



HAL
open science

La géométrie des couleurs

David Alleysson

► **To cite this version:**

| David Alleysson. La géométrie des couleurs. 2022. hal-03511369

HAL Id: hal-03511369

<https://hal.science/hal-03511369>

Preprint submitted on 4 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La géométrie des couleurs

Traduction de l'article de Joseph W. Weinberg, *The geometry of colors*, General Relativity and Gravitation, Vol. 7, No. 1 (1976), pp. 135-169. Avec commentaires et détail des calculs en annexe.

David Alleysson

LPNC, CNRS-UGA, 1251 Av. Centrale, Grenoble, 38400, France.

Contributing authors: [David.Alleysson \(at\) univ-grenoble-alpes.fr](mailto:David.Alleysson@univ-grenoble-alpes.fr);

1 Introduction

En 1966, Newton découvre que les couleurs forment un faisceau convexe dans un espace vectoriel linéaire de dimension trois [1]. En 1891, Helmholtz suggéra une métrique pour cet espace [2] ; et en 1942, MacAdam investiga les valeurs expérimentales de la métrique [3]. Pendant ce temps, Riemann en 1854 [4], qui est à l'origine d'une époque qui a fait date sur la fondation de la géométrie différentielle, eu isolé l'espace des positions des objets et l'espace des couleurs comme étant les seules variétés continues de plusieurs dimensions de l'expérience commune. Plus loin dans ce document il souligna que la métrique représente l'effet de facteurs extérieurs à l'espace lui-même - le résultat de ce qu'il appelle "forces" agissant sur l'espace pour le tenir compact. La suggestion de Riemann a été brillamment utilisée en relativité générale, où la gravitation est une force qui produit significativement la métrique de l'espace-temps. Dans l'espace des couleurs, cependant, très peu a été fait pour identifier ces "forces" en analogie à la gravitation, lesquelles devrait compter pour la métrique aussi bien que pour la frontière naturelle des couleurs physiques. (Pour s'en assurer, Helmholtz [2], et plus tard Schrödinger [5] proposèrent des formules semi-empirique pour la métrique, conçues pour incorporer les caractéristiques principales de la loi empirique de Weber-Fechner. Mais leurs propositions ne tenaient pas compte de la frontière naturelle des couleurs physiques - la caractéristique la plus évidente de la métrique. Elles ne sont pas non plus en accord avec les résultats qualitatifs des expériences les plus récentes [6]).

Cet article élabore une théorie de l'espace couleur pour laquelle les "forces" de Riemann sont essentiellement celles de la sélection naturelle. Toute valeur

de survie de la vision des couleurs doit résider dans son aide à la reconnaissance des objets par leurs réflectances. Une réflectance peut-être vue sous une large variété de couleurs d'illuminations naturelles causant des variations correspondantes de couleurs pour la lumière réfléchiée par l'objet. Pourtant, nous n'échouons pas, en général, de discriminer ou reconnaître des objets correctement à cause de cela [7]. L'existence et la véracité des jugements de réflectance invariants à l'illumination, aussi imparfait qu'ils puissent être, mèneront à l'existence de distributions d'intensités spéciales pour chaque couleur physique, appelé protomères [8] pour les distinguer des métamères de cette couleur [Explication 11.1]. L'espace des protomères est un espace vectoriel linéaire tridimensionnel non borné pour lequel l'addition est le processus physique de modification de la distribution d'une protomère par réflexion depuis un objet de réflectance protomère. La transformation de l'espace des protomères dans une région de l'espace couleur est une généralisation non linéaire de la loi de Weber-Fechner. La différentielle de la transformation génère la métrique ; l'image des protomères infinies intégrés dans la transformation est la frontière naturelle des couleurs physiques.

Plusieurs applications de la théorie des protomères sont possibles, offrant l'opportunité de les tester par l'expérience et de combler des détails empiriques comme l'adaptation et le phénomène d'induction. Celles-ci seront discutés plus tard dans une autre contribution. Ici, nous seront concernés seulement par le problème le plus simple. Pour focaliser la discussion à ce point, de sévères limitations seront données sur les types d'expériences sur lesquelles baser la théorie et sur lesquelles la théorie pourrait s'appliquer. Le champ visuel est supposé découpé en régions indexées par $K = 0, 1, 2, \dots$, chaque région suffisamment caractérisée par une seule distribution d'intensité spectrale non-négative $V_K(\lambda)$ définie dans l'intervalle du domaine visible des longueurs d'onde λ normalisé à cet effet à $-1 \leq \lambda \leq 1$. $V(\lambda)$ est l'énergie de la lumière entrant dans l'œil à partir du patch K par unité de temps, par unité d'angle solide du champ visuel, telle que mesuré par un spectrophotomètre d'ouverture approprié en unité de watt/mètre. L'angle solide sous-tendu par la région, sa position dans le champ visuel, la forme de la région ainsi que la durée de l'observation ne sont pas considérés à ce stade.

Un dispositif optique pour atténuer ou amplifier $V_K(\lambda)$ par multiplication avec tout nombre non négatif v^K est supposé disponible. Des dispositifs pour superposer, ou additionner, les intensités spectrales sur une même région seront aussi postulés. L'observateur est supposé manipuler les contrôles et enregistrer les configurations et les valeurs du spectrophotomètre. En dehors de cela, la seule action requise et permise par l'observateur est d'affirmer ou infirmer que deux régions sont égalisées dans tous les aspects visuels sauf géométriques. Si elles égalisent au point qu'un contour entre elles ne puisse être détecté, leurs intensités spectrales seront dites avoir, ou appartiennent à la même couleur, sinon non. Le nom de la couleur ou la possibilité qu'elles égalisent dans certains

aspects comme la "luminosité"¹ ou la "teinte" mais pas pour les autres, ne sont pas considérés à ce stade. Sous ces règles strictes, les termes familiers comme teinte, saturation, luminosité, luminance, efficacité lumineuse, et les unités comme le phot, le troland, le stilb, le schroon et le nit seront dépourvues de support expérimental. Le nom des couleurs apparaîtra occasionnellement pour orienter les remarques de descriptions générales. Le terme de "luminosité" sera réservé, suivant Schrödinger [5] pour une propriété mathématique de la métrique, sans impliquer sa mesurabilité par photométrie hétérochromatique.

2 Espace Couleur Newtonien

Newton découvre qu'un nombre illimité de distributions spectrales d'intensités telles que $U(\lambda)$, $V(\lambda)$, etc. peuvent-être précisément égalées. La classe d'équivalence des distributions à laquelle elles appartiennent est appelé leur *couleur*, dénoté $\{U(\lambda')\} = \{V(\lambda')\} = \text{etc.}$ Les distributions individuelles regardées comme membres d'une même classe d'équivalence sont appelées *métamères* (de leur couleur), et la longueur d'onde, λ' , où l'apostrophe signifie que la variable est muette - i.e. aucune opération agissant sur elles en dehors des accolades ne permet d'isoler une valeur particulière de la distribution selon la longueur d'onde λ' .

L'amplification des intensités spectrales et la superposition des intensités ont été trouvés expérimentalement comme commutant avec l'égalisation [Explications 11.2.1] :

$$\{U_K(\lambda')\} = \{V_K(\lambda')\} \implies \{v^K U_K(\lambda')\} = \{v^K V_K(\lambda')\} \quad (2.1)$$

avec la convention usuelle de sommation pour la répétition des indices². En combinant les intensités spectrales *physiques*, i.e., celles avec $V_K(\lambda) \geq 0$, avec des coefficients de mélange physiquement réalisables, $v^K \geq 0$, identiques de chaque cotés du mélange, l'effet de soustraction des intensités spectrales peut être sécurisé. Les intensités spectrales *non physiques*, celles dont les valeurs dans le domaine visible, $\lambda^2 \leq 1$, sont négatives, peuvent-être définie formellement par ce processus.

L'indice K et le processus de transvection avec v^K peuvent-être tout deux associés avec une couleur, ou la classe d'équivalence dans son ensemble, puisqu'il n'est pas important dans 2.1 pour quelle métamère de cette couleur ils sont appliqués. Donc, les couleurs, physiques et non physiques, forment ensemble un espace vectoriel linéaire. Le symbole de classe peut-être remplacé par le symbole vecteur \mathbf{v} , moins encombrant, et avec lequel l'addition vectoriel

¹Nous utiliserons la terme *luminosité* pour traduire *brighness* bien que la traduction littérale soit *brillance*. Mais ce dernier terme requiert plus en Français d'un attribut de texture de la surface plutôt qu'un attribut de proportion de réflexion.

²La convention dite convention d'Einstein, propose que quand un indice est répété, comme dans $\sum_K v^K V_K(\lambda)$ le symbole somme soit supprimé et s'écrive $v^K V_K(\lambda)$. Nous pensons que cette convention même si elle allège l'écriture, amène de la confusion. Dans l'annexe nous n'utiliserons pas cette convention, permettant au lecteur de se rassurer sur la présence ou non d'une somme. Pour toute incision sur le fait qu'une somme soit présente ou non, nous renvoyons aux détails des calculs en annexe.

représente le mélange:

$$\mathbf{v} \equiv \{v^K V_K(\lambda')\} \equiv v^K \{V_K(\lambda')\} \equiv v^K \{V(\lambda')\}_K \quad (2.2)$$

Une ensemble linéairement indépendant de classes $\{V(\lambda')\}_K$ peut former une base d'un sous-espace, avec les coefficients v^K représentant les composantes de \mathbf{v} dans cette base.

Pas plus de trois couleurs peuvent être trouvées expérimentalement comme étant linéairement indépendante. Ce fait implicitement reconnu chez Newton par l'utilisation de coordonnées barycentrique pour l'addition vectorielle, à été formulé plus ouvertement par Grassmann comme la propriété d'avoir trois dimensions. Trois classes d'équivalences $\{V_k(\lambda')\}$, ($k = 0, 1, 2$) linéairement indépendantes, et pas nécessairement des couleurs physiques, peuvent être choisies comme base pour l'espace entier des couleurs - un système de "primaires" dans la terminologie traditionnelle - à partir desquelles toutes les couleurs physiques ou non physiques peuvent être spécifiées par trois nombres v^k tel que K est remplacé par k .

Un espace bidimensionnel spécial, sous-espace des couleurs physiques peut-être défini par la propriété que cette couleur ne puisse être de nouveau analysé par un prisme ou un réseau [Explications 11.2.2]. Ce sont les *couleurs spectrales* à la longueur d'onde λ et d'intensité $V(\lambda)$, définies pour inclure la métamère $V(\lambda)\delta(\lambda - \lambda')$, la distribution de Dirac, singulière. Les couleurs spectrales d'intensité unitaires forment une boucle fermée unidimensionnelle, $\mathbf{A}(\lambda)$, démarrant et finissant en angle pointu à l'origine (laquelle représente la couleur conventionnelle, noir).

$$\begin{aligned} \{\delta(\lambda - \lambda')\} &= A^k(\lambda)\{V_k(\lambda')\} = \mathbf{A}(\lambda) \\ \mathbf{A}(+1) &= \mathbf{A}(-1) = \mathbf{0} \quad d\mathbf{A}/d\lambda|_1 \neq d\mathbf{A}/d\lambda|_{-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Lorsque la boucle $\mathbf{A}(\lambda)$ est dessiné, le formalisme des classes d'équivalences peut être remplacé par l'analyse vectorielle et le processus d'identification d'une couleur étant donné une métamère $V(\lambda)$ peut-être réduit à une projection ou convolution. En utilisant l'identité

$$V(\lambda') = \int_{-1}^1 V(\lambda)\delta(\lambda - \lambda')d\lambda$$

et en appliquant les équations 2.2 et 2.3 successivement, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \equiv \{V(\lambda')\} &= \int_{-1}^1 V(\lambda)\{\delta(\lambda - \lambda')\}d\lambda = \int_{-1}^1 V(\lambda)\mathbf{A}(\lambda)d\lambda \\ v^k &= \int_{-1}^1 V(\lambda)A^k(\lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'Equation 2.4 rend évident le processus par lequel la quantité d'information infinie spécifiée par la distribution spectrale d'intensité est projetée, ou filtrée linéairement, pour produire les trois nombres v^k qui déterminent une couleur.

La fameuse hypothèse de Young [10] que la perception des couleurs est engendrée par l'absorption de l'énergie incidente de trois pigments rétiniens différents avec des coefficients d'absorption $A^k(\lambda)$ propose un modèle physiologique pour 2.4 et ont récemment été confirmé par l'expérience [11]. Ceci donne une raison à l'extérieur de la théorie pour expliquer comment et pourquoi l'œil détecte des classes d'équivalences qui sont combinés ensemble par mélange.

3 Le sous-espace des couleurs physiques

D'une manière ou d'une autre toutes les caractéristiques géométriques spécifiques de l'espace couleur peuvent-être ramenées à la forme de la boucle spectrale $\mathbf{A}(\lambda)$ et le cône des rayons spectraux projetés sur elle depuis l'origine du noir. Considérés comme les coefficients d'absorption dans l'hypothèse de Young, $A^k(\lambda)$ doit être globalement non négatif dans au moins une base ou un repère de référence. Selon l'Equation 2.4, cela signifie que tous vecteurs \mathbf{v} des couleurs physiques ont des composantes positives. Si \mathbf{v} est une couleur physique, $-\mathbf{v}$ ne l'est pas. Cette conclusion est confirmée par l'expérience. Il n'existe pas de lumière négative qui ajoutée à une lumière physique quelconque produirait le noir. Soit depuis ce fait, soit depuis la théorie de Young, il s'ensuit que les couleurs physiques sont incluses dans un trièdre - le trièdre des vecteurs positifs de la base spectrale - et donc occupe moins de la moitié de l'espace couleur disponible en principe.

Les couleurs physiques doivent cependant avoir une surface frontière composée de rayons issus de l'origine. (Aucun multiple non nul d'une distribution spectrale d'intensité n'est jamais invisible). Le mélange positif de deux couleurs quelconques appartenant à la frontière est toujours un vecteur intermédiaire entre les deux couleurs appartenant à leur plan commun. Donc le lieu des rayons entre deux quelconques des rayons de la frontière spectrale est soit à l'intérieur du faisceau des couleurs physiques ou fait parti de la frontière. Le faisceau des lumières physiques est convexe: tout section plane a une frontière composée de courbes convexes, de lignes droites ou les deux. Les couleurs à l'intérieur peuvent-être égalisées avec un mélange de deux des couleurs frontières mais la réciproque est fausse. Par définition de la frontière, les couleurs frontières sont uniques ou le résultat du mélange de deux couleurs frontières seulement.

Maintenant 2.4 établit que toute couleur physique peut-être égalisée avec une combinaison positive de *toutes* les couleurs de la boucle spectrale avec des coefficients positifs $V(\lambda)d\lambda$. Donc, le cône spectral est lié à la surface frontière, mais pas nécessairement identique. La relation est proche de l'identique puisque $A^k \geq 0$. Si (comme le pense Newton) $\mathbf{A}(\lambda)$ forme une boucle fermée convexe ne passant pas par $\mathbf{0}$, le cône spectral serait la surface frontière.

Si un section plane à travers le cône spectrale avait un segment concave cependant, le segment correspondant du cône serait relié par le plan tangent au cône porté par deux rayons.

Aucune de ces deux possibilités simples n'est le cas. L'extrémité du spectre visible introduit une complication spéciale déjà notée; pour toute intensité finie, les couleurs spectrales approchent continûment l'invisibilité, le noir, lorsque λ approche ± 1 . Une portion de plan joignant deux rayons passant à travers le violet et le rouge extrêmes ferme l'extrémité du spectre et contient une infinie variété de couleurs nommées par un seul nom, *pourpre*. Lorsque les rayons frontières approchent l'invisibilité à $\lambda = \pm 1$, les pourpres du plan fermant le cône s'enfoncent continûment vers le noir. A tous les points d'intensité finie, le plan limite est noir. Ce plan est tout de même appelé *plan des pourpres* pour le distinguer de tous les autres plans noirs qui n'intersectent pas avec les couleurs physiques [12].

La description standard de l'espace couleur s'accorde avec la description précédente en assignant aux rayons limites $\lambda = \pm 1$ une efficacité lumineuse à zéro - signifiant qu'ils sont invisibles ou noirs. D'un autre côté la figure standard de la CIE de la Figure 2, qui est supposée être une section plane du faisceau des couleurs physiques a un plan de luminance zéro - de trace l'axe des x - intersectant la trace du plan des pourpres à la limite du rayon violet mais assez loin du rayon limite rouge. Le plan de luminance zéro apparaît comme le plan tangent du cône frontière à travers le rayon limite violet. Avec le plan tangent à travers le rayon limite rouge et le plan des pourpres, ils forment un contour en trièdre avec les primaires de Young - les rayons de confusion des dichromates.

La discussion montre que le cône spectral n'a pas besoin de coïncider avec la frontière le long de plus d'un rayon visible. Sur la Figure 1(d), par exemple, la boucle spectrale est partout concave mais a un plat et la frontière est un trièdre avec des contours sur l'aplat et les rayons limites. La Figure 1(c) montre une situation plus compliquée pour laquelle le plan noir joignant les rayons limites coupe le faisceau des couleurs physiques. La Figure 1(b) montre une possibilité sans rayons limites. La Figure 1(a) décrit la situation réelle. La Figure 1 montre que la relation entre le cône spectral et la frontière dépend de $\mathbf{A}(\lambda)$.

Du point de vue des couleurs comme classe d'équivalence des distributions spectrales d'intensités, $V(\lambda)$, la distinction entre la frontière et l'intérieur peut-être vue comme déroutante. Pourquoi est-ce que les classes d'équivalences contenant une distribution delta sont si différente de celles contenant la somme de deux distributions, spécialement parce que cette somme peut aussi faire parti de la frontière? Une façon de répondre à la question est de supposer l'existence d'une représentation des couleurs physiques dans l'espace tridimensionnel en entier, sans restriction, pour laquelle les points à l'infini correspondent à la frontière des couleurs physiques. La représentation explique la frontière. Cela explique aussi pourquoi la Figure 1(a) prévôt [Explications 11.3].

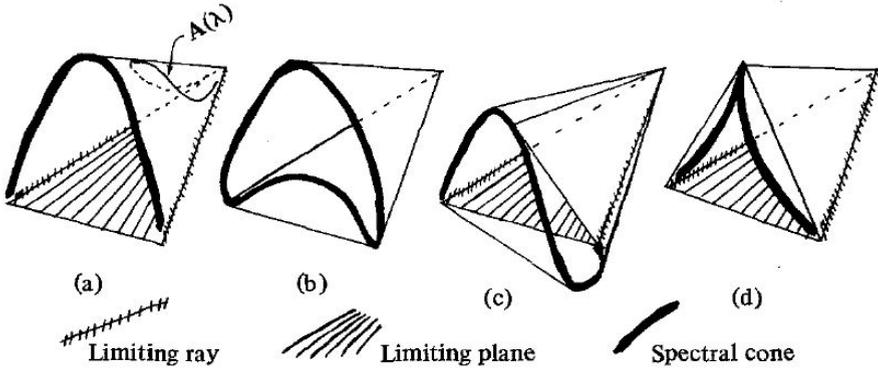


Fig. 1 Le cône spectral versus la frontière du faisceau des couleurs physiques

Une autre façon de voir la frontière est comme la singularité de la métrique. C'est particulièrement approprié puisque l'espace couleur a une métrique naturelle fondée sur l'expérience d'égalisation des couleurs. Supposons que la distribution variable $V(\lambda)$ soit égalisé répétitivement à une distribution donnée $U(\lambda)$ de couleur \mathbf{u} , et les coefficients de mélange v^k de $V(\lambda)$ sont lus sur un colorimètre [13].

Inévitablement, les v^k vont fluctuer aléatoirement autour d'une valeur moyenne $\langle v^k \rangle$ avec une erreur $\delta v^k = v^k - \langle v^k \rangle$, en accord avec une distribution de fréquence gaussienne

$$\exp[-g_{mn}\delta v^m\delta v^n/2\sigma^2] g^{1/2} d^3\delta v$$

où $g \equiv \det(g_{mn})$, et $d^3\delta v$ est l'élément de volume de l'espace couleur. Le groupe de transformation qui s'appliquent sur les composantes de tout vecteur v^k , lorsque la base est changée arbitrairement, est $GL(3R)$ - les transformations linéaires homogènes, réelle inversible à coefficients constants. Naturellement g_{mn} doit être un tenseur défini positif de rang deux dans $GL(3R)$ transformant de manière covariante au vecteur de base, alors que v^k transforme de manière contravariante, i.e., en accord avec la matrice transposée des coefficients. L'élément de volume est rendu invariant dans $GL(3R)$ par le facteur $g^{1/2}$ d'une manière bien connue. Le lieu des points d'inflexion de la distribution est $g_{mn}\delta v^m\delta v^n = \sigma^2$, un *ellipsoïde d'erreur* centré sur $\langle v \rangle$. Notons que la forme elliptique est une conséquence de l'hypothèse que les erreurs sont petites, indépendantes et nombreuses et n'a rien à voir avec une propriété de la lumière ou de la vision [6]. Puisque g_{mn} est donc défini comme une fonction de $\langle v^k \rangle$, il peut servir comme champ de tenseur métrique de l'espace couleur.

Si la couleur fixe \mathbf{u} est choisie pour approcher la frontière, $\langle v \rangle$ doit suivre, et éventuellement imposer une réduction de l'erreur dans la direction pour laquelle elle sortirait de la frontière. Cela signifie que $g_{mn}(\mathbf{v})$ doit diverger si

\mathbf{v} approche la frontière à \mathbf{v}_0 , où au moins le volume obéit

$$1/\det(g_{mn}(\mathbf{v}_0)) = 0 \quad (3.1)$$

qui cause l'ellipsoïde d'erreur de dégénérer en un disque ou une barre quand $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_0$ sur la frontière. Dans ce cas la théorie de la métrique pourrait expliquer la frontière. La relation de la transformation à la métrique ne peut-être si simple. Si l'espace \mathbf{v} est simplement une carte distendue de l'espace Euclidien tridimensionnel, il résulterait une métrique sans courbure. La métrique mesurée, cependant, est connue pour être incompatible avec une espace plat [15].

Bien que les lois de mélange des couleurs peuvent modifier la relation entre $\mathbf{A}(\lambda)$ et la frontière en générant des segments triangulaires comme dans la Figure 1, elles ne sont pas à l'origine de l'existence et de la nature de la boucle spectrale. Et c'est cette boucle spectrale qui permet de distinguer les couleurs visibles des couleurs invisibles et doit ultimement être logiquement relié à la métrique de l'espace couleur.

4 Pourquoi protomères?

Jusqu'ici seules les évidences internes de l'espace ont été invoquées, tendant à montrer l'inadéquation des relations de mélange avec les bases de la vision des couleurs. Il y a des évidences externes également : il est difficile de concevoir une situation dans laquelle un organisme serait mieux à même de survivre parce qu'il pourrait détecter ou effectuer un mélange de couleur. De plus, les relations linéaires de mélange ne subsistent pas lorsqu'on considère le traitement des données comme v^k par un codage neurale en train d'impulsion comprimé par une loi comme celle de Weber-Fechner, e.g. $v^k \rightarrow \ln v^k$. Le fait que les mélanges linéaires de distributions spectrales d'intensités commutent avec l'absorption rétinienne linéaire dans 2.4 apparaît n'avoir jouer qu'un rôle marginal, s'il en est, dans la sélection naturelle de la vision des couleurs.

Au contraire, le processus par lequel le coefficient de réflexion spectral d'un objet, $R(\lambda)$, se manifeste à l'œil à travers la fonction de distribution spectrale, $V(\lambda)$, qui représente la réflexion d'une distribution spectrale d'intensité, $I(\lambda)$, illuminant la scène, doit avoir été central dans la sélection naturelle de la vision des couleurs. La loi de réflexion

$$V(\lambda) = I(\lambda)R(\lambda) \quad (4.1)$$

est symétrique entre l'intensité spectrale d'illumination, $I(\lambda)$ et le coefficient de réflectance, $R(\lambda)$ et suggère donc que les trois distributions peuvent-être traitées comme des distributions spectrales d'intensité. Par exemple, sur une partie du champ visuel adjacent ou entourant l'objet, l'intensité spectrale de l'illumination peut-être directement visible par une réflexion artificielle dans un miroir [$R(\lambda) = 1$], ou un verre dépoli [$R(\lambda) = \text{constante}$] ou simplement une radiance ambiante naturelle comme le ciel ou la mer. Dans un autre mode

opérateur $R(\lambda)$ peut aussi être considéré comme une distribution spectrale d'intensité en éclairant simplement l'objet avec une *lumière neutre*, $I_0(\lambda) = \text{constante}$. Dans ce mode opératoire, l'œil reçoit la donnée r^k ,

$$r^k = \int_{-1}^1 R(\lambda) A^k(\lambda) d\lambda \quad (4.2)$$

conformément à 2.4, qui doit représenter la quantité maximale d'informations sur la couleur de l'objet que l'œil peut directement obtenir. r^k peut ensuite être traité par le système nerveux d'une manière ou d'une autre pour permettre la perception des couleurs.

L'illumination neutre d'intensité standard, i.e., $I_0(\lambda) = 1$, n'est généralement pas disponible. La distribution spectrale d'intensité, $V(\lambda)$, d'une région du champ visuel occupé par l'objet est souvent assez différent de sa réflectance, $R(\lambda)$, à cause de l'effet de $I(\lambda)$ suivant 4.1. La couleur apparente de l'objet \mathbf{v} , défini par 2.4 qui résume toutes les informations sur $V(\lambda)$ qui pourra passer à la rétine, est différent de sa réflectance, \mathbf{r} défini par 4.2, qui est principalement la vraie couleur de l'objet. La seule information utile additionnelle qui pourrait être transmise à la rétine serait \mathbf{i} , la couleur de $I(\lambda)$ vu comme radiance ambiante ou entourant l'objet. \mathbf{i} est déterminée par analogie de 2.4 et 4.2 comme

$$\mathbf{i} = \int_{-1}^1 I(\lambda) \mathbf{A}(\lambda) d\lambda \quad (4.3)$$

Avec toutes les informations sur $V(\lambda)$ et $I(\lambda)$ à notre disposition nous pouvons reconstruire la réflectance d'un objet comme $V(\lambda)/I(\lambda)$. Mais avec seulement la couleur apparente de l'objet, \mathbf{v} , et, au mieux la couleur de la radiance de l'illuminant \mathbf{i} en plus, comment est-ce que l'on détermine la vraie couleur de l'objet \mathbf{r} ? Le problème n'est pas qu'il n'y a pas assez d'informations: six nombres v^k, i^k dans les bonnes conditions peuvent déterminer trois nombres r^k . Le problème est que les informations disponibles avec v^k et i^k sont généralement pas du bon type pour déterminer r^k .

La raison est loin d'être obscure. Le processus de réflexion décrit par 4.1 est une opération de groupe par laquelle deux distributions positives [16] peuvent être multipliées ou divisées pour en déduire une troisième. Comme opération de groupe, elle ressemble au processus d'addition dans les mélanges : en fait les deux groupes sont isomorphes si l'on remplace 4.1 par son logarithme. Contrairement au cas des mélanges, la réflexion *ne commute pas* avec l'égalisation. Si $U(\lambda)$ et $V(\lambda)$ sont de même couleur, i.e.,

$$\int_{-1}^1 [U(\lambda) - V(\lambda)] \mathbf{A}(\lambda) d\lambda = \mathbf{0}$$

il n'est pas certain en général que $U(\lambda)/I(\lambda)$ et $V(\lambda)/I(\lambda)$ soient de la même couleur [Explications 11.4]. C'est pourquoi, *si* $V(\lambda)$ et $I(\lambda)$ sont des distributions positives arbitraires quelconques, \mathbf{v} et \mathbf{i} ne produiraient aucun indice sur

l'évaluation, lié à la survie, de la vraie couleur,

$$\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \left(\frac{V(\lambda)}{I(\lambda)} \right) \mathbf{A}(\lambda) d\lambda$$

L'argument qui vient d'être énoncé est une réduction de l'absurde: Quelque part il inclut une fausse prémisse puisque nous pouvons reconnaître et reconnaissons, par leur réflectances, une variété considérable d'objets sous une grande variété d'illuminations. Ainsi cette habilité doit exister pour qu'il y ait une sélection en faveur de la vision des couleurs. Avant d'identifier et de corriger la fausse prémisse, cependant, considérons comment cette impasse peut-être contournée, en prenant une route différente.

