



HAL
open science

La pyramide de Chéops et son énergie potentielle gravitationnelle

Charles Hirlimann

► **To cite this version:**

Charles Hirlimann. La pyramide de Chéops et son énergie potentielle gravitationnelle. 2022. hal-03505967

HAL Id: hal-03505967

<https://hal.science/hal-03505967>

Preprint submitted on 1 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La pyramide de Chéops et son énergie potentielle gravitationnelle

Charles Hirlimann

Institut de physique et chimie des matériaux de Strasbourg (IPCMS), UMR7504 CNRS-Unistra, 23 rue du Loëss BP 43, F-67034 Strasbourg cedex 2, France.

Résumé

Le calcul de l'énergie nécessaire pour élever un bloc constitutif de la pyramide de Chéops et la connaissance de l'énergie mécanique que peut produire un travailleur en charge de l'élévation des blocs par journée de travail permet une estimation du nombre minimum de travailleurs nécessaires pour la mise en place d'une assise de la pyramide. Il en ressort que ce nombre est limité à un maximum de moins de 2 000 travailleurs sur une saison de travail, soit moins de 200 présents chaque jour simultanément sur le chantier. De plus le calcul du flux de blocs mène à la conclusion inéluctable que la construction n'a pu se faire que dans un mode de travail massivement parallèle mettant à mal l'hypothèse très souvent mise en avant de l'utilisation de rampes pour acheminer les blocs à leur destination finale.

Summary

The calculation of the energy required to raise a constituent block of the Khufu pyramid and the knowledge of the mechanical energy that a worker in charge of the lifting of the blocks can produce per working day allows an estimate of the minimum number of workers necessary for the establishment of a base of the pyramid. It emerges that this number is limited to a maximum of less than 2,000 workers over a working season, ie less than 200 present each day simultaneously on the site. In addition, the calculation of the flow of blocks leads to the ineluctable conclusion that the construction could only be done in a massively parallel working mode, undermining the hypothesis very often put forward of the use of ramps to convey the blocks to their final destination.

La pyramide de Chéops est de fait une gigantesque accumulation d'énergie potentielle gravitationnelle. Chaque bloc de masse M (en kilogramme) possède une énergie potentielle E (Joules) égale au produit de la constante de gravitation sur terre $g = 9,81 \text{ (m/s}^2\text{)}$ par son altitude h (en mètres).

Cette énergie potentielle gravitationnelle de la pyramide est parfaitement calculable, mais il convient pour cela de construire un modèle de ladite pyramide.

