1}) & \text{loi de transition} \\ dP(Y_\tau | X_\tau) & \text{loi d'observation} \end{cases}$$

### 3. Approche particulière des équations du filtrage

L'absence d'outils de résolution satisfaisants du filtrage non-linéaire provient de la difficulté mathématique à rendre compte du caractère essentiellement local de tout modèle non-linéaire. Cela conduit à développer une approche générale de ce problème, fondée sur des tirages du type Monte-Carlo : on obtient ainsi une prise en compte globale des modèles non-linéaires dont la convergence n'est limitée que par le nombre de particules utilisées.

L'essentiel de l'approche particulière réside en fait dans l'adaptation dynamique de la loi des grands nombres.

#### 3.1. PRINCIPE

Dans un premier temps, nous introduisons les concepts généraux qui sont à la base de la solution particulière présentée ici.

Rappelons tout d'abord quelques définitions de convergence.

#### 3.1.1. Définitions

Soit  $(X^N)_{N \geq 1}$  une suite de processus, et  $X$  un processus, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ) sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

On dit que  $X^N$  converge uniformément dans  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)^*$  et on note :

$$X^N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} X$$

avec

•  $\forall p > 0$

$$\|X^N - X\|_{L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)^*}$$

$$\triangleq \sup_{t \geq 0} \|X_t^N - X_t\|_{L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$$

avec  $\|U\|_{L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)} = E(|U|^p)$ .

• pour  $p=0$

$$\forall \varepsilon > 0 \sup_{t \geq 0} P(\|X_t^N - X_t\|_{\mathbb{R}^d} > \varepsilon)$$

$$\triangleq P(\|X^N - X\|_{\mathbb{R}^d} > \varepsilon)^* \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$$

#### 3.1.2. Loi des grands nombres

Comme nous l'avons déjà précisé, le point majeur de la résolution particulière repose sur l'adaptation de la loi des grands nombres afin de construire la mesure de probabilité  $dP(X_t | Y_t)$ .

Soit  $X_t^e$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  distribuée selon la loi  $dP(X_t | Y_t)$  et  $(X_t^{e,i})_{1 \leq i \leq N}$   $N$  variables aléatoires indépendantes conditionnellement à  $Y_t$ , de même loi que  $X_t^e$ .

On a alors :

$$E(X_t^e | Y_t) = E(X_t | Y_t) \quad \mathbf{P - ps}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_t^{e,i} - E(X_t^e | Y_t) \right\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)} \\ = \frac{1}{\sqrt{N}} \|X_t - E(X_t | Y_t)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)} \quad (8) \end{aligned}$$

D'où, sous l'hypothèse que la variance du processus  $X$  est bornée :

$$\|X - E(X | \mathcal{F}^Y)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} < +\infty \quad (9)$$

On déduit immédiatement de l'expression 3.1.2. :

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_t^{e,i} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} E(X_t | Y_t)} \quad (10)$$

Cette expression permet à elle seule de résumer ce que l'on entend par filtrage particulière : les variables aléatoires  $(X_t^{e,i})_{1 \leq i \leq N}$  sont en fait une représentation discrétisée de l'espérance conditionnelle.

Remarque : D'une manière plus générale, nous parlerons de filtrage particulière pour toute approximation de l'espérance conditionnelle par exploration aléatoire de l'espace d'état. On notera, à cet égard, que la discrétisation par "grille fixe" ne mérite pas le nom de particulière, le propre d'une particule étant de posséder une certaine capacité de mouvement.

Pour mieux représenter ce en quoi consiste l'approche particulière, il suffit de réécrire, sous l'hypothèse précédente, l'expression 10 issue de la loi faible des grands nombres sous la forme de la convergence au sens faible :

$$\int X_t \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{e,i}}(dx_t) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} \int X_t dP(X_t | Y_t) \quad (11)$$

Cette expression montre que l'on approche ainsi la mesure de probabilité conditionnelle  $dP(X_t | Y_t)$  par un peigne de Dirac équi pondéré :

$$dP(X_t | Y_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{e,i}}(dx_t)$$

La mesure de probabilité  $dP(X_t | Y_t)$  rentrant en jeu dans le problème d'estimation n'est rien d'autre que la marginale de  $dP(X_t, Y_t)$  : on peut donc voir la variable aléatoire  $X_t$  comme l'extrémité de la trajectoire  $X_t$ , pour laquelle chaque probabilité de transition dépend de  $Y_t$ . En d'autres termes, les "dents" du peigne de Dirac évoluent suivant une loi qui dépend de  $Y_t$ .

### 3.1.3. Dérivée de Radon-Nykodim

Le principal problème consiste à calculer cette loi. Plus précisément, il est nécessaire d'explicitier une décomposition de  $dP(X_t, Y_t)$  mettant en évidence une nouvelle distribution notée  $dQ(X_t, Y_t)$  et une dérivée de Radon-Nykodim notée  $Z_t(X_t, Y_t)$  récursivement calculables :

$$dP(X_t, Y_t) = Z_t(X_t, Y_t) dQ(X_t, Y_t) \quad (12)$$

Remarque : Les schémas particuliers développés par la suite sont le fruit d'une interprétation exploration/pondération de l'expression 12 du changement de probabilité de référence. En effet, en accord avec les principes de type Monte-Carlo, la nouvelle distribution  $dQ(X_t, Y_t)$  sert de base à l'exploration et les dérivées de Radon viennent pondérer les positions. Cette méthode est à la base du calcul des probabilités puisqu'il s'agit de reconstruire une distribution à partir d'une suite de réalisations indépendantes de variables aléatoires.

La mesure conditionnelle s'écrit :

$$dP(X_t | Y_t) = \frac{dP(X_t, Y_t)}{dP(Y_t)}$$

Soit encore :

$$dP(X_t | Y_t) = \frac{Z_t(X_t, Y_t) dQ(X_t, Y_t)}{\int_{X_t} Z_t(X_t, Y_t) dQ(X_t, Y_t)} = \bar{Z}_t(X_t, Y_t) dQ(X_t | Y_t) \quad (13)$$

avec

$$\bar{Z}_t(X_t, Y_t) = \frac{Z_t(X_t, Y_t)}{\int Z_t(X_t, Y_t) dQ(X_t | Y_t)} \quad (14)$$

On peut montrer aisément à partir des relations 12 et 14 que :

$$\hat{X}_t = E(X_t | Y_t) = \frac{E_Q(X_t Z_t(X_t, Y_t) | Y_t)}{E_Q(Z_t(X_t, Y_t) | Y_t)} = E_Q(X_t \bar{Z}_t(X_t, Y_t) | Y_t) \quad (15)$$

où  $E_Q$  représente l'espérance prise par rapport à la nouvelle probabilité de référence  $Q$ .

Remarque : On est ainsi en mesure de calculer l'estimateur à partir de la connaissance d'une nouvelle probabilité de référence  $dQ(X_t | Y_t)$ . Nous donnerons par la suite plusieurs expressions possibles de  $dQ(X_t | Y_t)$ .

On peut, tout comme pour le paragraphe 3.1.2., appliquer la loi des grands nombres non plus sur  $dP(X_t | Y_t)$  mais sur  $dQ(X_t | Y_t)$  : Soit  $X_t^e$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  distribuée selon la loi  $dQ(X_t | Y_t)$  et  $(X_t^{e,i})_{1 \leq i \leq N}$   $N$  variables aléatoires indépendantes conditionnellement à  $Y_t$  de même loi que  $X_t^e$ . On peut alors montrer [9] :

$$\sum_{i=1}^N p_t^i X_t^{e,i} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)} E(X_t | Y_t) \quad (16)$$

avec

$$p_t^i = \frac{Z_t(X_t^{e,i}, Y_t)}{\sum_{j=1}^N Z_t(X_t^{e,j}, Y_t)} = \frac{\bar{Z}_t(X_t^{e,i}, Y_t)}{\sum_{j=1}^N \bar{Z}_t(X_t^{e,j}, Y_t)} \quad (\text{Pondérations normalisées}) \quad (17)$$

L'estimée est donc le barycentre des points distribués selon  $dQ(X_t | Y_t)$ , dont les pondérations sont les dérivées  $Z_t(X_t^{e,i}, Y_t)$  de Radon-Nykodim du changement de probabilité. Cela conduit pour la probabilité conditionnelle à un peigne de Dirac, non plus équi pondéré (comme dans la relation 11), mais

avec des pondérations  $p_t^i$  différentes pour chaque support ponctuel  $X_t^{e,i}$  :

$$dP(X_t | Y_t) = \sum_{i=1}^N p_t^i \delta_{X_t^{e,i}}(dx_t) \quad (18)$$

L'estimateur particulière d'ordre N s'écrit alors :

$$\widehat{X}_t^N = \sum_{i=1}^N p_t^i X_t^{e,i} \quad (19)$$

avec 
$$\sum_{i=1}^N p_t^i = 1$$

Remarques :

- En résumé, la philosophie de la méthode particulière consiste à remplacer une mesure de probabilité que l'on ne connaît pas, par une autre mesure que l'on est en mesure de calculer. On passe de l'une à l'autre au moyen de la dérivée de Radon (rel. 12).