Une façon de juger deux réflectances qui pourrait avoir une valeur de survie pourrait être de former des impressions de leurs contrastes lorsque qu'elle sont vues à coté l'une de l'autre sous la même illumination $I(\lambda)$. Ce qui atteint l'œil de ces deux réflectances spectrales, $R_1(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ sont les intensités spectrales réfléchies, $V_1(\lambda) = I(\lambda)R_1(\lambda)$ et $V_2(\lambda) = I(\lambda)R_2(\lambda)$. La quantité d'information maximale indépendante de l'illumination est contenue dans le rapport de réflectance $R_1(\lambda)/R_2(\lambda) = V_1(\lambda)/V_2(\lambda)$. Mais l'information qui est passée par la rétine n'est pas plus que la couleur de $V_1(\lambda)$, que nous appelons $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, et la couleur $V_2(\lambda)$, que nous appelons $\mathbf{i} = \mathbf{v}_2$ [avec \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 déterminés par $V_1(\lambda)$ et $V_2(\lambda)$ en accord avec 2.4]. Le problème est maintenant de convertir l'information disponible \mathbf{v} et \mathbf{i} en une estimation de \mathbf{r} , la couleur du rapport de réflectance, $R_1(\lambda)/R_2(\lambda)$, i.e., de déterminer

$$\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \left(\frac{V_1(\lambda)}{V_2(\lambda)} \right) \mathbf{A}(\lambda) d\lambda$$

Évidemment, le problème de juger de la réflectance invariant de l'illuminant est isomorphe au problème de déduire \mathbf{r} depuis \mathbf{v} et \mathbf{i} quand les distributions d'intensité sont données par 4.1. Encore, *si* $V_1(\lambda)$ et $V_2(\lambda)$ *sont des distributions arbitraires quelconques* il n'y aucun moyen de résoudre le problème. Encore une fois, la conclusion étant fausse, elle doit reposer sur une fausse prémisse.

La fausse prémisse est diffuse dans chaque argument: Les illuminations et réflectances dans des conditions naturelles *ne sont pas* des fonctions arbitraires de λ . On ne s'attend pas à ce que l'évolution soit influencé par une illumination telle que celle d'une décharge de gaz avec des raies spectrales étroites. On ne s'attend pas à ce que des objets avec des spectres d'absorption comme celle de la vapeur de sodium joue un rôle vital dans la sélection naturelle. A la place de ces curiosités de laboratoire les distributions spectrales d'intensité qui influence la sélection naturelle doivent-être telle qu'il soit possible de déduire au moins une bonne approximation de \mathbf{r} , étant donné \mathbf{v} et \mathbf{i} , qui sont les couleurs des métamères définies par 4.1.

Les métamères pour lesquelles \mathbf{r} peut-être trouvé précisément et de manière unique à partir de \mathbf{v} et \mathbf{i} lorsque 2.4, 4.1, 4.2 et 4.3 sont satisfaites, sont appelée

protomères. Ce sont des distributions positives d'intensités, une pour chaque couleur physique, dont la produit ou le quotient peut-être trouvé même si seul leurs couleurs sont donnés. Dans la section suivante nous devons prouver que les protomères existent au sens mathématique, c'est-à-dire que les propriétés imposées sur elles ne sont pas inconsistantes. (Qu'elles doivent exister dans le sens ou l'organisme les utilisent pour approximer les intensités spectrales naturelles, réflectances ou illuminations, comme déjà prouvé par la sélection naturelle de la vision des couleurs). Nous devons montrer que les protomères forment une classe de fonctions suffisamment puissantes et flexibles pour approximer les distributions naturelles. Que nous puissions déduire d'elles les propriétés connues de la frontière et la métrique des couleurs physiques servira de confirmation de la théorie.

5 Le groupe des protomères

Les protomères, par définition, forment un groupe pour la multiplication et la division. C'est un groupe continu (de Lie) à trois paramètres à cause de sa correspondance un-à-un avec le sous-espace des couleurs physiques. C'est un sous-groupe du groupe des fonctions de réflexion déjà décrit - *précisément le sous-groupe de ces réflexions qui commute avec le processus d'égalisation des couleurs*. C'est un groupe Abélien et donc constitue une espace vectoriel tridimensionnel par lui-même, identique avec l'espace vectoriel de son algèbre de Lie.

Si $F(\mathbf{v}, \lambda)$ est protomère de la couleur \mathbf{v} , alors par 2.4,

$$\mathbf{v} = \int_{-1}^1 F(\mathbf{v}, \lambda) \mathbf{A}(\lambda) d\lambda \quad (5.1)$$

La propriété de groupe peut-être formulée comme

$$\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{i}) \iff F(\mathbf{v}, \lambda) / F(\mathbf{i}, \lambda) = F(\mathbf{r}, \lambda) \quad (5.2)$$

où Φ est une fonction qui peut-être inversée pour calculer une solution unique pour \mathbf{v} en terme de \mathbf{i} et \mathbf{r} . (Cela résulte de l'unicité de l'inverse dans un groupe). L'équation 5.2 affirme qu'il existe une manière de calculer la couleur \mathbf{r} , issu du rapport de deux protomères étant donné leur couleurs \mathbf{v} et \mathbf{i} .

Trouver la solution de 5.1 et 5.2 est un problème élémentaire en théorie des groupes. Tout ce dont nous avons besoin est un ensemble de générateur de l'algèbre de Lie, dans ce cas trois fonctions de λ linéairement indépendantes que nous appelons P^{k*} ($k = 0, 1, 2$). Elles forment une base de l'espace vectoriel linéaire de l'algèbre de Lie où les fonctions de bases sont de la forme $\mathbf{p}^*(\lambda) \equiv p_{k*} P^{k*}(\lambda)$. Comme les fonctions $P^{k*}(\lambda)$ peuvent-être choisi arbitrairement en dehors de leur indépendance, toute transformation linéaire homogène et inversible de celles-ci sera aussi admissible. Nous devons supposer que les composantes p_{k*} réalise la transformation duale qui laisse $\mathbf{p}^*(\lambda)$ invariant dans $GL(3R)^*$, une forme dans le groupe linéaire général repéré ici avec un

astérisque pour indiquer son statut spécial. $[GL(3R)]^*$ agit sur l'espace des combinaisons linéaires de *trois classes de fonctions* de λ , de manière équivalente à l'égalisation]. Chaque choix d'une base, $P^{k*}(\lambda)$, à une transformation linéaire près, représente une solution distincte de 5.1 et 5.2. Puisque, comme nous allons le voir, le calcul réalisé par le cerveau pour former des jugements de la réflectance invariant à l'illuminant dépend de manière critique de la façon dont l'enveloppe de $P^{k*}(\lambda)$ à été choisie, il y a probablement seulement un choix unique caractérisant une espèce ou au moins ses membres normaux.

Passer de l'algèbre de Lie des protomères aux éléments finis du groupe est rendu aisé par la caractère commutatif des réflexions. On a juste à prendre l'exponentiel des éléments de l'algèbre, $\mathbf{p}^*(\lambda)$, au point qu'ils n'ont plus besoin d'être regardés comme des générateurs infinitésimaux:

$$F(\mathbf{v}, \lambda) = \exp[p_{k*}P^{k*}(\lambda)] = \exp \mathbf{p}^*(\lambda) \quad (5.3)$$

Les protomères suivent les générateurs en formant une espace vectoriel linéaire dont la base est $P^{k*}(\lambda)$ [17][Explications 11.5].

A cause de 5.1, l'espace des protomères est une paramétrisation des *couleurs physiques*, une à une et à l'intérieur, continue et différentiable dans p_{k*} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\equiv v^k \{V_k(\lambda')\} = \int_{-1}^1 \mathbf{A}(\lambda) \exp \mathbf{p}^*(\lambda) d\lambda \\ v^k &= \int_{-1}^1 A^k(\lambda) \exp[p_{k*}P^{k*}(\lambda)] d\lambda \end{aligned} \quad (5.4)$$

En assumant que les bases de l'espace des protomères et de l'espace couleur sont connu, 5.4 montre comment les trois nombres, p_{k*} , les composantes du vecteur des protomères sont transformées en les trois composantes, v^k d'une couleur. Le processus consiste à prendre l'exponentiel de $p_{k*}P^{k*}(\lambda)$ et intégrer avec $A^k(\lambda)$ comme pondération, et c'est donc généralement un caractère exponentiel dans sa dépendance à p_{k*} . La relation inverse représente le traitement physiologique de la donnée v^k fournie par la rétine, et est une étape dépendant du manière critique du choix de la base. Il a un caractère logarithmique général, et peut-être appelé $\mathbf{p}^*(\mathbf{v}, \lambda)$ pour symboliser sa dépendance à la couleur \mathbf{v} . [Par 5.3, $\mathbf{p}^*(\mathbf{v}, \lambda)$ est simplement $\ln F(\mathbf{v}, \lambda)$, où $F(\mathbf{v}, \lambda)$ est la protomère approximant une métamère donné]. Une relation de Weber-Fechner généralisée émerge donc comme le résultat de la valeur de survie en "parant" [18] la transformation multiplicative des réflectances par l'illumination. A cause de ses applications nombreuses pour la sensation, la loi de Weber-Fechner est habituellement supposée être une propriété générale des processus physiologiques du codage nerveux des signaux. Il ne devrait pas y avoir de contradiction [19] en trouvant que ce n'est pas uniquement approprié pour le besoin physique de reconnaissance des objets par leur réflectance.

En substituant 5.3 dans 5.2 donne

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{v}, \lambda) - \mathbf{p}^*(\mathbf{i}, \lambda) = \mathbf{p}^*(\mathbf{r}, \lambda) \quad (5.5)$$

pour laquelle la dépendance à λ est superflue, lorsque la base, $P^{k*}(\lambda)$ de l'espace des protomères est fixée:

$$p_{k*}(\mathbf{v}) - p_{k*}(\mathbf{i}) = p_{k*}(\mathbf{r}) \quad (5.6)$$

Cette loi d'addition des vecteurs pour les protomères représente l'effet de la réflexion, et réalise la relation fonctionnelle Φ en 5.2. Le processus par lequel deux distributions spectrales d'intensité, $V(\lambda)$ et $I(\lambda)$ vu par l'œil, sont converties à la perception par une approximation de $R(\lambda) = V(\lambda)/I(\lambda)$ peut maintenant être spécifié en terme de 2.4, 5.4 et 5.6. $V(\lambda)$ et $I(\lambda)$ sont absorbés dans différents régions rétinienne et converties en données brutes, v^k et i^k , via 2.4 et 4.3. Ensuite, l'inverse de 5.4 est appliqué comme un traitement analogue pour donner $p_{k*}(\mathbf{v})$ et $p_{k*}(\mathbf{i})$. [Ce calcul est équivalent à approximer les distributions incidentes, $V(\lambda)$ et $I(\lambda)$ par leur protomères des couleurs respectives de V et I]. Ensuite, le quotient des protomères d'approximation est effectué, en formant simplement la différence des composantes correspondantes $p_{k*}(\mathbf{v})$ et $p_{k*}(\mathbf{i})$. En accord avec 5.6, les différences sont les composantes d'une protomère perçue comme équivalente à une couleur \mathbf{r} - la couleur de $R(\lambda)$ corrigée, autant que possible, à la valeur qu'il aurait sous un illuminant standard, neutre, $I_0(\lambda) \equiv 1$. Si $I(\lambda)$, $R(\lambda)$ donnés dans la nature ne sont pas trop différents de leur protomères de leur couleurs respectives, \mathbf{r} ne sera pas trop différent de la vraie couleur r_0 . En accord avec l'hypothèse des protomères, le cerveau reçoit le contenu d'information de \mathbf{r} sous la forme de $p_{k*}(\mathbf{r})$, un logarithme généralisé de \mathbf{r} . $p_{k*}(\mathbf{r})$ et $p_{k*}(\mathbf{r}_0)$ comme le cerveau les perçoit seront même plus semblables que \mathbf{r} et \mathbf{r}_0 .

Essentiel à la réussite de ce programme est la possibilité de trouver une base pour l'espace des protomères, $P^{k*}(\lambda)$, tel que les protomères peuvent bien approximer les intensités spectrales des illuminations et des réflectances spectrales des objets naturels. Considérons une possibilité simple mais plausible, $P^{k*}(\lambda) = \lambda^{k*}$, qui inclue la distribution protomère Gaussienne pour $p_{2*} < 0$, exponentielle pour $p_{2*} = 0$, et Gaussienne réciproque pour $p_{2*} > 0$. Quand le maximum de la Gaussienne est dans le domaine visible entre -1 et 1 ce sont des distributions avec l'intensité maximale ajustable arbitrairement par changement de p_{0*} , localisé à la longueur d'onde $\lambda = -p_{1*}/2p_{2*}$ et avec une largeur de bande à mi-hauteur contrôlée par $|p_{2*}|$. Elles sont des approximations lisses des intensités spectrales arbitraires de luminosité, saturation et dominance de teinte spectrale, en termes traditionnels. Les distributions lisses naturelles de même couleur sont assez vraisemblables de ressembler à ces protomères.

Les Gaussiennes réciproques décrites, i.e., les protomères avec $p_{2*} > 0$ et minimum pour la longueur d'onde $= p_{1*}/2p_{2*}$, localisé dans le domaine visible, ont leur maximum local à l'extrémité du domaine visible. En termes traditionnels elles sont principalement rouge ou violette, mélangées avec plus ou

moins d'intensité aux longueurs d'ondes, suivant que p_{2*} est petit ou grand. En résumé, elles sont des approximations lisses d'intensité spectrales de luminosité et saturation arbitraire, et de teinte dominante pourpre. Les autres protomères dans cet espace - celles avec $p_{2*} = 0$ ou $|p_{1*}/2p_{2*}| > 1$ - apparaîtrons comme des blancs plus ou moins teintés, les couleurs que Newton appel "anonymes". Anonyme ou non, il y en a une pour chaque couleur physique, et elles semblent bien à même de décrire les distributions rencontrées dans la nature.

Dans l'exemple Gaussien, 1 est contenu dans l'ensemble des fonctions de la base, signifiant que lorsque \mathbf{p}^* est une protomère, $\mathbf{p}^* +$ (une constante, $\ln c$) en est une aussi. Suivant 5.4 cette translation de l'origine des vecteurs protomères correspond à une multiplication de tous les vecteurs couleurs \mathbf{v} par un facteur positif c . Puisque les groupe de réflexions et mélange intersectent avec le groupe des amplifications constantes, ce sous groupe des réflexions est unique en commutant avec le processus d'égalisation. Il pourrait avoir été séparé du groupe des réflexions avant que les protomères soient introduites pour résoudre le problème de commutation des réflexions avec l'égalisation. Le résultat aurait été un espace bidimensionnel des protomères en correspondance un-à-un avec la projection bidimensionnelle de l'espace couleur employée par Newton. L'apparente simplicité de poser $P^{0*}(\lambda) = 1$, par exemple, et la limitation de $\mathbf{p}^*(\lambda)$ à l'espace des protomères définit par P^{1*} et P^{2*} est entaché de la complication sévère que l'espace bidimensionnel des vecteurs couleurs \mathbf{v} qui correspond au plan des protomères *via* la transformation 5.4 n'est pas elle-même plane mais une surface courbe dans l'espace couleur pour laquelle la forme est définie par 5.4 indirectement à travers les cinq fonctions, P^{1*} , P^{2*} , A^0 , A^1 et A^2 . Jusqu'à ce que la théorie générale soit complète, et que les applications détaillées soient résolues, il est mieux d'ignorer le feuilletage de l'espace couleur en surface de p_{0*} constant.

Une seconde raison pour remettre à plus tard l'hypothèse de $P^{0*} = 1$, est que, en dépit de sa plausibilité, elle pourrait ne pas être vraie. Les constantes n'ont pas besoin d'être dans l'enveloppe linéaire de P^{k*} . L'effet de multiplier \mathbf{v} par un facteur constante peut toujours être dupliqué par *quelques* transformations de $\mathbf{p}^*(\lambda)$ dans 5.4, bien qu'il ne puisse être aussi transparent que l'addition d'un logarithme d'une constante. Puisque la perception de luminosité est commune à de nombreuses espèces contrairement à la vision des couleurs, spécialement dans les branches basses de l'arbre de l'évolution, on pourrait voir la vision des couleurs comme une différenciation de la perception de luminosité. La vision des couleurs pourrait alors continuer d'incorporer la perception de luminosité dans sa forme originale. Ce serait en faveur de l'apparition d'une constante dans les protomères, e.g., $P^{0*}(\lambda) = 1$. Néanmoins, il est mieux de ne pas rester sur une théorie générale sur ces arguments de plausibilité, spécialement pare ce que $P^{0*}(\lambda) = 1$ ne confère aucun avantage à ce stade.

6 La frontière des couleurs physiques

La base Gaussienne, $P^{k*}(\lambda) = \lambda^{k*}$, donne un exemple d'une séquence de promomère pour lesquelles la saturation augmente sans limite alors que la teinte dominante et l'intensité totale restent constantes. Une telle séquence converge vers une distribution delta, décalée à la couleur spectrale de longueur d'onde λ . Si nous posons [Explications 11.6.1]

$$\begin{aligned}\lambda &\equiv -p_{1*}/2p_{2*} & \epsilon^2 &\equiv -1/2p_{2*} \\ \mu &\equiv p_{0*} - (p_{1*})^2/4p_{2*} + (1/2) \ln(-\pi/p_{2*})\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^*(\lambda') &= \mathbf{p}^*(\lambda) + p_{2*}(\lambda' - \lambda)^2 = \mu - \ln(\epsilon\sqrt{2\pi}) - (\lambda' - \lambda)^2/2\epsilon^2, \\ \exp \mathbf{p}^*(\lambda') &= (1/\epsilon\sqrt{2\pi}) \exp[\mu - (\lambda' - \lambda)^2/2\epsilon^2]\end{aligned}\quad (6.1)$$

Si μ et λ sont gardés constants à des valeurs finies, lorsque ϵ approche zéro, la séquence 6.1 est le modèle Gaussien bien connu de la distribution delta, $e^\mu \delta(\lambda' - \lambda)$. La substitution de 6.1 dans 5.4 donne alors

$$\mathbf{v} = e^\mu \mathbf{A}(\lambda) \quad (\lambda^2 < 1) \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\lambda^2 > 1) \quad (\epsilon = 0) \quad (6.2)$$

précisément l'équation de la surface à deux paramètres du cône spectral de la figure 1.

C'est simple de généraliser cet argument à une forme indépendante du choix de la base, $P^{k*}(\lambda)$, en choisissant les deux premières dérivées de $\mathbf{p}^*(\lambda)$ de telle manière qu'il approximent une forme Gaussienne en même temps que la largeur de la Gaussienne approche zéro. La méthode est similaire à la méthode du point col, mais ici ce n'est pas une approximation mais plutôt une évaluation asymptotique de la séquence qui est nécessaire. Considérons un maximum, λ de $\mathbf{p}^*(\lambda')$, i.e., une valeur de λ telle que

$$\frac{d\mathbf{p}^*(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \frac{d^2\mathbf{p}^*(\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{1}{\epsilon^2} \quad \mathbf{p}^*(\lambda) = \mu - \ln(\epsilon\sqrt{2\pi}) \quad (6.3)$$

Sous l'hypothèse que λ , μ restent constants et finis quand $\epsilon \rightarrow 0$, l'équation 6.3 établit 6.1 comme la forme asymptotique de la séquence qui forme encore une distribution delta centrée sur λ , donnant 6.2 qui décrit le cône spectral. Comme $p_{2*} \rightarrow \infty$ dessine le cône spectral, $p_{2*} \rightarrow +\infty$ doit approcher le plan des pourpres de la Figure 1. Encore un fois, nous pouvons être guidé par l'argument de la base Gaussienne [Explications 11.6.2]. Dans ce cas, la fonction Gaussienne réciproque, $\exp \mathbf{p}^*(\lambda')$ augmente rapidement de son minimum, $\lambda = -p_{1*}/2p_{2*}$, dans le domaine visible. Comme résultat, la plus grande part de l'intégrale 5.4 vient de l'environ immédiate de $\lambda' = \pm 1$, i.e.,

$$\lambda' = \pm(1 - \epsilon z)$$

Posant $\mathbf{B}(\lambda) \equiv d\mathbf{A}(\lambda)/d\lambda$, $\mathbf{A}(\pm 1) = 0$ donne

$$\mathbf{A}(\lambda') \simeq \mp \epsilon z \mathbf{B}(\pm 1) \quad (6.4)$$

alors que

$$\mathbf{p}^*(\lambda') = \mathbf{p}^*(\pm 1) \mp \epsilon z (p_{1*} \pm 2p_{2*}) + \epsilon^2 z^2 p_{2*} \quad (6.5)$$

Dans le cas $p_{2*}\epsilon \gg p_{2*}\epsilon^2$, qui signifie que ϵ doit être choisit $= 1/p_{2*}$ de manière à limiter les contributions des points autour de l'extrémité:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\simeq \frac{1}{4}\epsilon^2 [-\mathbf{B}(+1)e^{p^*(+1)} + \mathbf{B}(-1)e^{p^*(-1)}] \\ &\simeq \frac{1}{4}\epsilon^2 e^{p_{0*}+p_{2*}} [-\mathbf{B}(+1)e^{p_{1*}} + \mathbf{B}(-1)e^{p_{1*}}] \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = e^\nu [-\mathbf{B}(+1)(1 + \tanh p_{1*})/2 + \mathbf{B}(-1)(1 - \tanh p_{1*})/2] \quad (6.6)$$

où

$$\nu \equiv p_{0*} + p_{2*} - 2 \ln p_{2*} + \ln \cosh p_{1*} - \ln 2$$

Lorsque $p_{2*} \rightarrow \infty$ on peut faire tendre $p_{0*} \rightarrow -\infty$ de telle manière, que ν et p_{1*} aient des valeurs quelconques désirées. Le résultat est que \mathbf{v} oscille de $+e^\nu \mathbf{B}(-1)$ lorsque p_{1*} est grand et négatif jusqu'à $-e^\nu \mathbf{B}(+1)$ lorsque p_{1*} est grand et positif. \mathbf{v} est donc contenu à un segment de plan contenant $-\mathbf{B}(+1)$ et $+\mathbf{B}(-1)$ entre ces deux rayons avec ces directions. [Puisque $\mathbf{A}(\lambda)$ quitte l'origine à $\lambda = -1$, dirons nous, et y retourne à $\lambda = +1$, les deux dérivées de \mathbf{A} par rapport à λ sont naturellement définies avec le signe approprié pour le rayon entrant et sortant].

Nous n'avons pas besoin de préciser en détail la façon dont laquelle ce dernier argument se généralise de la base Gaussienne à n'importe quelle base. Lorsque le vecteur protomère $\mathbf{p}^*(\lambda')$ est approximé par les trois termes de la série de puissance autour de son minimum, λ ,

$$\frac{d\mathbf{p}^*(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad \frac{d^2\mathbf{p}^*(\lambda)}{d\lambda^2} \rightarrow +\infty$$

nous avons effectivement remplacé l'expression, $\exp \mathbf{p}^*(\lambda')$, par une gaussienne réciproque de telle manière que l'argument donnant 6.6 s'applique, avec p_{1*} remplacé par $[\mathbf{p}^*(1) - \mathbf{p}^*(-1)]/2$ et

$$v \equiv \frac{[\mathbf{p}^*(1) + \mathbf{p}^*(-1)]}{2} - 2 \ln \left(\frac{d^2\mathbf{p}^*}{d\lambda^2} \right) + \ln \cosh \frac{[\mathbf{p}^*(1) - \mathbf{p}^*(-1)]}{2} \quad (6.7)$$

Comme $d^2\mathbf{p}^*(\lambda)/d\lambda^2 \rightarrow \infty$, la valeur de λ à ce maximum tend vers zéro parce que $\mathbf{p}^*(\lambda')$ devient une parabole d'un très grande courbure telle qu'un petit déplacement du minimum du centre vers un coté, produit un maximum sur ce coté bien plus grand que le maximum sur l'autre coté. Les valeurs de λ de l'ordre de

$$\epsilon = \frac{2}{d^2\mathbf{p}^*(\lambda)/d\lambda^2}$$

sont suffisantes pour développer tout rapport fini voulu pour les deux principales contributions, i.e., pour donner naissance à toute teinte pourpre voulu.

Si $|p_{k*}|$ à été choisi pour croître sans limite sur l'autre chemin, e.g., en augmentant une composante en gardant l'autre constante, les seules régions atteintes dans l'espace \mathbf{v} seraient les sommets, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou l'extrémité ouverte, $v^k = +\infty$, du faisceau des couleurs physiques. Celle-ci font clairement partie de la frontière des couleurs physiques mais sans intérêt particulier. Les surfaces canoniques et planaires dans l'espace \mathbf{v} sont atteintes par des assez spéciaux, pour ne pas dire particuliers, chemins à l'infini dans l'espace \mathbf{p} . Pour atteindre le cône, par exemple, on doit maintenir λ et μ finis dans 6.3 tout en prenant $d^2\mathbf{p}^*/d\lambda^2$ tendant vers moins l'infini. Pour atteindre le plan, λ définit comme dans 6.3 doit être restreint en maintenant fini $d^2\mathbf{p}^*/d\lambda^2$, ainsi que v dans 6.7. L'existence de ces chemins spectraux qui mènent à la frontière de \mathbf{v} , et déterminent la forme générale planaire et conique, résulte seulement de la forme tridimensionnelle de l'exponentielle dans 5.3.

La forme de la frontière n'a rien a voir avec la base de l'espace \mathbf{p}^* parce qu'aucune base particulière de $P^{k*}(\lambda)$ n'a été choisie. Les seules propriétés de $P^{k*}(\lambda)$ sont l'existence et la dérivabilité jusqu'au second ordre sur $-1 \leq \lambda \leq 1$. [Pour l'étude de la métrique nous aurons besoin de la différentiabilité jusqu'à l'ordre quatre. Il sera pratique pour les mathématiques, et suffisant pour la physique, de prendre $P^{k*}(\lambda)$ analytique sur $-1 \leq \lambda \leq 1$].

Comme dans la section 3, les $A^k(\lambda)$ sont responsables de toutes les parties importantes de la frontière. La surface des protomères montre comment la frontière est formée de région infinie dans l'espace \mathbf{p}^* . Le rôle limité d'une seule distribution delta est expliqué par le fait que la distribution delta est elle-même une protomère - une à l'infini de l'espace \mathbf{p} . Seulement après que la dualité entre les espaces \mathbf{v} et \mathbf{p}^* soit prouvée dans la section suivante, il sera possible de développer la relation entre les fonctions de base des protomères, $P^k(\lambda)$ et les composantes de la boucle spectrale $A^k(\lambda)$.

