



HAL
open science

Introduction aux équations de Navier-Stokes

Diego Chamorro

► **To cite this version:**

| Diego Chamorro. Introduction aux équations de Navier-Stokes. A paraître. hal-03487812v2

HAL Id: hal-03487812

<https://hal.science/hal-03487812v2>

Submitted on 6 Jan 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Introduction aux équations de Navier-Stokes

Version 0.1

Diego Chamorro

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry (LaMME)

Université Paris-Saclay, CNRS, Univ. Evry

&

AMARUN

5 juin 2023

Table des matières

1	Un peu d'histoire et un peu de physique	1
1.1	Bernoulli, Euler, Navier, Poisson, Stokes & Cie.	2
1.2	Rapide déduction physique des équations de Navier-Stokes	3
2	Les outils de base	11
2.1	Généralités	11
2.2	Quelques définitions et identités vectorielles	14
2.3	Espaces de Lebesgue	17
2.4	Espaces de Sobolev	24
2.5	Quelques résultats utiles	35
2.6	Exercices	38
3	Solutions classiques	43
3.1	Equation de la chaleur et équation de Laplace	44
3.2	Décomposition de Helmholtz	56
3.3	Problème de Stokes et tenseur d'Oseen	58
3.4	Solutions classiques des équations de Navier-Stokes	64
3.5	Formulation différentielle et formulation intégrale	78
3.6	Propriétés de décroissance spatiale des solutions classiques	80
3.7	Exercices	98
4	Solutions <i>mild</i>	103
4.1	Principe de contraction	104
4.2	Vitesse, pression et projecteur de Leray	105
4.3	Formulation intégrale et solutions <i>mild</i>	110
4.4	Théorème de Fujita-Kato	113
4.5	Formulation différentielle et formulation intégrale : équivalence	124
4.6	Temps d'existence des solutions et critères d'explosion	131
4.7	Exercices	138
5	Solutions faibles de Leray	143
5.1	Motivation	144
5.2	Régularisation de Leray	151
5.3	Théorème Principal	153
5.4	Inégalité forte d'énergie	170
5.5	Unicité Fort-Faible	176
5.6	Le cas de la dimension $n = 2$	185
5.7	Exercices	196
	Bibliographie	201

Index

204

Introduction

L'objectif de ce livre est de présenter une première étude relativement élémentaire des équations de Navier-Stokes, équations qui proviennent d'une modélisation mathématique de la mécanique des fluides. Indiquons tout de suite qu'il n'existe pas *une* équation de Navier-Stokes, mais *des* équations de Navier-Stokes en fonction du cadre de travail adopté et des objectifs recherchés.

En effet, même s'il s'agit du système d'équations désormais classique

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \quad (1)$$

il existe une multitude de points de vue différents concernant ce problème.

Ainsi, si on considère uniquement le domaine de définition du problème, on peut par exemple étudier l'écoulement des fluides à l'intérieur d'un domaine fixe, disons sur un sous-ensemble Ω de l'espace \mathbb{R}^3 (un tuyau par exemple), et dans ce cas les interactions du fluide avec le bord $\partial\Omega$ du domaine d'étude Ω doivent obligatoirement être prises en compte car elles vont conditionner les techniques de résolution. On peut également être intéressé par des problèmes de turbulence, particulièrement pertinents lorsqu'il s'agit des écoulements des fluides comme l'air ou l'eau lors du déplacement d'un corps rigide, comme un avion ou un bateau par exemple (il s'agit ici d'un corps rigide qui évolue dans un fluide). Il est également possible de considérer un cadre périodique en variable d'espace, ce qui peut se concevoir comme une certaine modélisation (très particulière, il est vrai) d'un domaine à bord mais qui procure des avantages techniques intéressants. Nous pouvons aussi nous focaliser sur un problème un peu plus abstrait qui étudie un fluide qui remplit tout l'espace \mathbb{R}^3 , de sorte qu'il n'y ait aucune interaction avec des obstacles : c'est ce que nous ferons ici car c'est le cadre idéal pour appliquer les outils classiques issus de l'analyse harmonique.