Bien sûr, il est intéressant de mettre en évidence des relations de récurrences qui donnent la loi d'évolution de ces particules : nous verrons par la suite, que le terme  $dQ(X_t, Y_t)$  peut être vu comme la loi de transition des particules, et que  $\bar{Z}_t(X_t, Y_t)$  est alors le poids (non-normalisé) associé à chacune d'elles.

- La forme quotient de l'estimateur empêche de conclure à une convergence dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . L'étude de la convergence dans  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  du filtre  $\sum p_t^i X_t^{e,i}$  se décompose en deux parties. Plus précisément, on exprime l'écart  $\sum p_t^i X_t^{e,i} - \widehat{X}_t$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sum p_t^i X_t^{e,i} - \widehat{X}_t &= \sum p_t^i (X_t^{e,i} - \widehat{X}_t) \\ &= \underbrace{\left( \sum_{j=1}^N \bar{Z}_t(X_t^{e,j}, Y_t) \right)^{-1}}_{(1)^{-1}} \underbrace{\sum_{i=1}^N \bar{Z}_t(X_t^{e,i}, Y_t) (X_t^{e,i} - \widehat{X}_t)}_{(2)} \end{aligned}$$

On remarque que  $E((1)) = 1$  et  $E((2)) = 0$ . Les majorations obtenues par simple application à (1) et (2) de l'inégalité de Tchebichev, agrémentées de conditions naturelles dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  suffisent à confirmer la convergence du filtre vers l'espérance conditionnelle.

## 3.2. CONDITIONS DE CONVERGENCE DE L'ESTIMATEUR PARTICULAIRE

### 3.2.1. Détectabilité stochastique

Avant d'aller plus loin, il convient désormais de définir les conditions de convergence de cet estimateur approché.

Une des conditions essentielles de convergence réside dans la détectabilité stochastique dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , à savoir :

$$\mathcal{H}_1 \quad \boxed{\|\tilde{X} - X\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} < +\infty} \quad (20)$$

où  $\tilde{X}$  est le processus d'exploration de loi  $dQ(X_t | Y_t)$ .

Nous nous intéresserons plus précisément par la suite à deux lois  $dQ(X_t | Y_t)$  d'exploration : l'une mettant en œuvre une évolution a priori  $dP(X_t)$ , et l'autre conditionnelle (d'ordre  $n$ )

$$\prod_{\tau=0}^{T-1} dP(X_{[(\tau+1)n]} | Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})$$

(où  $[t] \triangleq (t - n + 1, \dots, t)$ ).

(Nous noterons plus loin  $X^0$  le processus d'évolution a priori et  $\tilde{X}$  le processus  $n$ -conditionnel.)

Pour ces deux changements de probabilité, on peut remarquer que la condition de détectabilité se réécrit :

$$\begin{cases} \|X - E(\tilde{X} | \mathcal{F}^Y)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} < +\infty \\ \|\tilde{X} - E(\tilde{X} | \mathcal{F}^Y)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} < +\infty \end{cases}$$

Dans le cas particulier où  $\tilde{X}$  est le processus d'évolution a priori, ces deux conditions se condensent en une seule (très restrictive) :

$$\|X - E(X)\|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} < +\infty$$

Dans ce cas, les conditions de détectabilité se résument à la finitude de la variance du processus a priori.

### 3.2.2. Régularité des pondérations

Un autre problème réside dans la dégénérescence évolutive des pondérations  $p_t^i$ . En effet, la dérivée de Radon-Nykodim introduite précédemment (12) représente les probabilités non-normées associées à l'exploration de l'espace d'état par les particules  $i$ . Lorsque  $t$  tend vers l'infini et que le nombre  $N$  de particules reste constant, ces probabilités  $p_t^i$  tendent vers zéro créant une dégénérescence de la normalisation.

Pour remédier à cela il convient d'introduire un noyau  $\alpha$ -régularisant sur les observations (facteur d'oubli) dépendant du nombre  $N$  ayant les propriétés suivantes :

$$\alpha : \mathbf{N}^2 \rightarrow [0, 1] \text{ avec } \begin{cases} \alpha_v(0) = 1 & \text{à l'instant courant} \\ \forall v \in \mathbf{N}, u \rightarrow \alpha_v(u) \text{ décroît} \\ \forall u \in \mathbf{N}, v \rightarrow \alpha_v(u) \text{ croît} \end{cases}$$

Soit  $(\alpha^r)$  une suite de noyaux régularisant convergeant simplement vers 1 quand  $r \rightarrow \infty$ .

On notera par la suite  $Z_t^r(X_t, Y_t)$  la dérivée de Radon associée au nouveau changement de probabilité (régularisé) déduit du précédent en remplaçant sur  $[0, t]$  les perturbations gaussiennes  $\nu_t$  par des perturbations gaussiennes  $\nu(\alpha)_t$  de moyenne nulle et de variance  $R(\alpha)_\tau^{-1} = \alpha_\tau^r(t - \tau)R_\tau^{-1}$ .

On note l'estimateur régularisé :

$$\widehat{X}_t^r = E_Q(X_t Z_t^r(X_t, Y_t))$$

où :

$$Z_t^r(X_t, Y_t) = \frac{Z_t^r(X_t, Y_t)}{E_Q(Z_t^r(X_t, Y_t) | Y_t)}$$

On montre que (Cf [9]) sous l'hypothèse de détectabilité stochastique  $\mathcal{H}_1$ , ainsi que :

$$\mathcal{H}_2 \quad \boxed{\widehat{X}_t^r \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} E(X_t | Y_t)} \quad (\text{Continuité}) \quad (21)$$

alors il existe une suite  $r(N)$  de paramètres telle que :

$$\boxed{\widehat{X}_t^{r(N)} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)^*} E(X_t | Y_t)} \quad (22)$$

**Remarque :** Sous cette nouvelle probabilité, les processus  $X$  et  $Y$  sont inchangés.

**Exemples :** Donnons ici à titre d'exemples, plusieurs valeurs possibles du paramètre  $\alpha$  de régularisation :

1. Oubli exponentiel :  $\alpha_v^r(u) = \gamma^u$  avec  $\gamma = (1 - \frac{1}{r}) \in ]0, 1[$ .
2. Fenêtre :  $\alpha_v^r(u) = \mathbb{1}_{[0, T_r]}(u)$  (indicatrice),  $(T_r)_r \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} +\infty$ .

3.2.2.1. Cas particulier où le bruit de mesure  $\nu_t$  est gaussien :

Si  $\nu_t$  est gaussien de moyenne nulle et de variance  $R_t$ , introduire le paramètre  $\alpha$  revient à prendre une nouvelle équation de mesure où le bruit reste gaussien de moyenne nulle, mais de variance  $R_t^\alpha$ . La dérivée de Radon de la transformation s'écrit très simplement :

1. Oubli exponentiel ( $\gamma \in ]0, 1[$ ) :

$$\begin{aligned} Z_t^\alpha(X_t, Y_t) & \exp\left(\sum_{l=0}^t -\frac{1}{2R_l} \gamma^{t-l} \|Y_l\|^2\right) \\ & = \exp\left(\sum_{l=0}^t -\frac{1}{2R_l} \gamma^{t-l} \|Y_l - H(X_l)\|^2\right) \end{aligned}$$

2. Fenêtre de longueur  $T_r$  :

$$\begin{aligned} Z_t^\alpha(X_t, Y_t) & \exp\left(\sum_{l=t-T_r}^t -\frac{1}{2R_l} \|Y_l\|^2\right) \\ & = \exp\left(\sum_{l=t-T_r}^t -\frac{1}{2R_l} \|Y_l - H(X_l)\|^2\right) \end{aligned}$$

L'hypothèse  $\mathcal{H}_1$  de détectabilité stochastique permet de mettre en évidence deux types de processus, pour lesquels les outils de résolution sont différents. En effet, la condition de détectabilité

pour un processus a priori fait intervenir une condition très contraignante sur la variance d'exploration du modèle. C'est dire que l'on pourra distinguer deux cas, à savoir : modèle à variance bornée (que l'on appellera  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -stable) et modèle à variance non-bornée ( $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -instable).