7 Dualité entre espace couleur et protomère

Les protomères ont été introduites pour permettre l'approximation des intensité spectrales rencontrées dans la nature comme les illuminations et les réflectances. Le type d'approximation fournie par une protomère est limité par le principe qu'une protomère, et tout ces changements par une réflexion, peut-être dérivé de manière unique en terme de sa couleur seulement. Ce qui est implicite dans ces idées est une mesure, Δ , de la divergence entre une intensité spectrale positive arbitraire $V(\lambda)$, et une protomère arbitraire, $\exp \mathbf{p}^*(\lambda)$. Δ est une fonctionnelle de $V(\lambda)$, et une fonction de p_{k*} qui isole la protomère qui approxime le mieux $V(\lambda)$ - celle de la même couleur que $V(\lambda)$ - par l'attribution d'une valeur minimal pour Δ . Nous requérons donc

(a) $\Delta = \Delta[V(\lambda'); p_{k'*}]$ [20], une fonctionnelle de $V(\lambda) > 0$ et une fonction de

$$p_{0*}, p_{1*}, p_{2*} \tag{7.1a}$$

(b) Δ est invariant - possiblement relatif [21] - sous des transformations actives, linéaires, inversibles et homogènes pour une nouvelle base de l'espace \mathbf{v}

$$\text{ou } \mathbf{p}^* \tag{7.1b}$$

$$(c) \Delta \geq 0 \text{ pour tout } p_{k*} \text{ et pour tout } V(\lambda) > 0 \tag{7.1c}$$

$$(d) \Delta = 0 \text{ ssi } V(\lambda) = \exp \mathbf{p}^*(\lambda) \text{ sur les longueurs d'ondes visibles} \tag{7.1d}$$

$$(e) \partial\Delta/\partial p_{m*} = 0 \text{ ssi } \int_{-1}^{+1} A^k(\lambda)[\exp \mathbf{p}^*(\lambda) - V(\lambda)] = 0 \tag{7.1e}$$

La dernière condition impose à Δ d'être stationnaire sous de faible variations de p_{k*} si et seulement si la couleur de la protomère égalise celle de $V(\lambda)$. Cela affirme une équivalence logique entre une équation du vecteur dual dans l'espace des protomères et une équation vectorielle dans l'espace couleur laquelle se réduit à une relation linéaire entre $A^k(\lambda)$ et $P^k(\lambda)$ avec des coefficients universellement constants. Un telle relation évite la maintenance de deux espaces indépendants pour les couleurs et les protomères: *chacun peut-être traité simplement comme le dual de l'autre*. Pour cette section la principale conséquence de l'existence d'une mesure de divergence dans le calcul de l'approximation par les protomères est une mise en valeur du résultat géométrique. Les conséquences de la solution détaillée de 7.1 seront réservé à une prochaine section.

Si une distribution spectrale donnée $V(\lambda)$ est une protomère, la meilleure protomère approximative est la même protomère. Par 7.1, la valeur minimale correspondante de Δ devrait-être nulle. Les valeurs minimales de Δ qui ne s'annulent pas doivent donc être pour des caractéristiques de $V(\lambda)$ autre que sa couleur. De telles valeurs ne peuvent pas être connues ou calculées par un organisme à travers la vue de $V(\lambda)$; pour la raison que le vue ne donne que la couleur. La minimisation n'est donc *pas* un modèle pour ce qui arrive véritablement quand la vue de $V(\lambda)$ est approximée par une protomère. [Ce qui se passe vraiment à déjà été décrit dans la section 3 et 4, et est résumé dans la seconde équation de la condition 7.1e: $V(\lambda)$ est convertie par l'absorption en v^k via 2.4, et transformée en p_{k*} par l'inversion de 5.4].

Malgré son inaccessibilité à la vision directe lorsqu'elle est présentée comme une mesure de l'approximation par la protomère, Δ est essentiellement une structure physiologiquement déterminée. A la vue de 7.1e c'est une moyenne pondérée sur toutes les longueurs d'onde visible d'une mesure de différence entre une intensité spectrale donnée, $V(\lambda)$, et une approximation par une protomère, $\exp \mathbf{p}^*(\lambda)$. La pondération dans la moyenne doit mesurer l'importance de la vision pour l'organisme à cette longueur d'onde, laquelle par 7.1e montre être un aspect de $A^k(\lambda)$. Avec un peu d'ingénuité on pourrait inventer un chemin évolutif le long duquel une quantité développée et déterminée physiologiquement deviendrait totalement inconnue et inaccessible par l'organisme. L'ingénuité n'est pas nécessaire cependant: Δ montrera une autre connexion

en étant le fondement de la mesure invariante, totalement accessible, de la *divergence entre les couleurs*, la source de la métrique de l'espace couleur.

Le principal obstacle pour l'intégration de la condition 7.1e vient de la richesse des tenseurs possible en théorie. Toutes fonctions de λ , $X(\lambda)$, arbitraires sauf pour des restrictions évidentes sur l'intégrabilité, peut donner naissance à un tenseur de rang arbitraire, (symétrique, cependant, sur tous les indices avec étoile et tous les indices sans étoile) [Explications 11.7] :

$$X^{mn\dots,m^*n^*\dots} \equiv \int_{-1}^{+1} X(\lambda)A^m(\lambda)A^n(\lambda)\dots P^{m^*}(\lambda)P^{n^*}(\lambda)\dots d\lambda$$

Le volume de la pyramide formée par trois vecteurs est un invariant relatif, essentiellement $\epsilon(kmn)X^kY^mZ^n$ avec $\epsilon(kmn)$ le symbole de Levi-Civita antisymétrique. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\epsilon(kmn)Y^mZ^n$ est un vecteur dual relatif du même poids. Le quotient du vecteur dual relatif par une invariant relatif est le vecteur dual W^k ; et $\epsilon(kmn)W^k \equiv W^{mn}$ est un tenseur antisymétrique. Puisque les mêmes considérations s'appliquent pour l'espace \mathbf{p}^* , les tenseurs pour toutes les symétries et toutes les distributions d'indices, étoile ou sans étoile, peuvent entrer dans Δ . De tels tenseurs peuvent-être des fonctionnelles arbitraires de $V(\lambda)$ et des fonctions arbitraires de p_{k^*} .

Un tel tenseur, $X_k^{m^*} \equiv X_k^{m^*}[V(\lambda'); p_{k'^*}]$ doit intervenir dans la condition 7.1e pour représenter l'équivalence logique comme une égalité:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial p_{m^*}} = X_k^{m^*} \int_{-1}^{+1} A^k(\lambda)[\exp \mathbf{p}^*(\lambda) - V(\lambda)]d\lambda \quad (7.2)$$

On peut ensuite former $\partial^2\Delta/\partial p_{m^*}\partial p_{n^*}$ et imposer la symétrie en m^* , n^* pour toutes valeurs de p_{k^*} et toutes fonctions positives, $V(\lambda)$. Pour éviter un argument analytique compliqué, cependant, notons que $\exp \mathbf{p}^*(\lambda)$ entre en 7.2 et donc est au moins une deux façon dont p_{k^*} entre dans Δ . Puisque $\exp \mathbf{p}^*(\lambda)$ tient dans une seule intégrale dans 7.2 avec aucune dépendance externe à λ , ni un noyau de plus d'une variable λ le liant à une autre intégrale, il peut seulement apparaître dans Δ une ou plus de fonctionnelle de la forme,

$$I_K \equiv \int_{-1}^{+1} C_K[V(\lambda'); p_{k'^*}, \lambda] \exp \mathbf{p}^*(\lambda)d\lambda$$

où les C_K sont fonctions de $p_{k'^*}$ et λ , et fonctionnelles de $V(\lambda)$, en général. Une telle intégrale contribue à $\partial\Delta/\partial p_m$ par un terme de la forme

$$\int_{-1}^{+1} C[V(\lambda'); p_{k'^*}, \lambda]P^{m^*}(\lambda) \exp \mathbf{p}^*(\lambda)d\lambda \quad (7.3)$$

où $C \equiv C_K \partial \Delta / \partial I_K$. Mais $\exp \mathbf{p}^*(\lambda)$ entre $\partial \Delta / \partial p_{m^*}$ par une intégrale bien différente,

$$\int_{-1}^{+1} X_k^{m^*}[V(\lambda'); p_{k'^*}] A^k(\lambda) \exp \mathbf{p}^*(\lambda) d\lambda \quad (7.4)$$

qui néanmoins doit être égale à 7.3.

Il n'y a pas de manière pour l'égalité

$$X_k^{m^*} A^k(\lambda) = C(\lambda) P^{m^*}(\lambda) \quad (7.5)$$

d'être vraie pour tout λ et m^* à cause des dépendances particulières de $X_k^{m^*}$ et C quand ici les dépendances aux quantités p_{k^*} et $V(\lambda)$ sont supprimées. La seule manière est si toutes les dépendances sur $V(\lambda)$ et p_{k^*} de ces quantités s'annulent des deux coté de 7.5, laissant une relation de la même forme avec $X_k^{m^*}$ un tenseur constant et $C(\lambda)$ une fonction de λ seule.

Par un choix judicieux de la base de l'espace couleur, $X_k^{m^*}$ peut être transformé en $\delta_k^{m^*}$:

$$A^k(\lambda) = C(\lambda) P^k(\lambda) \quad (7.6)$$

Pour garder ce résultat important invariant nous donnons désormais la liberté de changer arbitrairement les deux bases, celle de l'espace couleur et celle des protomères. Plutôt nous fixons ces bases ensemble pour maintenir 7.6 et retenons un seul groupe $GL(3R)$ pour représenter la liberté du choix. L'étoile sur les indices et vecteurs de l'espace des protomères n'est plus indispensable.

L'espace des couleurs et des protomères sont duaux entre eux. (On peut traiter v^k et p_k comme étant respectivement les images contravariantes et covariantes d'un et un seul vecteur, à conditions que nous gardions à l'esprit que la relation qui lie une espace avec l'autre est sévèrement non-linéaire. Les indices ne peuvent pas être élevés ou abaissé comme d'habitude; mais la relation d'une espace à son dual génère encore une métrique).

Nous avons montré, de manière peut-être pas très rigoureuse que 7.6 est nécessaire pour l'existence d'une mesure, Δ , de divergence. Nous allons maintenant montrer qu'il est essentiellement suffisant. [Les principes variationnels ont donné des lois de plus grande généralité que leur point de départ. Un argument plus simple et plus rigoureux pour 7.6 doit éventuellement être trouvé. Autrement il pourrait être bon de prendre 7.6 comme une axiome indépendant]. Quand 7.6 est substitué dans 7.1e,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} C(\lambda) P^k(\lambda) [\exp \mathbf{p}(\lambda) - V(\lambda)] d\lambda \\ = \left(\frac{\partial}{\partial p_k} \right) \int_{-1}^{+1} C(\lambda) [\exp \mathbf{p}^*(\lambda) - V(\lambda) \mathbf{p}(\lambda)] d\lambda \end{aligned}$$

Donc une solution particulière, Δ , respectant les conditions 7.1 existe:

$$\Delta = 2 \int_{-1}^1 C(\lambda) [\exp \mathbf{p}(\lambda) - V(\lambda) - V(\lambda) \mathbf{p}(\lambda) + V(\lambda) \ln V(\lambda)] d\lambda \quad (7.7)$$

L'inclusion de termes dépendant de V seulement n'a pas d'effet sur $\partial\Delta/\partial p_k$ mais est indispensable pour les conditions 7.1c et 7.1d. On peut le voir en posant $U(\lambda) \equiv [\exp p(\lambda)]/V(\lambda)$ dans 7.7:

$$\Delta = 2 \int_{-1}^1 C(\lambda)V(\lambda)[U(\lambda) - 1 - \ln U(\lambda)]d\lambda \quad (7.8)$$

Comme fonction de U , $U - 1 - \ln U$ à sa dérivée première égale à $1 - 1/U$ et sa seconde à $1/U^2$. Elle a son minimum pour $U = 1$ pour laquelle elle a une valeur minimal = 0, donc satisfaisant 7.1c et 7.1d. La ressemblance de Δ avec H de Boltzmann ne doit pas se faire sans une remarque: comme l'entropie, Δ est mieux définit expérimentalement aux environs immédiat de son extremum.

Δ n'est pas une solution unique de 7.1 [19]. Toute fonction monotone de Δ , $f(\Delta)$, avec $df/d\Delta \neq 0$, laquelle, en dehors de sa dépendance en Δ , peut-être une fonction arbitraire de $V(\lambda)$ et engendrer une autre solution 7.1:

$$\bar{\Delta} = |f(\Delta)| - |f(0)| \quad (7.9)$$

Ce degré d'arbitraire est inhérent à l'idée générale de mesure de divergence, et peut seulement être coupé par le rasoir d'Occam. Il ne peut pas influencer la façon dont la théorie s'applique à l'expérience, spécialement lorsqu'il se réduit à un simple changement d'échelle pour Δ , lorsque Δ est petit: $\bar{\Delta} \cong (|df/d\Delta|_{\Delta=0})\Delta$.

Dans 7.7 et 7.8, $C(\lambda)$ est essentiellement le poids avec lequel la différence entre $V(\lambda)$ et sa protomère approximative $\exp \mathbf{p}(\lambda)$ sont combinées dans Δ à tout les intervalles de longueur d'onde, $d\lambda$. C'est aussi son rôle dans la structure de la relation 5.4, laquelle partage avec Δ la responsabilité de donnée une forme analytique à la théorie des protomères:

$$v^k = \int_{-1}^{+1} C(\lambda)P^k(\lambda) \exp p(\lambda)d\lambda = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (7.10)$$

$$H \equiv H[\exp \mathbf{p}(\lambda')] \equiv \int_{-1}^1 C(\lambda) \exp \mathbf{p}(\lambda)d\lambda \quad (7.11)$$

Les équations 7.10 et 7.11, bien plus que 5.4 donnent un exemple d'une généralisation de la relation de Weber-Fechner. Donc $C(\lambda)$ joue le rôle joué originellement par l'efficacité lumineuse dans la performance en photométrie hétérochromatique.

Bien que λ était introduit comme la longueur d'onde, avec une échelle et un intervalle normalisé pour varier de -1 à $+1$, le mode de normalisation n'a jamais été spécifié en détail, ni même aucune valeur de λ réduite à une mesure de longueur d'onde. En fait, λ peut-être n'importe quelle fonction monotone et continue de la longueur d'onde, décalée et augmentée linéairement pour varier entre -1 et $+1$. $C(\lambda)$ intervient donc dans les équations basiques 7.7, 7.8, 7.10, et 7.11 de manière à connecter les différentiels d'un paramètre arbitraire, qui

est seulement de l'ordre de la longueur d'onde, en différentielles de poids significativement physiologique. [Les intégrales identifiées dans la théorie sont essentiellement du type Stieltjes avec $C(\lambda)d\lambda$ étant le poids différentiel].

Avec l'aide des hypothèses plausibles du paragraphe 5, c'est-à-dire $P^0(\lambda) = 1$, la théorie est rendue quantitativement définie en donnant seulement trois fonctions, $A^k(\lambda)$, les *chromolabes* de Young:

$$C(\lambda) = A^0(\lambda) \quad P^1(\lambda) = A^1(\lambda)/A^0(\lambda) \quad P^2(\lambda) = A^2(\lambda)/A^0(\lambda) \quad (7.12)$$

avec λ compris comme étant un paramètre continue dans l'intervalle de longueur d'onde du violet au rouge dans l'ordre de l'arc-en-ciel.

8 La base des protomères

La dualité des espaces couleurs et protomères, résumé en 7.6, encourage une attaque conjointe de la théorie et de l'expérience à la question essentielle, "Comment trouver $P^k(\lambda)$ - la base de l'espace des protomères et un ingrédient essentiel à la relation $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ qui donne à la vision des couleurs une valeur de survie?". La question est difficilement séparable de la mesurabilité de $C(\lambda)$ et donc de la mesurabilité du nouveau *scalaire de luminance*, $H[V(\lambda')]$, défini en 7.11. [Pour les couleurs d'intensité totale unitaire sur le cône spectral, $V(\lambda') = \delta(\lambda - \lambda')$, H est réduit à $C(\lambda)$]. Puisque H répond additivement à un mélange, précisément comme une composante du vecteur \mathbf{v} , c'est soit une quatrième dimension de l'espace couleur, comme beaucoup d'autres dimension, que nous ne pouvons pas percevoir ; ou c'est une des trois dimensions des couleurs perçues distingué par un nom spécial. Si c'est une composante v^0 du vecteur couleur \mathbf{v} , alors $P^0(\lambda) = 1$ dans cette base et l'hypothèse plausible tient. La luminance peut toutefois être perçue comme une composante couleur si et seulement si 1 est une protomère, sinon elle ne peut pas être perçue du tout.

Quelques observateurs ont reporté voir la luminance comme un aspect de toutes les autres couleurs, et d'être capable d'égaliser deux couleurs par leur luminance même lorsque elles diffèrent par une autre composante. D'autres observateurs ont noté qu'une égalisation de la sorte échoue à satisfaire la condition nécessaire de l'additivité par mélange - la propriété définissant une composante de couleur - par plus de 40% [22]. (La photométrie par papillonnement donne des résultats plus reproductibles pour ce que le praticien appelle luminance, mais le problème ici est de relater l'effet induit, ou détecté par papillonnement, à la vision fixe des couleurs comme décrit ici).

Aussi loin que l'auteur sache, les seules régions de luminance constante établie par l'expérience ont été des petite régions planes dans les environs immédiat de certaines couleurs sélectionnées. Sans que l'expérience soit assez précise et exhaustive pour garantir les conclusions suivantes, il est quelque fois mystérieusement établi la croyance générale que (a) les régions de luminance constante enveloppe des surfaces continues, (b) que les surfaces sont planes, et (c) que les plans sont parallèles. Aucune de ces conclusions n'ont besoin

d'être vraies à priori, ni ont des arguments de leur véracité invoqués jusqu'à maintenant. Mais il peut-être vu de 7.10 et 7.11 que si H est accepté comme mesure de luminance, alors (a), (b) et (c) s'ensuivent nécessairement - non pour la raison de l'expérience, mais par l'existence de la fonction de divergence pour les protomères, 7.8.

Malgré le soutien bienvenu que les expériences visant à pour prouver (a), (b) et (c) ci-dessus apporteraient à la théorie, il faut admettre qu'elles restent à faire. Quant aux données actuelles sur $C(\lambda)$, l'efficacité lumineuse, il est peut-être préférable de ne pas s'y fier dans la mesure du possible.

Pour travailler dans l'espace couleur de telle manière que $C(\lambda)$ soit éliminé de la relation duale 7.6 revient à limiter les considérations aux rapports de $A^k(\lambda)$. Comme un des $P^k(\lambda)$ est déjà suggéré par l'hypothèse plausible, $P^0(\lambda) = 1$, les limitations des rapport correspondants de $P^k(\lambda)$ ne doivent pas nous empêcher de déterminer tout ce dont nous avons besoin de savoir. Mais les rapports de $A^k(\lambda)$ ont seulement deux degrés de liberté, correspondant à une surface dans l'espace couleur; et la seule surface qui peut être définie par des expériences de mélange est un plan.

Considérons cependant, une section plane ne passant pas par l'origine qui coupe à travers le faisceau des couleurs physiques. Un plan est défini par trois points non colinéaires, l'extrémité de trois vecteurs indépendants \mathbf{v}_k . Toute couleur \mathbf{v} peut être définie par ces composantes v^k dans la base formée par les \mathbf{v}_k , i.e., $\mathbf{v} = v^k \mathbf{v}_k$ qui peuvent être arrangés comme [Explications 11.8.1]

$$\mathbf{v} = \left(\sum_k v^k \right) \mathbf{v}_0 + [v^1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) + v^2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0)] \quad (8.1)$$

La raison pour 8.1 est que les vecteurs $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ forment un triangle dans le plan; $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0$ forment une base des vecteurs du plan, et donc les vecteurs entre parenthèse dans 8.1 sont totalement inscrit dans le plan. Il devrait maintenant être évident que $\sum_k v^k = 1$ est la condition nécessaire et suffisante pour les extrémités de \mathbf{v} de traverser le plan.

Le cône spectral est défini par 6.2 comme $\mathbf{v} = e^\mu \mathbf{A}(\lambda)$. Son intersection avec le plan est donc $\sum_k e^\mu A^k(\lambda) = 1$ ou $e^\mu = 1 / \sum_k A^k(\lambda)$. Donc, la condition nécessaire et suffisante pour \mathbf{v} de traverser la ligne d'intersection du cône et du plan est

$$\mathbf{v} = A^k(\lambda) \mathbf{v}_k / \sum_m A^m(\lambda) = P^k(\lambda) \mathbf{v}_k / \sum_m P^m(\lambda) \quad (8.2)$$

par 7.6. Comme prévu, seul les rapports de $P^k(\lambda)$ sont invoqués, et $C(\lambda)$ est annulé. Par 8.1, les coordonnées des vecteurs entre parenthèses incluses dans le plan sont précisément v^1 , v^2 dans la base $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0$ engendrant le plan.

$$v^1 = P^1(\lambda) / \sum_m P^m(\lambda) \quad v^2 = P^2(\lambda) / \sum_m P^m(\lambda) \quad (8.3)$$

La ligne d'intersection produite par v^1 et v^2 quand λ change de -1 à $+1$ est connue comme *la courbe de chromaticité* dans le plan.

Si le plan est changé, les trois vecteurs \mathbf{v}_k doivent être changé de telle manière qu'ils restent linéairement indépendants, i.e., $\mathbf{v}_k \rightarrow X_k^m \mathbf{v}_m$, où X_k^m sont les coefficients d'une transformation inversible. Puisque les $P^k(\lambda)$ sont cogradient des composantes de $\mathbf{A}(\lambda)$ par 7.6, et les composantes de $\mathbf{A}(\lambda)$ are contragradient de \mathbf{v}_k , il s'ensuit que $P^k(\lambda) \rightarrow Y_m^k P^m(\lambda)$, où Y est la matrice inverse transposé de X . Donc, étant donné la forme de $P^m(\lambda)$ dans un repère de référence fixé, 8.3 prend le forme suivante pour un plan quelconque:

$$v^1 z_k P^k = Y_k^1 P^k(\lambda) \quad v^2 z_k P^k = Y_k^2 P^k(\lambda) \quad z_m = \sum_k Y_m^k \quad (8.4)$$

Il sera utile de représenter les vecteurs dans le plan, avec deux composantes ici, par des lettres grecques en gras, e.g., ξ a pour composantes v^1 , v^2 , et η_k a pour composantes Y_k^1 , et Y_k^2 . 8.4 devient alors simplement

$$\zeta_k P^k(\lambda) = 0 \quad \zeta_k \equiv z_k \xi - \eta_k \quad (8.5)$$

Le birapport de deux vecteurs dans le plan est un nombre égal à l'aire du parallélogramme qu'ils forment ou le déterminant de leur composantes. Avec l'aide du produit externe on peut aisément extraire les rapport de P^k depuis 8.5:

$$\begin{aligned} \frac{P^1(\lambda)}{P^0(\lambda)} &= \frac{\zeta_2 \times \zeta_0}{\zeta_1 \times \zeta_2} \\ \frac{P^2(\lambda)}{P^0(\lambda)} &= \frac{\zeta_0 \times \zeta_1}{\zeta_1 \times \zeta_2} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Les dénominateurs aussi bien que les numérateurs dans 8.6 sont de la forme

$$\begin{aligned} \zeta_m \times \zeta_n &= (z_m \xi - \eta_m) \times (z_n \xi - \eta_n) \\ &= \eta_m \times \eta_n + \xi \times (z_n \eta_m - z_m \eta_n) \end{aligned} \quad (8.7)$$

et sont donc linéaire en v^1 , v^2 , les composantes de ξ . Il s'ensuit que P^1/P^0 et P^2/P^0 sont reliée par une transformation projective arbitraire en v^1 et v^2 . (Cela implique, entre autres choses, que les différentes formes de la courbe chromatique sont reliées entre elles par une transformation projective, un fait qui est connu. Le résultat requit ici va plus loin que cette affirmation).

En considérant les formes possibles pour $P^k(\lambda)$, commençons avec $P^0 = 1$ et continuons avec le fait que λ est une fonction monotone quelconque de la longueur d'onde, qui pourrait être représentée dans la base des protomères. Cela suggère $P^1(\lambda) = \lambda$. Finalement, $P^2(\lambda)$ doit être essentiellement pair en λ pour que $\mathbf{A}(\lambda)$ ait des dérivée différentes en $\lambda = \pm 1$, correspondant au fait expérimental que les extrémités du spectre sont de couleurs différentes, reliées par le plan des pourpre. La suggestion $P^k(\lambda) = \lambda^k$ se distingue par sa simplicité

et par le fait que les protomères sont Gaussienne et réciproque de Gaussienne. Son acceptabilité sur diverses bases physiques variées ont déjà été noté.

Avec $P^k(\lambda) = \lambda^k$, 8.6 se réduit à

$$(\zeta_0 \times \zeta_1)(\zeta_1 \times \zeta_2) = (\zeta_0 \times \zeta_2)^2 \quad (8.8)$$

et en retour, par 8.7, est linéaire en $(v^1)^2$, $(v^1 v^2)$, $(v^2)^2$, et v^1 , v^2 . En résumé la courbe de chromaticité associée uniquement avec les protomères Gaussiennes est une conique.

Un coup d'œil à la courbe de chromaticité de la C.I.E reproduite en Figure 2 montre qu'elle est généralement de forme hyperbolique [Explications 11.8.2]. Si cinq points sont choisis sur la courbe, une conique unique passe par ces points. Pour générer la conique on peut utiliser le théorème de Pascal [24] - les faces opposées de l'hexagone inscrit se joignent en point collinaires - en variant ces lignes tel que les six angles de l'hexagone trace la courbe. Les triangles de la Figure 2 entourent les cinq points de références alors que les cercles représentent une sélection de points construits. L'agrément est bon sauf pour le coin des violets, où des difficultés expérimentales sont occasionnées par la faible visibilité de l'extrémité du spectre. La conclusion générale doit être *les protomères Gaussienne sont un bon point de départ pour des déterminations plus précises*, si nécessaire. [Notons que $\lambda = \zeta_2 \times \zeta_0 / \zeta_1 \times \zeta_2$ dans 8.6 fait de λ le quotient de deux expressions linéaires en v^1 et v^2 . Cela signifie que les différentes valeurs de λ sont communes à deux transformations projective depuis deux points choisis sur la conique, en accord avec le théorème de Steiner. Il est alors aisé de faire une construction pour marquer la courbe de chromaticité observée en pas égaux de λ entre les limites $\lambda = \pm 1$ au points choisis pour marquer les extrémités du spectre. Le résultat devrait éventuellement être comparé avec les longueurs d'onde marquées sur la courbe C.I.E. pour donner une signification au paramètre λ , pour lequel $P^k(\lambda) = \lambda^k$, en terme réelle longueur d'onde].

Naturellement, puisque les transformation projectives transforme toutes coniques en une autre, il est possible de présenter la conique de chromaticité comme un segment de cercle plus proche que Newton l'avait imaginé. De ce point de vue le standard C.I.E. n'est pas une avancée du travail original de Newton. Pour faciliter les expérimentations, une forme parabolique serait mieux, avec la plan des pourpres à distance infinie correspondant aux grandes intensités nécessaires pour rendre les extrémités du spectre visibles.

La relation entre les courbes approximativement coniques de chromaticité et l'existence d'une base spéciale pour laquelle $P^k(\lambda) = \lambda^k$ ne requiert pas l'identification de cette base. La preuve est indépendante du choix de la base et du choix du plan de chromaticité. Ni la luminance, H , ni l'efficacité lumineuse, $C(\lambda)$, ont été invoqués de quelque sorte dans la comparaison entre la théorie et l'expérience. Si l'hypothèse plausible est fautive, et la luminance est *imperceptible* comme une composante couleur et pas seulement précisément *non identifiable*, les faits sur la chromaticité apportent une conclusion plus générale:

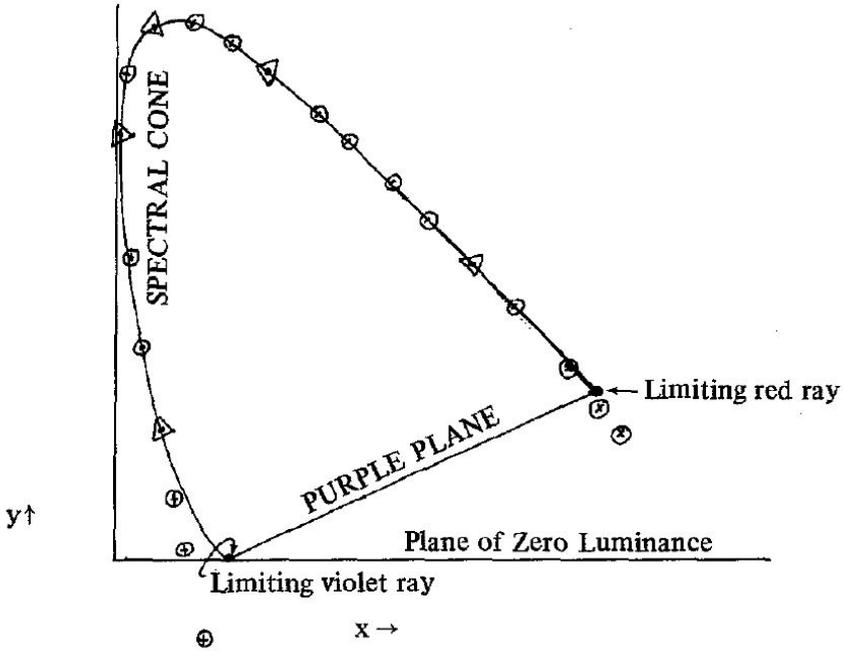


Fig. 2 Courbe de chromaticité approximée par une conique. Les triangles représentent les cinq points choisis pour calculer la conique; Les cercles, les points construits sur le conique (une construction projective de Pascal-Braikenridge-MacLaurin).