Comme nous pouvons le constater avec cette très courte liste ci-dessus, nous avons plusieurs possibilités pour le choix du domaine dans lequel on considère les équations de Navier-Stokes (1). Une fois que ce domaine est fixé, nous pouvons être intéressés par une approche numérique de ces équations afin de réaliser des simulations par ordinateur et ces aspects sont très importants car ils permettent d'obtenir des résultats qui peuvent être contrastés avec les expériences. Mais nous pouvons également considérer une étude générale des propriétés des solutions de ces équations (existence, unicité, temps d'existence, régularité, etc.) et c'est cette approche légèrement plus théorique qui sera développée ici.

Bien évidemment, et le lecteur peut le deviner sans problème, chacune de ces approches, chaque angle d'attaque, induit un choix très particulier d'outils et de techniques et il suffit de parcourir la table des matières de livres couvrant ces sujets (voir par exemple [21], [44], [35], [45]) pour prendre conscience qu'il ne sera pas possible de traiter *toutes* les particularités des équations de Navier-Stokes, même s'il s'agit d'un livre à caractère encyclopédique... et ceci

est d'autant plus vrai pour un livre comme celui-ci qui se veut une introduction.

Dans de ce livre, et comme il a été dit précédemment, on va considérer les équations de Navier-Stokes sur tout l'espace \mathbb{R}^3 et, afin d'étudier les problèmes d'existence, d'unicité et de régularité des solutions de ces équations, nous allons faire appel à des outils issus de l'analyse mathématique : espaces de Banach, espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev, transformation de Fourier, produit de convolution, inégalités de Hölder, de Young, de Grönwall et de Hardy-Littlewood-Sobolev seront donc les ingrédients principaux de cette étude.

Voici maintenant une liste des thèmes qui seront abordés ici.

Dans le premier chapitre nous allons présenter très rapidement comment les équations de Navier-Stokes se déduisent à partir de quelques hypothèses générales sur les fluides et nous obtiendrons des propriétés fondamentales qui guideront notre étude tout le long de ce livre : ces propriétés sont inhérentes à la structure des équations de Navier-Stokes et il convient de les avoir à l'esprit avant de se lancer dans des calculs compliqués.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des outils mathématiques qui seront constamment mis en oeuvre. La plupart des objets sont supposés connus, nous ferons donc qu'un rappel (parfois sans démonstrations) de leurs principales propriétés tout en donnant les références nécessaires. Toutefois, quelques preuves sont détaillées dans les exercices à la fin de ce chapitre.

Le vif du sujet est abordé au troisième chapitre, dans lequel nous présentons comment obtenir des solutions "classiques" des équations de Navier-Stokes : il s'agit donc de fonctions qui vérifient *fortement* ces équations, c'est à dire dans le sens où les dérivées considérées sont des dérivées usuelles, et on obtiendra alors des résultats d'existence et d'unicité pour ces équations avec des fonctions suffisamment régulières. Les idées exposées ici, ainsi que les techniques associées, sont celles du début du XXème siècle (dûes principalement aux travaux d'Oseen en 1911 [41]) et elles permettent de dégager quelques propriétés intéressantes des solutions des équations de Navier-Stokes.

Les solutions *mild* seront exposées au quatrième chapitre et ce type de solutions généralisent aux espaces de Sobolev les résultats du chapitre précédent. On donnera dans ce chapitre une démonstration du théorème de Fujita-Kato, obtenu en 1964 [20], et il sera alors possible de considérer des fonctions dont les dérivées peuvent être prises dans un sens beaucoup plus général. Néanmoins, même si le cadre fonctionnel étudié ici est plus large que celui exposé au troisième chapitre, la nature des résultats (existence, unicité, temps d'existence) est essentiellement la même et les problèmes soulevés par la technique d'Oseen se retrouveront *mutati mutandis* dans le cadre proposé par Fujita-Kato.

Le formalisme *mild*, en étroite association avec le principe de contraction de Picard, peut être mis en oeuvre dans de nombreux cadres fonctionnels et il s'agit d'une technique désormais standard pour l'étude de diverses équations aux dérivées partielles. Dans le cinquième chapitre nous montrerons comment obtenir des solutions des équations de Navier-Stokes dans les espaces de Fourier-Herz dont la principale particularité repose sur une utilisation intensive de la transformation de Fourier : nous verrons comment obtenir des solutions de ces équations à partir de calculs (assez) élémentaires.