Modélisation de la pyramide de Chéops

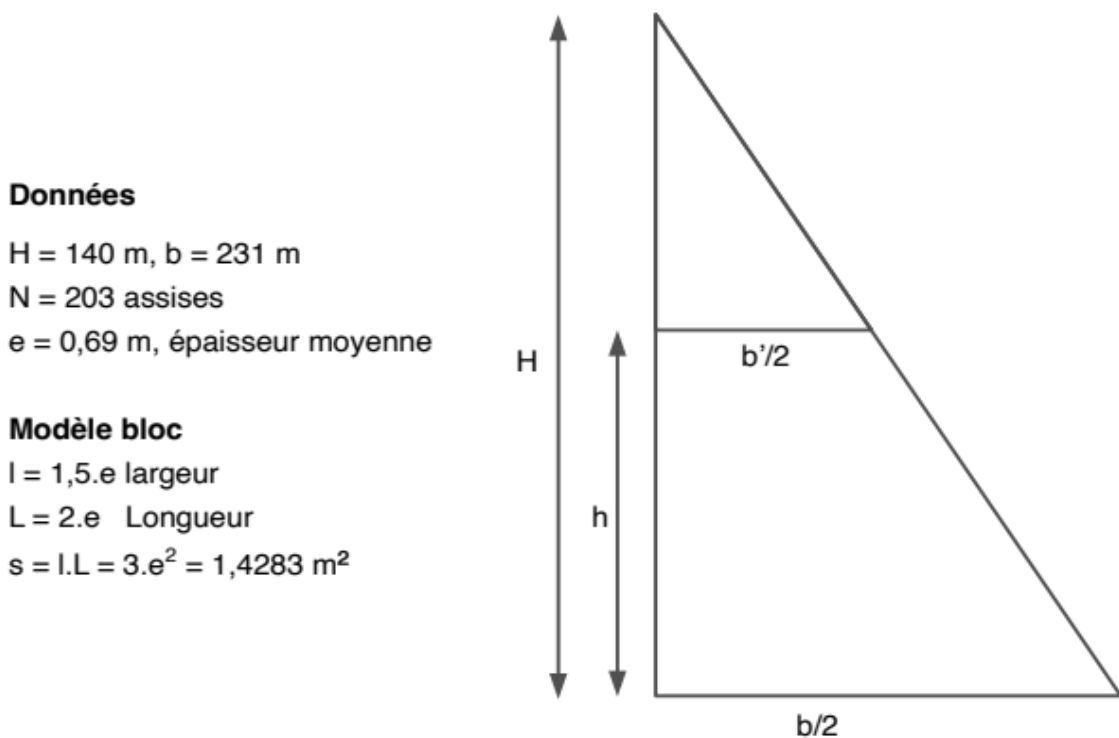


Figure 1 : Demi-coupe transversale modélisant la pyramide de Chéops. b est la longueur du côté de la base, b' la longueur du côté de l'assise à l'altitude h . H , est la hauteur de la pyramide. e , l'épaisseur d'un bloc, que l'on a prise égale à l'épaisseur moyenne des assises. Les blocs ont pour largeur 1,5 fois l'épaisseur et pour longueur 2 fois l'épaisseur. s est la surface au sol d'un bloc.

La figure 1 montre les choix faits pour modéliser la pyramide. La hauteur, la longueur du côté de la base et l'épaisseur moyenne des assises sont pris des valeurs trouvées dans la littérature. On modélise les blocs avec un bloc modèle d'épaisseur égale à l'épaisseur moyenne des assises, de largeur égale à 1,5 fois cette épaisseur et de longueur 2 fois cette épaisseur.

Altitude de l'assise n

En prenant pour altitude celle de la face inférieure des blocs, l'altitude de l'assise n est donnée par :

$$h = (n-1)*e \quad (1)$$

et donc dans ce repère, l'altitude de la première assise, celle qui repose sur le sol du plateau de Gizeh, est nulle $h = 0$.

Calcul du nombre de blocs` par assise

L'application du théorème des triangles semblables aux triangles décrits sur la Figure 1 donne :

$$\frac{H-h}{H} = \frac{b'}{b} \quad (2)$$

On obtient la valeur b' du côté de l'assise à l'altitude h par la combinaison des expressions (1) et (2) :

$$b' = b\left(1 - \frac{(n-1)*e}{H}\right) \quad (3)$$

Le nombre de blocs formant une assise est alors simplement obtenu en divisant la surface de l'assise par la surface au sol d'un bloc :

$$N_n = \left(\frac{b'^2}{s}\right) \quad (4)$$

ce nombre doit être exprimé en fonction des grandeurs connues et on obtient :

$$N_n = \frac{b^2}{s} \left(1 - \frac{(n-1).e}{H}\right)^2 \quad (5)$$

Pour la pyramide de Chéops :

$$\frac{e}{H} = \frac{1}{203} \quad \text{et} \quad N_1 = \frac{b^2}{s} = 37\,360 \quad (6)$$

La formule utile donnant le nombre de blocs pour l'assise de rang n est alors :

$$N_n = 37\,360 \left(1 - \frac{(n-1)}{203}\right)^2 \quad (7)$$

Dans tous ces calculs les résultats ne sont pris qu'à l'unité près.

Calculs d'énergie potentielle

Munis des formules (1) pour l'altitude des assises et (7) pour le nombre de blocs qu'elles contiennent, on peut attaquer les calculs d'énergie potentielle en rappelant que l'énergie potentielle gravitationnelle d'un seul bloc à l'altitude h est donnée par :

$$E_p = M * g * h \quad (8)$$

où M est la masse du bloc, g la constante gravitationnelle sur Terre.

La constante de gravitation terrestre a pour valeur $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$. La masse M du bloc est le produit de son volume par la valeur de sa masse volumique ρ . Le volume se calcule à partir des valeurs numériques indiquées en Figure 1 et vaut $V = 0,9855 \text{ m}^3$. La masse volumique des calcaires utilisés dans la pyramide est de l'ordre de 2537 kg/m^3 Ce qui met la masse M des blocs à 2,5 tonnes environ.