Il existe une base, dans laquelle, qui est une conséquence directe de 8.8,

$$P^2(\lambda)P^0(\lambda) = [P^1(\lambda)]^2 \tag{8.9}$$

La platitude du plan utilisé pour déterminer la chromaticité est exprimée par $\sum_k v^k = 1$ et peut être étalonné précisément par de simples expériences de mélange et d'égalisation. Malheureusement, la C.I.E. a réduit les courbes de chromaticité de différents observateurs l'une dans l'autre en utilisant une équation du plan de luminance constante déterminé par chaque observateur. L'avantage de créer un consensus entre plusieurs observateurs pourrait possiblement être amenuisé par l'injection d'une considération non nécessaire et étrangère aux données. Bien que quelque chose en rapport avec la luminance et l'efficacité lumineuse pourrait contredire la comparaison faite ici, si elle était précise, les erreurs possibles ainsi introduites pourraient ne pas s'annuler. Il est donc difficile de décider si la divergence entre la courbe standard de chromaticité et la conique (ou tout autre propriété équitablement précise de la courbe standard) doivent être prise sérieusement.

9 Métrique de l'espace couleur

Sous-jacent à toute métriques pour l'espace couleur doit-être une mesure de *distance* entre les extrémités de deux quelconques vecteur couleurs (physique). La distance est une fonction non-négative et $GL(3R)$ -invariante des composantes d'une paire de vecteurs, invariant par échange entre les vecteurs et obéissant à l'inégalité triangulaire. La mesure Δ de 7.7, de divergence entre une protomère, $\exp \mathbf{p}(\lambda)$, et une métamère physique, $V(\lambda)$, est invariante et non négative; mais, tel quel, n'a pas les autres propriétés requises. Le principale échec est qu'il ne se réfère pas à deux couleurs, bien que le contenu d'information d'une protomère est logiquement équivalent à une couleur, le contenu d'une intensité spectrale ne l'est pas. Comme $V(\lambda)$ varie d'une métamère à une autre, la valeur de Δ peut changer significativement même si les deux métamères ont la même couleur. Ce défaut ne peut pas être remédié en remplaçant simplement $V(\lambda)$ par une protomère, $\exp \mathbf{q}(\lambda)$, par ce que la structure de Δ reste antisymétrique entre les deux protomères. Seul lorsque la divergence entre les deux est réduite à une magnitude infinitésimale, la symétrie et la propriété triangulaire apparaît.

Trouver une métrique sur les propriétés infinitésimales de Δ serait imprudent à moins qu'il y ait un principe de stabilité spécial de Δ par rapport aux variations *isochromatique* de $V(\lambda)$ aux environs de la protomère de même couleur que $V(\lambda)$, nommément $\exp \mathbf{q}(\lambda)$. Ce qui est requis est un principe minimal pour Δ assez différent de la propriété 7.1e déjà définie. Pour illustrer la nature générale de cette différence, imaginons l'espace infini des distributions d'intensité spectrale, $V(\lambda)$, réduit à trois dimensions et l'espace tridimensionnel des couleurs réduit à une ligne. Les couleurs serait alors une famille à un paramètre de l'intersection de feuilles bidimensionnelles contenant chacune un point représentant la protomère de cette couleur. L'espace des protomères serait une courbe continue enfilant les feuilles comme sur la Figure 3(a) alors que Δ peut-être imaginé comme un élastique connectant un point de la feuille sur la courbe des protomères.

Le principe minimal, 7.1e qui définit Δ rend fixe l'extrémité de l'élastique à $V(\lambda)$ tout en permettant à la protomère de glisser librement sur l'espace des protomères, (i.e. le long de la courbe protomère de la Figure 3). Le minimum de Δ atteint la valeur $\Delta^{(1)}$ avec la protomère mobile s'arrêtant en $\exp \mathbf{q}(\lambda)$ sur la feuille de même couleur que $V(\lambda)$. Le nouveau principe minimal garde fixe l'extrémité de la protomère de l'élastique à $\exp \mathbf{p}(\lambda)$ permettant $V(\lambda)$ de glisser isochromatiquement le long d'une seule feuille. Le minimum que Δ atteint de cette manière est $\Delta^{(2)}$, avec la métamère mobile s'arrêtant à $\exp \mathbf{q}(\lambda)$, la protomère de cette feuille.

Il est intuitivement évident que la situation que le nouveau principe minimal doit sécuriser est celle de la figure 3(b), au moins dans les environs de la protomère, organisant les classes des protomères en structures parallèles avec l'espace des protomères s'enfilant sur elles orthogonalement.

Définissons $\delta V(\lambda)$ comme étant une variation arbitraire de $V(\lambda)$ [restreint seulement par $V(\lambda) > 0$] et laissons la limitation isochromatique forcée par un

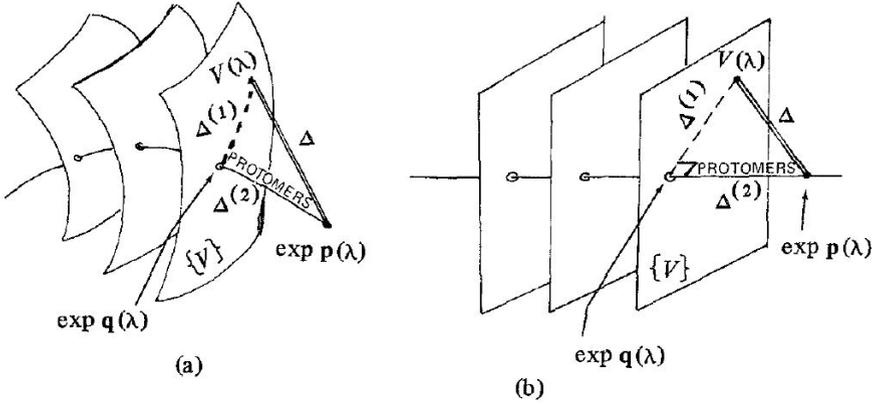


Fig. 3 Schéma de la relation entre protomères et métamères

multiplicateur Lagrangien, $2r_k$, pour les composantes v^k de la couleur $V(\lambda)$ donné par 7.10. Cela signifie que les quatre quantités qui doivent être rendus extrêmes sous $\delta V(\lambda)$ sont représentées par [Explications 11.9]

$$\Delta + 2r_k v^k = \Delta + 2r_k \int_{-1}^1 C(\lambda) P^k(\lambda) V(\lambda) d\lambda$$

$$\delta(\Delta + 2r_k v^k) = 2 \int_{-1}^1 C(\lambda) [\ln V(\lambda) - \mathbf{p}(\lambda) + \mathbf{r}(\lambda)] \delta V(\lambda) d\lambda$$

En choisissant $\delta V(\lambda)$ arbitrairement concentré autour d'un λ choisi d'une manière usuelle, le minimum de Δ , sujet à $\mathbf{v} = \text{constant}$ est

$$\ln V(\lambda) = \mathbf{p}(\lambda) - \mathbf{r}(\lambda) \equiv \mathbf{q}(\lambda) \tag{9.1}$$

Clairement $V(\lambda)$ doit être une protomère - pas une autre protomère que $\exp \mathbf{q}(\lambda)$ de couleur constante donnée de $V(\lambda)$. Le nouveau principe minimal de Δ donne la divergence entre protomères une distinction unique, minimale: *de toutes les métamères d'une couleur donnée, la protomère est toujours la plus proche d'une protomère de couleur différente donnée.*

Quand $V(\lambda)$ s'approche suffisamment proche de $F(\lambda) \equiv \exp \mathbf{p}(\lambda)$ 7.1c et 7.1d assurant que Δ devienne symétrique en V et F impliquant que la différence entre V et F est uniquement donné par $(V - F)^2$. Sous ces conditions Δ peut être remplacé par la moitié de la somme de Δ et la forme obtenue en échangeant V et F est:

$$\Delta = \int_{-1}^1 C(\lambda) [V(\lambda) - F(\lambda)] [\ln V(\lambda) - \ln F(\lambda)] d\lambda \tag{9.2}$$

$$\Delta \cong \int_{-1}^1 C(\lambda) [V(\lambda) - F(\lambda)]^2 / F(\lambda) d\lambda \tag{9.3}$$

$$\cong \int_{-1}^1 C(\lambda)F(\lambda)[\ln V(\lambda)/F(\lambda)]^2 d\lambda \quad (9.4)$$

Ici Δ est révélé comme intermédiaire entre une moyenne de $(V - F)^2$ et $(\ln V/F)^2$. La symétrie et l'inégalité triangulaire sont maintenant réalisées.

Il reste à spécialiser V ainsi que F aux protomères environnantes:

$$\begin{aligned} F &= \exp \mathbf{p}(\lambda) \quad V = \exp[\mathbf{p}(\lambda) + \delta \mathbf{p}(\lambda)] \\ \Delta &\cong \int_{-1}^1 C(\lambda) \delta \mathbf{p}(\lambda) [V(\lambda) - F(\lambda)] d\lambda \\ &\cong \delta p_k \int_{-1}^1 C(\lambda) P^k(\lambda) [V - F] d\lambda \cong \delta p_k \delta v^k \end{aligned}$$

en référence à 7.10. Donc

$$\Delta \cong (\partial v^m / \partial p_n) \delta p_n \delta p_m = (\partial p_n / \partial v^m) \delta v^m \delta v^n \quad (9.5)$$

A ce point la structure caractéristique du tenseur métrique apparaît dans les deux espaces couleur et protomère généré par les dérivées de la relation $\mathbf{p} - \mathbf{v}$.

Il est maintenant évident qu'un autre changement de Δ doit être fait avant qu'il puisse être identifié à une (distance)². Sous une amplification neutre de $V(\lambda)$; $V \rightarrow \beta V$, la couleur de V devient $\mathbf{v} \rightarrow \beta \mathbf{v}$ par 2.4 ou 7.10. Mais \mathbf{p} ne subit pas nécessairement la transformation $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \ln \beta$ suggérée par 5.4 à moins que 1 soit protomère. Comme résultat la dernière forme de 9.5 ne subit pas une multiplication sous cette transformation à moins que l'hypothèse plausible soit vraie. En résumé il n'y a aucune façon de rendre la métrique symétrique sous $V \rightarrow \beta V$ sans cette hypothèse. Une vérification sur Δ dans 7.7 montre que cela, aussi, ne répond pas de manière symétrique à $V \rightarrow \beta V$ à moins que $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \ln \beta$ et 1 soient protomères. Ce problème n'est pas apparu avant parce qu'il n'y avait pas d'exigence sur Δ qui ne soit perçue. Maintenant qu'il est question de rejoindre les rangs des quantités perçues nous devons demander qu'il satisfasse la loi de Weber-Fechner, nommément que la métrique qu'il génère soit invariant sous $V \rightarrow \beta V$. Avec la forme de Δ en 7.7, il pourrait ne pas rencontrer cette contrainte sans l'hypothèse plausible. Il n'est pas connu si une fonction de divergence peut-être trouvée, si l'hypothèse plausible est fausse.

Pour atteindre la prochaine étape nous l'additionnons donc aux axiomes de la théorie:

Il s'ensuit que $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \ln \beta$, $\Delta \rightarrow \beta \Delta$. Avant que Δ puisse être identifié avec une (distance)² il doit être réduit à un invariant de Weber-Fechner présumé par la division par une fonctionnelle approprié de $V(\lambda')$ et $\mathbf{p}(\lambda')$. La division ne peut pas être une fonctionnelle de $\mathbf{p}(\lambda')$ en 7.7 sans gâcher la propriété de minimum définie en 7.1e; et la seule fonctionnelle de $V(\lambda')$ qui ne gâche pas le nouveau principe de minimisation dans 9.1 sont que les composantes de \mathbf{v} , la couleur de V , soit maintenue constante durant la variation considérée. Un tel

diviseur doit être scalaire et doit acquérir un facteur de β sous l'amplification neutre de $V(\lambda)$. Donc, c'est soit la luminance, $H[V(\lambda)]$, ou le volume de la pyramide dont l'une des arêtes est le vecteur couleur \mathbf{v} et les autres arêtes sont les directions absolues dans l'espace des couleurs. Bien sûr, les seules directions absolues sont les intersections du plan des pourpres et le rouge et le violet limitant les plans tangents. Puisque le plan tangent limite est la même que le plan de luminance zéro, il apparaît que Δ/H est l'invariant de Weber-Fechner comme requis. Dans le cas infinitésimal, 9.5, $H[V(\lambda)]$ se réduit à $H[\exp \mathbf{p}(\lambda')]$, précisément la fonction de p_k pour laquelle le gradient dans 7.10 est v^k lui-même, dénoté désormais simplement par H :

$$\Delta/H \rightarrow (\delta s)^2 \equiv H^{-1}(\partial^2 H/\partial p_m \partial p_n) \delta p_n \delta p_m \quad (9.6)$$

Malgré l'intérêt théorique de $H^{-1}(\partial^2 H/\partial p_m \partial p_n)$, le tenseur métrique dans l'espace \mathbf{p} , est immense parce que H est défini directement en termes de p_k par 7.10, l'intérêt pratique se concentre pour la métrique dans l'espace \mathbf{v} . Pour cela on doit effectuer une transformation de Legendre pour laquelle H peut-être considéré comme une fonction Hamiltonienne des moments, p_k , alors que Λ est une fonction Lagrangienne des vitesses v^k :

$$\Lambda \equiv v^k p_k - H \quad \partial \Lambda / \partial v^m = p_m \quad (9.7)$$

$$\delta p_m = (\partial p_m / \partial v^n) \delta v^n = (\partial^2 \Lambda / \partial v^m \partial v^n) \delta v^n \quad (9.8)$$

$$(\delta s)^2 = H^{-1}(\partial^2 \Lambda / \partial v^m \partial v^n) \delta v^m \delta v^n \quad (9.9)$$

Il est intéressant de noter que puisque $\partial p_n / \partial v^m$ et $\partial v^m / \partial p_n$ forment des matrices réciproques, la même chose est vrai pour $\partial^2 H / \partial p_m \partial p_n$ et $\partial^2 \Lambda / \partial v^m \partial v^n$. Donc, le tenseur métrique de l'espace \mathbf{v} , et sa réciproque sont

$$g_{mn} = H^{-1} \partial^2 \Lambda / \partial v^m \partial v^n \quad g^{mn} = H \partial^2 H / \partial p_m \partial p_n \quad (9.10)$$

Immédiatement il peut être vu que 9.10 satisfait la condition d'existence d'une fonction de "luminosité" établie par Schrödinger [5], nommément qu'il existe une fonction Ψ de v^k tel que

$$(\partial / \partial v^m)(\Psi g_{nk} v^k) = (\partial / \partial v^n)(\Psi g_{mk} v^k) \quad (9.11)$$

Par 9.5, 9.6, et 7.10,

$$g_{mk} v^k = H^{-1}(\partial p_k / \partial v^m)(\partial H / \partial p_k) = \partial \ln H / \partial v^m$$

tel que 9.11 a une solution $\Psi = \Psi(H)$. H , la luminance elle-même, est la fonction de "luminosité" cherchée.

Une propriété d'importance relié est que toute fonction homogène de v^k de degré zéro, i.e., chaque invariant sous l'amplification neutre $v^k \rightarrow \beta v^k$, $p_k \rightarrow p_k + \ln \beta$ est *orthogonal* à H . Avec la présence d'une métrique, il est

maintenant possible d'établir que deux vecteurs tangents comme $\partial X(v)/\partial v^m$ et $\partial Y(v)/\partial v^n$ sont orthogonaux si $g^{mn}[\partial X(v)/\partial v^m][\partial Y(v)/\partial v^n] = 0$. Par 9.10, et 7.10,

$$\begin{aligned} g_{mk}(\partial H/\partial v^m)(\partial X/\partial v^n) &= H(\partial v^m/\partial p_n)(\partial H/\partial v^n)(\partial X/\partial v^n) \\ &= H(\partial H/\partial p_n)(\partial X/\partial v^n) \\ &= H v^n \partial X/\partial v^n \end{aligned}$$

Donc $H = \text{constante}$, $X = \text{constante}$ sont des surfaces orthogonales si et seulement si X est homogène de degré zéro en v^k .

Cela signifie que l'on peut séparer dans $(\delta s)^2$, la contribution qui vient d'un déplacement de la luminance, δH , des déplacements sur les surfaces orthogonales à H , tel que $x^k = v^k/H = \text{constante}$. Dans les coordonnées spéciales où $P^0(\lambda) = 1$, $v^0 = H$, x^0 est réduit à 1, tel qu'il y ait seulement deux variables x^k orthogonales à H . Dans les coordonnées générales, $P^0 = 1$ est remplacé par $a_k P^k(\lambda) = 1$ où les a_k sont les constants de la transformation. Il s'ensuit que $H = a_k v^k$ et $a_k x^k = 1$. Il est maintenant évident que a_k est le vecteur dual des plans de luminance (approximativement proportionnel au birapport des vecteurs le long des rayons noirs). De plus, x^k est explicitement homogène de degré zéro, et seulement deux de ses composantes peuvent être indépendantes.

En utilisant $\delta H = v^k \delta p_k$ depuis 7.10, on construit

$$\Gamma \equiv x^k p_k - \ln H \quad \delta \Gamma = p_k \delta x^k + x^k \delta p_k - v^k \delta p_k / H$$

ou

$$\delta \Gamma = p_k \delta x^k, \quad a_k \delta x^k = 0, \quad (\partial \Gamma / \partial H)_x = 0 \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} (\delta s)^2 &= \delta v^k \delta p_k / H = \delta(H x^k) \delta p_k / H \\ &= (x^k \delta p_k) \delta H / H + \delta x^k \delta p_k \\ &= \delta x^k \delta p_k + (\delta H / J)^2 \end{aligned} \quad (9.13)$$

Cela exprime l'orthogonalité des déplacement x et H , et montre la contribution des déplacements de luminance à la métrique obéit la loi de Weber-Fechner [25].

Pour examiner la métrique courbe qui reste dans les plans de luminance constant, on élimine une composante de x^k choisis aléatoirement e.g., x^0 avec $a_0 \neq 0$, $\delta x^0 = -a_\mu x^\mu / a_0$, où $\mu, v, \dots = 1, 2, \dots$. Substitution dans 9.12 donne

$$\begin{aligned} \delta \Gamma &= (p_\mu - a_\mu p_0) \delta x^\mu \equiv p_\mu^* \delta x^\mu \\ p_\mu^* &= \partial \Gamma / \partial x^\mu, \quad \Gamma \equiv \Gamma(x^1, x^2) \end{aligned} \quad (9.14)$$

Substitution dans 9.13 donne finalement

$$(\delta s)^2 = (\delta H / H)^2 + (\partial^2 \Gamma / \partial x^\mu \partial x^\nu) \delta x^\mu \delta x^\nu \quad (9.15)$$

La métrique sur le plan de luminance constant est indépendante de la luminance, et décrit un espace bidimensionnel courbe. La courbure scalaire Riemannienne ne s'annule *pas* identiquement à cause de la forme spéciale de $g_{\mu\nu}^* \equiv \partial^2\Gamma/\partial x^\mu\partial x^\nu$, bien que les dérivées d'ordre supérieur s'annulent, laissant seulement la dérivée troisième de Γ dans le résultat.

Le plan de luminance constante à sa propre relation avec les protomères de p_1^*, p_2^* à x^1, x^2 en accord avec $p_k P^k(\lambda) = p_\mu^* P^\mu(\lambda) + p_0/a_0$, utilisant $p_\mu^* + a_\mu p_0/a_0 = p_\mu$, $a_k P^k(\lambda) = 1$. Donc nous pouvons construire

$$h(p_1^*, p_2^*) \equiv \ln \int_{-1}^1 C(\lambda) \exp[p_\mu^* P^\mu(\lambda)] d\lambda \quad (9.16)$$

$$X^\mu = \frac{\partial h}{\partial p_\mu^*} = \frac{\int_{-1}^1 C(\lambda) P^\mu(\lambda) \exp[p_\nu^* P^\nu(\lambda)] d\lambda}{\int_{-1}^1 C(\lambda) \exp[p_\nu^* P^\nu(\lambda)] d\lambda} \quad (9.17)$$

La comparaison de 9.14 et 9.17 montre

$$\partial p_\mu^*/\partial x^\nu = \partial^2\Gamma/\partial x^\mu\partial x^\nu, \quad \partial x^\mu/\partial p_\nu^* = \partial^2 h/\partial p_\mu^*\partial p_\nu^* \quad (9.18)$$

qui sont donc des éléments de matrice réciproques. En utilisant ce fait dans 9.17 nous donne

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= (\partial x^\mu/\partial p_\nu^*) \delta p_\nu^* \\ (\delta s)^2 &= (\delta H/H)^2 + (\partial^2 h/\partial p_\mu^*\partial p_\nu^*) \delta p_\mu^* \delta p_\nu^* \end{aligned} \quad (9.19)$$

Le dual p^* – et les cartes x du plan de luminance ont précisément le tenseur métrique réciproque, i.e.,

$$g_{\mu\nu}^* = \partial^2\Gamma/\partial x^\mu\partial x^\nu, \quad g^{*\mu\nu} = \partial^2 h/\partial p_\mu^*\partial p_\nu^* \quad (9.20)$$

La carte protomère p^* est proche de la théorie alors que la carte couleur (homogène), $x^\mu = v^\mu/H$ est proche de l'expérience. Dans la carte protomère, 9.6, h est clairement conditionné par $C(\lambda)$ et $P^\mu(\lambda)$. Les $P^\mu(\lambda)$ peuvent-être considérés bien connu à partir de la forme de la courbe de chromaticité de la section 8. Cela laisse l'efficacité lumineuse, $C(\lambda)$, d'être déterminée en analysant les résultats expérimentaux à partir de la métrique, $g_{\mu\nu}^*$.

Le chemin entre $C(\lambda)$ et $g_{\mu\nu}^*$ n'est pas simple. Depuis $h(p_1^*, p_2^*)$, une fonctionnelle de $C(\lambda)$ dans 9.6, on procède à la détermination des valeurs x^μ correspondant à une valeur quelconque p_μ^* via 9.7, et calculons alors $g^{*\mu\nu}(p_1^*, p_2^*) = \partial^2 h/\partial p_\mu^*\partial p_\nu^*$, réciproquons la matrice et l'attachons à la valeur propre x^ν selon $g_{\mu\nu}^*(x^1, x^2)$, calculons l'ellipse d'erreur, et la comparons avec l'expérience. Pour trouver l'efficacité lumineuse $C(\lambda)$ à partir des données métriques signifie faire le chemin inverse - la voie difficile. Les études sur comment le faire au mieux sont maintenant en progrès. Il doit être noté que cette théorie n'est pas une conjecture ad hoc pour laquelle les données servent à

déterminer les paramètres inconnus. Supposer que $C(\lambda)$ est au moins exploré qualitativement par les méthodes existantes, elle peut-être utilisée comme un chemin directe entre la théorie et les données calculées, qui doivent alors correspondre à l'expérience à la précision avec laquelle $C(\lambda)$ est connu. La connexion théorique stricte entre l'efficacité lumineuse et la métrique couleur rend cette théorie vérifiable, et nettement la distinguer de ces prédécesseurs.

Un seuil pour la discrimination couleur existe, qui définit l'échelle pour l'ellipse d'erreur. C'est une valeur invariante de la distance, σ : lorsque $|\delta s| > \sigma$ les couleurs sont discriminées, autrement non. La distribution Gaussienne discuté en section 3 est $\exp[-(\delta s)^2/2\sigma^2]$ et est coulée avec un élément de volume *invariant*

$$\sqrt{\eta}d(\delta x^1)d(\delta x^2)d(\delta H/H) = \eta^{-1/2}d(\delta p_1^*)d(\delta p_2^*)d(\delta H/H)$$

lorsque $\eta = \det(g^{*\mu\nu}) = \det^{-1}(g_\mu^*\nu)$.

Quand x^μ s'approche de la frontière spectrale du faisceau physique de manière

$$\epsilon^2 \equiv -1/2p_2^* \longrightarrow 0, \quad \eta \longrightarrow \epsilon^6 \times \text{constante} \quad (9.21)$$

Cela signifie que l'ellipse $\sigma^2 = g_{\mu\nu}^*\delta x^\mu\delta x^\nu$ n'approche pas une barre tangente finie, mais plutôt se réduit à un point quand $\epsilon \rightarrow 0$. Cette ellipse, cependant, ne représente plus la valeur de $(\delta s)^2$ dans le voisinage de la frontière parce que la séparation des protomères correspondant à $(\delta s)^2 = \sigma^2$ sont très larges et ne peuvent pas être évaluée comme si elle étaient infinitésimales - l'état des choses présentent à l'intérieur du faisceau des couleurs. Le segment géodésique invoqué doit être intégré, et la fonction principale de la géodésique doit remplacer δs dans la distribution Gaussienne avant qu'une estimée fiable des erreurs proche de la frontière spectrale puisse être faite.

Finalement, notons que la théorie n'a divulgué aucun principe nécessaire par lequel la base des protomères utilisé actuellement - i.e., $P^k(\lambda) = \lambda^k$ dans des coordonnées appropriées - sont en quelque sorte optimales pour la tâche d'approximer naturellement les distributions spectrales d'intensité. Peut-être qu'il n'a jamais existé un tel principe : la base des protomères pourrait avoir été développé de façon pratique pour le calcul nécessaire de p^k , étant donné les données brutes de la rétine v^k . Une fois dans cette course, le seuil de discrimination couleur, σ , pourrait avoir été fixé à un niveau comparable du niveau moyen d'erreur d'approximation des intensité spectrales naturelle par les protomères. On pourrait qualifier la sélection des coordonnées de $P^k(\lambda)$ et σ non comme optimale mais adéquat. En terme humain, la course à la conjecture de la sélection naturelle ne montrera pas plus de prévoyance que ne le fait le simple sens commun.

10 Conclusion

La géométrie des couleurs est le résultat de deux groupes : l'un, issu du mélange, est complètement compatible avec le processus de filtration linéaire

au niveau de la rétine qui sous-tend l'appariement de différentes intensités spectrales à la même couleur. L'autre, le groupe de réflexions, est incompatible avec l'égalisation mais suffisamment important pour la survie comme justification probable de la sélection naturelle en faveur de la vision des couleurs. Les deux groupes, couplés en produit semi-direct, ne peuvent générer la structure fibrée familière de l'espace euclidien ou Minkowskien, en raison de l'incompatibilité évoquée. Au lieu de cela, un "point" sur la fibre, la protomère est identifiée, réduisant la fibre à une carte duale de l'espace sous-jacent, et la représentation de la réflexion à une approximation. La carte duale représente la forme de la frontière des couleurs physiques, et sa dérivée donne une métrique qui explique la répartition des erreurs dans l'égalisation des couleurs.