Les solutions construites dans tous les chapitres précédents (que ce soit en suivant les idées

d'Oseen ou celles de Fujita et Kato) sont uniques, mais leur temps d'existence est lié à la taille des données initiales. Pour obtenir des solutions globales en temps pour des données initiales grandes il est donc nécessaire d'utiliser une autre méthode. Nous exposons dans le sixième chapitre comment obtenir des solutions faibles en suivant le procédé de J. Leray développé en 1934 [34] : l'idée consiste à régulariser tout d'abord le problème de Navier-Stokes pour ensuite, grâce à un contrôle *a priori* sur les solutions de ce problème régularisé, prolonger le temps d'existence des solutions approchées. On pourra ensuite récupérer des solutions globales en temps des équations de Navier-Stokes via un passage à la limite dans le paramètre de régularisation. Cette technique, totalement fondamentale dans l'étude actuelle des équations de Navier-Stokes, présente quelques inconvénients qui seront exposés et commentés dans ce chapitre. Un point particulièrement important est le suivant : on obtient bien des solutions globales en temps avec de propriétés intéressantes, mais on ne dispose d'aucun critère d'unicité.

Dans le septième chapitre nous présentons une autre approche qui permet d'obtenir les solutions faibles de Leray : si les idées fondamentales et les conclusions seront essentiellement les mêmes, le point de vue adopté ici (lié aux solutions d'hyperviscosité) mérite le détour. En effet, on verra que le fait de modifier les équations de Navier-Stokes en introduisant un opérateur bi-Laplacien α , grosso modo, les mêmes conséquences que régulariser le terme non linéaire lorsqu'il s'agit de construire des solutions faibles.

Dans le huitième chapitre nous nous intéressons à des problèmes d'explosion en temps fini des solutions mild. Mais, nous ne savons pas traiter directement ce problème pour les équations de Navier-Stokes et c'est pour cette raison que nous allons considérer ici un modèle simplifié qui partage quelques éléments communs avec les équations de Navier-Stokes et qui permettra de mettre en oeuvre un processus qui conduit vers l'explosion des solutions mild. Ce chapitre explique, en partie, les difficultés techniques liées au principe de contraction de Banach-Picard utilisé pour obtenir des solutions mild.

Les équations de Navier-Stokes sont des équations d'évolution, mais il est également très intéressant d'étudier le problème stationnaire, c'est à dire lorsque le problème ne dépend pas du temps. On pourrait croire que les techniques développées pour étudier le problème d'évolution peuvent s'appliquer pour étudier le problème stationnaire, mais nous verrons que ce n'est pas le cas et qu'il faudra considérer des résultats complètement différents afin de pouvoir construire des solutions du problème stationnaire. Ceci sera réalisé au neuvième chapitre où nous verrons également quelques problèmes propres au cas stationnaire.

Finalement, dans le dixième et dernier chapitre de ce livre, nous présentons la théorie de régularité locale de Serrin et nous verrons qu'avec des hypothèses supplémentaires sur les solutions faibles, il sera possible d'obtenir de la régularité en variable d'espace. Ce type de résultat est particulièrement intéressant puisque, comme nous le verrons, un gain de régularité peut permettre d'obtenir des résultats d'unicité pour les solutions faibles.

Chapitre 1

Un peu d'histoire et un peu de physique

Les équations de Navier-Stokes ont pour objectif de donner un modèle mathématique au comportement des *fluides* et nous devons la formulation actuelle de ces équations, ainsi que leur nom, aux travaux de deux scientifiques : Henri Navier (1785-1836) ingénieur et mathématicien français et George Stokes (1819-1903) mathématicien et physicien britannique.