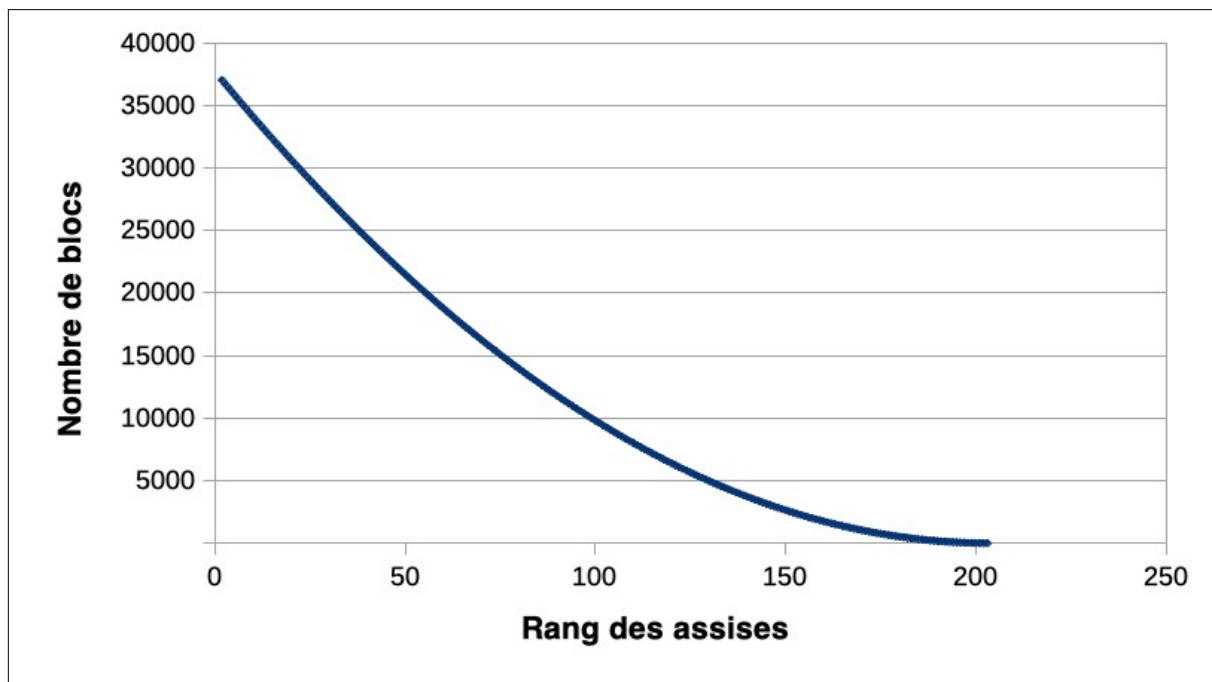


Figure 2: Variation du nombre de blocs dans les assises de la pyramide modèle avec leur altitude indiquée par leur rang. Le nombre total de blocs dans ce modèle est de 2 546 737.

La Figure 2 montre la variation du nombre de blocs dans les assises de la pyramide modèle de la Figure 1 en fonction de leur altitude, suivant la formule (7) obtenue plus haut. Comme le nombre de blocs est proportionnel à la surface des assises cette variation suit celle du carré du côté de chaque assise, elle est dite quadratique. Plus on s'élève sur la pyramide, moins il y a de blocs dans les assises et la variation est plus rapide dans le bas de la pyramide que vers son sommet. Le nombre total de blocs est d'environ deux millions et demi dans cette pyramide fictive représentative de la pyramide de Chéops. Remarquons que la non-linéarité de la courbe implique que le tiers des blocs de la pyramide

modèle est contenu dans les 26 premières assises et que la moitié est atteinte à la 42^e assise.

Énergie potentielle d'un bloc

L'énergie potentielle est donnée par l'expression mathématique (8) plus haut où M est la masse d'un bloc. L'altitude est proportionnelle au rang d'assise et varie donc linéairement ainsi que l'énergie potentielle d'un bloc ; l'énergie potentielle d'un bloc est proportionnelle à l'altitude .