La théorie présentée ici a de nombreuses occasions de se confronter à l'expérience. La forme conique de la courbe de chromaticité a identifié la base des protomères comme quadratique dans le paramètre ordonné chromatiquement. La théorie du tenseur métrique doit conduire à terme à une détermination du rendement lumineux indépendant de la photométrie hétérochromatique. Non des moindres, le rôle particulier de la luminance ressort du fait que les scalaires font partie de la base des protomères. Au-delà de matériel présenté ici réside la possibilité d'expliquer l'induction de couleur ou l'adaptation comme la réalisation du processus de soustraction protomère-vecteur sous-jacente aux jugements de réflectance invariants à l'éclairage, bien qu'ici ce soient les expériences qui doivent être développées à un niveau quantitatif. La théorie est en accord qualitatif avec les expériences à ce jour.

Je suis reconnaissant de l'opportunité de présenter ce travail à Peter G. Bergmann à l'occasion de son soixantième anniversaire. Même si je n'ai pas eu le privilège d'être l'un de ses élèves, j'ai sûrement assez profité des discussions avec lui pour partager cette occasion avec eux. Je propose ce travail dans le cadre du dialogue que nous avons eu au cours des années sur la relation entre les groupes et les espaces. Beaucoup d'heureux retour!

References

- [1] Newton, I. New theory about light and colors. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **6**, (80), 3075-3087 (1671) ; Newton, I. *Opticks. Smith and Walford: London 1704* (reprinted by Dover Publications: New York, 1952) ; Pour une date de publication précise, voir note de bas de page p 86 dans MacAdam (1970) *Sources of color science* (M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts)
- [2] von Helmholtz, H. *Treatise on physiological optics* Vol. iii (1867)
- [3] MacAdam, D. L. Visual sensitivities to color differences in daylight. *J. Opt. Soc. Am.* **32** (5), 247-274 (1942) ; Silberstein, L. & MacAdam, D. L. The distribution of color matchings around a color center. *J. Opt. Soc. Am.* **35** (1), 32-39 (1945) .

- [4] Riemann, B. Ueber die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen. H. Weber. Leipzig: Teubner (1854). Les sections pertinentes sont relevées ici ([Traduction par Léonce Laugel](#). Gauthier-Villars et fils, 1898 (p. 280-297)).

Les concepts dont les modes de détermination forment une variété discrète sont si fréquents que, étant donnés des objets quelconques, il se trouve toujours, du moins dans les langues cultivées, un concept qui les comprend (et les mathématiciens étaient par conséquent en droit, dans la théorie des grandeurs discrètes, de prendre pour point de départ la condition que les objets donnés soient considérés comme de même espèce). Au contraire, les occasions qui peuvent faire naître les concepts dont les modes de détermination forment une variété continue sont si rares dans la vie ordinaire, que les lieux des objets sensibles et les couleurs sont à peu près les seuls concepts simples dont les modes de détermination forment une variété de plusieurs dimensions. C'est seulement dans les hautes Mathématiques que les occasions pour la formation et le développement de ces concepts deviennent plus fréquentes.

Sont-elles les seules possibilités? En dépit de l'avance précoce notable en osmométrie - cf. Chaucer, G. (1478). *The Summoner's Tale*; (Caxton, London) - il n'est pas clair que de telles sensation forment une variété de plus d'une dimension.

- [5] Schrödinger, E. (1920). *Ann. Phys.*, 63,397,481; (1926). Mfiller-Pouillet's *Lehrbuch der Physik*, 2nd ed., Vol. 2. Les deux articles sont traduits en partie dans MacAdam, D. référence 1. Leur clareté Their clarity and power cannot be overstated. It is a pleasure to acknowledge their profound influence throughout this work.
- [6] Le Grand, Y. *Light, colour and vision* (Chapman & Hall, 1968).
- [7] Lettvin, J. (communication personnelle). Je suis profondément redevable au Prof. Lettvin pour avoir attiré mon attention sur ce problème de première importance ici. Je suis reconnaissant pour les encouragements et discussions très utiles et les questions stimulantes au début et pour une introduction sélective à la littérature vaste sur les couleurs. Il conviendrait de noter que nos discussions ont commencé sur la thèse de M. Brill, concernée en partie par les invariants d'éclairage, ce qui m'a convaincu d'adopter cette approche assez différente.
- [8] C'est un plaisir de remercier G. Denman pour son heureuse invention du nom pour ses métamères avant tous parmi les pairs. Que l'œuvre témoigne de la valeur de la parole.
- [9] Grassmann, H. (1853). *Ann. Phys. Chem.* (Poggendorf), 89, 69; traduit par MacAdam, D. L. référence 1.

- [10] Young, T. II. the bakerian lecture on the theory of light and colours. *Philosophical transactions of the Royal Society of London* (92), 12–48 (1802)
- [11] Mitchell, D. & Rushton, W. The red/green pigments of normal vision. *Vision research* **11** (10), 1045–1056 (1971).
- [12] Von Helmholtz, H. Treatise on physiological optics, volume 3, (1866) translated from the 3rd german edition, ed. southall. JPC (New York: Optical Society of America (1925).
- [13] Stiles, W. S. & Burch, J. M. Npl colour-matching investigation: final report (1958). *Optica Acta: International Journal of Optics* **6** (1), 1–26 (1959).
- [14] Pour une interprétation assez différente voir LeGrand, Y. référence 6, p.485 et suiv.
- [15] Silberstein, L. Notes on WS Stiles' Paper Entitled, "A Modified Helmholtz Line-Element in Brightness-Colour Space", *J. Opt.Soc. Am.* **37**, 4, 292–295 (1947)
- [16] Pour ce point particulier, toutes les distributions spectrales d'intensités sont supposées positives plutôt que non-négatives. Il n'y a pas de distinction expérimentales entre ces alternatives, alors que la première permet des postulats mathématiques plus incisifs pour des raisons évidentes.
- [17] La théorie des groupes de Lie est suffisante, mais pas nécessaire, pour dériver 5.3 de 5.2. En supposant que 1 est une protomère, et que \mathbf{a} est le nom du vecteur couleur correspondant

$$\mathbf{a} = \int_{-1}^{+1} \mathbf{A}(\lambda) d\lambda$$

alors

$$\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v} - d\mathbf{v}) = \mathbf{a} + dv^k \Phi_k(\mathbf{v}) \quad \mathbf{i} \equiv \mathbf{v} - d\mathbf{v}$$

5.2 donne alors

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, \lambda) &= F(\mathbf{v}, \lambda)/F(\mathbf{v} - d\mathbf{v}, \lambda) = 1 + dv^k \partial \ln F(\mathbf{v}, \lambda)/\partial v^k \\ &= F(\mathbf{a} + dv^k \Phi_k(\mathbf{v}), \lambda) = 1 + \Phi_k^j(\mathbf{v}) dv^k \partial F(\mathbf{b}, \lambda)/\partial b^j|_{\mathbf{b}=\mathbf{a}} \\ &\partial \ln F(\mathbf{v}, \lambda)/\partial v^k = \Phi_k^j(\mathbf{v}) G_j(\lambda) \end{aligned}$$

où

$$G_j(\lambda) \equiv \partial F(\mathbf{b}, \lambda)/\partial b^j|_{\mathbf{b}=\mathbf{a}}$$

sont des fonctions de λ seulement. Il est donc aisé de voir que

$$\int_{-1}^{+1} A^k(\lambda) G_j(\lambda) = \delta_j^k$$

Le fait que $G_j(\lambda)$ soit réciproque de $A^k(\lambda)$ dans trois dimensions hors d'un nombre infini ne restreint pas $G_j(\lambda)$ au delà d'assurer l'indépendance linéaire. L'apparente covariance de G_j avec les vecteurs de base de l'espace couleur est un artefact de cette exposition élémentaire : Ce qui est déterminé est $\Phi_k^j(\mathbf{v})G_j(\lambda)$, pour laquelle j est un indice muet, et la structure générale est scalaire pour autant que j soit concerné. 5.3 s'ensuit en assumant l'intégrabilité, laquelle est confirmée en substituant 5.3 dans 5.2 pour donner 5.5.

- [18] Poincaré, H. *Science et Méthode*, Paris, Flammarion, 1947 ; *La relativité de l'espace*, section II.
- [19] Morrison, P. (communication personnelle). Je souhaite remercier Prof. Morrison pour ses pensées provoquant des questions et des commentaires sur ce point.
- [20] Une fonctionnelle sera noté avec un crochet. Le statut factice de la variable indépendante h dans une fonctionnelle de $V(\lambda)$ sera signalé par un prime. Le statut factice de l'index dans P^{k*} sera noté de manière similaire.
- [21] Un invariant *relatif* se transforme dans $GL(3R)$ ou $GL(3R)^*$ avec un multiplicateur égal à une exponentiation du déterminant - le poids. Mis à part quelques changements triviaux de libellé, un invariant relatif servira aussi bien qu'un invariant absolu, pour distinguer un minimum à (c), (d), (e). Par exemple, Δ peut être choisi pour être un scalaire relatif de poids unitaire, p_k , P^k vecteurs relatifs de poids unitaire opposés dans 7.6, $C(\lambda)$, H scalaires de poids unitaire en 7.6, 7.12. Ce schéma identifierait la luminance comme le volume d'un parallélépipède avec des arêtes données par le vecteur de couleur v , le rayon limitant violet et le rayon de confusion des deutéranopes. Les deux premiers se situent dans le plan de luminance nulle, exactement comme une composante de couleur. Cela expliquerait aussi l'origine de l'équation de Schrödinger (10), cf. référence 5.
- [22] Dresler, A. The non-additivity of heterochromatic brightnesses. *Transactions of the Illuminating Engineering Society* **18** (6 IEStrans), 141-165 (1953) ; Piéron, H. La loi d'abney et la surévaluation chromatique des brillance. *Compte Rendu Académie des Sciences* **212** (2), 284-286 (1941)
- [23] MacAdam, D. L. Visual sensitivities to color differences in daylight. *J. Opt. Soc. Am.* **32** (5), 247-274 (1942)

- [24] Coxeter, H. S. M. *Projective geometry* (Springer Science & Business Media, 2003).
- [25] Le feuilletage de l'espace couleur par des surfaces de constante H réalise l'objectif de réduction de la métrique de couleur à deux dimensions, qui n'a pas pu être atteint dans la section 5 en maintenant P_{0*} constant. Avant qu'une forme comme 9.17 puisse être développée, il était nécessaire d'établir la dualité entre espaces couleur et protomères en 7.6. La reconnaissance de la foliation selon H et l'orthogonalité aux fonctions homogènes en v_k de degré zéro est implicite, bien que pas clairement indiqué dans l'ouvrage de Schrödinger, référence 5, équation (24). Sa conversion de H en une variable radiale et les fonctions homogènes restantes en angles sont équivalentes dans l'esprit à 9.15. Bien entendu, la différence entre l'œuvre de Schrödinger et la nôtre est que sa métrique est entièrement ad hoc, tandis que la nôtre est strictement liée à la fonction d'efficacité lumineuse, $C(\lambda)$, dans 9.16, 9.17, 9.18 et 9.19.
- [26] Pansu [Distributions](#)
- [27] Fairman, H. S., Brill, M. H., & Hemmendinger, H. How the CIE 1931 color-matching functions were derived from Wright-Guild data. *Color Research & Application* **22** (1), pp. 11-23 (1997)

11 Annexe: Explications et détail des calculs

11.1 Le modèle de Weinberg

Le modèle de Weinberg peut-être considéré comme une transformation entre l'espace physique et l'espace perceptif comme illustré sur la Figure 4

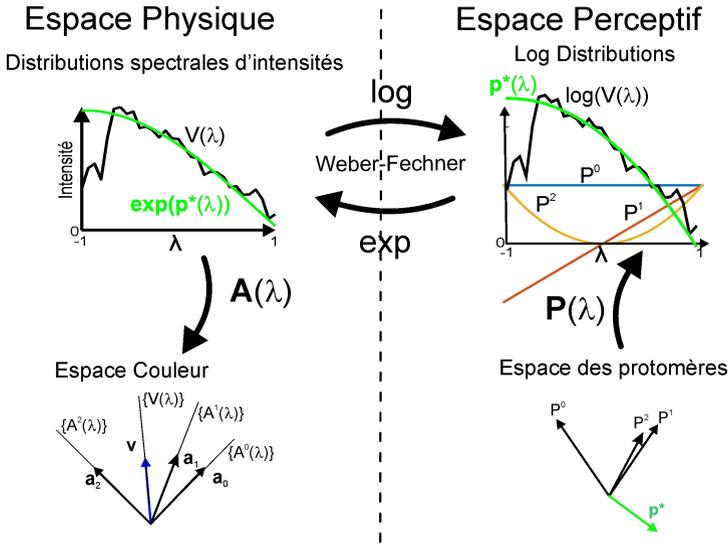


Fig. 4 Illustration du modèle de Weinberg. L'espace physique est caractérisé par les distributions spectrales d'intensités et leurs représentations dans l'espace couleur. Les distributions spectrales d'intensités sont représentées dans l'espace couleur par convolution ou projection avec les fonctions $\mathbf{A}(\lambda)$ qui sont les coordonnées des distributions δ de Dirac dans l'espace couleur. L'espace perceptif est une transformation du type Weber-Fechner (log/exp) des distributions spectrales d'intensités. Les distributions dans cet espace sont approximées par une somme pondéré des distributions de base de l'espace des protomères, $P^{k*}(\lambda)$. C'est à dire qu'une protomère peut-être représenté comme un vecteur p dans l'espace formé par la base des protomères. Pour l'illustration nous avons utilisé ici la distribution spectrale de l'illuminant D65 et son approximation par l'équation 7.7.

Une distribution spectrale d'intensité $V(\lambda)$ est représentée dans l'espace couleur comme un vecteur \mathbf{v} , à travers les distributions $A^k(\lambda)$ par l'équation 5.4. Nous pouvons supposer que l'espace couleur a pour base $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]^t$ qui sont les projection des $A^k(\lambda)$ par les distributions $A^k(\lambda)$, elles-mêmes.

Weinberg propose que l'espace perceptif soit caractérisé par une transformation de type Weber-Fechner de l'espace physique. Les distributions spectrales d'intensité sont transformées en leur logarithme. L'approximation des distributions spectrales d'intensités est donnée par une somme pondérée de trois distributions de base $P^k(\lambda)$. C'est à dire qu'on peut associé à une protomère un vecteur *boldp* comme combinaison linéaire des vecteur de base $P^k(\lambda)$.

11.2 Espace couleur Newtonien

11.2.1 Espace projectif des couleurs

Dans son interprétation du travail de Newton, Weinberg propose que l'espace couleur soit un espace projectif et que toute couleur puisse être définie comme une classe d'équivalence des distributions spectrales d'intensités. Sont équivalentes les distributions *métamères*, c'est à dire celles qui produisent la même sensation colorée, même si leurs distributions spectrales d'intensités sont différentes. Deux distributions proportionnelles sont métamères (Figure 5(a)). Mais pas seulement, l'espace couleur est un sous-espace de l'espace des distributions spectrales, la représentation dans l'espace couleur induit donc une approximation des distributions. Sont métamères des distributions dont les approximations sont proportionnelles.

Il justifie ensuite que l'amplification et l'addition des distributions spectrales commutent avec l'égalisation des couleurs. Considérons un ensemble de K distributions spectrales équivalentes deux à deux, pour tout K , $U_K(\lambda)$ équivalent à $V_K(\lambda)$ alors on peut écrire:

$$\forall K, \quad \{U_K(\lambda')\} = \{V_K(\lambda')\} \implies \left\{ \sum_K v^K U_K(\lambda') \right\} = \left\{ \sum_K v^K V_K(\lambda') \right\} \quad (11.1)$$

qui établit que la somme pondérée (par $v^K > 0$) de deux ensembles de classes d'équivalences équivalentes produisent des couleurs équivalentes. Il est immédiat que la pondération par v^k ne change pas la classe d'équivalence si v^k est strictement positif. C'est l'expérimentation, et notamment celle de Newton, qui établit que la somme pondérée des distributions équivalentes produit des couleurs équivalentes.

Nous pouvons donc repérer une couleur particulière $\{V(\lambda')\}$ par l'ensemble des coefficients v^K d'amplification qu'il faut appliquer à un ensemble de couleurs ou classes d'équivalences $\{V(\lambda')\}_K$ qui par mélange produiront la même couleur que $\{V(\lambda')\}$. En quelque sorte les v^K représentent les coordonnées barycentrique de la couleur $\{V(\lambda')\}$ dans l'ensemble des couleurs $\{V(\lambda')\}_K$. Nous pouvons repérer une couleur ou une classe d'équivalence par un de ses vecteurs directeur \mathbf{v} ou n'importe quel de ses vecteurs \mathbf{w} proportionnel $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, $k > 0$. Les couleurs forment donc un espace vectoriel, support de l'espace projectif, on écrit:

$$\mathbf{v} \equiv \left\{ \sum_K v^K V_K(\lambda') \right\} \equiv \sum_K v^K \{V_K(\lambda')\} \equiv \sum_K v^K \{V(\lambda')\}_K \sim k\mathbf{v} \quad (11.2)$$

L'expérience d'égalisation des couleurs à montré que seul trois couleurs primaires sont nécessaires et suffisantes pour égaliser n'importe quelle couleur visible. On écrira donc le vecteur \mathbf{v} comme $\mathbf{v} = [v^0, v^1, v^2]^t$. Cependant, les primaires correspondantes sont virtuelles (ou non physiques selon la dénomination de Weinberg) par ce que les fonctions correspondantes ont des

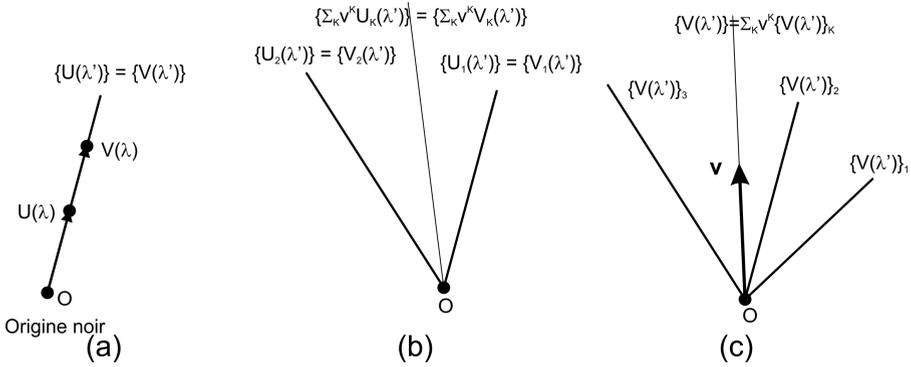


Fig. 5 Espace couleur comme espace projectif. (a) Weinberg définit une couleur comme un classe d'équivalence, donc une droite vectorielle (droite passant par l'origine - Si l'origine n'est pas envoyée à l'infini c'est un point dans l'espace vectoriel) dans un espace vectoriel. Deux distributions $U(\lambda)$ et $V(\lambda)$ produisent la même couleur si leur représentations correspondantes à des vecteurs $\overrightarrow{OU(\lambda)}$ et $\overrightarrow{OV(\lambda)}$ sont colinéaires. Où de manière équivalente les points O , $U(\lambda)$ et $V(\lambda)$ sont alignés dans l'espace couleur. On peut donc représenter une couleur dans l'espace couleur comme l'ensemble des points d'une droite projective. (b) La somme et l'amplification des couleurs commutent avec l'équivalence. Deux ensemble de couleurs équivalentes $\{U_K(\lambda)\} = \{V_K(\lambda)\}$ produisent par leurs sommes pondérées $\sum_K v^K U_K(\lambda)$ et $\sum_K v^K V_K(\lambda)$ les mêmes couleurs. (c) On peut remplacer la classe d'équivalence $\{V(\lambda')\}$ par un de ses vecteurs directeurs \mathbf{v} . Celui-ci peut s'exprimer à l'aide de coordonnées barycentriques à partir de K couleurs ou classes d'équivalences $\{V(\lambda)\}_K$ comme les quantités v^K par lesquelles il faut pondérer les K couleurs pour égaliser $\{V(\lambda')\}$.

valeurs négatives. Il est cependant possible de trouver un changement de base pour laquelle les fonctions correspondantes aux primaires soient toutes trois positives.

11.2.2 Le cône spectral

Un ensemble de couleurs ne peut plus être de nouveau décomposé par un prisme ou un réseau. Ce sont les couleurs monochromatiques, composées d'une seule onde électromagnétique ou d'un flux de photon de même énergie, unique. Ces couleurs forment un sous-espace bidimensionnel dans l'espace couleur tridimensionnel. Pour s'en convaincre, il faut considérer que ces couleurs (les couleurs peuvent-être repérées par leurs teintes, saturations et luminosités dans l'espace couleur) ont une saturation maximale, ∞ , et donc fixent un des trois paramètres de l'espace tridimensionnel, donc forment une variété bidimensionnelle.

Toutes distributions spectrales d'intensités est une somme pondérée infinie des distributions monochromatiques (Figure 6). Cela s'écrit:

$$V(\lambda') = \int_{-1}^{+1} V(\lambda)\delta(\lambda - \lambda')d\lambda \tag{11.3}$$

qui signifie que la distribution spectrale $V(\lambda')$ peut-être considérée comme la somme infinie des deltas de Dirac, décalés à la valeur λ' et pondérés par $V(\lambda)$.

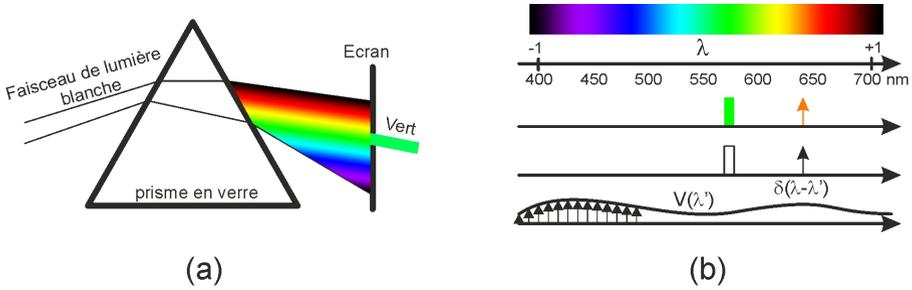


Fig. 6 (a) Newton montre que la décomposition de la lumière blanche par un prisme produit l'ensemble des couleurs de l'arc-en-ciel, le spectre de la lumière blanche. Une couleur peut-être considérée comme une partie du spectre qu'il est possible d'isoler en perçant un trou dans l'écran. (b) Weinberg propose de coder les valeurs du spectre avec une variable normalisée, λ dans l'intervalle $\lambda \in [-1, +1]$. Un ensemble de couleur dites monochromatiques ou spectrales ne peuvent plus être décomposées par le prisme, elles sont représentée par une distribution de Dirac $\delta(\lambda - \lambda')$. Toute fonction spectrale $V(\lambda)$ représentant un couleur est une somme infinie de l'ensemble des couleurs monochromatiques.

Toute les couleurs spectrales sont définies par une longueur d'onde, λ' et une intensité $V(\lambda)$ et inclue la métamère $V(\lambda)\delta(\lambda - \lambda')$. Donc les couleurs spectrales forment une base infinie de l'espace couleur et le lieu de ces couleurs spectrales forme un sous-espace bidimensionnel qui délimite un cône, le cône spectral. La surface est un cône car les valeurs de $V(\lambda)$ peuvent varier dans l'intervalle $]0, \infty[$. Si l'on considère maintenant les couleurs spectrales d'énergie unitaire, celles pour lesquelles $V(\lambda) = 1$, car $\int_{-1}^{+1} \delta(\lambda - \lambda') d\lambda = 1$, alors elles forment une courbe unidimensionnelle fermée dans l'espace couleur que Weinberg appelle $\mathbf{A}(\lambda)$. D'où on déduit l'équation 2.4 qui précise que la courbe $\mathbf{A}(\lambda)$ peut-être utilisée pour les coordonnées de la couleur par le vecteur \mathbf{v} dans l'espace couleur à partir de la distribution spectrale d'intensité $V(\lambda)$.

11.3 Le sous-espace des couleurs physiques

Cette partie ne pose pas de difficultés particulières. Mais nous proposons ici d'illustrer le cône spectral à partir des données expérimentales de la Commission Internationale de l'Éclairage, CIE. La Figure 7 montre les distributions relatives appelées fonctions d'égalisations des couleurs CIE-XYZ1931 telles que normalisées par la CIE en 1931. Elles correspondent à une moyenne entre un vingtaine d'observateurs ayant réalisés l'égalisation d'un ensemble de couleurs spectrales à partir de trois primaires monochromatiques à 435.8 (nm), 546.1 (nm) et 700 (nm) [27].

Pour faire la correspondance entre les longueurs d'ondes λ_{nm} en nanomètre et la variable λ de Weinberg définie dans l'intervalle $[-1, 1]$, nous définissons la correspondance suivante:

$$\lambda = 2 \frac{\lambda_{nm} - \lambda_m}{\lambda_M - \lambda_m} - 1 \tag{11.4}$$

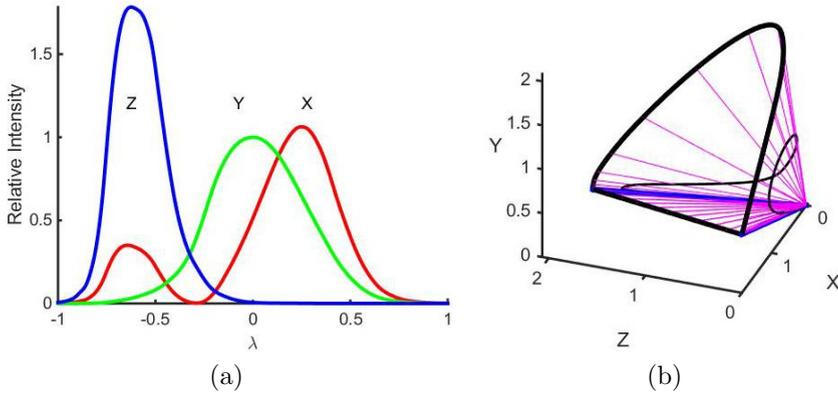


Fig. 7 (a) Les fonctions XYZ d'égalisation des couleurs telles que normalisées par la Commission Internationale de l'Éclairage en 1931. (b) Le cône spectral correspondant en considérant les fonctions XYZ formant une base orthonormée. Le cône spectral est défini par l'intersection avec le plan $X + Y + Z = 5/2$. La courbe noire correspond à $\mathbf{A}(\lambda)$ dans ce système de coordonnées. Les axes couleurs magenta correspondent aux vertex du cône spectral, incluant le plan des pourpres. On remarque également que les vertex sur la courbe du cône, bien qu'espacés en variation constante de λ ne sont pas des rayons équidistants.

où λ_m et λ_M sont les limites du domaine visible, définies pour les fonctions CIE par respectivement 380nm et 730nm.

11.4 Pourquoi protomères?

Cette section ne pose pas de problème particulier, mais nous souhaitons l'illustrer avec un exemple. Weinberg précise que l'on ne peut pas estimer la réflectance à partir du rapport de la radiance et de l'illuminant si ces dernières fonctions sont arbitraires. En fait, cela fonctionne très bien, à moins que l'illuminant ait des valeurs nulles dans sa distribution, car dans ce cas on diviserait par zéro. Ce problème n'est bien sûr pas résolu en prenant le logarithme de la distribution spectrale d'intensité car si celle-ci a une valeur nulle, son logarithme sera $-\infty$. Weinberg justifie alors que l'évolution du système de vision vers la vision des couleurs doit avoir été conditionné pour prendre en compte des distributions strictement positives. L'intérêt des protomères pour l'estimation de la réflectance des objets à partir de l'illuminant et de la radiance spectrale est la transformation logarithmique qui transforme le produit de la réflectance par l'illuminant en une somme. Ceci est illustré sur la Figure 8.