Mais tout d'abord, qu'est-ce qu'un *fluide* ? Nous dirons tout simplement qu'un fluide est un corps matériel qui peut se déformer de façon parfaite, comme par exemple les liquides (eau, huile), les gaz (air) ou les plasmas. Cependant, la nature étant généreuse, tous les fluides ne possèdent pas forcément les mêmes propriétés et ils ne réagissent pas tous de la même manière face aux forces extérieures : il est clair que le miel ne se comporte pas de la même façon que l'eau, par exemple. Ainsi les équations de Navier-Stokes que nous allons étudier dans ce livre correspondent à un modèle très particulier de fluide dont les lignes générales se basent sur quelques hypothèses simples. Toute la théorie qui sera développée ici repose tout d'abord sur une hypothèse de *continuité* : le comportement général (macroscopique) du fluide correspond à celui d'un corps parfaitement continu et toutes les quantités qui lui sont reliées (température, densité, vitesse, pression) sont censées varier continûment d'un point à un autre. Ensuite on supposera que le fluide est *incompressible* : une parcelle de fluide peut se déformer mais on ne pourra pas la dilater ni la comprimer. En outre on considèrera des fluides qui sont *homogènes* et *isotropes* : la densité ne dépend pas de la position et il n'existe aucune direction privilégiée. Finalement, les objets considérés sont des fluides *newtoniens* : leur comportement général est indépendant des forces extérieures. Par exemple, l'eau même mélangée à une certaine vitesse garde son comportement de liquide, mais cela n'est plus le cas pour de la crème liquide qui, correctement fouettée, peut se convertir en crème Chantilly, avec des propriétés physiques qui ne correspondent plus du tout à celles d'un fluide !

Hypothèses générales

- Continuité : les quantités observables varient de manière continue dans le temps.
- Incompressibilité : la densité ne varie pas au cours du temps.
- Homogénéité : la densité est indépendante de la position.
- Isotropie : les propriétés mécaniques sont indépendantes de la position.
- Comportement Newtonien : le tenseur de déformation est linéaire.

Continuité, incompressibilité, homogénéité, isotropie et comportement newtonien sont donc les hypothèses de base sur les fluides que nous considérerons dans ce livre, mais nous devons encore préciser un dernier point : bien que l'on puisse considérer un fluide en dimension 2 d'espace (c'est à dire dans le plan \mathbb{R}^2 et l'on pourra penser alors à une très très fine couche de fluide), dans tout ce livre on travaillera uniquement en dimension 3 (cadre de travail beaucoup plus intéressant du point de vue physique), c'est à dire que les points x seront des vecteurs de \mathbb{R}^3 et on rajoutera une variable de temps $t \in [0, +\infty[$ afin d'étudier l'écoulement dans le temps de certaines quantités. Le fluide considéré remplit donc *tout* l'espace \mathbb{R}^3 dans lequel il n'existe *aucun* obstacle ni *aucun* bord : il s'agit bien entendu d'un fluide *théorique* et dans la vie quotidienne il ne faudra pas s'attendre à trouver un fluide physique qui remplisse toutes ces conditions de domaine réunies. En réalité, ce choix de domaine est finalement arbitraire et répond essentiellement à des questions d'ordre technique car les outils que nous souhaitons mettre en place seront des outils qui proviennent de l'analyse harmonique et de l'analyse fonctionnelle (on pensera notamment à l'analyse de Fourier) qui s'adaptent peu (ou très mal) à un cadre de travail local qui présente des bords.

Hypothèses mathématiques

- Variable de temps $t \in [0, +\infty[$.
- Variable d'espace en dimension 3 : $x \in \mathbb{R}^3$.
- Domaine de définition du fluide : l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.

Voilà pour le cadre de travail général, mais comment sommes-nous arrivés aux équations de Navier-Stokes ?

1.1 Bernoulli, Euler, Navier, Poisson, Stokes & Cie.

Sans remonter aux problèmes d'irrigation des terres de cultures, ni au transport de l'eau en utilisant des aqueducs ou autres procédés, une partie de cette histoire commence...il y a bien longtemps !

En effet, dès 1646, B. Pascal met en évidence la pression interne des fluides en repos avec son expérience "crève-tonneau" dans laquelle un tonneau rempli d'eau et muni d'un long tube vertical explose lorsqu'on remplit peu à peu cette colonne d'eau. Mais à cette époque le calcul différentiel n'était pas encore développé, ce qui complique singulièrement la mise en équation du problème, de sorte que ces idées ont été admises sous forme de *principes* de l'hydrostatique. Ainsi, peut être le premier travail mathématique concernant l'écoulement des fluides remonte à 1738 avec un article de D. Bernoulli [3] qui introduit le mot "hydrodynamique" et qui donne une première explication de leur mouvement.