Il convient maintenant, si l'on veut détailler l'algorithme particulière, d'explicitier les expressions de  $Z_t(X_t, Y_t)$  et  $dQ(X_t, Y_t)$  du changement de probabilité (Relation 12).

### 3.3. PROCESSUS STABLES

Nous allons pour cela nous servir de la loi de Bayes pour réécrire  $dP(X_t | Y_t)$  (en utilisant les notations (3)) :

$$\begin{aligned} dP(X_t | Y_t) & = \frac{dP(Y_t | X_t)}{dP(Y_t)} dP(X_t) \\ & = \bar{Z}_t(X_t, Y_t) dQ(X_t | Y_t) \end{aligned} \quad (\text{Cf rel. 12}) \quad (23)$$

Soit en identifiant :

$$\left\{ \begin{aligned} dQ(X_t | Y_t) & = dP(X_t) = dP(X_t | X_{t-1}) dQ(X_{t-1} | Y_{t-1}) \\ \bar{Z}_t(X_t, Y_t) & = \frac{dP(Y_t | X_t)}{dP(Y_t)} = \frac{dP(Y_t | X_t)}{\int dP(Y_t | X_t) dP(X_t)} \\ & = \frac{dP(Y_t | X_t)}{dP(Y_t | Y_{t-1})} \bar{Z}_{t-1}(X_{t-1}, Y_{t-1}) \end{aligned} \right.$$

La récursivité sur  $\bar{Z}_t(X_t, Y_t)$  et  $dQ(X_t | Y_t)$  apparaît ici de manière naturelle : le passage de  $dQ(X_{t-1} | Y_{t-1})$  à  $dQ(X_t | Y_t)$  se faisant au travers de  $dP(X_t | X_{t-1})$  (loi de transition), et la construction de la dérivée de Radon du changement de mesure grâce à  $\frac{dP(Y_t | X_t)}{dP(Y_t | Y_{t-1})}$  (loi d'observation).

Il découle alors directement de la loi des grands nombres que, si l'on tire  $N$  réalisations  $(\pi_t^{0,i})_{1 \leq i \leq N}$  indépendantes selon la loi a priori de  $\pi_t$ , on construit récursivement le peigne de Dirac (Relation 18) à partir de la dynamique du système (équation 1).

A partir du changement de probabilité, on peut donc décomposer l'approche particulière de la manière suivante :

1. **Initialisation :** Il convient tout d'abord d'initialiser les particules  $X_0^{0,i}$  selon la loi a priori  $dP(\pi_0)$ , et les poids  $p_0^i$  à  $\frac{1}{N}$ .
2. **Exploration :** On fait subir à chaque particule le flot du système en tirant  $N$  variables  $\pi_t^{0,i}$  de bruit suivant la loi a priori (connue)  $dP(\pi_t)$  :

$$X_t^{0,i} = F(X_{t-1}^{0,i}, \pi_t^{0,i}) \quad (24)$$

3. **Pondération :** On construit, de manière itérative, la pondération  $p_t^i$  associée à chaque particule à partir de la dérivée de

Radon du changement de mesure 23 :

$$\bar{Z}_t(X_t^{0,i}, Y_t) = \frac{dP(Y_t | X_t^{0,i})}{dP(Y_t | Y_{t-1})} \bar{Z}_{t-1}(X_{t-1}^{0,i}, Y_{t-1}) \quad (25)$$

Les pondérations  $p_t^i$  associées aux particules s'écrivent (Cf rel. 12) :

$$p_t^i = \frac{P(Y_t | X_t^{0,i})}{\sum_{j=1}^N p_t^j} p_{t-1}^i \quad (26)$$

Soit, dans le cas particulier où le bruit de mesure est gaussien de moyenne nulle et de variance  $R_t$  :

$$p_t^i = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2R_t} \|Y_t - H(X_t^{0,i})\|^2\right)}{\sum_{j=1}^N p_t^j} p_{t-1}^i \quad (27)$$

**4. Estimation :** On en déduit alors immédiatement l'estimateur particulière (relation 19) :

$$\hat{X}_t^N = \sum_{i=1}^N p_t^i X_t^{0,i}$$

Pour un traitement dynamique, on itère à chaque instant les parties 2,3 et 4.

Remarques :

- L'algorithme particulière se décompose donc essentiellement en deux parties : une partie évolution a priori de chaque particule (partie 2, rel. 24) reposant sur la connaissance de la loi  $dP(X_t | X_{t-1})$ , c'est à dire de  $dP(\pi_t)$ , et une autre (partie 3) qui associe, au vu de l'observation, une pondération à chaque particule (rel. 26). Une forte pondération associée correspondant à une particule très vraisemblable. Ces deux points constituent en fait l'essentiel de la méthode de résolution particulière du problème de filtrage de processus stables.
- Nous n'avons pas dans ce qui précède introduit le paramètre  $\alpha$  nécessaire à une régularisation des pondérations  $p_t^i$ , lorsque  $t$  croît indéfiniment. Dans ce cas, avec des notations abusives mais néanmoins triviales, les nouvelles pondérations  $p_t^{\alpha,i}$  associées aux particules  $i$  se déduisent directement de la relation 12 où l'on remplace  $Z_t(X_t^{0,i}, Y_t)$  par  $Z_t^\alpha(X_t^{0,i}, Y_t)$ . Elles peuvent alors être construites récursivement :

$$\bar{Z}_t^\alpha(X_t^{0,i}, Y_t) = \left( \bar{Z}_{t-1}^\alpha(X_{t-1}^{0,i}, Y_{t-1}) \right)^\alpha \frac{dP(Y_t | X_t^{0,i})}{dP(Y_t | Y_{t-1})}$$

D'où :

$$p_t^{\alpha,i} = \frac{P(Y_t | X_t^{0,i})}{\sum_{j=1}^N p_t^{\alpha,j}} \left( p_{t-1}^{\alpha,i} \right)^\alpha$$

Dans le cas où le bruit de mesure est gaussien de moyenne nulle et de variance  $R_t$ , les pondérations  $p_t^{\alpha,i}$  se réécrivent très simplement :

- Pour un facteur d'oubli  $\alpha$  exponentiel ( $\alpha \in ]0, 1[$ ) :

$$p_t^{\alpha,i} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2R_t} \|Y_t - H(X_t^{0,i})\|^2\right)}{\sum_{j=1}^N p_t^{\alpha,j}} \exp\left(\sum_{l=0}^{t-1} -\frac{1}{2R_l} \alpha^{t-l} \|Y_l - H(X_l^{0,i})\|^2\right) \quad (28)$$

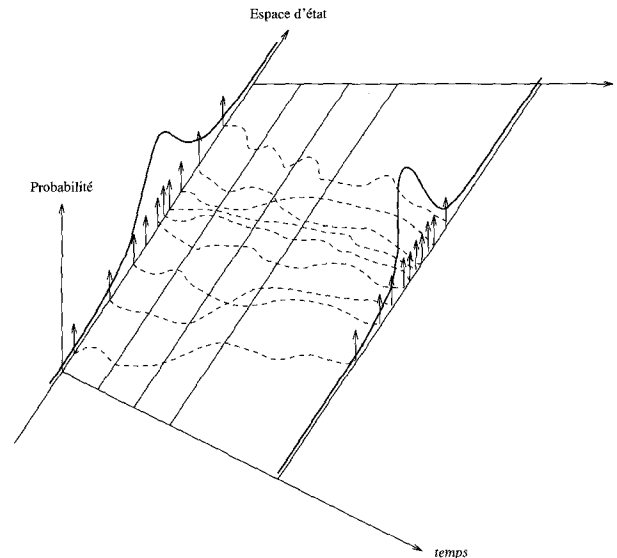
- Pour un facteur d'oubli de type fenêtre glissante (de longueur T) :

$$p_t^{\alpha,i} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2R_t} \|Y_t - H(X_t^{0,i})\|^2\right)}{\sum_{j=1}^N p_t^{\alpha,j}} \exp\left(\sum_{l=t-T}^{t-1} -\frac{1}{2R_l} \|Y_l - H(X_l^{0,i})\|^2\right) \quad (29)$$

Nous avons mis en évidence ici deux politiques possibles, parmi d'autres, de régularisation des observations. La première repose sur une atténuation progressive (exponentielle) des observations où l'on affecte un moindre poids aux observations passées par rapport à celles plus récentes. La seconde se propose de travailler avec une fenêtre glissante, qui ne prend en compte (avec le même poids) que les T dernières observations.