Énergie potentielle des assises

L'énergie potentielle contenue dans les assises s'obtient tout simplement par le produit de l'énergie potentielle d'un bloc (Expression (8)) par le nombre de blocs dans l'assise (Expression (7)).

$$E_p = 37\,360 * M * g * h \left(1 - \frac{(n-1)}{203}\right)^2 \quad (9)$$

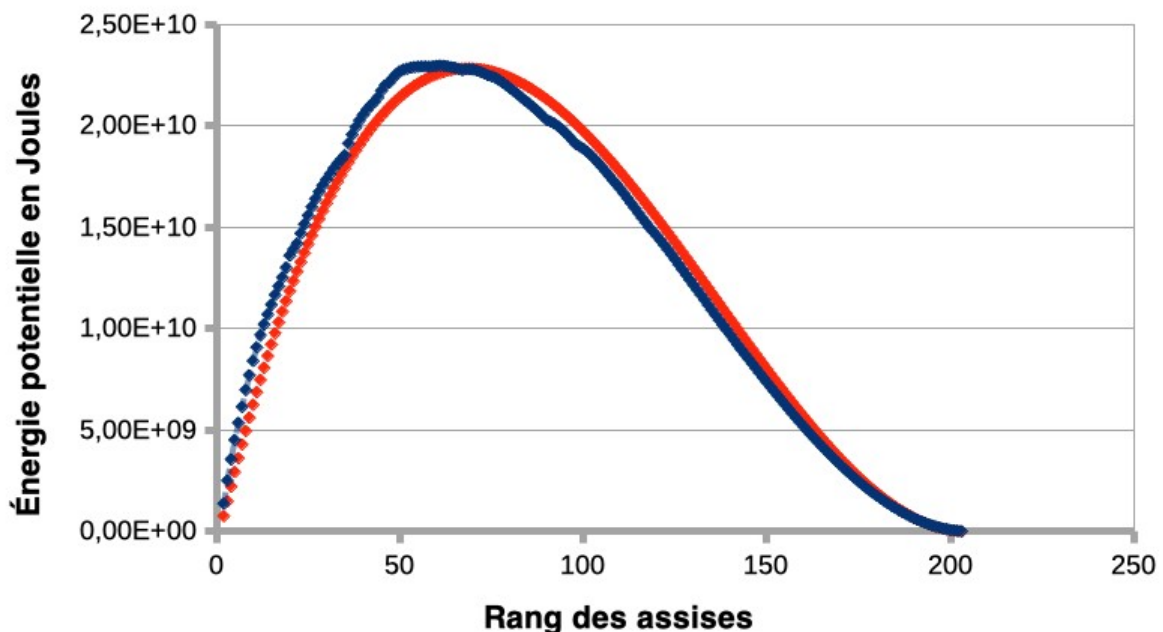


Figure 3: Énergie potentielle gravitationnelle des assises : en rouge la courbe théorique pour la pyramide modèle et en bleu la courbe obtenue en prenant l'altitude réelle des assises de la pyramide de Chéops.

La Figure 3 (courbe bleue) montre la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle des assises de la pyramide de Chéops avec l'altitude réelle obtenue à partir de la série de mesures des épaisseurs des assisesⁱ. Les « saisons » de construction, avec leurs variations d'épaisseur, y sont visibles sous forme de ruptures de continuité. La courbe

rouge résulte d'un calcul théorique à partir des assises d'épaisseur constante du modèle de la Figure 1. Pour obtenir une bonne coïncidence entre les deux courbes, il a été nécessaire d'augmenter les valeurs de la courbe rouge de 20 %. Ce désaccord n'est pas surprenant, il tient au désaccord inévitable entre la taille des blocs du modèle et la valeur moyenne de la taille des blocs réels qui est inconnue et aussi très certainement au désaccord entre la masse volumique utilisée pour le calcul de la masse des blocs et la masse volumique réelle du calcaire constitutif de la pyramide. On observe donc sur la Figure 3 que la combinaison d'une croissance linéaire de l'énergie potentielle d'un bloc avec un nombre de blocs par assise décroissant quadratiquement mène à une belle courbe en cloche. Cette courbe passe par un maximum au rang 69. Deux fortes perturbations de la courbe de potentiel s'observent aux assises 35 et 98. L'assise 35 se situe à la hauteur du plafond de l'entrée de la Grande Galerie et l'assise 98 se trouve à environ 5 m au dessus des blocs de décharge de la chambre du roi¹. Cela correspond donc à l'intervalle d'altitudes où la construction de la pyramide est en concurrence avec la construction des structures granitiques internes, il y a même de la place, dans cet intervalle pour une structure supplémentaire compatible avec le grand vide observé avec les mesures muoniques les plus récentesⁱⁱ. Cela correspond aussi à la période des travaux où le nombre de blocs par assise cesse de croître rapidement et fini même par diminuer.