Cependant, Weinberg propose que les distributions protomères soient une combinaison linéaire de trois protomères de base. Cette propriété supplémentaire n'est pas indispensable, mais permettra dans les sections suivantes de préciser, la frontière des couleurs physiques, l'approximation d'une distribution spectrales par sa distribution protomère et de discuter d'une métrique pour l'espace couleur. Les espaces couleur et protomères étant de dimension trois, Weinberg proposera une fonction de correspondance entre ces espaces qui servira de base à la définition de la métrique de l'espace couleur.

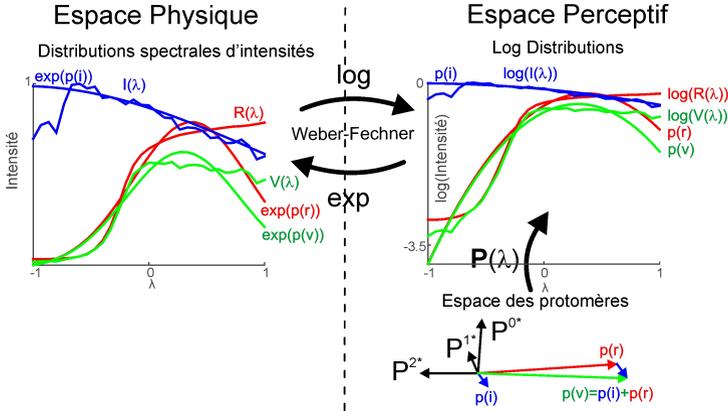


Fig. 8 Illustration de l'intérêt des protomères. Dans l'espace physique on représente les distributions de l'illuminant $I(\lambda)$ et de la réflectance d'un objet $R(\lambda)$. La radiance résultante $V(\lambda)$ est le produit des deux distributions $V(\lambda) = I(\lambda)R(\lambda)$. On représente également les distributions protomères associées, $\exp p(i)$, $\exp p(r)$ et $\exp p(v)$ qui sont calculées de manière à minimiser la fonction Δ de l'équation 7.7. Dans l'espace perceptif ces distributions protomères sont les logarithmes des distributions physiques. Elles sont représentées par des vecteurs dans l'espace des protomères dont les coordonnées sont les paramètres p^{k*} . Ces paramètres sont principalement négatifs car les distributions physiques sont pratiquement toutes inférieures à 1. Dans l'espace des protomères, le vecteur de radiance $p(v)$ correspond à la somme du vecteur de réflectance $p(r)$ et du vecteur de l'illuminant $p(i)$.

11.5 Le groupe des protomères

Nous souhaitons ici préciser les calculs de la note [17]. Notons que ces calculs sont rendus nécessaires par ce que Weinberg ne souhaite pas imposer une base pour l'espace des protomères et comme elle n'est pas connue a priori, on ne peut pas réaliser les calculs à partir de cette base. C'est à dire que nous ne connaissons pas quelle approximation $\mathbf{p}^*(\mathbf{v}, \lambda)$ représente une distribution spectrale $V(\lambda)$. Nous réalisons alors les calculs en utilisant les fonctions de conversion Φ , F inconnues et en travaillant dans l'espace différentiel, approximation au premier ordre, des relations entre les différents éléments du modèle.

Dans un premier temps nous supposons que 1 est protomère et que le vecteur dans l'espace couleur est appelé \mathbf{a} et défini par $\mathbf{a} = \int_{-1}^1 \mathbf{A}(\lambda) d\lambda$. On écrit la partie gauche de la relation 5.2 en définissant \mathbf{i} comme une variation autour de \mathbf{v} , soit $\mathbf{i} \equiv \mathbf{v} - d\mathbf{v}$

$$\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{i}) = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v} - d\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \Phi^0(\mathbf{v}, \mathbf{v} - d\mathbf{v}) \\ \Phi^1(\mathbf{v}, \mathbf{v} - d\mathbf{v}) \\ \Phi^2(\mathbf{v}, \mathbf{v} - d\mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Où les Φ^j sont les composantes de la fonction vectorielle Φ . Ensuite on décompose \mathbf{r} comme une somme vectorielle à partir de \mathbf{a} . Remarquons tout d'abord que si $d\mathbf{v} = \mathbf{0}$ alors $\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}$. En effet, les vecteurs de radiance \mathbf{v} et d'illuminant \mathbf{i} sont égaux et la réflectance est unitaire soit $\mathbf{r} = \mathbf{a}$. Comme

1 est protomère, on a bien \mathbf{r} le vecteur couleur correspondant à une protomère. Le vecteur \mathbf{r} s'écrit donc comme $\mathbf{r} = \mathbf{a} + d\mathbf{r}$ avec

$$d\mathbf{r} = \Phi_k^j(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi^0}{\partial v^0}(\mathbf{v}) & \frac{\partial\Phi^0}{\partial v^1}(\mathbf{v}) & \frac{\partial\Phi^0}{\partial v^2}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial\Phi^1}{\partial v^0}(\mathbf{v}) & \frac{\partial\Phi^1}{\partial v^1}(\mathbf{v}) & \frac{\partial\Phi^1}{\partial v^2}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial\Phi^2}{\partial v^0}(\mathbf{v}) & \frac{\partial\Phi^2}{\partial v^1}(\mathbf{v}) & \frac{\partial\Phi^2}{\partial v^2}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dv^0 \\ dv^1 \\ dv^2 \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

$$= dv^0 \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi^0}{\partial v^0}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial\Phi^1}{\partial v^0}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial\Phi^2}{\partial v^0}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} + dv^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi^0}{\partial v^1}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial\Phi^1}{\partial v^1}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial\Phi^2}{\partial v^1}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} + dv^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi^0}{\partial v^2}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial\Phi^1}{\partial v^2}(\mathbf{v}) \\ \frac{\partial\Phi^2}{\partial v^2}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (11.7)$$

$$= \sum_k dv^k \Phi_k(\mathbf{v}) \quad (11.8)$$

où $\Phi_k^j(\mathbf{v})$ est la matrice Jacobienne de Φ appliquée au point \mathbf{v} , et $\Phi_k(\mathbf{v})$ sont les vecteurs de cette matrice. Weinberg écrit donc

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \sum_k dv^k \Phi_k(\mathbf{v}) \quad (11.9)$$

Nous appliquons ensuite la relation 5.2 qui donne:

$$F(\mathbf{r}, \lambda) = F(\mathbf{v}, \lambda)/F(\mathbf{v} - d\mathbf{v}, \lambda) \quad (11.10)$$

or si nous écrivons la définition de la dérivée partielle de $F(\mathbf{v}, \lambda)$ par rapport v^k :

$$\frac{\partial F(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial v^k} = \lim_{dv^k \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{v}, \lambda) - F(\mathbf{v} - [dv^k], \lambda)}{dv^k} \quad (11.11)$$

Où $[dv^k]$ vaut alternativement $[dv^0, 0, 0]^t$, $[0, dv^1, 0]^t$ et $[0, 0, dv^2]^t$ suivant la valeur de $k = 0, 1, 2$. En supposant les dv^k infinitésimaux, et comme $d\mathbf{v} = \sum_k [dv^k]$, on écrit:

$$F(\mathbf{v}, \lambda) = F(\mathbf{v} - d\mathbf{v}, \lambda) + \sum_k \frac{\partial F(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial v^k} dv^k \quad (11.12)$$

qui en remplaçant dans 11.10, et en observant que $\partial \ln F(\mathbf{v}, \lambda)/\partial v^k = (\partial F(\mathbf{v}, \lambda)/\partial v^k)/F(\mathbf{v}, \lambda)$ donne:

$$F(\mathbf{r}, \lambda) = \frac{F(\mathbf{v} - d\mathbf{v}, \lambda) + \sum_k \frac{\partial F(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial v^k} dv^k}{F(\mathbf{v} - d\mathbf{v}, \lambda)} \quad (11.13)$$

$$= 1 + \sum_k \frac{\frac{\partial F(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial v^k}}{F(\mathbf{v} - \underbrace{d\mathbf{v}}_{\rightarrow 0}, \lambda)} dv^k \quad (11.14)$$

$$= 1 + \sum_k \frac{\frac{\partial F(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial v^k}}{F(\mathbf{v}, \lambda)} dv^k \quad (11.15)$$

$$= 1 + \sum_k \frac{\partial \ln F(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial v^k} dv^k \quad (11.16)$$

qui est la forme proposé par Weinberg dans la note [17] avec l'explicitation de la somme.

Une autre écriture de $F(\mathbf{r}, \lambda)$ est possible en remplaçant \mathbf{r} par son expression 11.9. En reprenant les mêmes arguments que précédemment concernant la définition de la dérivée partielle, mais avec des signes différents on écrit

$$F(\mathbf{r}, \lambda) = F(\mathbf{a} + \sum_k dv^k \Phi_k(\mathbf{v}), \lambda) \quad (11.17)$$

$$= F(\mathbf{a}, \lambda) + dF(\mathbf{b}, \lambda) \quad (11.18)$$

$$= F(\mathbf{a}, \lambda) + \sum_j \sum_k \Phi_k^j(\mathbf{v}) dv^k \frac{\partial F(\mathbf{b}, \lambda)}{\partial b^j} \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{a}} \quad (11.19)$$

$$= 1 + \sum_j \sum_k \Phi_k^j(\mathbf{v}) dv^k \frac{\partial F(\mathbf{b}, \lambda)}{\partial b^j} \Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{a}} \quad (11.20)$$

Il s'ensuit par identification des deux expression de $F(\mathbf{r}, \lambda)$ la discussion que Weinberg propose dans la note [17].

11.6 La frontière des couleurs physiques

11.6.1 Protomères Gaussiennes

Dans cette partie et pour l'illustration, Weinberg propose que les fonctions de la base des protomère P^{k*} soient, par exemple, simplement les monômes λ^k . Soit que toute fonction logarithmique d'une distribution protomère soit un polynôme de la forme

$$\mathbf{p}^*(\lambda) = \sum_k p_{k*} P^{k*} = p_{0*} + p_{1*} \lambda + p_{2*} \lambda^2 \quad (11.21)$$

Il s'ensuit d'après ce qui précède et en vertu de la loi de Weber-Fechner que la protomère correspondant à la couleur \mathbf{v} est représentée par une distribution spectrale d'intensité

$$F(\mathbf{v}, \lambda) = \exp \mathbf{p}^*(\lambda) = \exp \sum_k p_{k*} P^{k*} \quad (11.22)$$

$$= e^{p_{0*} + p_{1*} \lambda + p_{2*} \lambda^2} \quad (11.23)$$

Ces fonctions sont représentées sur la Figure 9

Il est plusieurs cas à considérer suivant la valeur de p_{2*} . Le cas $p_{2*} < 0$, la protomère représentée dans l'espace physique est une Gaussienne dont le maximum est donné pour la longueur d'onde λ_0 défini par l'annulation de la

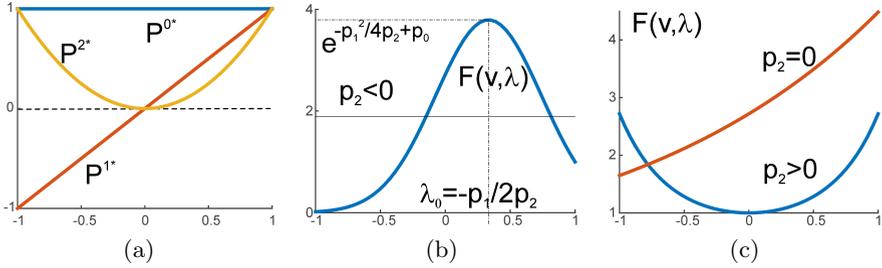


Fig. 9 Fonctions de base des protomères. (a) Fonctions de base $P^{k*}(\lambda)$. (b) Quand $p_{2*} < 0$, la protomère $e^{p_{2*}\lambda^2 + p_{1*}\lambda + p_{0*}}$ est une Gaussienne (c) Quand $p_{2*} = 0$ la protomère est une exponentielle et à son maximum sur $\lambda = \pm 1$ mais est large bande et quand $p_{2*} > 0$, la protomère est une réciproque de Gaussienne qui a son maximum à $\lambda = \pm 1$ et peut-être étroite, soit sur l'axe des pourpres.

dérivée:

$$\lambda_0 \mid \frac{\partial F(\mathbf{v}, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (11.24)$$

$$\implies (p_{1*} + 2p_{2*}\lambda_0)e^{p_{0*} + p_{1*}\lambda_0 + p_{2*}\lambda_0^2} = 0 \quad (11.25)$$

$$\implies p_{1*} + 2p_{2*}\lambda_0 = 0 \quad (11.26)$$

$$\implies \lambda_0 = -\frac{p_{1*}}{2p_{2*}} \quad (11.27)$$

Le maximum de la Gaussienne est donné par:

$$F(\mathbf{v}, -\frac{p_{1*}}{2p_{2*}}) = e^{-(1/4)p_{1*}^2/p_{2*} + p_{0*}} \quad (11.28)$$

De manière assez étrange, mais convainquante, Weinberg trouve une justification aux protomères Gaussiennes réciproques, celles pour lesquelles $p_{2*} > 0$, qui divergent sur les bords du spectre $\lambda \pm 1$, quelque soit la valeur absolue de p_{2*} . Elles forment en fait l'axe des pourpres dans le diagramme de chromaticité quand leur saturation est grande. En effet, leur maximum est placé soit sur 1 soit sur -1 et leur largeur de bande est faible.

Les protomères pour lesquelles $p_{2*} = 0$ ont également un maximum étalé sur ± 1 mais toujours de large bande. Elle sont des nuances de blanc pour lesquelles Weinberg rappelle que Newton les appelaient couleurs *anonymes*.

Weinberg propose une autre paramétrisation des protomères Gaussienne pour illustrer les paramètres Gaussiens μ , λ_0 et ϵ correspondant au gain, à la moyenne et la variance. Il définit la Gaussienne comme:

$$\begin{aligned} \exp \mathbf{p}^*(\lambda) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{\mu - \frac{(\lambda_0 - \lambda)^2}{2\epsilon^2}} \\ &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\epsilon^2}\lambda^2} e^{\frac{\lambda_0}{\epsilon^2}\lambda} e^{\mu - \frac{\lambda_0^2}{2\epsilon^2}} \end{aligned} \quad (11.29)$$

$$= e^{-\frac{1}{2\epsilon^2}\lambda^2 + \frac{\lambda_0}{\epsilon^2}\lambda + \mu - \frac{\lambda_0^2}{2\epsilon^2} - \ln(\epsilon\sqrt{2\pi})} \quad (11.30)$$

Par identification avec 11.23, les relations entre les p_{k*} et μ , λ_0 et ϵ sont les suivantes:

$$p_{2*} = -\frac{1}{2\epsilon^2} \quad p_{1*} = \frac{\lambda_0}{\epsilon^2} \quad p_{0*} = \mu - \frac{\lambda_0^2}{2\epsilon^2} - \ln(\epsilon\sqrt{2\pi}) \quad (11.31)$$

D'où nous déduisons les relations:

$$\lambda_0 = -\frac{p_{1*}}{2p_{2*}} \quad \epsilon^2 = -\frac{1}{2p_{2*}} \quad (11.32)$$

$$\mu = p_{0*} - \frac{(p_{1*})^2}{4p_{2*}} + \frac{1}{2} \ln \frac{-\pi}{p_{2*}} \quad (11.33)$$

La relation avec la loi de probabilité est évidente quand $\mu = 0$. Il y a en fait un paramètre de plus dans la formulation de Weinberg. Un paramètre supplémentaire est nécessaire pour couvrir tout l'espace tridimensionnel.

C'est sans doute pour définir une fonction spectrale associée à une couleur particulière que les distributions Gaussienne d'intensités sont utiles. En effet, on peut maintenant ramener une couleur à un jeu de trois distributions d'intensités et modéliser tous les spectres comme des combinaisons linéaire de ces trois fonctions. Cette idée est renforcé selon Weinberg parce qu'on peut toujours ramener un point de l'espace couleur aussi prêt que l'on veut d'un delta de Dirac. Pour cela, il suffit de faire tendre ϵ vers 0

Soit la fonction $\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, on peut construire $\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\eta(\frac{x}{\epsilon}) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}e^{-(x/\epsilon)^2}$ qui tend vers $\delta(x)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ (pour s'en assurer on pourra consulter [26]).

Il s'ensuit que d'après l'équation 5.4 de Weinberg, quand $\epsilon \rightarrow 0$ on a:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(\mathbf{v}, \lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^\mu \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\lambda - \lambda_0}{2\epsilon^2}} = e^\mu \delta(\lambda - \lambda_0) \quad (11.34)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} F(\mathbf{v}, \lambda) d\lambda = e^\mu \mathbf{A}(\lambda) \quad (11.35)$$

qui est le lieu des couleurs spectrales, où l'équation du cône spectral.

Weinberg précise que l'on peut généraliser à d'autre base des protomères, à condition que celle-ci s'approche d'un Gaussienne au fur et à mesure que ϵ tend vers 0. Les conditions pour lesquelles cette base est éligible se résument en assumant qu'il existe une valeur λ_0 pour laquelle $\mathbf{p}^*(\lambda')$ atteint son maximum:

$$\left. \frac{d\mathbf{p}^*(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} = 0 \quad \left. \frac{d^2\mathbf{p}^*(\lambda_0)}{d\lambda_0^2} \right|_{\lambda_0} = -\frac{1}{\epsilon^2} \quad \mathbf{p}^*(\lambda_0) = \mu - \ln(\epsilon\sqrt{2\pi}) \quad (11.36)$$

Quelque soit l'équation de $\mathbf{p}^*(\lambda)$ ces conditions assurent qu'il converge vers un Dirac lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et décrit le cône spectral. A vrai dire, je ne vois pas trop quels seraient ces lois générales et quel serait leur intérêt.

11.6.2 Les protomères Gaussienne réciproques

Ensuite, Weinberg propose une discussion sur les Gaussiennes réciproque, pour montrer qu'elle forment aussi la frontière du cône spectral, et notamment le plan des pourpres. Les Gaussiennes réciproque quittent rapidement leur minimum $\lambda_{min} = -p_{1^*}/2p_{2^*}$. La part importante des Gaussiennes réciproques est donc autour de ± 1 . On peut poser $\lambda_0 = \pm(1 - \epsilon z)$ pour se concentrer autour du maximum de la Gaussienne réciproque. En posant $\mathbf{B}(\lambda) = d\mathbf{A}(\lambda)/d\lambda$ la dérivée de \mathbf{A} et que nous regardons autour des points ± 1 pour lesquels $\mathbf{A}(\pm 1) = 0$, nous pouvons réaliser une approximation de \mathbf{A} par sa dérivée autour de ces points. Cela donne $\mathbf{A}(\lambda_0) \simeq \mp \epsilon z \mathbf{B}(\pm 1)$, \mp car la pente à -1 est positive alors celle à $+1$ est négative. De la même manière on trouve une approximation de \mathbf{p}^* autour des points ± 1 :

$$\mathbf{p}^*(\lambda_0) = p_{0^*} + p_{1^*}\lambda_0 + p_{2^*}\lambda_0^2 \quad (11.37)$$

$$= p_{0^*} \pm p_{1^*}(1 - \epsilon z) \pm p_{2^*}(1 - \epsilon z)^2 \quad (11.38)$$

$$= \mathbf{p}^*(\pm 1) \mp \epsilon z p_{1^*} \mp 2\epsilon z p_{2^*} + \epsilon^2 z^2 p_{2^*} \quad (11.39)$$

$$= \mathbf{p}^*(\pm 1) \mp \epsilon z (p_{1^*} + 2p_{2^*}) + \epsilon^2 z^2 p_{2^*} \quad (11.40)$$

Il est clair que si ϵ est petit, on a $p_{2^*}\epsilon \gg p_{2^*}\epsilon^2$, et ϵ doit être choisi comme inverse de p_{2^*} , $\epsilon = 1/p_{2^*}$ pour limiter la contribution aux alentours des extrémités. De l'expression de \mathbf{v} dans 5.4, on tire en ne gardant que quatre points pour l'intégration:

$$\mathbf{v} = \int_{-1}^1 \mathbf{A}(\lambda) \exp \mathbf{p}^*(\lambda) d\lambda \quad (11.41)$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{1}{4} [\underbrace{\mathbf{A}(-1) \exp \mathbf{p}^*(-1)}_{=0 \text{ car } \mathbf{A}(-1)=0} + \underbrace{\mathbf{A}(+1) \exp \mathbf{p}^*(+1)}_{=0} \\ &\quad + \mathbf{A}(\lambda_0^+) \exp \mathbf{p}^*(\lambda_0^+) + \mathbf{A}(\lambda_0^-) \exp \mathbf{p}^*(\lambda_0^-)] \quad (11.42) \end{aligned}$$

$$\simeq \frac{1}{4} \epsilon^2 [-\mathbf{B}(+1) e^{\mathbf{p}^*(+1)} + \mathbf{B}(-1) e^{\mathbf{p}^*(-1)}] \quad (11.43)$$

$$\simeq \frac{1}{4} \epsilon^2 e^{p_{0^*} + p_{2^*}} [-\mathbf{B}(+1) e^{p_{1^*}} + \mathbf{B}(-1) e^{-p_{1^*}}] \quad (11.44)$$

avec $\lambda_0^+ = 1 - \epsilon z$ et $\lambda_0^- = -1 + \epsilon z$, $\epsilon z (p_{1^*} + 2p_{2^*}) \simeq \ln \epsilon$ et $\epsilon^2 z^2 p_{2^*} \simeq 0$. Cette simplification ne tient pas compte de $\epsilon = 1/p_{2^*}$, mais c'est bien en remplaçant explicitement la variable ϵ et en remplaçant $e^{p_{1^*}} = \cosh p_{1^*} +$

$\sinh p_{1*}$ et $e^{-p_{1*}} = \cosh p_{1*} - \sinh p_{1*}$ qu'il obtient la forme finale de \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4(p_{2*})^2} e^{p_{0*}+p_{2*}} [-\mathbf{B}(+1)(\cosh p_{1*} + \sinh p_{1*}) + \mathbf{B}(-1)(\cosh p_{1*} - \sinh p_{1*})] \quad (11.45)$$

$$= \frac{\cosh p_{1*}}{2(p_{2*})^2} e^{p_{0*}+p_{2*}} [-\mathbf{B}(+1) \left(1 + \frac{\sinh p_{1*}}{\cosh p_{1*}}\right) / 2 + \mathbf{B}(-1) \left(1 - \frac{\sinh p_{1*}}{\cosh p_{1*}}\right) / 2] \quad (11.46)$$

$$= e^{p_{0*}+p_{2*}-2 \ln p_{2*} + \ln \cosh p_{1*} - \ln 2} [-\mathbf{B}(+1)(1 + \tanh p_{1*})/2 + \mathbf{B}(-1)(1 - \tanh p_{1*})/2] \quad (11.47)$$

$$= e^\nu [-\mathbf{B}(+1)(1 + \tanh p_{1*})/2 + \mathbf{B}(-1)(1 - \tanh p_{1*})/2] \quad (11.48)$$

avec

$$\nu \equiv p_{0*} + p_{2*} - 2 \ln p_{2*} + \ln \cosh p_{1*} - \ln 2 \quad (11.49)$$

Weinberg justifie que quand $p_{2*} \rightarrow +\infty$, il est possible de faire tendre $p_{0*} \rightarrow -\infty$ de manière à ce que ν et p_{1*} aient les valeurs désirées. Toutes ces gesticulations calculatoires, permettent de conclure que \mathbf{v} va osciller entre $+e^\nu \mathbf{B}(-1)$ quand p_{1*} est grand et négatif (en effet $(1 + \tanh p_{1*})/2 \simeq 1$ dans ce cas) et $-e^\nu \mathbf{B}(+1)$ quand p_{1*} est grand et positif. Ainsi, quelque soit la valeur de p_{1*} le lieu des couleurs correspond au plan des pourpres, limité par les deux vecteurs $\mathbf{B}(-1)$ et $\mathbf{B}(+1)$ qui sont les pentes de $\mathbf{A}(\lambda)$ aux points d'extrémités.

Maintenant en exprimant $[\mathbf{p}^*(+1) - \mathbf{p}^*(-1)]/2 = [p_{0*} + p_{1*} + p_{2*} - 1]^2 - p_{0*} + p_{1*}(-1) + p_{2*}(-1)^2]/2 = p_{1*}$ et $[\mathbf{p}^*(+1) + \mathbf{p}^*(-1)]/2 = p_{0*} + p_{2*}$, on peut exprimer ν comme:

$$\nu \equiv \frac{[\mathbf{p}^*(+1) + \mathbf{p}^*(-1)]}{2} - 2 \ln \left(\frac{d^2 p^*}{d\lambda^2} \right) + \ln \cosh \frac{[\mathbf{p}^*(+1) - \mathbf{p}^*(-1)]}{2} - \ln 2 \quad (11.50)$$

Il en tire la conclusion que quand $d^2 p^*/d\lambda^2 \rightarrow \infty$ (quand $\epsilon \rightarrow 0$) la valeur de λ_0 au minimum s'approche de zéro. Une valeur de $\epsilon = \frac{2}{d^2 p^*/d\lambda^2}$ permettrait déjà d'obtenir une teinte pourpre.