L'algorithme particulière reste donc identique quant à sa construction. Il convient seulement de remplacer la procédure de pondération (27) par l'une ou l'autre des expressions (28, 29).

On peut alors représenter schématiquement l'évolution du réseau particulière de la manière suivante :





### 3.4. PROCESSUS INSTABLES

Dans ce cas, la méthode précédente d'évolution a priori des particules selon la loi  $p(\pi_t)$ , ne suffit plus à stabiliser le processus d'exploration (les supports des particules divergent avec le temps).

La solution à un tel problème se trouve dans l'utilisation d'une exploration, non plus a priori, mais  $n$ -conditionnelle à l'observation. C'est dire que l'on utilise partiellement les mesures dont on dispose, au plus les  $n$  dernières d'après les propriétés de l'observabilité, pour stabiliser le processus d'exploration.

On peut montrer, toujours en utilisant la règle de Bayes, que ( $\forall t = nT$ ) :

$$dP(X_t | Y_t) = \frac{dP(Y_t | X_{t-n})}{dP(Y_t | Y_{t-n})} dP(X_{t-n} | Y_{t-n}) \quad (30)$$

où  $[t] \triangleq (t - n + 1, \dots, t)$

Soit en itérant  $T$  fois cette opération :

$$dP(X_t | Y_t) = \frac{\prod_{\tau=0}^{T-1} dP(Y_{[(\tau+1)n]} | X_{\tau n})}{\eta} \quad (31)$$

$$= \prod_{\tau=0}^{T-1} dP(X_{[(\tau+1)n]} | Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})$$

$$= \bar{Z}_t(X_t, Y_t) dQ(X_t | Y_t)$$

avec ici

$$\bar{Z}_t(X_t, Y_t) = \frac{\prod_{\tau=0}^{T-1} dP(Y_{[(\tau+1)n]} | X_{\tau n})}{\eta}$$

$$= \frac{dP(Y_t | X_{t-1})}{dP(Y_t | Y_{t-n})} \bar{Z}_{t-n}(X_{t-n}, Y_{t-n})$$

$$dQ(X_t | Y_t) = \prod_{\tau=0}^{T-1} dP(X_{[(\tau+1)n]} | Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})$$

$\eta$  : Constante de normalisation

(32)

Dans ce cas, pour construire la mesure de probabilité conditionnelle cherchée, on est ramené à la mesure de probabilité de transition  $dP(X_{[(\tau+1)n]} | Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})$  conditionnelle aux  $n$  dernières mesures.

Il s'agit donc, pour mettre en œuvre le filtre particulière, de faire évoluer les particules  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) non plus suivant la loi a priori  $dP(\pi_t)$ , mais selon  $dP(\pi_{[(\tau+1)n]} | Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})$ . Le principal problème réside dans le calcul ou la construction de cette nouvelle loi.

**Remarque :** Il est à noter que, dans le cas particulier où le modèle est linéaire non-gaussien, on sait facilement calculer cette loi de transition de façon explicite. Dans le cas contraire, nous sommes ramenés à l'approximation particulière de cette loi conditionnelle, dont on montre qu'elle converge ([9]) pour  $n$  fini ( $n \leq$  ordre du modèle).

#### Approximation convergente de la loi $n$ -conditionnelle de transition :

On peut réécrire cette loi à partir de la règle de Bayes :

$$dP(\pi_{[(\tau+1)n]} | Y_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n})$$

$$= \frac{dP(Y_{[(\tau+1)n]} | \pi_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n}) dP(\pi_{[(\tau+1)n]})}{\int dP(Y_{[(\tau+1)n]} | \pi_{[(\tau+1)n]}, X_{\tau n}) dP(\pi_{[(\tau+1)n]})}$$

$$= \frac{z(X_{\tau n}, Y_{[(\tau+1)n]}, \pi_{[(\tau+1)n]}) dP(\pi_{[(\tau+1)n]})}{\int z(X_{\tau n}, Y_{[(\tau+1)n]}, \pi_{[(\tau+1)n]}) dP(\pi_{[(\tau+1)n]})}$$

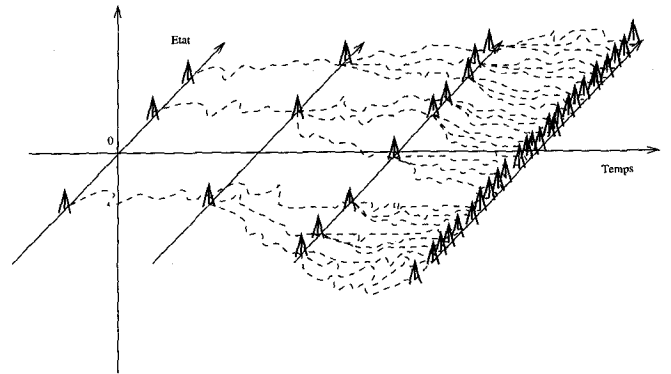
$$= \bar{z}(X_{\tau n}, Y_{[(\tau+1)n]}, \pi_{[(\tau+1)n]}) dP(\pi_{[(\tau+1)n]})$$

Cette décomposition met en évidence les deux lois de probabilités nécessaires pour construire l'exploration conditionnelle de l'espace d'état.

On peut donc, au vu de la relation précédente, décomposer la construction de la loi conditionnelle en deux parties :

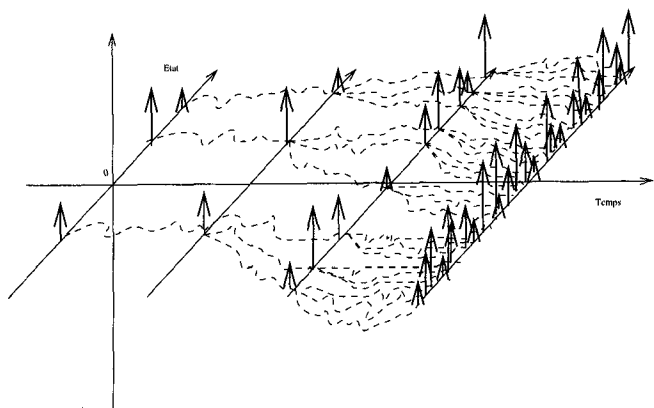
- Exploration a priori :

Dans un premier temps, on tire, pour chaque particule  $\check{X}_{\tau n}^i$ ,  $N'$  trajectoires de bruit  $\pi_{[(\tau+1)n]}^{i,j}$  ( $j=1, \dots, N'$ ) suivant la loi a priori  $dP(\pi_{[(\tau+1)n]})$ . La capacité d'exploration de cette procédure s'illustre par l'arbre stochastique ci-dessous :



- Pondération et Choix de la trajectoire conditionnelle :

Pour chaque particule  $i$ , la pondération  $\bar{z}(X_{\tau n}^i, Y_{[(\tau+1)n]}, \pi_{[(\tau+1)n]}^{i,j})$ , non-normalisée, de chaque trajectoire  $j$  ( $j=1, \dots, N'$ ) issue de  $\check{X}_{\tau n}^i$ , fournit la loi de transition  $n$ -conditionnelle du peigne de Dirac. On tire ensuite suivant cette loi l'état final d'une trajectoire, parmi les  $N'$  trajectoires précédemment obtenues. La capacité d'exploration conditionnelle s'illustre par l'arbre stochastique (pondéré) :



En résumé, on construit le filtre particulaire de la manière suivante :

1. **Initialisation** : Identique au cas stable.
2. **Exploration/Sélection** : On sélectionne ici, conditionnellement à  $Y$ , et pour chaque particule  $i$ , une trajectoire parmi les  $N'$  trajectoires engendrées (voir plus haut).
3. **Pondération** : On construit alors récursivement la pondération finale associée à chaque particule :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t^{N'}(\check{X}_t^i, Y_t) &= \\ \bar{Z}_{t-n}^{N'}(\check{X}_{t-n}^i, Y_{t-n}) &\left( \frac{1}{N'} \sum_{j=1}^{N'} \frac{dP(Y_{[(\tau+1)n]} | \pi_{[(\tau+1)n]}^{i,j}, \check{X}_{\tau n}^i)}{dP(Y_{[(\tau+1)n]} | Y_{\tau n})} \right) \\ N' &\xrightarrow{\sim} \infty \\ \bar{Z}_t(\check{X}_t^i, Y_t) &= \\ \bar{Z}_{t-n}(\check{X}_{t-n}^i, Y_{t-n}) &\frac{dP(Y_{[(\tau+1)n]} | \check{X}_{\tau n}^i)}{dP(Y_{[(\tau+1)n]} | Y_{\tau n})} \end{aligned} \quad (33)$$

4. **Estimation** : Identique au cas stable.