L'énergie gravitationnelle totale accumulée dans la Grande Pyramide de Chéops est d'environ $2,5 \cdot 10^{12}$ Joules, 2,5 Térajoules ce qui ne représente que la production d'énergie pendant 1/2 heure d'une tranche nucléaire de 1450 MW !

Sur l'origine de l'énergie.

L'origine de l'énergie potentielle accumulée dans la Grande pyramide n'est en rien mystérieuse : elle provient tout simplement de l'énergie mécanique animale développée par les travailleurs ayant œuvré sur le chantier. L'être humain peut produire une puissance de quelques centaines de Watts pendant quelques minutes, mais sur des durées longues il est raisonnable de compter sur une valeur plus faible. Dans l'analyse qui suit on considèrera de manière conservatrice des ouvriers travaillants 10 heures par jour à la puissance de 50W. Par journée de travail chaque travailleur peut donc fournir

$$E_t = 50 * 3600 * 10 = 1,8 \text{ MJ} \quad (10)$$

Dans la suite on nommera cette énergie « travailleur-jour ».

Nombre de travailleurs-jour pour un bloc.

Posons nous la question de savoir combien de travailleurs œuvrant pendant une journée de 10 heures (travailleur-jour) sont-ils nécessaires pour élever un bloc à l'altitude h ?

¹ <https://www.cheops-pyramide.ch/khufu-pyramid/stonecourses-pyramid.html>

Ce nombre de travailleurs s'obtient en divisant l'énergie potentielle nécessaire à une tâche par l'énergie « travailleur-jour » :

$$N_t = M g h / E_t \tag{11}$$

Dans notre modèle ce nombre de travailleurs prend la valeur :

$$N_t = 0,0136 h \tag{12}$$

on peut dès lors calculer le nombre de travailleurs nécessaires par journée de travail pour élever un bloc en fonction de son altitude. Le calcul montre que l'énergie produite par deux travailleurs lors d'une journée de 10 heures est suffisante pour élever un bloc de 2,5 tonnes au sommet de la pyramide.

Nombre de travailleurs-jour par assise et par saison

Quel est le nombre de travailleurs-jour nécessaires à l'élévation de toute une assise ? Le calcul, pour chaque assise consiste simplement à multiplier l'expression (12), évaluée à l'altitude h de l'assise concernée par le nombre de blocs dans l'assise (Expression (7)).