11.7 Dualité entre espace couleur et protomère

La discussion à propos de la dualité entre espace couleur et protomère est quelque peu compliquée à cause de la nature non-linéaire de la transformation en protomère. Weinberg propose de construire une fonction de divergence Δ qui mesure la différence dans l'espace couleur entre une distribution spectrale d'intensité, $V(\lambda)$ et son expression dans la base des protomères $\exp \mathbf{p}^*(\lambda) = \exp \sum_k p_{k*} P^{k*}$ (Figure 10). Ainsi nous cherchons à définir une métrique faisant se correspondre un vecteur $\mathbf{p} = [p_{0*}, p_{1*}, p_{2*}]$ (\mathbf{p} est un vecteur ligne car il appartient au dual de l'espace des protomères) et un vecteur $\mathbf{v} = [v_0, v_1, v_2]^t$. Une telle métrique n'est pas fixe, à cause de la non-linéarité de type \exp entre les espaces et de l'approximation d'une distribution par sa protomère. Par contre, nous pouvons définir une métrique pour chaque distribution $X(\lambda) = e^{\mathbf{p}\mathbf{P}}$

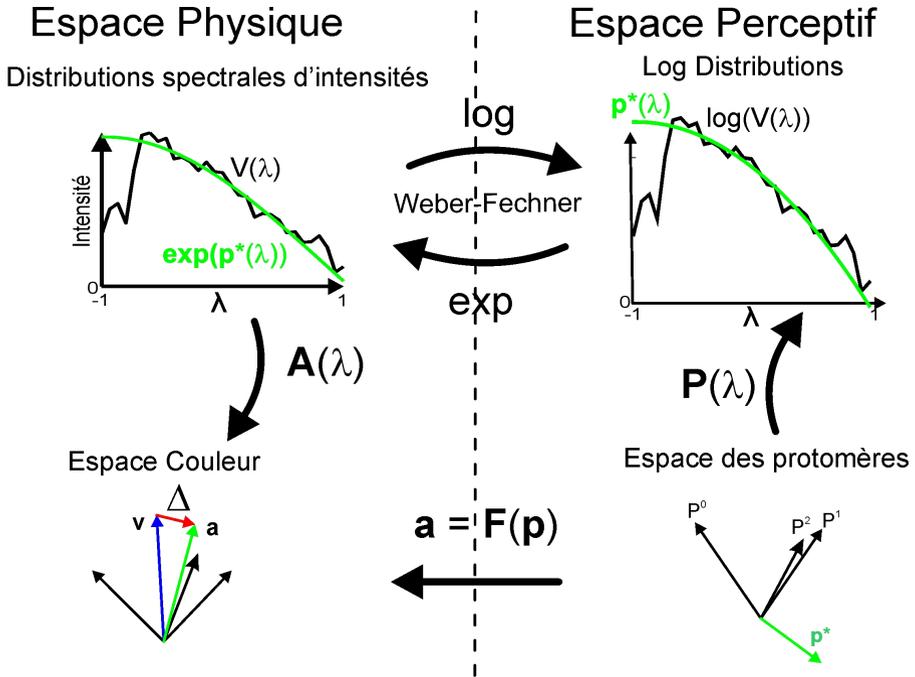


Fig. 10 Illustration de la mesure de divergence Δ dans l'espace couleur.

protomère (\mathbf{P} est la matrice des vecteurs colonnes $P^{k*}(\lambda)$), on peut écrire $\sum_k p_{k*} P^{k*}(\lambda) = \mathbf{pP}$. Appelons \mathbf{a} l'image du vecteur protomère \mathbf{p} dans l'espace couleur. La relation entre \mathbf{a} et \mathbf{p} s'écrit comme une fonction vectorielle \mathbf{F} :

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \int_{-1}^{+1} \mathbf{A}(\lambda) e^{\mathbf{pP}} d\lambda \tag{11.51}$$

$$F^k(\mathbf{p}) = \int_{-1}^{+1} A^k(\lambda) e^{\mathbf{pP}} d\lambda \tag{11.52}$$

Cela signifie que la transformation de la mesure de différence dans l'espace des protomères à la mesure de la différence dans l'espace couleur dépend de la matrice Jacobienne $D\mathbf{F}$ de la transformation \mathbf{F} . Il s'en suit d'après la propriété que $\partial e^{\mathbf{pP}} / \partial p_{i*} = P^i(\lambda) e^{\mathbf{pP}}$ que la Jacobienne s'écrit:

$$D\mathbf{F} = \left[\frac{\partial F^k}{\partial p_{i*}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^0}{\partial p_{0*}} & \cdots & \frac{\partial F^0}{\partial p_{2*}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F^2}{\partial p_{0*}} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial p_{2*}} \end{bmatrix} = X_k^i \tag{11.53}$$

$$\frac{\partial F^k}{\partial p_{i*}} = \frac{\partial}{\partial p_{i*}} \int_{-1}^{+1} A^k(\lambda) e^{\mathbf{pP}} d\lambda = \int_{-1}^{+1} A^k(\lambda) \frac{\partial e^{\mathbf{pP}}}{\partial p_{i*}} d\lambda \tag{11.54}$$

$$= \int_{-1}^{+1} A^k(\lambda) P^i(\lambda) e^{\mathbf{P}} d\lambda = \int_{-1}^{+1} A^k(\lambda) P^i(\lambda) X(\lambda) d\lambda \quad (11.55)$$

Donc le tenseur d'ordre quelconque à les composantes qui s'écrivent, comme le propose Weinberg:

$$X^{mn\dots, m^*n^*\dots} \equiv \int_{-1}^{+1} X(\lambda) A^m(\lambda) A^n(\lambda) \dots P^{m^*}(\lambda) P^{n^*}(\lambda) \dots d\lambda$$

Cela permet d'écrire la relation d'équivalence 7.1e comme un égalité en utilisant le tenseur de premier ordre:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_{m^*}} = X_k^{m^*} \int_{-1}^{+1} A^k(\lambda) [\exp \mathbf{P}^*(\lambda) - V(\lambda)] d\lambda \quad (11.56)$$

Nous voyons ici que l'intégrale de la différence entre $V(\lambda)$ et une protomère $\exp \mathbf{P}^*(\lambda)$ mesuré sur les A^k est transformée en variation de Δ par rapport aux variables p_{m^*} à travers la métrique $X_k^{m^*}$. La métrique $X_k^{m^*}$ est une fonctionnelle arbitraire de $V(\lambda)$ et une fonction arbitraire de p_{k^*} , soit $X_k^{m^*} \equiv X_k^{m^*}[V(\lambda'); p_{k^*}]$.

Ensuite, Weinberg justifie que comme $\exp \mathbf{P}^*$ n'intervient dans Δ que sous une seule intégrale de λ et n'a pas d'autre dépendance, il est possible de résumer son influence dans une ou plusieurs fonctionnelles I_K :

$$\Delta = \sum_K I_K \quad (11.57)$$

$$I_K \equiv \int_{-1}^{+1} C_K[V(\lambda'); p_{k^*}, \lambda] \exp \mathbf{P}^*(\lambda) d\lambda \quad (11.58)$$

où C_K sont des fonctions de p_{k^*} et λ et fonctionnelle de $V(\lambda)$. Nous pouvons comprendre cette écriture comme si il existait un certain nombre K de mécanismes qui mesurerait la différence entre une protomère de paramètres p_{k^*} et une fonction $V(\lambda)$. Pour donner un exemple de fonction C_K nous pourrions par exemple choisir une différence au carré relative entre $V(\lambda)$ et $\exp \mathbf{P}^*(\lambda)$ multiplié par une fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[a,b]}(\lambda)$ d'un domaine $[a, b]$ de longueur d'onde, avec $K = -N..N - 1$:

$$C_K(V(\lambda), p_{k^*}, \lambda) = \mathbb{1}_{[\frac{K}{N}, \frac{K+1}{N}]}(\lambda) \left[\frac{\left(V(\lambda) - \exp \sum_{k'} p_{k'} P^{k'}(\lambda) \right)^2}{\exp \sum_{k'} p_{k'} P^{k'}(\lambda)} \right] \quad (11.59)$$

Ces intégrales contribuent à $\partial \Delta / \partial p_{m^*}$ par le terme:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_{m^*}} = \sum_K \frac{\partial \Delta}{\partial I_K} \frac{\partial I_K}{\partial p_{m^*}} \quad (11.60)$$

$$= \sum_K \frac{\partial \Delta}{\partial I_K} \frac{\partial}{\partial p_{m^*}} \int_{-1}^{+1} C_K[V(\lambda'); p_{k'^*}, \lambda] \exp \mathbf{p}^*(\lambda) d\lambda \quad (11.61)$$

$$= \int_{-1}^{+1} \sum_K \frac{\partial \Delta}{\partial I_K} C_K[V(\lambda'); p_{k'^*}, \lambda] \frac{\partial}{\partial p_{m^*}} \exp \mathbf{p}^*(\lambda) d\lambda \quad (11.62)$$

$$= \int_{-1}^{+1} C[V(\lambda'); p_{k'^*}, \lambda] P^{m^*} \exp \mathbf{p}^*(\lambda) d\lambda \quad (11.63)$$

où $C \equiv \sum_K C_K \partial \Delta / \partial I_K$. Mais selon 11.56 l'expression de la dérivée partielle de Δ en fonction de p_{m^*} en une expression de $\exp \mathbf{p}^*(\lambda)$ est plutôt:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_{m^*}} = \int_{-1}^{+1} X_k^{m^*}[V(\lambda'); p_{k'^*}] A^k(\lambda) [\exp \mathbf{p}^*(\lambda) - V(\lambda)] d\lambda \quad (11.64)$$

qui doit cependant être égale à la forme précédente. Mais il n'y a pas de manière pour que la relation

$$X_k^{m^*} A^k(\lambda) = C(\lambda) P^{m^*}(\lambda) \quad (11.65)$$

soit vraie pour tout λ et m^* à cause de la dépendance de $X_k^{m^*}$ et C sur les quantités supprimées ici, p_{k^*} et $V(\lambda)$. La seule possibilité est que la dépendance à p_{k^*} et $V(\lambda)$ s'annulent de chaque coté de l'équation, laissant une relation où $X_k^{m^*}$ soit une métrique constante et $C(\lambda)$ une fonction de λ seulement.

Par un choix judicieux de la base de l'espace couleur, on peut s'arranger pour que la métrique $X_k^{m^*}$ soit triviale, $\delta_k^{m^*}$ ou la matrice unité. Il s'ensuit:

$$A^k(\lambda) = C(\lambda) P^k(\lambda) \quad (11.66)$$

Cette relation lie les bases couleurs et protomères.

En utilisant la base qui diagonalise $X_k^{m^*}$ et en remplaçant $A^k(\lambda)$ par cette dernière relation on a:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_k} = \int_{-1}^{+1} C(\lambda) P^k(\lambda) [\exp \mathbf{p}(\lambda) - V(\lambda)] d\lambda \quad (11.67)$$

$$= \int_{-1}^{+1} C(\lambda) [P^k(\lambda) \exp \mathbf{p}(\lambda) - P^k(\lambda) V(\lambda)] d\lambda \quad (11.68)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial p_k} \right) \int_{-1}^{+1} C(\lambda) [\exp \mathbf{p}(\lambda) - V(\lambda) \mathbf{p}(\lambda)] d\lambda \quad (11.69)$$

Soit de but en blanc, $\Delta = \int_{-1}^{+1} C(\lambda) [\exp \mathbf{p}(\lambda) - V(\lambda) \mathbf{p}(\lambda)] d\lambda$ par identification. Mais Weinberg ajoute plusieurs termes dépendant de $V(\lambda)$ pour tenir compte des équations 7.1c et 7.1d. Commençons par la relation 7.1d qui stipule que $\Delta = 0$ si $\exp \mathbf{p}(\lambda) = V(\lambda)$. Nous avons dans ce cas, $\Delta =$

$\int_{-1}^1 C(\lambda)[V(\lambda) - V(\lambda) \ln V(\lambda)]d\lambda$. Nous voyons donc qu'il faut ajouter les termes $-V(\lambda) + V(\lambda) \ln V(\lambda)$ pour obtenir l'annulation de Δ . En somme, Δ s'écrit:

$$\Delta = 2 \int_{-1}^1 C(\lambda)[\exp \mathbf{p}(\lambda) - V(\lambda) - V(\lambda)\mathbf{p}(\lambda) + V(\lambda) \ln V(\lambda)]d\lambda \quad (11.70)$$

Le facteur 2 est arbitraire et permettra dans la dernière section de simplifier le calcul pour la symétrie de Δ . Si maintenant on pose $U(\lambda) \equiv [\exp \mathbf{p}(\lambda)]/V(\lambda)$, Δ s'écrit:

$$\Delta = 2 \int_{-1}^1 C(\lambda)V(\lambda) \left[\frac{\exp \mathbf{p}(\lambda)}{V(\lambda)} - 1 - \mathbf{p}(\lambda) + \ln V(\lambda) \right] d\lambda \quad (11.71)$$

$$= 2 \int_{-1}^1 C(\lambda)V(\lambda) \left[\frac{\exp \mathbf{p}(\lambda)}{V(\lambda)} - 1 - (\ln(\exp \mathbf{p}(\lambda)) - \ln V(\lambda)) \right] d\lambda \quad (11.72)$$

$$= 2 \int_{-1}^1 C(\lambda)V(\lambda) \left[\frac{\exp \mathbf{p}(\lambda)}{V(\lambda)} - 1 - \ln \frac{\exp \mathbf{p}(\lambda)}{V(\lambda)} \right] d\lambda \quad (11.73)$$

$$= 2 \int_{-1}^1 C(\lambda)V(\lambda)[U(\lambda) - 1 - \ln U(\lambda)]d\lambda \quad (11.74)$$

Ainsi quand $\exp \mathbf{p}(\lambda) = V(\lambda)$, $U(\lambda) = \exp \mathbf{p}(\lambda)/V(\lambda) = 1$ et $U(\lambda) - 1 - \ln U(\lambda) = 0$ comme souhaité et l'inclusion des termes en $V(\lambda)$ est justifié.

Ensuite, après quelques justifications, Weinberg écrit explicitement la relation entre \mathbf{v} et \mathbf{p} et en profite pour définir une mesure de luminosité H comme:

$$v^k = \int_{-1}^{+1} C(\lambda)P^k(\lambda) \exp \mathbf{p}(\lambda)d\lambda = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (11.75)$$

$$H \equiv H[\exp \mathbf{p}(\lambda')] \equiv \int_{-1}^{+1} C(\lambda) \exp \mathbf{p}(\lambda)d\lambda \quad (11.76)$$

Cette formulation est intéressante puisqu'elle stipule d'une part que la mesure de luminosité est une mesure pondérée par $C(\lambda)$ (qui serait la fonction de visibilité photopique telle que mesurée par photométrie par papillonnement CIE- $V(\lambda)$) des protomères et également que les coordonnées d'une couleur dans l'espace couleur est une variation de cette mesure par les paramètres p_k de la protomère.

Weinberg propose alors une discussion sur la relation entre la longueur d'onde et la variable λ utilisée ici. Il propose que λ serait une fonction monotone continue décalée et mise à l'échelle de la longueur d'onde. Enfin, il finit par dire que si la base $P^0(\lambda) = 1$ alors on doit avoir les relations de dualité suivantes, qui définissent les *chromolabes* de Young.

$$C(\lambda) = A^0(\lambda) \quad P^1(\lambda) = A^1(\lambda)/A^0(\lambda) \quad P^2(\lambda) = A^2(\lambda)/A^0(\lambda) \quad (11.77)$$

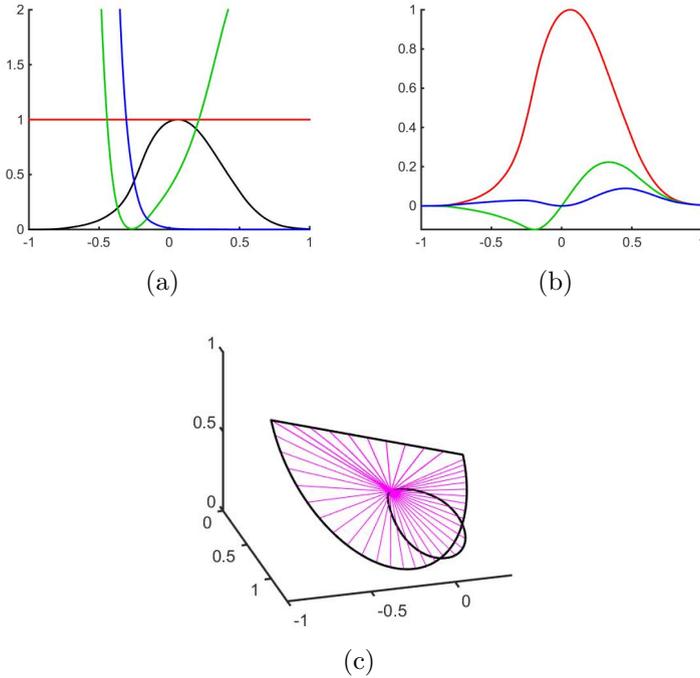


Fig. 11 (a) Prédiction des P^k à partir des fonctions d'égalisation CIEXYZ-1931 (Figure 7(a)). C en noir, P^0 en rouge, P^1 en vert et P^2 en bleu. A cause des valeurs proches de 0, les valeurs de P^k divergent. (b) Prédiction des A^k à partir des P^k , A^0 en rouge, A^1 en vert et A^2 en bleu. (c) Cône spectral et lacet spectral à partir des A^k prédit en (b).

en considérant que λ est une mise à l'échelle de la longueur d'onde.

C'est ici l'occasion de préciser la relation entre les protomères pour lesquels on suppose la base $P^k(\lambda) = \lambda^k$ et les mesures de $A^k(\lambda)$ réalisées par la CIE et normalisées en 1931 par la norme CIEXYZ-1931. Nous supposons comme le fait Weinberg que $C(\lambda) = Y(\lambda)$ soit la fonction de visibilité photopique CIEY-1931. Nous utiliserons également la relation entre les longueurs d'ondes et la variable λ comme décrit par 11.4.

Dans un premier temps, nous appliquons directement les équations 11.77 pour calculer les $P^k(\lambda)$ à partir des $A^k(\lambda)$ considérés comme les fonctions d'égalisation des couleurs normalisées par la CIE en 1931, où $A^0(\lambda) = Y(\lambda)$, $A^1(\lambda) = X(\lambda)$ et $A^2(\lambda) = Z(\lambda)$. Le problème avec cette opération étant que $A^0(\lambda)$ devenant proche de 0 aux valeurs ± 1 les fonctions $P^k(\lambda)$ s'approche de l'infini à ces valeurs (Figure 11(a)), sauf $P^0(\lambda) = 1$.

Dans un deuxième temps, nous souhaitons prédire les $A^k(\lambda)$ à partir des $P^k(\lambda)$ et de $C(\lambda)$ en inversant les équations 11.77. Les expressions des $A^k(\lambda)$ sont données par:

$$A^0(\lambda) = C(\lambda) \quad A^1(\lambda) = C(\lambda)P^1(\lambda) \quad A^2(\lambda) = C(\lambda)P^2(\lambda) \quad (11.78)$$

La Figure 11(b) montre le résultat de prédiction des A^k à partir des $P^k = \lambda^k$. Ici aussi les fonctions sont loin des profils des fonctions d'égalisation CIEXYZ-1931, même si le cône spectral dessiné à partir de ces fonctions (Figure 11(c)) a bien les propriétés requises, un plan des pourpres.

Notons que ces simulations pourraient-être améliorées, c'est à dire, auraient une meilleur correspondance entre les A^k et les P^k si on considérait (1) la diagonalisation de la métrique X_k^{m*} qui n'est pas considéré ici, (2) une transformation linéaire de la base des protomères (3) une modification de la relation entre les longueurs d'ondes et la variable λ . Cependant il n'est pas connu si une telle correspondance est possible, même en modifiant chacun de ces points.

11.8 La base des protomères

11.8.1 Projection dans un plan

Weinberg considère ici une base linéairement indépendante de l'espace couleur appelé \mathbf{v}_k . Ainsi, un vecteur couleur \mathbf{v} s'écrit $\mathbf{v} = v^k \mathbf{v}_k$. Il arrange ensuite les coordonnées pour faire apparaître le plan $\sum_k v^k = 1$ qui définit le diagramme de chromaticité de la CIE.

$$\mathbf{v} = v^0 \mathbf{v}_0 + v^1 \mathbf{v}_1 + v^2 \mathbf{v}_2 \quad (11.79)$$

$$= v^0 \mathbf{v}_0 + v^1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0) + v^2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0) \quad (11.80)$$

$$= \left(\sum_k v^k \right) \mathbf{v}_0 + [v^1 (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) + v^2 (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0)] \quad (11.81)$$

Ainsi, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ forment un triangle dans le plan et l'expression entre crochet est une paramétrisation du plan. Il s'ensuit que la condition $\sum v^k = 1$ est la condition nécessaire et suffisante pour définir le plan.

Ensuite il calcul l'intersection du plan avec le cône spectral, définit par $\mathbf{v} = e^\mu \mathbf{A}(\lambda)$. L'intersection est donc donnée par $\sum_k e^\mu A^k(\lambda) = 1$, soit $e^\mu = 1 / \sum_k A^k(\lambda)$. Le lieu d'intersection est donc donné pour $\mu = \ln \sum_k A^k$.

Il en déduit alors à l'aide de la relation $A^k = CP^k$:

$$\mathbf{v} = A^k(\lambda) v^k / \sum_m A^m(\lambda) = P^k(\lambda) v^k / \sum_m P^m(\lambda) \quad (11.82)$$

Comme prévu seul les rapports de P^k sont utilisés et C est annulé. Les coordonnées des vecteurs dans le plan sont précisément v^1 et v^2 et s'expriment directement dans la base $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0$ par:

$$v^1 = P^1(\lambda) / \sum_m P^m(\lambda) \quad v^2 = P^2(\lambda) / \sum_m P^m(\lambda) \quad (11.83)$$

Ensuite, Weinberg montre que l'on peut aussi faire la calcul de l'intersection entre la cône spectral et un plan quelconque dans l'espace couleur, pas nécessairement $\sum_k v^k = 1$. Pour cela il définit une transformation dans l'espace

couleur par $\mathbf{v}_k \rightarrow X_k^m \mathbf{v}_m$. La transformation $Y_m^k = (X_k^m)^{-t}$ est alors la matrice qui transforme les P^k . De la relation précédente on en déduit:

$$v^1 \sum_m P^m(\lambda) = P^1(\lambda) \Rightarrow v^1 \sum_k \sum_m Y_k^m P^k(\lambda) = \sum_k Y_k^1 P^k(\lambda) \quad (11.84)$$

$$\Rightarrow \sum_k (v^1 z_k - Y_k^1) P^k(\lambda) = 0 \quad (11.85)$$

$$v^2 \sum_m P^m(\lambda) = P^2(\lambda) \Rightarrow v^2 \sum_k \sum_m Y_k^m P^k(\lambda) = \sum_k Y_k^2 P^k(\lambda) \quad (11.86)$$

$$\Rightarrow \sum_k (v^2 z_k - Y_k^2) P^k(\lambda) = 0 \quad (11.87)$$

$$z_k = \sum_m Y_k^m \quad (11.88)$$

En posant $\xi = [v^1, v^2]^t$ et $\eta_k = [Y_k^1, Y_k^2]^t$ cela revient à:

$$\sum_k \zeta_k P^k(\lambda) = 0 \quad \zeta_k = z_k \xi - \eta_k \quad (11.89)$$

On se retrouve ainsi avec un système de 2 equations à 3 inconnus que l'on ramène à un système de 2 equations à 2 inconnus en faisant le rapport par $P^0(\lambda)$

$$\begin{cases} \zeta_0^1 P^0(\lambda) + \zeta_1^1 P^1(\lambda) + \zeta_2^1 P^2(\lambda) = 0 \\ \zeta_0^2 P^0(\lambda) + \zeta_1^2 P^1(\lambda) + \zeta_2^2 P^2(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (11.90)$$

$$\begin{cases} \zeta_1^1 \frac{P^1(\lambda)}{P^0(\lambda)} + \zeta_2^1 \frac{P^2(\lambda)}{P^0(\lambda)} = -\zeta_0^1 \\ \zeta_1^2 \frac{P^1(\lambda)}{P^0(\lambda)} + \zeta_2^2 \frac{P^2(\lambda)}{P^0(\lambda)} = -\zeta_0^2 \end{cases} \quad (11.91)$$

Que l'on résoud par la méthode de Cramer, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{P^1(\lambda)}{P^0(\lambda)} &= \frac{\begin{vmatrix} -\zeta_0^1 & \zeta_2^1 \\ -\zeta_0^2 & \zeta_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \zeta_1^1 & \zeta_2^1 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\zeta_2 \times \zeta_0}{\zeta_1 \times \zeta_2} \\ \frac{P^2(\lambda)}{P^0(\lambda)} &= \frac{\begin{vmatrix} \zeta_1^1 & -\zeta_0^1 \\ \zeta_1^2 & -\zeta_0^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \zeta_1^1 & \zeta_2^1 \\ \zeta_1^2 & \zeta_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\zeta_0 \times \zeta_1}{\zeta_1 \times \zeta_2} \end{aligned} \quad (11.92)$$

Les numérateurs et dénominateurs sont de la forme:

$$\zeta_m \times \zeta_n = (z_m \xi - \eta_m) \times (z_n \xi - \eta_n) \quad (11.93)$$

$$= (z_m \xi - \eta_m) \times z_n \xi - (z_m \xi - \eta_m) \times \eta_n \quad (11.94)$$

$$= \underbrace{z_m \xi \times z_n \xi}_{=0} - \eta_m \times z_n \xi - z_m \xi \times \eta_n + \eta_m \times \eta_n \quad (11.95)$$

$$= \xi \times (z_n \eta_m - z_m \eta_n) + \eta_m \times \eta_n \quad (11.96)$$

Les numérateurs et dénominateurs sont donc linéaires en v^1 et v^2 les composantes de ξ . Les rapports des P^k sont donc reliés par une transformation projective à v^1 et v^2 .

Ensuite Weinberg revient sur la base des protomères en commençant de nouveau par $P^0(\lambda) = 1 = \lambda^0$. Il justifie ensuite que comme λ est une fonction monotone de la longueur d'onde, elle doit être représentée par une protomère, $P^1(\lambda) = \lambda = \lambda^1$. Finalement, $P^2(\lambda) = \lambda^2$ pour les dérivées de $\mathbf{A}(\lambda)$ soient différentes au points ± 1 . Avec $P^k(\lambda) = \lambda^k$, L'équation 11.92 se résume en :

$$\lambda = \frac{\zeta_2 \times \zeta_0}{\zeta_1 \times \zeta_2} \quad \lambda^2 = \frac{\zeta_0 \times \zeta_1}{\zeta_1 \times \zeta_2} \quad (11.97)$$

$$(-\lambda)^2 = \lambda^2 \Rightarrow (\zeta_0 \times \zeta_2)^2 = (\zeta_0 \times \zeta_1)(\zeta_1 \times \zeta_2) \quad (11.98)$$

qui est linéaire en v^1 , v^2 , $(v^1)^2$, $(v^2)^2$ et $(v^1 v^2)$. En somme, la courbe de chromaticité associé de manière unique aux protomères Gaussiennes est une conique.

11.8.2 La conique dans le diagramme de chromaticité

Weinberg propose ensuite de trouver la conique qui passe par les points du diagramme de chromaticité de la CIE, pour cela il choisit 5 points sur la courbe et utilise le théorème de Pascal. Il a sans doute construit la courbe "à la main" avec la propriété géométrique. Mais il y a aujourd'hui une manière plus formelle de construire la conique. L'équation générale d'une conique dans le plan est donnée par la formule suivante pour un point $X = [x, y]^t$ de coordonnées x et y :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (11.99)$$

$$\Leftrightarrow X^t A X + a_0^t X = 1 \quad (11.100)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \quad a_0 = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} \quad f = -1 \quad (11.101)$$

Choisissons $N = 5$ points $X_i = [x_i, y_i]^t$, $i = 1..N$ sur la courbe de chromaticité et plaçons les dans une matrice M de la manière suivante:

$$M = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^2 & x_N y_N & y_N^2 & x_N & y_N & 1 \end{bmatrix} \quad (11.102)$$

Comme chacun des points est sur la conique nous avons la relation $Mp = 0$, où $p = [a \ b \ c \ d \ e \ f]^t$. En utilisant la décomposition de la matrice M en valeur

singulière, nous pouvons avoir une estimation du vecteur p des paramètres de la conique. En effet, M s'écrit:

$$M = \begin{matrix} U & S & V^t \\ N \times N & N \times 6 & 6 \times 6 \end{matrix} \quad (11.103)$$

où S contient dans sa diagonale les valeurs singulières de M . La dernière ligne de V^t ou la dernière colonne de V contient donc les paramètres p à un facteur proportionnel près. Mais le modèle est configuré pour que $f = -1$, nous avons donc $p = -V(:, 6)/V(6, 6)$. Nous retrouvons ainsi la matrice A et le vecteur a_0 de la conique. Pour dessiner la conique correspondante, nous pouvons calculer la transformation affine qui permet de passer d'une conique canonique à celle qui est donnée par les paramètres.

$$X^t A X + a_0^t X = 1 \quad (11.104)$$

$$\Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{2} A^{-1} a_0 \right)^t A \left(X + \frac{1}{2} A^{-1} a_0 \right) - \frac{1}{4} a_0^t A^{-1} a_0 = 1 \quad (11.105)$$

$$\Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{2} A^{-1} a_0 \right)^t U S^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} U^t \left(X + \frac{1}{2} A^{-1} a_0 \right) = 1 + \frac{1}{4} a_0^t A^{-1} a_0 \quad (11.106)$$

$$\Leftrightarrow Z Z^t = 1 \quad (11.107)$$

avec $Z = \frac{1}{k} S^{\frac{1}{2}} U^t \left(X + \frac{1}{2} A^{-1} a_0 \right) = T^{-1}(X + t_0)$ et $k = \sqrt{1 + \frac{1}{4} a_0^t A^{-1} a_0}$. Nous avons assumé ici que $S^{\frac{1}{2}}$ est une matrice réelle et que $k^2 > 0$, mais cela n'est aucunement garanti. Plusieurs cas de figures se présentent selon la signature de A . Pour connaître la signature de A on procède à sa décomposition en valeurs propres et vecteurs propres, $A = U S U^{-1}$. Les valeurs propres sont réelles et la matrice U unitaire $U^{-1} = U^t$ parce que A est symétrique. La signature de A est donnée par $\text{sign}(\text{diag}(S))$ et peut-être $(+, +)$, $(-, -)$, $(+, -)$ et $(-, +)$. Dans les deux premiers cas, la conique est une ellipse et dans les deux derniers cas une hyperbole.