Remarque : On peut ici, tout comme dans le cas stable introduire une régularisation  $\alpha$  sur les pondérations.

### 3.5. EXTENSIONS

Nous présentons ici à titre d'extension deux variantes :

- L'une concerne la régularisation et constitue une version plus performante.
- L'autre concerne la stabilisation et constitue une version plus simple dans un cas particulier important.

#### 3.5.1. Redistribution sur les pondérations

Indépendamment de la stabilité des trajectoires, on remarque aisément que les pondérations  $p_t^i$  des particules sont d'autant plus petites que celles-ci s'éloignent du processus à estimer et sont peu vraisemblables. Si le poids relatif de ces particules est très faible, elles n'ont qu'une contribution minimale dans la construction de

l'estimateur : elles sont donc en d'autres termes sous-utilisées dans la loi des grands nombres qui gouverne l'algorithme. Même si la convergence est assurée pour  $N$  grand, il est utile d'accélérer la convergence en les redistribuant, en même nombre, mais de façon plus conforme aux pondérations probabilistes obtenues.

Pour cela, on redistribue périodiquement les particules  $i$  suivant les pondérations conditionnelles obtenues, leurs poids sont alors réinitialisés à  $\frac{1}{N}$ . Les supports les plus "vraisemblables" ayant plus de chances d'attirer les particules, ils en reçoivent généralement plusieurs. Dans les régions les moins vraisemblables, les particules ne sont pas redistribuées et meurent.

#### 3.5.2. Redistribution autour du capteur

Cette méthode peut être mise en œuvre lorsque l'instabilité du vecteur d'état se manifeste sur les composantes additivement observées dans la mesure au moyen de l'équation 2. C'est par exemple le cas dans le problème de poursuite RADAR, où la position de la cible est a priori instable.

Dans ce cas, une redistribution simple suffit à stabiliser les supports  $X_t^i$  de la manière suivante : on tire  $N$  échantillons de bruit  $\nu_t$  de mesure d'où l'on déduit, sachant  $Y_t$ , les composantes additivement observées dans  $Y_t$ , ainsi stabilisées.

En pratique, on fait porter ce tirage sur une portion  $M < N$  des particules. Il est aussi à noter que l'on peut combiner les deux algorithmes de redistributions précédents. Ceci permet notamment d'obtenir des vitesses de convergence du filtre particulaire significativement plus importantes.

Cette opération est alors itérée de manière périodique.

## 4. Applications

La description de la méthode de résolution particulière met en évidence le caractère général d'une telle approche.

Il apparaît clairement, au vu de l'exposé précédent que cette approche ne souffre d'aucune limitation quant à la nature des non-linéarités ou des statistiques de bruit du problème à traiter. Le seul souci que l'on doit avoir, porte sur le nombre  $N$  de particules à utiliser afin d'obtenir de bons résultats sur le plan pratique. Il est clair que ce nombre dépend de la dimension du vecteur des bruits qui détermine la complexité de l'espace de probabilité, et conditionne directement la complexité du filtre ainsi construit.

Il faut cependant remarquer, que l'évolution constante des puissances de calcul, fait de ce nombre de particules une contingence appelée à diminuer d'importance en pratique. D'autre part l'avantage primordial de cette méthode réside dans sa nature massivement parallélisable, en temps réel.

Nous appliquons ci-après cette approche à un problème clé du traitement optimal du signal RADAR/SONAR, qui est l'intégration cohérente du signal en présence de cibles manœuvrantes, et de non-linéarités de mesures polaires.

## 4.1. POURSUITE RADAR DE CIBLES MANŒVRANTES

On s'attache ici au problème de poursuite RADAR tel qu'il est usuellement considéré : un prétraitement de signal reçu, à très court terme, permet l'extraction de paramètres cinématiques tels la distance et la position angulaire. Il reste d'assez fortes imprécisions rémanentes, qui tiennent à la faible intégration temporelle des estimations paramétriques quasi-stationnaires que permet le très court terme. La poursuite RADAR s'attache à restituer l'état réel de la cible avec plus de précision (à des fins notamment de prédiction) en retraitant ces résultats bruités, au moyen d'un modèle de la cible et de ses aléas ainsi que des transformations polaires inhérentes aux résultats mesurés.

### Position du problème

A cet égard, le problème de poursuite RADAR de cibles manœuvrantes est un problème difficile par le fait que :

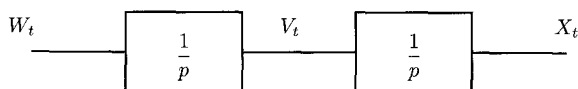
- i) les équations mises en jeu (mesure, dynamique) sont fortement non-linéaires.
- ii) les aléas de pilotage de la cible sont fortement non-gaussiens.

Le principal problème est de prendre en compte un modèle de dynamique pertinent dicté par la physique et des aléas de comportement du mobile qui soient réalistes.

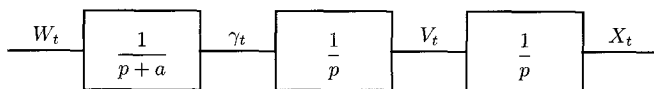
Les outils habituels de filtrage non-linéaire tel que le filtre de Kalman Étendu, ont montré leurs limites à traiter des modèles fortement non-linéaires, et à statistiques de bruit non-gaussiennes.

Pour contourner ce problème, on se donne généralement des équations du mouvement très simples en repère cartésien, que nous conservons dans cet article\*.

C'est notamment le cas des modèles linéaires du type (position, vitesse) :



ou encore (position, vitesse, accélération bruitée) :



Ce modèle, couramment utilisé en pistage radar, est généralement connu sous le nom de modèle de Singer ([23], [24]).

On pourra trouver, par exemple dans [5], d'autres variantes du modèle de Singer. Notamment un modèle modifié "un peu plus physique", qui présente une rétroaction sur la vitesse afin de tenir

compte des forces de frottement visqueux introduites par le milieu, qui ont pour effet de plafonner la vitesse.

Il apparaît clairement que l'avantage de ces modèles (dits doubles ou triples intégrateurs) réside dans leur caractère linéaire auquel on adjoint le plus souvent des statistiques gaussiennes.

Toutefois une non-linéarité inévitable s'introduit dans le problème de trajectographie par le fait que les mesures du capteur sont effectuées en coordonnées polaires, attachées à l'observateur, alors que le modèle est généralement en coordonnées galiléennes. Cela conduit souvent à linéariser la transformation polaire/cartésien ce qui engendre des problèmes d'inobservabilités locales, et d'instabilités du filtre résultant ([19]).

Le dernier point généralement passé sous silence, est la prise en compte réaliste des aléas de manœuvre de la cible. Cet aspect est le problème principal de la poursuite. On cherche à la fois à répondre à deux questions : y a-t-il eu manœuvre de la cible, et si oui dans quelle proportion?

Un tel problème est d'ailleurs une des principales pierres d'achoppement du filtre de Kalman. En effet, ce filtre est construit sur la base de modèles linéaires et gaussiens. Dans le cas où il y a manœuvre possible de la cible, la statistique de la commande du mobile doit comporter un aléa poissonien. Par nature le filtre de Kalman ne peut réagir qu'avec beaucoup de traînage à un aléa poissonien. On pourrait bien évidemment y remédier en augmentant la variance du bruit de dynamique, mais cela aurait pour effet immédiat de dégrader l'estimation dans les portions stationnaires utiles à la prédiction.

On a généralement recours à deux types de solutions :

- Soit on cherche à rendre le filtre adaptatif à la dynamique ([25], [27]).
- Soit on cherche à utiliser le modèle le mieux adapté à la situation : c'est l'approche multi-modèles ([2], [4], [14]).