Peu de temps après, en 1749, L. Euler publie un mémoire intitulé "*Principes généraux du mouvement des fluides*" à l'Académie des Sciences de Berlin [18] dans lequel il postule un premier modèle d'équations aux dérivées partielles pour expliquer la dynamique des fluides. Les concepts développés par Euler dans ce mémoire sont totalement fondamentaux pour la modélisation mathématique de la mécanique des fluides et les équations ainsi obtenues¹ sont parmi les toutes premières équations aux dérivées partielles considérées. Mais ces équations ne correspondaient pas aux expériences réalisées par les ingénieurs et bien que mathématiquement le problème était (et reste encore) passionnant, le modèle proposé

1. Appelées à juste titre les "équations d'Euler", voir (1.15) ci-après.

n'est pas satisfaisant pour décrire l'écoulement des fluides : il manquait un terme qui puisse expliquer la déformation de ces derniers.

Les problèmes de déformation des corps (la flexion de plaques) étaient en plein essor au début du XIX^{ème} siècle et C. Navier proposa en 1821 [38] un modèle pour l'étude de l'élasticité des corps solides et il eut l'idée d'appliquer ce modèle à l'hydrodynamique en 1822 [37]. Il introduit alors une modification des équations d'Euler en rajoutant un terme qui expliquait la déformation élastique du fluide. Mais l'expression de ce terme supplémentaire ne fut pas immédiatement acceptée par la communauté scientifique de l'époque et des discussions passionnées eurent lieu entre Navier, Poisson et Cauchy concernant l'expression exacte de ce terme. Pendant les années 1842-1845, G. Stokes développe sa propre théorie de l'élasticité dans le cadre de l'hydrodynamique et obtient des résultats similaires à ceux de Cauchy et, bien qu'il conteste les résultats obtenus par Navier, les équations résultantes sont essentiellement les mêmes. Le modèle mathématiques ainsi proposé fut mis à l'épreuve des données expérimentales et, du moins dans le cadre des fluides laminaires, ces équations furent acceptées par ingénieurs et physiciens et c'est ainsi que ces équations portent aujourd'hui le nom de Navier et de Stokes.

Cependant, si les équations de Navier-Stokes sont un bon modèle pour les fluides laminaires très réguliers, la situation se complique lorsqu'on étudie les fluides turbulents dans lesquels la présence de tourbillons rend extrêmement délicate la modélisation. Les fluides en état turbulent ont été étudiés par O. Reynolds dès 1883 [43] puis par A. Kolmogorov [30] en 1941, et par bien d'autres chercheurs depuis, mais une modélisation mathématique rigoureuse de la turbulence reste encore un problème ouvert au XXI^{ème} siècle, voir par exemple [28].

*

Incluses dans la liste de sept problèmes du millénaire [10], les équations de Navier-Stokes ont récemment attiré l'attention d'une communauté mathématique et scientifique plus large et bien des questions concernant ces équations font l'objet de recherches et de publications actuelles. Dans cette (très) courte introduction, il n'est bien évidemment pas possible de présenter tous les développements autour des équations de Navier-Stokes, et pour plus de détails historiques nous renvoyons au livre [16].

1.2 Rapide déduction physique des équations de Navier-Stokes

Nous allons maintenant expliquer très brièvement comment s'obtiennent les équations de Navier-Stokes à partir des hypothèses sur les fluides exposées au début de ce chapitre.