Suivant la signature de A on définira la décomposition de A et le paramètre k^2 de la manière suivante:

- $(+, +)$, $A = U \sqrt{|S|} \sqrt{|S|} U^t$, $k^2 = 1 + \frac{1}{4} a_0^t A^{-1} a_0$
- $(-, -)$, $-A = -U \sqrt{|S|} \sqrt{|S|} U^t$, $k^2 = -1 - \frac{1}{4} a_0^t A^{-1} a_0$
- $(-, +)$, $A = U \sqrt{|S|} J \sqrt{|S|} U^t$, $k^2 = 1 + \frac{1}{4} a_0^t A^{-1} a_0$
- $(+, -)$, $-A = -U \sqrt{|S|} J \sqrt{|S|} U^t$, $k^2 = -1 - \frac{1}{4} a_0^t A^{-1} a_0$

avec

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11.108)$$

Seul deux cas de figure subsistent car les signatures $(+, +)$ et $(-, -)$ sont équivalentes et $(-, +)$ et $(+, -)$ aussi, en effet, une équation quadratique et son opposé produisent la même conique. Seulement le calcul de la transformation

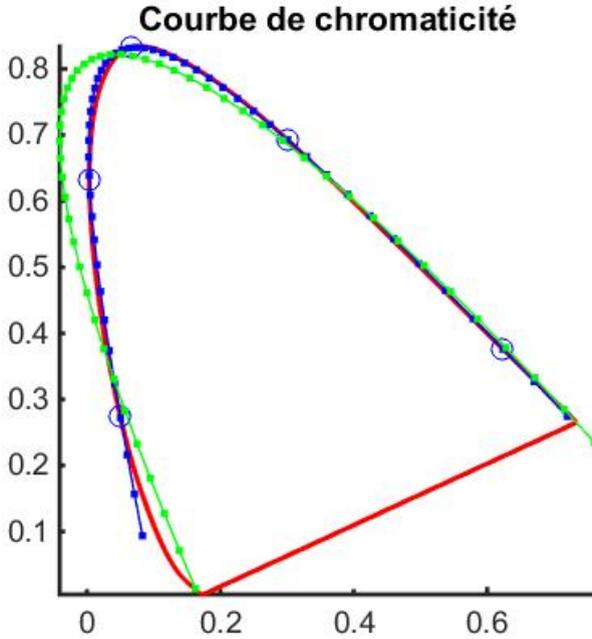


Fig. 12 Calcul de la conique qui suit la courbe de chromaticité. Lorsque que l'on choisit 5 points (rond bleus) judicieusement, la conique est une hyperbole (en bleu). Mais lorsque qu'on utilise tous les points de la courbe, la conique est une ellipse (en vert). Notons cependant que dans ce cas le modèle s'éloigne notablement des données dans le haut de la courbe.

dépend de ce signe. En somme, lorsque l'on a affaire à une ellipse on définit Z comme un cercle et on remonte à X de la manière suivante:

$$Z = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, X = TZ - t_0 \quad (11.109)$$

$$T = k \left(\sqrt{|S|} \right)^{-1} U, t_0 = \frac{1}{2} A^{-1} a_0, k = \sqrt{1 + \frac{1}{4} a_0^t A^{-1} a_0} \quad (11.110)$$

Dans le cas d'une hyperbole, la transformation est la même, mais dans ce cas on définira $Z = [\sinh(s), \cosh(s)]^t$.

En suivant cette procédure, il est possible de calculer les paramètres de la conique pour plus de 5 points et pour toutes les valeurs connus des fonctions d'égalisation colorimétriques CIE-XYZ. La Figure 12 montre que lorsque 5 points sont bien choisis, la conique est une hyperbole. Mais lorsqu'on prend l'ensemble des points des courbes CIEXYZ-1931, la courbe est une ellipse. Cela nuance le résultat de Weinberg qui préconise que la conique soit une hyperbole. Mais comme le stipule Weinberg, les points à l'extrémité du fer à cheval sont sans doute entachés de plus de bruit car leur visibilité est moindre. Si on en

supprime un certain nombre, la conique reste une hyperbole. Quoi qu'il en soit, le type de conique reste une énigme.

Pour finir ce paragraphe, Weinberg précise que dans le cas général d'une base des protomères, autre que $P^k(\lambda) = \lambda^k$, on aurait de toute façon la relation:

$$P^2(\lambda)P^0(\lambda) = [P^1(\lambda)]^2 \tag{11.111}$$

Relation vérifiée pour $P^k(\lambda) = \lambda^k$.

11.9 La métrique de l'espace couleur

Weinberg commence par préciser qu'une métrique de l'espace couleur doit être une mesure de distance entre les extrémités de deux vecteurs couleurs physiques qui est invariante si l'on change l'ordre des deux vecteurs et qui respecte l'inégalité triangulaire. Cependant Δ ne réfère pas à deux couleurs, mais plutôt à un distribution spectrale et un protomère, ni respecte l'inégalité triangulaire.

Définissons $\delta V(\lambda)$ une variation quelconque de $V(\lambda)$ cependant tel qu'il reste positif. Il propose aussi l'utilisation d'un multiplicateur de Lagrange $2r_k$ pour renforcer la variation le long d'une surface isochromatique. Nous avons alors suivant 7.10:

$$\Delta + 2 \sum_k r_k v^k = \Delta + 2 \sum_k r_k \int_{-1}^1 C(\lambda) P^k(\lambda) V(\lambda) d\lambda \tag{11.112}$$

Nous utilisons la relation $\delta(\Delta + 2 \sum_k r_k v^k) = \frac{d(\Delta + 2 \sum_k r_k v^k)}{dV(\lambda)} \delta V(\lambda)$, qui avec la relation 7.7 pour Δ et $d(x \ln x)/dx = \ln x + 1$ donne:

$$\frac{d(\Delta + 2 \sum_k r_k v^k)}{dV(\lambda)} \tag{11.113}$$

$$= \frac{d}{dV(\lambda)} \left(2 \int_{-1}^1 C(\lambda) (\exp \mathbf{p}(\lambda) - V(\lambda) - V(\lambda) \mathbf{p}(\lambda) + V(\lambda) \ln V(\lambda)) d\lambda + 2 \sum_k r_k \int_{-1}^1 C(\lambda) P^k(\lambda) V(\lambda) d\lambda \right) \tag{11.114}$$

$$= 2 \int_{-1}^1 C(\lambda) \frac{d}{dV(\lambda)} \left(\exp \mathbf{p}(\lambda) - V(\lambda) - V(\lambda) \mathbf{p}(\lambda) + V(\lambda) \ln V(\lambda) + \sum_k r_k P^k(\lambda) V(\lambda) \right) d\lambda \tag{11.115}$$

$$= 2 \int_{-1}^1 C(\lambda) \left(0 - 1 - \mathbf{p}(\lambda) + \ln V(\lambda) + 1 + \underbrace{\sum_k r_k P^k(\lambda)}_{\mathbf{r}(\lambda)} \right) d\lambda \tag{11.116}$$

$$= 2 \int_{-1}^1 C(\lambda) (\ln V(\lambda) - \mathbf{p}(\lambda) + \mathbf{r}(\lambda)) d\lambda \quad (11.117)$$

d'où:

$$\delta(\Delta + 2 \sum_k r_k v^k) = \left(2 \int_{-1}^1 C(\lambda) (\ln V(\lambda) - \mathbf{p}(\lambda) + \mathbf{r}(\lambda)) d\lambda \right) \delta V(\lambda) \quad (11.118)$$

Suivant Weinberg, nous pouvons choisir $\delta V(\lambda)$ concentré autour d'une valeur de λ arbitraire, par exemple en choisissant $\delta V(\lambda) = \delta(\lambda' - \lambda)$ et en fixant $\mathbf{v} = \text{constante}$, alors $\delta\Delta = \left(2 \int_{-1}^1 C(\lambda) (\ln V(\lambda) - \mathbf{p}(\lambda) + \mathbf{r}(\lambda)) d\lambda \right) \delta(\lambda - \lambda')$ et le minimum de Δ est donné par:

$$\ln V(\lambda) = \mathbf{p}(\lambda) - \mathbf{r}(\lambda) \equiv \mathbf{q}(\lambda) \quad (11.119)$$

Qui montre que pour atteindre le minimum de Δ il faut que $V(\lambda)$ soit une protomère, la protomère $\mathbf{q}(\lambda)$ de la couleur constante de $V(\lambda)$. Weinberg en déduit sa célèbre phrase sur la relation entre métamère et protomère.

Weinberg justifie alors que lorsque $V(\lambda)$ approche suffisamment proche de $F(\lambda) \equiv \exp \mathbf{q}(\lambda)$, selon les relations 7.1c et 7.1d, Δ devient symétrique en V et F impliquant que Δ soit exprimé comme $(V - F)^2$, soit une forme quadratique de la différence entre V et F . Si l'on écrit 7.7 comme $\Delta(V, F)$ avec $F(\lambda) = \exp \mathbf{p}(\lambda)$ et $\ln F(\lambda) = \mathbf{p}(\lambda)$, on symétrise Δ comme la somme de $(\Delta(V, F) + \Delta(F, V))/2$, qui donne:

$$\Delta = \frac{\Delta(V, F) + \Delta(F, V)}{2} \quad (11.120)$$

$$= \int_{-1}^{+1} C(\lambda) [F(\lambda) - V(\lambda) - V(\lambda) \ln F(\lambda) + V(\lambda) \ln V(\lambda)] d\lambda \\ + \int_{-1}^{+1} C(\lambda) [V(\lambda) - F(\lambda) - F(\lambda) \ln V(\lambda) + F(\lambda) \ln F(\lambda)] d\lambda \quad (11.121)$$

$$= \int_{-1}^{+1} C(\lambda) [V(\lambda) \ln V(\lambda) - V(\lambda) \ln F(\lambda) - F(\lambda) \ln V(\lambda) + F(\lambda) \ln F(\lambda)] d\lambda \quad (11.122)$$

$$= \int_{-1}^{+1} C(\lambda) [V(\lambda) - F(\lambda)] [\ln V(\lambda) - \ln F(\lambda)] d\lambda \quad (11.123)$$

Lorsque $V(\lambda)$ et $F(\lambda)$ sont proches, $V(\lambda) \simeq F(\lambda)$ nous pouvons approximer $\ln V(\lambda) - \ln F(\lambda) = \ln \frac{V(\lambda)}{F(\lambda)}$ par son développement de Taylor autour de la valeur 1 au premier ordre. Or $\ln x = x - 1 + O((x - 1)^2)$. Nous écrivons donc

Δ de l'équation 11.123 comme:

$$\Delta = \int_{-1}^{+1} C(\lambda)[V(\lambda) - F(\lambda)] \left[\ln \frac{V(\lambda)}{F(\lambda)} \right] d\lambda \quad (11.124)$$

$$\simeq \int_{-1}^{+1} C(\lambda)[V(\lambda) - F(\lambda)] \left[\frac{V(\lambda)}{F(\lambda)} - 1 \right] d\lambda \quad (11.125)$$

$$\simeq \int_{-1}^{+1} C(\lambda)[V(\lambda) - F(\lambda)] \left[\frac{V(\lambda) - F(\lambda)}{F(\lambda)} \right] d\lambda \quad (11.126)$$

$$\simeq \int_{-1}^{+1} C(\lambda)[V(\lambda) - F(\lambda)]^2 / F(\lambda) d\lambda \quad (11.127)$$

De manière symétrique nous avons $V(\lambda) - F(\lambda) = F(\lambda)(V(\lambda)/F(\lambda) - 1)$, nous écrivons alors l'équation 11.123:

$$\Delta = \int_{-1}^{+1} C(\lambda)F(\lambda) \left[\frac{V(\lambda)}{F(\lambda)} - 1 \right] \left[\ln \frac{V(\lambda)}{F(\lambda)} \right] d\lambda \quad (11.128)$$

$$\simeq \int_{-1}^{+1} C(\lambda)F(\lambda) \left[\ln \frac{V(\lambda)}{F(\lambda)} \right] \left[\ln \frac{V(\lambda)}{F(\lambda)} \right] d\lambda \quad (11.129)$$

$$\simeq \int_{-1}^{+1} C(\lambda)F(\lambda) \left[\ln \frac{V(\lambda)}{F(\lambda)} \right]^2 d\lambda \quad (11.130)$$

qui montre que le nouveau Δ est un compromis entre $(V - F)^2$ et $(\ln V/F)^2$.

Maintenant que Δ est bien une mesure entre deux couleurs et symétrique, nous pouvons l'écrire comme une fonction de deux protomères qui diffèrent par un élément infinitésimal $\delta \mathbf{p}(\lambda)$ en posant:

$$F = \exp \mathbf{p}(\lambda) \quad V = \exp[\mathbf{p}(\lambda) + \delta \mathbf{p}(\lambda)] \quad (11.131)$$

$$\Delta = \int_{-1}^{+1} C(\lambda)[V(\lambda) - F(\lambda)][\ln \exp[\mathbf{p}(\lambda) + \delta \mathbf{p}(\lambda)] - \ln \exp \mathbf{p}(\lambda)] d\lambda \quad (11.132)$$

$$= \int_{-1}^{+1} C(\lambda) \underbrace{\delta \mathbf{p}(\lambda)}_{= \sum_k \delta p_k P^k(\lambda)} [V(\lambda) - F(\lambda)] d\lambda \quad (11.133)$$

$$= \sum_k \delta p_k \int_{-1}^{+1} C(\lambda) P^k(\lambda) [V(\lambda) - F(\lambda)] d\lambda \quad (11.134)$$

$$= \sum_k \delta p_k \underbrace{\left[\int_{-1}^{+1} C(\lambda) P^k(\lambda) V(\lambda) - \int_{-1}^{+1} C(\lambda) P^k(\lambda) F(\lambda) \right] d\lambda}_{\equiv \delta v^k \text{ using 7.10}} \quad (11.135)$$

$$\Delta = \sum_k \delta p_k \delta v^k \quad (11.136)$$

Si nous considérons maintenant le vecteur \mathbf{v} comme une fonction du vecteur \mathbf{p} par $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{p})$, nous pouvons écrire, $\delta\mathbf{v} = (D\mathbf{F}(\mathbf{p}))\delta\mathbf{p}$, avec $D\mathbf{F}(\mathbf{p})$ la Jacobienne de la transformation:

$$\delta\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \delta v^0 \\ \delta v^1 \\ \delta v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v^0}{\partial p_0} & \frac{\partial v^0}{\partial p_1} & \frac{\partial v^0}{\partial p_2} \\ \frac{\partial v^1}{\partial p_0} & \frac{\partial v^1}{\partial p_1} & \frac{\partial v^1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial v^2}{\partial p_0} & \frac{\partial v^2}{\partial p_1} & \frac{\partial v^2}{\partial p_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_0 \\ \delta p_1 \\ \delta p_2 \end{bmatrix} = (D\mathbf{F}(\mathbf{p}))\delta\mathbf{p} \quad (11.137)$$

Soit $\delta v^m = \sum_n \frac{\partial v^m}{\partial p_n} \delta p_n$ et de la même manière on peut écrire la relation pour \mathbf{p} exprimé par $\mathbf{p} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v})$, comme $\delta p_n = \sum_m \frac{\partial p_n}{\partial v^m} \delta v^m$, nous avons alors deux expressions de Δ suivant 11.136:

$$\Delta = \sum_m \sum_n \frac{\partial v^m}{\partial p_n} \delta p_n \delta p_m = \sum_m \sum_n \frac{\partial p_n}{\partial v^m} \delta v^m \delta v^n \quad (11.138)$$

Cependant il manque encore des choses à Δ pour qu'il soit considéré comme une distance au carré. Entre autre chose, il faut que la métrique induite par Δ soit invariante par amplification. Weinberg justifie que c'est en divisant Δ par H , un scalaire, que l'invariance pour la loi de Weber-Fechner est atteinte. De 7.10, nous avons $v^m = \partial H / \partial p_m$, soit $\partial v^m / \partial p_n = \partial^2 H / \partial p_m \partial p_n$ et alors selon la première expression de 9.5:

$$\Delta/H = H^{-1} \sum_m \sum_n \frac{\partial v^m}{\partial p_n} \delta p_n \delta p_m \quad (11.139)$$

$$= H^{-1} \sum_m \sum_n \frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial p_n} \delta p_m \delta p_n \quad (11.140)$$

$$\equiv (\delta s)^2 \quad (11.141)$$

qu'il définit comme la variation infinitésimale δs , la métrique de l'espace. Mais cette relation s'applique à l'espace des protomères et nous cherchons la métrique de l'espace couleur. Pour ce faire nous appliquons une transformation de Legendre dans laquelle H peut-être considéré comme une fonction Hamiltonienne des moments p_k , alors que Λ est une fonction Lagrangienne des vitesses v^k . En utilisant la deuxième expression de 9.5:

$$\Lambda \equiv \sum_k v^k p_k - H \quad \partial\Lambda/\partial v^m = p_m \quad (11.142)$$

$$\delta p_m = \sum_n \frac{\partial p_m}{\partial v^n} \delta v^n = \sum_n \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^m \partial v^n} \delta v^n \quad (11.143)$$

$$\Delta/H = H^{-1} \sum_n \sum_m \frac{\partial p_m}{\partial v^n} \delta v^n \delta v^m \quad (11.144)$$

$$(\delta s)^2 = H^{-1} \sum_m \sum_n \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^m \partial v^n} \delta v^n \delta v^m \quad (11.145)$$

Il s'ensuit de la réciprocity entre v^k et p_k et par identification avec 9.6 et 9.9 que les tenseurs métriques dans l'espace couleur et protomère s'écrivent (il y a probablement une erreur dans l'équation de g^{mn} dans 9.10):

$$g_{mn} = H^{-1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^m \partial v^n} \quad g^{mn} = H^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial p_n} \quad (11.146)$$

Cette dernière relation stipule qu'il existe une fonction Ψ de v^k telle que:

$$\frac{\partial}{\partial v^m} \Psi(g_{nk} v^k) = \frac{\partial}{\partial v^n} \Psi(g_{mk} v^k) \quad (11.147)$$

Or d'après 7.10, $v^k = \partial H / \partial p_k$, d'après 9.7 $\partial^2 \Lambda / \partial v^m \partial v^k = \partial p_k / \partial v^m$ et comme $\partial \ln f(x) / \partial x = (1/x) \partial f(x) / \partial x$

$$g_{mk} v^k = H^{-1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial v^m \partial v^k} v^k \quad (11.148)$$

$$= H^{-1} \frac{\partial p_k}{\partial v^m} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial v^m} \quad (11.149)$$

$$= \frac{\partial \ln H}{\partial v^m} \quad (11.150)$$

qui établit que la solution de Ψ existe, et est $\Psi = \Psi(H)$, H la luminance est la fonction de luminosité cherchée.

Une propriété importante est que toute fonction de v^k invariante par amplification est orthogonal à H . L'orthogonalité est donnée par le tenseur métrique. Deux vecteurs tangents $\partial X(v) / \partial v^m$ et $\partial Y(v) / \partial v^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\sum_m \sum_n g^{mn} [\partial X / \partial v^m] [\partial Y / \partial v^n] = 0$. On a d'après 9.10 (ou sa correction 11.146) et 7.10:

$$\sum_m \sum_n g^{mn} \frac{\partial H}{\partial v^m} \frac{\partial X}{\partial v^n} = \sum_m \sum_n H^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial p_m \partial p_n} \frac{\partial H}{\partial v^m} \frac{\partial X}{\partial v^n} \quad (11.151)$$

$$= \sum_m \sum_n H^{-1} \frac{\partial v^m}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial v^m} \frac{\partial X}{\partial v^n} \quad (11.152)$$

$$= \sum_n H^{-1} \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial X}{\partial v^n} \quad (11.153)$$

$$= \sum_n H^{-1} v^n \frac{\partial X}{\partial v^n} \quad (11.154)$$

Qui vaut zéro si et seulement si $\partial X / \partial v^n = 0$, soit si X est homogène de degré 0 en v^k . C'est la condition pour que les surfaces $H = \text{constante}$ (ou

$H^{-1} = \text{constante}$) et $X = \text{constante}$ soient orthogonales. Dans le cas particulier $P^0(\lambda) = 1$, $v^0 = H$ et $x^0 = 1$. Dans la cas général, pour un plan de projection quelconque, $\sum_k a_k P^k(\lambda) = 1$, $H = \sum_k a_k v^k$ et $a_k x^k = 1$.

Nous pouvons donc séparer dans $(\delta s)^2$ la contribution qui vient d'un déplacement en luminance δH , d'un déplacement sur une surface orthogonale à H . Utilisant $\delta H = \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k = \sum_k v^k \delta p_k$ par 7.10, nous construisons:

$$\Gamma \equiv \sum_k x^k p_k - \ln H \quad (11.155)$$

$$\Rightarrow \delta \Gamma = \sum_m \frac{\partial \Gamma}{\partial x^m} \delta x^m + \sum_m \frac{\partial \Gamma}{\partial p_m} \delta p_m \quad (11.156)$$

$$= \sum_m \frac{\partial \sum_k x^k p_k - \ln H}{\partial x^m} \delta x^m + \sum_m \frac{\partial \sum_k x^k p_k - \ln H}{\partial p_m} \delta p_m \quad (11.157)$$

$$= \sum_m \left(\frac{\partial \sum_k x^k p_k}{\partial x^m} - \frac{\partial \ln H}{\partial x^m} \right) \delta x^m + \sum_m \left(\frac{\partial \sum_k x^k p_k}{\partial p_m} - \frac{\partial \ln H}{\partial p_m} \right) \delta p_m \quad (11.158)$$

$$= \sum_m (p_m - 0) \delta x^m + \sum_m \left(x^m - \frac{v^m}{H} \right) \delta p_m \quad (11.159)$$

$$= \sum_k p_k \delta x^k + \sum_k x^k \delta p_k - \sum_k v^k \delta p_k / H \quad (11.160)$$

ou si $\delta \Gamma$ ne dépend pas de δp_k , c'est à dire on considère une protomère particulière, et qu'on se place dans un plan quelconque $\sum_k a_k x^k = 1 \Rightarrow \sum_k a_k \delta x^k = 0$ et la surface Γ est orthogonale à H en x , alors

$$\delta \Gamma = \sum_k p_k \delta x^k, \quad \sum_k a_k \delta x^k = 0, \quad (\partial \Gamma / \partial H)_x = 0 \quad (11.161)$$

de 11.136 et considérant δv^k comme un déplacement séparé le long de la luminance H et de la surface orthogonale X , $\delta v^k = \delta(Hx^k)$. Avec $\delta(Hx^k) = (\partial Hx^k / \partial H) \delta H + (\partial Hx^k / \partial x^k) \delta x^k = x^k \delta H + H \delta x^k$. De l'expression de $\delta \Gamma$ en 11.160 à celle précédente 11.161 pour un déplacement orthogonal à H , on obtient $\sum_k x^k \delta p_k = H^{-1} \sum_k v^k \delta p_k$ et $\sum_k v^k \delta p_k = \delta H$ comme établi précédemment ce qui donne

$$(\delta s)^2 = \frac{\Delta}{H} = \sum_k \delta v^k \delta p_k / H = \sum_k \delta(Hx^k) \delta p_k / H \quad (11.162)$$

$$= \sum_k (x^k \delta H + H \delta x^k) \delta p_k / H \quad (11.163)$$

$$= \sum_k (x^k \delta p_k) \delta H / H + \sum_k \delta x^k \delta p_k \quad (11.164)$$

$$= \sum_k (v_k \delta p_k) \delta H / H^2 + \sum_k \delta x^k \delta p_k \quad (11.165)$$

$$= \sum_k \delta x^k \delta p_k + (\delta H / H)^2 \quad (11.166)$$

qui donne les déplacements orthogonaux en x et H et montre comment le déplacement en luminance suit la loi de Weber-Fechner.

Ensuite il examine la métrique courbe qui persiste dans les plans de luminance constant. Pour cela il élimine une composante dans $\sum_k a_k \delta x^k = 0$, par exemple x^0 avec $a_0 \neq 0$. Nous écrivons $\delta x^0 = -\sum_\mu a_\mu \delta x^\mu / a_0$. Qui dans $\delta \Gamma$ donne:

$$\delta \Gamma = \sum_k p_k \delta x^k = p_0 \delta x^0 + p_1 \delta x^1 + p_2 \delta x^2 \quad (11.167)$$

$$= -p_0 \sum_\mu a_\mu \delta x^\mu / a_0 + p_1 \delta x^1 + p_2 \delta x^2 \quad (11.168)$$

$$= -p_0 \sum_\mu a_\mu \delta x^\mu / a_0 + \sum_\mu p_\mu \delta x^\mu \quad (11.169)$$

$$= \sum_\mu (p_\mu - p_0 a_\mu / a_0) \delta x^\mu \equiv \sum_\mu p_\mu^* \delta x^\mu \quad (11.170)$$

D'où $p_\mu^* = \partial \Gamma / \partial x^\mu$, $\delta p_\mu^* = \partial^2 \Gamma / \partial x^\mu \partial x^\nu$ et $\Gamma = \Gamma(x^1, x^2)$ est bidimensionnel. La substitution dans l'équation de $(\delta s)^2$ précédente donne:

$$(\delta s)^2 = \left(\frac{\delta H}{H} \right)^2 + \sum_k \delta p_k \delta x^k \quad (11.171)$$

$$= \left(\frac{\delta H}{H} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu \quad (11.172)$$

La métrique du plan de luminance constante ne dépend pas du niveau de luminance. La courbure scalaire Riemannienne ne s'annule pas à cause de la forme $g_{\mu\nu}^* = \partial^2 \Gamma / \partial x^\mu \partial x^\nu$ dont les dérivées jusqu'à troisième ne s'annulent pas. Le plan de luminance constante à sa propre transformation de p_1^* , p_2^* à x^1 , x^2 en accord avec $\sum_k p_k P^k(\lambda) = \sum_\mu p_\mu P^\mu(\lambda) + p_0 / a_0$. En définissant $p_\mu \equiv p_\mu^* + a_\mu p_0 / a_0$ et avec $\sum_k a_k P^k(\lambda) = 1$. Weinberg construit une surface $h(p_1^*, p_2^*)$ à luminance constante dans l'espace protomère par:

$$h(p_1^*, p_2^*) \equiv \ln \int_{-1}^{+1} C(\lambda) \exp p_\mu^* P^\mu(\lambda) d\lambda \quad (11.173)$$

$$x^\mu = \frac{\partial h}{\partial p_\mu^*} = \frac{\int_{-1}^{+1} C(\lambda) P^\mu(\lambda) \exp p_\nu^* P^\nu(\lambda) d\lambda}{\int_{-1}^{+1} C(\lambda) \exp p_\nu^* P^\nu(\lambda) d\lambda} \quad (11.174)$$

Des relations précédentes $p_\mu^* = \partial\Gamma/\partial x^\mu$ et $x^\mu = \partial h/\partial p_\mu^*$ on tire:

$$\frac{\partial p_\mu^*}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial p_\nu^*} = \frac{\partial^2 h}{\partial p_\mu^* \partial p_\nu^*} \quad (11.175)$$

qui sont des matrices réciproques

$$\delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial p_\nu^*} \delta p_\nu^* \quad (11.176)$$

$$(\delta s)^2 = \left(\frac{\partial H}{H} \right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial p_\mu^* \partial p_\nu^*} \delta p_\mu^* \delta p_\nu^* \quad (11.177)$$

Les tenseurs métriques du plan de luminance dans les cartes duales de l'espace protomère et couleur sont donc:

$$g_{\mu\nu}^* = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad g^{*\mu\nu} = \frac{\partial^2 h}{\partial p_\mu^* \partial p_\nu^*} \quad (11.178)$$

11.10 Conclusion

En dépit de la qualité des arguments invoqués et des développements mathématiques de Weinberg, il reste que la relation entre les protomères et les couleurs est rendue difficile par manque de relation précise (voir Figure 11) entre la base des protomères $P^k(\lambda)$ et les fonctions d'égalisation colorimétrique $A^k(\lambda)$ données par la CIE.