L'algorithme particulière précédemment exposé, permet des bruits de dynamique ( $\pi_t$ ) ayant de statistiques très diverses notamment des ruptures poissoniennes à valeurs dans un continuum, et donc de suivre parfaitement des manœuvres quelconques de la cible.

### Modèle de Singer modifié avec aléas non-gaussiens et capteur polaire :

Nous présentons ici les résultats obtenus pour un modèle de dynamique du type Singer modifié (la viscosité porte sur la vitesse). Nous comparons ensuite les comportements du filtre particulière et du filtre linéarisé.

Le cas tridimensionnel ne présentant aucune difficulté supplémentaire, nous nous sommes bornés par la suite à l'étude de modèle bidimensionnel.

\* On a par ailleurs traité [21], le cas de modèles de cibles non-linéaires, respectant une dynamique de vol plus réaliste d'avions ou missiles.

Soit le modèle de dynamique suivant (en coordonnées cartésiennes) :

$$\underline{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ V_t^X \\ a_t^X \\ Y_t \\ V_t^Y \\ a_t^Y \end{pmatrix} = \mathbf{F} \underline{X}_{t-1} + W_t$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\Delta t}{k_2} & \frac{k_1}{k_2} \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{\Delta t}{k_2} & \frac{k_1}{k_2} \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ V_t^X \\ a_t^X \\ Y_t \\ V_t^Y \\ a_t^Y \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W_t^X \\ 0 \\ 0 \\ W_t^Y \end{pmatrix}$$

où  $\Delta t$  représente le temps (bref) entre deux instants de mesure ( $\Delta t=50\text{ms}$ ), ( $k_1, k_2$ ) deux paramètres agissant sur la dynamique du mobile, ( $W_t^X, W_t^Y$ ) deux bruits blancs gaussiens d'écart-type ( $\sigma_X, \sigma_Y$ ), et  $\underline{X}_t$  le vecteur d'état à l'instant  $t$  en coordonnées cartésiennes (position, vitesse, accélération suivant X et Y).

*Capteur non-linéaire (polaire) :*

On peut de même écrire l'équation de mesure :

$$\underline{Y}_t = \begin{pmatrix} Y_t^D \\ Y_t^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{X_t^2 + Y_t^2} & 0 \\ 0 & \text{Atan}(\frac{X_t}{Y_t}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_t^D \\ \nu_t^A \end{pmatrix}$$

où  $Y_t^D$  représente la mesure de la distance radiale,  $Y_t^A$  celle de l'azimut et ( $\nu_t^D, \nu_t^A$ ) deux bruits blancs gaussiens de moyenne nulle et d'écart-type ( $\sigma_D=5\text{m}, \sigma_A=1\text{mrad}$ ).

Le principal problème engendré par ce système vient de la non-linéarité du changement de coordonnées polaire (mesure)/cartésien (dynamique), que la technique particulière permet de traiter, sans approximation, par opposition à l'approche courante du filtre de Kalman étendu.

Nous allons nous intéresser par la suite à un mobile se déplaçant selon une trajectoire ayant les caractéristiques initiales suivantes :

$$\begin{aligned} a_0^X &= -20 & V_0^X &= -200\text{m/s} & X_0 &= 10\text{km} \\ a_0^Y &= -10 & V_0^Y &= -100\text{m/s} & Y_0 &= 10\text{km} \end{aligned}$$

Le signe moins sur la commande en accélération signifie que le mobile décrit une trajectoire de ralliement (ici sur les deux coordonnées).

De plus, ce mobile va effectuer à l'instant  $t=350 \times 50\text{ms}=17.5\text{s}$  un changement de commande en accélération, pour passer de  $a^X=-20$  à  $a^X=5$ .

*Aléas de pilotage poissonniens :*

Comme il est bien connu des praticiens, les manœuvres imprévisibles de pilotage sont convenablement représentées par un bruit poissonnien doublement stochastique (b.p.d.s.) : c'est le produit direct d'une mesure aléatoire binaire  $\varepsilon_t$  d'occurrence poissonnienne et d'une amplitude aléatoire indépendante  $U_t$  de distribution quelconque, soit :

$$\text{b.p.d.s.} = \varepsilon_t \cdot U_t$$

L'ensemble est entièrement caractérisé par la mesure de probabilité :

$$dP(\varepsilon_t \cdot U_t) = \lambda_t \Delta t dP_t(U)$$

En l'absence de toute autre information, on pourra prendre pour  $P$  une distribution d'amplitude gaussienne, ce qui rend toutefois le processus  $W$  très différent d'un processus gaussien. Par ailleurs, le document précité ([21]) examine le cas de distributions uniformes dans un compact, afin de mieux rendre compte de la limitation physique des commandes de gouvernes.

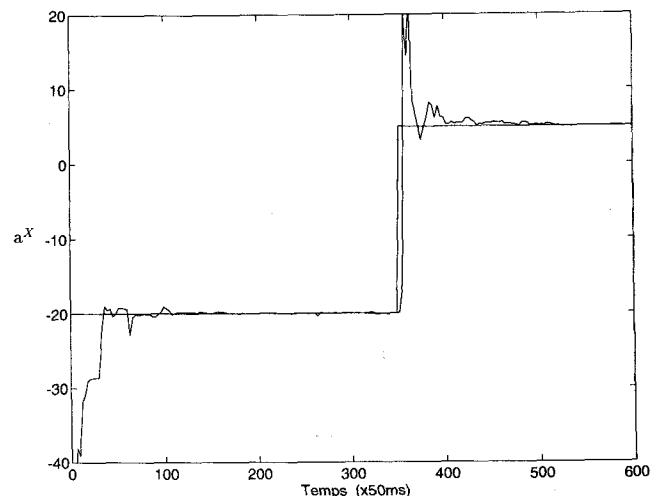
Nous étudions ci-après comment les deux filtres réagissent à cette variation.

D'un point de vue pratique, la statistique du bruit de dynamique  $\pi_t$  pour le filtre particulière sera prise comme la somme d'un faible bruit blanc gaussien  $\mathcal{N}_{(0, \sigma=0.03)}$ , et d'un bruit blanc gaussien-poissonnien (Gaussien  $\mathcal{N}_{(0, \sigma'=30)}$  en amplitude, Poisson ( $\lambda=3/10000$ ) dans le temps).

(On notera que l'algorithme particulière permet de traiter des aléas de pilotages d'amplitude bornée, plus réalistes).

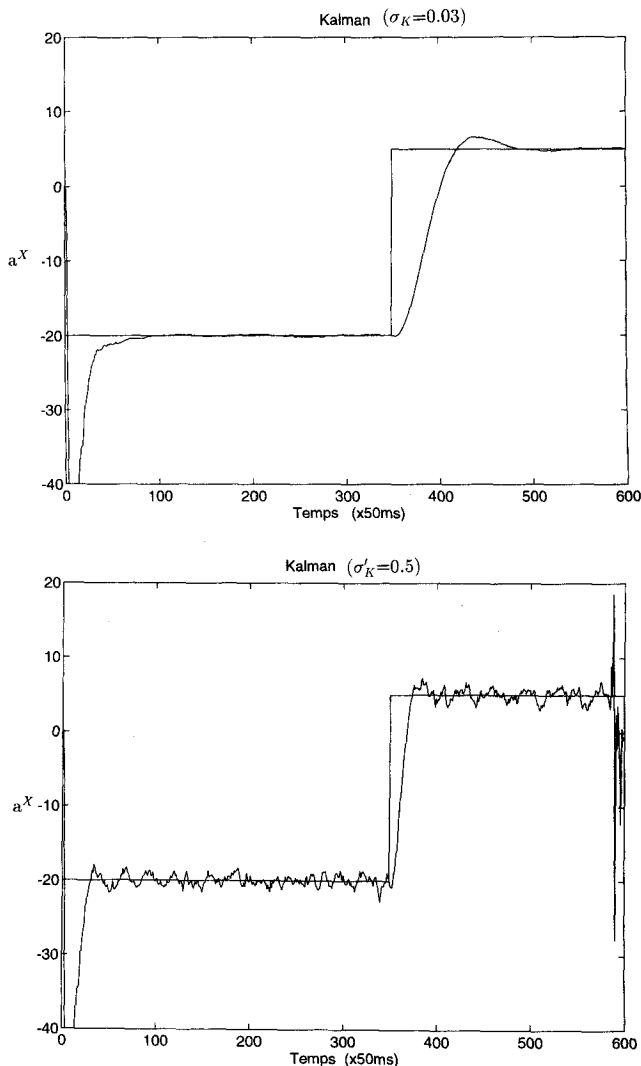
Dans cette statistique, la partie dérive brownienne permet d'éviter les éventuels biais asymptotiques, et la partie poissonnienne rend compte des changements quelconques possibles de consigne.