1.2.1 Deux cadres de référence

Ces équations donnent une description du mouvement des fluides, elles étudient donc la variation dans le temps et dans l'espace de certaines quantités physiques et pour cela il est nécessaire de fixer des repères de coordonnées pour pouvoir suivre ces déformations. Nous avons deux points de vue :

- **Cadre Lagrangien.** Le référentiel est associé à la configuration du fluide à un certain instant initial $t_0 = 0$ et les parcelles que l'on souhaite étudier (ainsi que les quantités qui leurs sont rattachées) se déplacent à mesure que le fluide lui-même se déplace : il s'agit donc d'une étude trajectorielle. On dira alors que le vecteur $X_{x_0}(t) \in \mathbb{R}^3$ est la position d'une parcelle de fluide au temps t où $x_0 \in \mathbb{R}^3$ est la position de cette parcelle

au temps $t_0 = 0$, ainsi, si \vec{u} est la vitesse de ces parcelles, nous avons

$$\frac{d}{dt}X_{x_0}(t) = \vec{u}(t, X_{x_0}(t)). \quad (1.1)$$

Si Q représente une certaine quantité physique rattachée à une parcelle de fluide, alors $Q_{x_0}(t)$ représentera cette quantité au temps t dont le point initial est x_0 .

Un exemple de cette situation correspond à celui d'un ballon atmosphérique, avec différents capteurs, qui est relâché dans le ciel et qui suit le courant du vent.

- **Cadre Eulérien.** Ici, le référentiel est fixé une fois pour toutes, on dispose alors d'un point (t_0, x_0) qui correspond à l'origine de l'espace $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ et on laisse évoluer le fluide comme dans un laboratoire. Donc, si Q est une quantité physique, nous avons tout simplement que $Q(t, x)$ correspond à la valeur de cette quantité physique au temps t et au point x dans le repère fixé.

Il y a bien sûr un lien entre ces deux approches : si $Q_{x_0}(t)$ est une quantité physique en description lagrangienne et si $Q(t, x)$ est la même quantité en description eulérienne, alors on a l'identité suivante que relie la variation dans le temps de cette quantité Q dans ces deux cadres :

$$\frac{d}{dt}Q_{x_0}(t) = \partial_t Q(t, x)|_{x=X_{x_0}(t)} + \sum_{i=1}^3 \partial_i Q(t, x)|_{x=X_{x_0}(t)} \frac{d}{dt}X_{x_0,i}(t).$$

Afin de différencier les dérivées partielles dans ces repères, on note traditionnellement la dérivée en coordonnées lagrangiennes $\frac{d}{dt}Q_{x_0}$ par $\frac{D}{Dt}Q_{x_0}$ et cette opération est appelée la *dérivée matérielle* de la quantité Q . Ainsi, avec la relation (1.1) nous pouvons écrire

$$\frac{D}{Dt}Q_{x_0}(t) = \partial_t Q(t, x) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})Q(t, x). \quad (1.2)$$

La base de la modélisation

Une fois que nous avons fixé la relation entre ces deux cadres de référence, nous passons à la modélisation des équations de Navier-Stokes et le point de départ de cette modélisation est donné par un petit élément de volume δV du fluide qui contient suffisamment de particules mais dont taille reste infinitésimale par rapport à l'échelle macroscopique (petit élément de volume donc, mais sans pour autant atteindre l'échelle moléculaire). Ainsi, si $q = q(t, x_0)$ est une certaine quantité physique que l'on souhaite étudier, qui dépend de la variable de temps $t \in [0, +\infty[$ et de la position $x_0 \in \mathbb{R}^3$, alors notre connaissance de q au temps t sera donnée par des *moyennes* prises sur ces éléments de volume δV qui contiennent le point x_0 :

$$Q_{\delta V}(t) = \int_{x_0 \in \delta V} q(t, y) dy.$$

1.2.2 La déformation du volume

Si la quantité physique Q correspond à une moyenne comme cela a été introduit ci-dessus, il sera nécessaire de comprendre l'évolution dans le temps de la déformation des éléments de volume. Donc, si on considère un volume V_0 à un certain instant $t_0 = 0$ qui est rempli par le fluide, on s'intéresse à l'ensemble

$$V_t = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = X_x(t), \text{ avec } x \in V_0\},$$

donné par l'écoulement du fluide. Ainsi l'élément de volume dy de V_t sera associé à l'élément de volume $J(t, x)dx$ où $J(t, x)$ est le Jacobien du transport $x \mapsto X_x(t)$ et si l'on souhaite étudier comment se comporte ce Jacobien avec l'évolution dans le temps, on devra considérer la quantité $D(t, x) = \det \left(\frac{\partial}{\partial x_i} y_j \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$ (on a donc la relation $J(t, x) = |D(t, x)|$). En remarquant tout d'abord que l'on a par l'équation (1.1) :