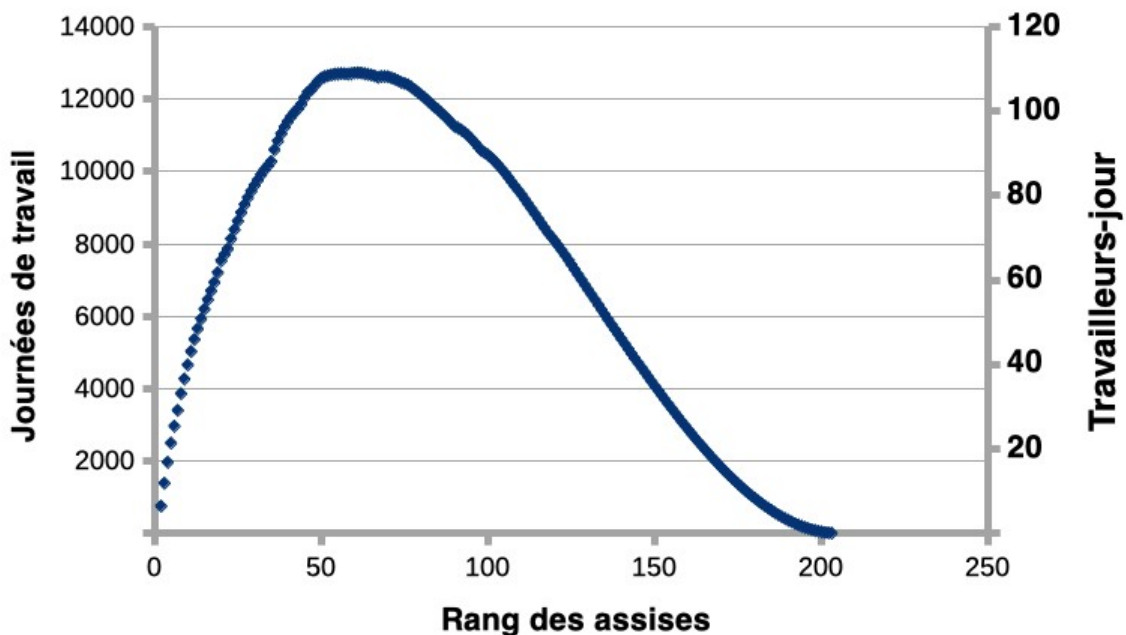


Figure 4: Courbe de variation du nombre de travailleurs-jour nécessaires pour élever les blocs des assises. Échelle de gauche : nombre total de journées de travail de 10 heures nécessaires. Échelle de droite : nombre de travailleurs par jours par saisons de 120 jours.

Le résultat est donné sur la Figure 4. On voit (échelle de gauche) le nombre de journées de travail minimum nécessaires à la réalisation de chaque assise de la pyramide en prenant comme modèle un travailleur produisant chaque seconde cinquante Watts pendant une journée de 10 heures. L'énergie maximum nécessaire est d'environ 13 000 journées

de travail. Ce nombre est important mais il convient de tenir compte du fait que ce travail s'effectue tout au long d'une saison de construction correspondant au mois de la crue du Nil que l'on peut prendre égal à 120 jours. Sur la durée d'une saison le nombre de travailleurs par jour devient donc en moyenne au plus égal à environ 110 ! Cependant pour être plus rigoureux, il convient de faire le calcul pour chaque « saison de construction ».

Définition des saisons

Le découpage en sections de l'épaisseur des assises, la distribution en « dents de scie » de ces épaisseurs est une caractéristique remarquable de la pyramide de Khéops. Toutes les périodes plus ou moins longues de décroissance continue des épaisseurs des blocs de calcaire qui les constituent se terminent par une forte augmentation de cette épaisseur. On arrive ainsi à un décompte assez largement admis de 18 sections.

Dans ce travail nous faisons l'hypothèse que les sections observables dans la répartition des épaisseurs des assises reflètent en réalité la dynamique de la construction du monument. Autrement dit que chaque section correspond à une « saison » de construction dans l'année. Cette valeur est à mettre en regard de la durée d'au moins 23 ans du règne de Khéops comparable aux 18 saisons repérées ; il reste ainsi 5 saisons pour la préparation de la base, la pose du revêtement et la construction du temple funéraire pour que la pyramide soit prête au décès du pharaon. Cette remarque conduit à la conclusion que chaque section que l'on peut distinguer dans le montage des assises doit correspondre à une saison annuelle de travail des paysans convoqués pendant la saison de la crue du Nil où le travail au champ est empêché. Il nous semble donc que la dénomination de « saison » convient mieux aux sections de blocs évoqués jusqu'à présent en ce qu'elle insère la description statique de la construction dans une dynamique temporelle.

La Figure 5 montre le résultat du calcul du nombre de travailleurs dont l'énergie déployée sur une journée de 10 heures pendant 120 jours est nécessaire à l'édification des assises de chaque saison. Les valeurs obtenues sont faibles, ne dépassant pas 1 800 travailleurs. Bien sûr ces valeurs ne sont pas à prendre en valeur absolue, l'énergie de très nombreux autres travailleurs ayant été nécessaire à la réalisation d'autres tâches de soutien de la tâche principale. Néanmoins ces valeurs relativement faibles montrent que l'érection des pyramides n'avait rien de miraculeux, mais relevait du travail coordonné d'un nombre limité de travailleurs.