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus dans ce cadre :



On remarque que la statistique choisie permet au filtre de bien se comporter, à la fois dans les parties stationnaires et dans les parties où il y a changement de commande.

Si l'on construit de même le filtre de Kalman Etendu pour deux écart-types de bruit de dynamique différents ( $\sigma_K=0.03$  et  $\sigma'_K=0.5$ ), c'est à dire l'une égale à l'écart-type de la dérive brownienne du particulière, et l'autre à l'écart-type équivalent du bruit poissonien, on obtient les résultats suivants :



On remarque aisément que pour la première figure, le filtre se comporte très bien en régime stationnaire, et traîne lors du changement de commande en accélération. Les choses sont inversées pour la seconde.

En fait, le filtre particulière réalise l'idéal dans les deux cas, tel que l'impose la théorie du filtrage non-linéaire.

Pour mieux se rendre compte de la supériorité de la méthode particulière, nous présentons sous forme de tableau, les résultats comparatifs obtenus en prédiction de tir à 3,5 et 8 secondes, ce pour deux détecteurs de proximité :

|                 | Particulière |          | Kalman Etendu |          |
|-----------------|--------------|----------|---------------|----------|
|                 | P(<.10m)     | P(<.20m) | P(<.10m)      | P(<.20m) |
| Prédiction à 3s | 0.95         | 1        | 0.14          | 0.39     |
| Prédiction à 5s | 0.75         | 0.96     | 0.07          | 0.28     |
| Prédiction à 8s | 0.45         | 0.90     | 0.03          | 0.16     |

On peut remarquer que la qualité du prédicteur proposé est très supérieure à celle du prédicteur construit sur la base du filtre linéarisé, pour un aléa gaussien-poissonien de même variance dans les deux cas.

## 4.2. AZIMÉTRIE PASSIVE SONAR (2D)

Nous présentons ici un autre cas intéressant de modèle exhibant de fortes non-linéarités dynamiques : l'azimétrie passive SONAR.

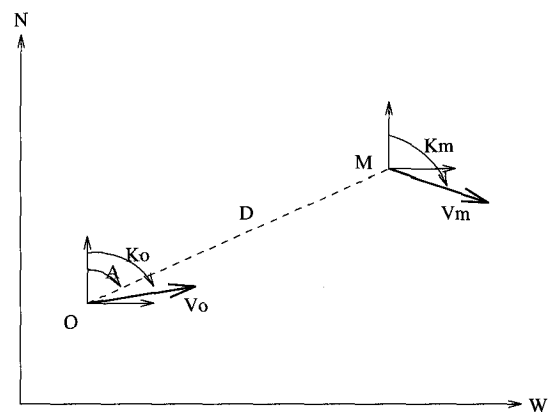
Il est bien connu que l'azimétrie passive au sens strict, c'est à dire se limitant au traitement des azimuts mesurés, conduit à l'inobservabilité de la distance pour des mobiles (bruiteur et observateur) se déplaçant de manière rectiligne uniforme. C'est malheureusement le cas le plus intéressant en pratique.

Il est tout aussi connu ([3]) que la prise en compte de la dérive Doppler dans les mesures SONAR permet de lever cette indétermination. Toutefois ce problème a surtout été étudié sous l'angle déterministe. Son traitement en présence de bruits réalistes pose un problème typique de filtrage non-linéaire. Nous l'abordons ci-après par la méthode particulière, en tenant compte d'une seule voie du spectre bruiteur (pulsation  $\omega$ ).

On peut poser le problème de la manière suivante :

Soit un observateur O se déplaçant dans un plan, et un mobile M, appelé bruiteur monochromatique, sur lequel on a une information de direction. Comment peut-on reconstituer toute la trajectoire (et notamment la distance) de M, à partir de l'hypothèse rectiligne de O et de M, ainsi que l'azimut A sous lequel il voit M, et la dérive Doppler entachés des bruits de mesure?

Le système est exprimé dans le repère :



où  $(V_0, K_0)$  sont les vitesse et cap de l'observateur, et  $(V_M, K_M)$  les vitesse et cap du bruiteur.

On peut écrire le système, pour un observateur immobile dans un repère galiléen adéquat, directement à partir de considérations cinématiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A} = \frac{1}{D} V_M \sin(K_M - A) \\ \dot{D} = V_M \cos(K_M - A) \\ \dot{K}_M = 0 \\ \dot{V}_M = 0 \\ \dot{\omega} = -\frac{\omega_0 V_M^2 \sin^2(K_M - A)}{D(c - V_M \cos(K_M - A))} \end{array} \right.$$

On notera que la pulsation  $\omega$  de la source (bruiteur) est une composante d'état du système.

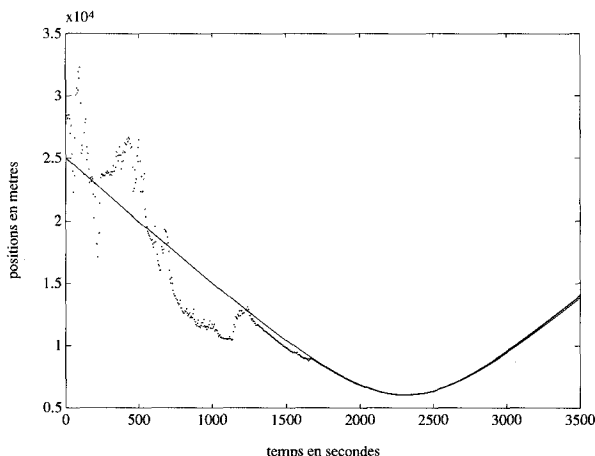
L'équation de mesure associée est :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t^A = A_t + \nu_t^A \\ y_t^\omega = \omega_t + \nu_t^\omega \end{array} \right.$$

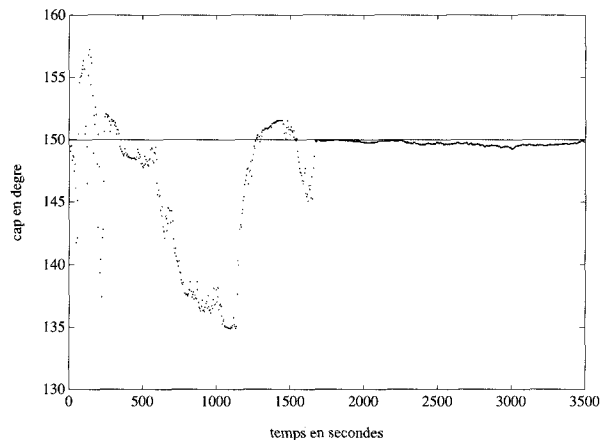
où  $\nu_t^A$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart-type  $1^\circ$  et  $\nu_t^\omega$  un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart-type  $0.5Hz$ .

Dans les conditions de l'expérience simulée, la cible se trouve initialement à une distance radiale  $D=25km$  et un azimut  $A=-16^\circ$  de l'observateur. Sa vitesse initiale est de  $10.5 m/s$  et son cap  $K_M=150^\circ$ . La pulsation  $\omega_0$  de la cible écoutée est égale à  $250 tr/m$ .

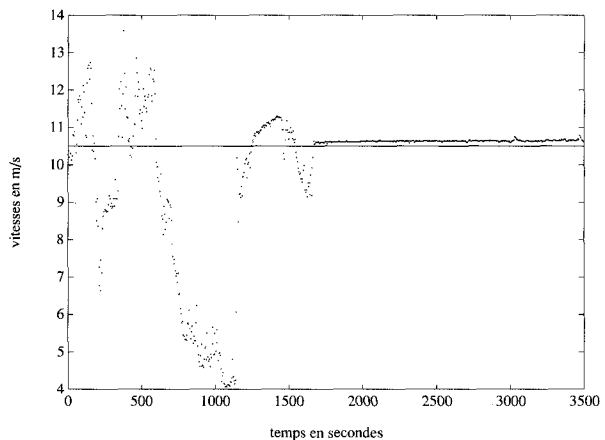
Nous présentons ici la reconstitution estimée de la position par filtrage non-linéaire particulière :



du cap :



et de la vitesse :



## 5. Conclusion

La méthode que nous avons présentée dans cet article permet d'aborder de façon générale la résolution effective des problèmes non-linéaires d'estimation dynamique. Procédant par exploration particulière globale de l'espace de probabilité, elle ne connaît aucune limitation de principe quant aux non-linéarités à traiter. Elle est tout particulièrement adaptée aux problèmes fortement structurés dont les non-linéarités interdisent une approche par l'analyse mathématique, fût-elle approchée.