$$\partial_t \left(\frac{\partial}{\partial x_i} y_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\partial_t y_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j(t, y)) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial y_k} u_j(t, y) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} y_k,$$

et en notant $\frac{\partial}{\partial x}$ le vecteur $\begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{bmatrix}$, nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \partial_t D(t, x) &= \det \left(\partial_t \frac{\partial}{\partial x} y_1, \frac{\partial}{\partial x} y_2, \frac{\partial}{\partial x} y_3 \right) + \det \left(\frac{\partial}{\partial x} y_1, \partial_t \frac{\partial}{\partial x} y_2, \frac{\partial}{\partial x} y_3 \right) + \det \left(\frac{\partial}{\partial x} y_1, \frac{\partial}{\partial x} y_2, \partial_t \frac{\partial}{\partial x} y_3 \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial y_k} u_1(t, y) \right) \det \left(\frac{\partial}{\partial x} y_k, \frac{\partial}{\partial x} y_2, \frac{\partial}{\partial x} y_3 \right) \\ &+ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial y_k} u_2(t, y) \right) \det \left(\frac{\partial}{\partial x} y_1, \frac{\partial}{\partial x} y_k, \frac{\partial}{\partial x} y_3 \right) \\ &+ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial y_k} u_3(t, y) \right) \det \left(\frac{\partial}{\partial x} y_1, \frac{\partial}{\partial x} y_2, \frac{\partial}{\partial x} y_k \right), \end{aligned}$$

en observant maintenant que certaines colonnes des déterminants ci-dessus sont identiques on obtient

$$\partial_t D(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} u_1(t, y) + \frac{\partial}{\partial y_2} u_2(t, y) + \frac{\partial}{\partial y_3} u_3(t, y) \right) \det \left(\frac{\partial}{\partial x} y_1, \frac{\partial}{\partial x} y_2, \frac{\partial}{\partial x} y_3 \right),$$

ce qui nous donne l'équation

$$\partial_t D(t, x) = \operatorname{div}(\vec{u}) D(t, x).$$

Si on considère la condition initiale $D(0, x) = 1$ et en se rappelant que l'on a la relation $J(t, x) = |D(t, x)|$, nous obtenons l'expression suivante (l'exponentielle est positive) :

$$J(t, x) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{div}(\vec{u}(s, X_x(s))) ds \right). \quad (1.3)$$

A partir de cette formule on remarque que la divergence $\operatorname{div}(\vec{u})$ du champ de vitesse \vec{u} explique les variations du volume (compression ou dilatation) au cours du temps et nous reviendrons sur ce fait un peu plus tard.

1.2.3 La formule de convection

Avec la formule (1.3), nous pouvons étudier des quantités moyennées de la façon suivante : si q représente une information physique, on notera $Q(t) = \int_{V_t} q(t, y) dy$ la valeur de cette quantité prise sur tout le volume V_t et nous pouvons écrire

$$Q(t) = \int_{V_0} q(t, X_x(t)) J(t, x) dx,$$

et alors

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \int_{V_0} \partial_t (q(t, X_x(t))) J(t, x) + q(t, X_x(t)) \partial_t J(t, x) dx.$$

Mais comme on a $\partial_t(q(t, X_x(t))) = \frac{D}{Dt}q(t, y)$ et $\partial_t J = \text{div}(\vec{u})J$, avec $J(t, x)dx = dy$, en utilisant ces identités nous avons alors la *formule de convection* ci-dessous :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} q(t, y) dy = \int_{V_t} \frac{D}{Dt} q(t, y) + q(t, y) \text{div}(\vec{u}(t, y)) dy, \quad (1.4)$$

qui explique la variation dans le temps des quantités du type $\int_{V_t} q(t, y) dy$.