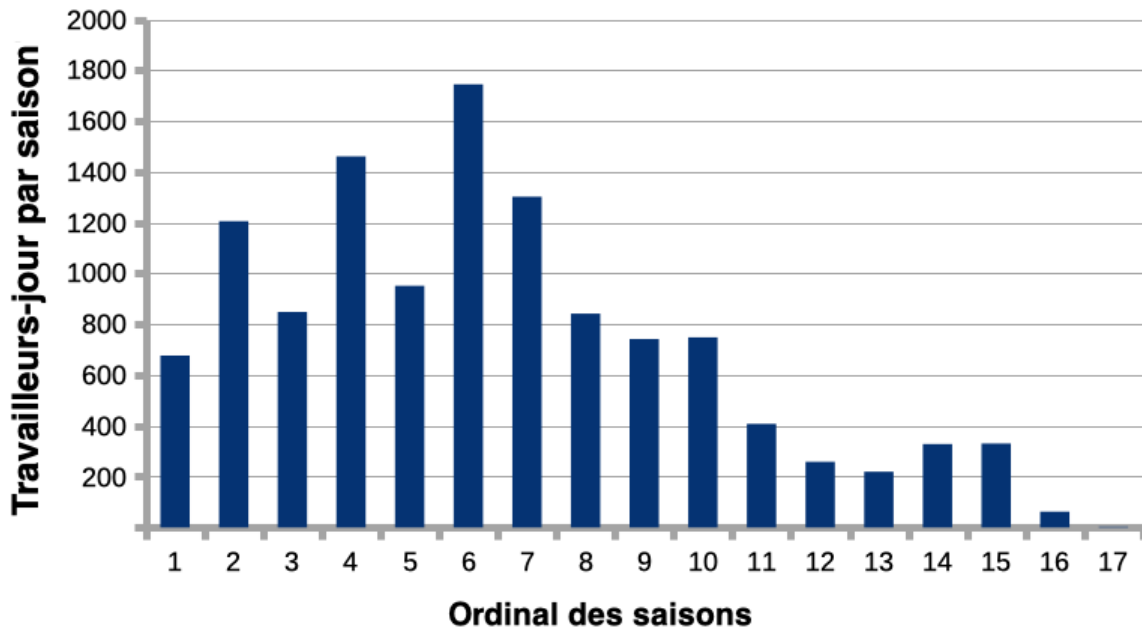


Figure 5 : Énergie potentielle des saisons de construction de la pyramide de Chéops mesurée en nombre de journées de travail de 10 heures de travailleurs développant une puissance de 50W.

Réflexion sur les flux de blocs

Nos calculs permettent d'estimer le nombre total de blocs contenus dans la pyramide de Chéops à partir de l'expression (7) :

$$N_t = \sum_1^{203} 37\,360 \left(1 - \frac{(n-1)}{203}\right)^2 \quad (13)$$

On obtient une valeur proche de 2,5 millions de blocs. Cette valeur n'est qu'une approximation qui ne tient pas compte des structures internes de la pyramide, ni du noyau rocheux situé à sa base. Elle pourra être corrigée à mesure que plus d'informations seront disponibles sur la structure interne de la pyramide. Ces 2,5 millions de blocs ont dû être mis en place en 18 saisons de 120 jours dans notre modèle, soit encore 2 160 jours. Chaque jour, 1 157 blocs devaient donc en moyenne être mis en place définitivement. En conservant la journée de travail de 10 heures déjà considérée cela signifie qu'un bloc devait être placé toutes les 30 secondes environ !!! Une telle valeur est tout à fait impressionnante et a engendré de nombreux fantasmes.

Le réalisme oblige à considérer les flux moyens de blocs pour chacune des saisons séparément. Le Tableau 1, donne le résultat du calcul de l'intervalle de temps entre la pose finale de deux blocs consécutifs. Jusqu'au moins l'assise N° 7 cet intervalle de temps est inférieur à 30 secondes. Il faut nuancer en remarquant que les toutes premières assises sont incomplètes en ce qu'elles englobent la protubérance du plateau de Gizeh qui n'a pas

été aplanie. Les temps les plus courts correspondent au remplissage de plus de la moitié de l'édifice (rang 42, fin de la troisième saison).

Tableau 1: Intervalle de temps entre la pose finale de deux blocs successifs pour chaque saison de pose. Jusqu'à la saison 7 cet intervalle de temps est très court et suppose un travail massivement parallèle.

Temps s	7	9	19	14	26	17	26	46	57	61	120	197	240	168	230	1015	23358
Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

L'intervalle de temps croît substantiellement à partir de la huitième assise, quand il ne reste plus qu'environ 400 000 blocs à mettre en place.