Les différentes variantes que nous avons proposées permettent de traiter l'ensemble des problèmes clés que l'on montre (processus stables, instables, accélération par redistribution ...) : il convient évidemment de choisir la variante algorithmique adaptée à la situation.

Le vaste champ d'applications de cette méthode a conduit à ne traiter que deux exemples significatifs dans le domaine militaire.

Il est clair que des exemples tout aussi importants concernant d'autres secteurs relèvent de cette approche.

La seule contrainte réside dans la nature même de la résolution particulière : le nombre de particules relativement élevé nécessaire à la construction de l'estimateur optimal. Néanmoins, l'aspect massivement parallèle de la méthode permet d'ores et déjà de concevoir la mise en œuvre de filtres temps-réels ([28]).

Les auteurs tiennent à remercier en particulier G. Maynard de Lavalette du CTSN (Toulon), pour son précieux soutien au cours de cette étude.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.J.AIDALA, S.E.HAMMEL, "Utilization of modified polar coordinates for bearings-only tracking", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 28 pp 283-294 (Mars 1983)
- [2] Y.BAR-SHALOM, "Tracking and data association", Mathematics in Science and Engineering, Academic Press (1988)
- [3] O.BENNIS, T.HUILLET, A.MONIN, G.SALUT, "Modélisation, estimation, décision optimales pour l'élaboration des éléments but à partir de l'écoute passive SONAR", Contrat DCAN-CAPCA n° C-84.48.801.287 (1986)
- [4] H.BLOM, Y.BAR-SHALOM, "The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 33 pp 780-783 (Aout 1988)
- [5] C.BOZZO, "Le filtrage optimal et ses applications aux problèmes de poursuite", Librairies LAVOISIER, Tome III (1983)
- [6] R.BUCY, "Non linear filtering", IEEE Trans. Automatic Control Vol.10 (1965)
- [7] F.CAMPILLO, F.LEGLAND, "Méthodes de filtrage non-linéaire, exemple : Trajectographie passive", Séance du GdR Automatique, Paris (16 Mai 1990).
- [8] F.CAMPILLO, F.LEGLAND, "Filtrage et Trajectographie", Séance du GdR Automatique (pôle Systèmes Avancés de Régulation et Techniques Adaptatives) Grenoble (10 décembre 1993).
- [9] P.DEL MORAL, "Résolution particulière des problèmes d'estimation et d'optimisation non-linéaires", Thèse de l'Université Paul Sabatier (Juin 1994)
- [10] P.DEL MORAL, J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT, "Traitement non-linéaire du signal par réseau particulière : application RADAR", Quatorzième colloque GRETSI (Juan-Les-Pins), (13-16 Septembre 1993)
- [11] P.DEL MORAL, J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT, "Traitement particulière du signal RADAR : détection, estimation et reconnaissance de cibles aériennes", Rapport LAAS n° 92495 (Janvier 1993)
- [12] P.DEL MORAL, G.RIGAL, G.SALUT, "Particules aléatoires et filtrage non-linéaire", Séance du GdR Automatique du CNRS (Pôle non-linéaire), Paris, 8 Février 1991.
- [13] P.DEL MORAL, G.RIGAL, G.SALUT, "Approche Monte-carlo pour la mise en œuvre particulière du filtrage non-linéaire", Séance du GdR Automatique du CNRS (Pôle non-linéaire), Paris, 8 Novembre 1991.
- [14] F.DUFOUR, M.MARITON, "Tracking a 3D maneuvering target with passive sensors", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol. 27, pp 725-738 (Juillet 1991)
- [15] N.J. GORDON, D.J. SALMOND, A.F.M. SMITH, "Novel approach to nonlinear/non-Gaussian bayesian state estimation", IEE Proceedings-F, Vol. 140, N° 2 (Avril 1993).
- [16] T.HUILLET, G.SALUT, "Interprétation des équations du filtrage non-linéaire", Séance du GdR Automatique du CNRS (Pôle non-linéaire), Paris, 8 Novembre 1989.
- [17] R.KALMAN, "A new approach to linear filtering and prediction problems", J. Bas. Eng. ASME Vol. 82 pp 33-45 (1960)
- [18] R.KALMAN, R.BUCY, "New results in linear filtering and prediction theory", J. Bas. Eng. ASME Vol. 83 pp 95-108 (1961)
- [19] K.S.MILLER, D.M.LESKIW, "Non linear estimation with Radar observations", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol. 18 pp192-200 (Mars 1982)
- [20] A.MONIN, G.SALUT, "Filtrage optimal de Volterra à horizon infini : application aux systèmes bilinéaires", Quatorzième colloque GRETSI (Juan-Les-Pins), (13-16 Septembre 1993)
- [21] J-C.NOYER, G.RIGAL, G.SALUT, "Poursuite RADAR de cibles fortement manœuvrantes par filtrage non-linéaire", Contrat D.C.A.N. n° A.92.50.194, Rapport LAAS N° 93444, Rapport final (Septembre 1993)
- [22] G.RIGAL, G.SALUT, "L'estimation particulière dans les problèmes non-linéaires généraux", Séance du GdR Traitement du Signal du CNRS (ordres supérieurs), Paris, 28 Octobre 1992
- [23] R.A.SINGER, "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-6, n° 4, pp 473-483 (Juillet 1970)
- [24] R.A.SINGER, K.W.BEHNKE, "Real-time tracking filter evaluation and selection for tactical applications", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-7, n° 1, pp 100-110 (Janvier 1971)
- [25] J.S.THORP, "Optimal tracking of maneuvering targets", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol. 9 pp 800-810 (Nov. 1972)
- [26] M.VAN DOOTINGH, F. VIEL, D. RAKOTOPARA, J.P. GAUTHIER, "Coupling of non-linear control with a stochastic filter for state estimation : application on a continuous free radical polymerization reactor", I.F.A.C. International Symposium ADCHEM'91, Toulouse (14-15 Octobre 1991)
- [27] T.C.WANG, P.K.VARSHNEY, "A tracking algorithm for maneuvering targets", IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol.29 pp 910-924 (Juillet 1993)
- [28] Brevet DIGILOG en cours de dépôt, Réf : H 19 890 Cas 2 JCC/MRS 21 du 10 Janvier 1994

*Manuscrit reçu le 2 mai 1994.*

**LES AUTEURS**

**Pierre DEL MORAL**



Pierre Del Moral est né à Decazeville en 1965. Après des études de Mathématiques à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, il obtint le DEA de Mathématiques Pures avec la mention très bien. Il a soutenu en juin 1994 sa thèse de Doctorat en Automatique et Traitement du Signal au sein du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS, à Toulouse, en tant que chercheur contractuel de la société DIGILOG.

**Gilles RIGAL**



Gilles Rigal est né à Toulouse en 1965. Après des études en Electronique, Electrotechnique et Automatique à l'Université Paul Sabatier, il obtint le DEA d'Automatique, puis sa thèse de Doctorat dans la même université, en effectuant ses recherches au sein du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS. Il est actuellement ingénieur concepteur à la société DIGILOG, à Aix-en-Provence.

**Jean-Charles NOYER**



Jean-Charles Noyer est né à Talence en 1970. Après des études de Physique à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, il obtint le DEA de Physique Théorique de l'Université d'Aix-Marseille II en 1992. Il prépare actuellement sa thèse, plus particulièrement consacrée aux problèmes RADAR, au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, tout en enseignant comme moniteur à l'Université Paul Sabatier.

**Gérard SALUT**



Gérard SALUT est né en 1947 à Toulouse. Ayant reçu la médaille de bronze du CNRS pour ses travaux de thèse en 1976, il est actuellement Directeur de Recherche et dirige l'équipe de systèmes non-linéaires et stochastiques au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS à Toulouse. Les principaux thèmes de recherche concernent l'estimation non-linéaire, l'identification et la réduction de modèle, avec une mention spécifique à la résolution particulière des problèmes de filtrage et d'optimisation.