Pour atteindre un tel flux de blocs pendant les périodes précoces de construction, les constructeurs égyptiens n'eurent pas d'autre choix que d'effectuer un travail massivement parallèle. De très nombreux travaux ont porté sur les méthodes de construction de la pyramide de Chéops qu'il n'est pas nécessaire de détailler. Des rampes d'accès de divers types ont été imaginées et proposées. Quelque soit leur orientation, parallèle ou perpendiculaire aux faces de la pyramide, elles ne peuvent être qu'en nombre limité (essentiellement 4) et ne permettraient pas d'atteindre les flux élevés nécessaires, sans compter que leur construction et déconstruction auraient été consommatrices d'une importante quantité de travailleurs-jour, à un moment où ce nombre est déjà important pour la pose des blocs d'assise. Si l'on s'en tient à Hérodoteⁱⁱⁱ qui évoque, sans les décrire, des instruments simples de levage des blocs d'une assise à la suivante on peut alors effectivement atteindre les flux élevés nécessaires. En effet, considérons, à titre d'exemple, l'altitude des deux premières saisons cumulées (rang 34) que nous avons déjà rencontré et qui correspond à l'entrée de la Grande Galerie et donc à une période d'accumulation qui n'est pas en compétition trop importante avec les travaux relatifs à la construction des structures internes de la pyramide. À cette altitude, 29 m, le côté de l'assise vaut 162 m. On suppose ici que des équipes chargées d'élever les blocs d'une assise à la suivante sont réparties sur chacune des faces. Sur 162 m on peut très certainement placer une dizaine d'équipes occupant chacune un espace d'une dizaine de mètres ce qui laisse suffisamment de place (62 m) pour accommoder la circulation des équipes chargées de redescendre le matériel, des équipes chargées d'apporter au sommet les matériaux annexes, des équipes chargées du contrôle qualité. Chacune des équipes de levage dispose alors d'un temps 40 fois plus long entre deux dépôts de bloc au sommet. Cette valeur de 40 n'est là qu'à titre d'illustration, l'organisation réelle reste inconnue et on peut penser que les arrangements réalisés par les architectes de la pyramide peuvent avoir mené à des valeurs beaucoup plus fortes. Cela suppose aussi, bien sûr, résolu de redoutables problèmes de gestion de l'approvisionnement en blocs. En particulier, on doit incontestablement considérer que le travail d'extraction des blocs dans les carrières de proximité était lui reparti sur toute l'année et qu'un stockage de ces blocs avait été conçu tout autour du pied de la pyramide.

Ce point de vu ne s'applique certainement pas à l'élévation des éléments de granite constitutifs de la structure interne. Ces éléments, très lourds, mais peu nombreux peuvent avoir eux été élevés sur une rampe unique par usage de la Grande Galerie prolongeant la rampe.

Il est bon ici de placer le rasoir d'Occam ou principe de parcimonie, qui oblige à limiter le plus possible le nombre d'hypothèses ad hoc, non documentées, nécessaires à la construction d'un scénario ou d'une théorie. Le choix des deux hypothèses, « saisons » et note historique d'Hérodote répond d'autant plus à ce principe qu'elles sont partiellement documentées.

Conclusion

Une analyse mathématique simple, reposant sur un modèle lui-même simple de la pyramide de Chéops, permet, par le truchement de l'énergie potentielle gravitationnelle, d'estimer le nombre minimum de travailleurs nécessaires à l'élévation des blocs présents chaque jour sur le chantier. Il en ressort, qu'au plus fort de l'activité, pendant les 40 premières assises, moins de 110 travailleurs pouvaient fournir l'énergie nécessaire à l'élévation des blocs ! La considération des flux de blocs nécessaires au respect des délais de construction qui descendent à quelques dizaines de secondes pour déposer un bloc au plus fort de l'activité mène à l'inéluctable conclusion d'un travail d'élévation des blocs pratiqué de manière très fortement parallèle. Seule le travail de nombreuses équipes sur les face de la pyramide munies d'instruments simples sont compatibles avec un traitement massivement parallèle ainsi que l'a rapporté Hérodote.

- i Dépôt sur la base de données ouverte HAL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02381729/document>
- ii Discovery of a big void in Khufu's pyramid by observation of cosmic-ray muons, K. Morishima et al, Nature, 552, 386 (2017).
- iii Histoire d'Hérodote. Livre II, CXXV. Euterpe. Traduction par Larcher. Paris : Charpentier, 1850.