1.2.4 Quelques applications de la formule de convection

- **Densité.** Appliquons cette formule de convection à la densité $\rho(t, y)$ du fluide. Nous avons alors que la masse d'un élément de volume V_t sera donnée par

$$m(t) = \int_{V_t} \rho(t, y) dy,$$

mais étant donné que la masse d'une parcelle de fluide ne varie pas au cours de l'écoulement de celui-ci (préservation de la masse), on en déduit $\frac{d}{dt}m(t) = 0$, ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(t, y) dy = \int_{V_t} \frac{D}{Dt} \rho(t, y) + \rho(t, y) \text{div}(\vec{u}(t, y)) dy = 0,$$

et pour que cette relation soit vraie pour tout élément de volume initial V_0 , on obtient la relation de conservation de la densité :

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \text{div}(\vec{u}) = 0. \quad (1.5)$$

Ainsi, si le fluide est *incompressible*, ce qui s'exprime par l'invariance dans le temps de la densité des parcelles de fluide, alors nous avons $\frac{D}{Dt} \rho = 0$, ce qui induit que la divergence du champ de vitesse doit être nulle :

$$\text{div}(\vec{u}) = 0. \quad (1.6)$$

On remarquera que cette condition est en accord avec la formule (1.3) qui explique la dilatation ou la compression des éléments de volume.

De plus, par la formule (1.2) nous avons l'équation $\frac{D}{Dt} \rho = \partial_t \rho + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho = 0$, mais comme nous avons supposé que le fluide est *homogène* alors la densité du fluide est indépendante de la position (ce qui se traduit par $\rho(t, x) = \rho(t)$) et l'on a $(\vec{u} \cdot \nabla) \rho = 0$ et donc $\partial_t \rho = \frac{d}{dt} \rho = 0$, ce qui nous permet de conclure que la densité est constante en variables de temps et d'espace :

$$\rho = \text{Cste.}$$

On remarquera que les hypothèses d'incompressibilité et d'homogénéité du fluide impliquent que la densité est constante.

- **Quantité de mouvement.** La quantité de mouvement d'une parcelle de fluide est donnée par l'expression suivante :

$$M(t) = \int_{V_t} \rho \vec{u}(t, y) dy,$$

ainsi, par la deuxième loi de Newton, la variation de cette quantité de mouvement dans le temps doit être égale à une force \vec{F} , que l'on suppose de densité \vec{f} , ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}M(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \vec{u}(t, y) dy = \int_{V_t} \vec{f}(t, y) dy,$$

et si l'on applique l'identité de convection (1.4) à cette expression on obtient

$$\int_{V_t} \rho \frac{D}{Dt} \vec{u}(t, y) + \rho \vec{u}(t, y) \operatorname{div}(\vec{u}(t, y)) dy = \int_{V_t} \vec{f}(t, y) dy.$$

Compte tenu de la condition d'incompressibilité (1.6), nous pouvons écrire

$$\int_{V_t} \rho \frac{D}{Dt} \vec{u}(t, y) dy = \int_{V_t} \vec{f}(t, y) dy,$$

donc, la variation de la quantité de mouvement d'une parcelle de fluide est

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u}(t, y) = \vec{f}(t, y), \quad (1.7)$$

ou encore, en coordonnées eulériennes

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \vec{f}. \quad (1.8)$$

L'expression (1.7) ci-dessus, bien que fondamentale, est incomplète car il est nécessaire de comprendre la nature des forces qui s'exercent sur le fluide.

1.2.5 Etudes des forces

Nous devons maintenant expliquer quelle est l'expression de la force qui intervient ci-dessus et on commence par remarquer que cette force peut se décomposer en des forces internes au fluide et des forces externes :

$$\vec{f} = \vec{f}_{internes} + \vec{f}_{externes}. \quad (1.9)$$

Les forces externes seront considérées comme des données du problème, de sorte que nous devons étudier plus en détail les forces *internes* du fluide. Compte tenu des hypothèses initiales énoncées au début du chapitre, nous allons considérer uniquement deux types de forces internes.

- **Pression.** Lorsqu'une parcelle de fluide occupe une partie de l'espace, elle subit une pression de la part des autres parcelles et cette pression s'exerce sur les parois du volume de la parcelle avec un signe contraire à la normale, ce qui nous permet d'écrire

$$\vec{F}_{pression} = - \int_{\partial V_t} p \cdot \vec{\nu} d\sigma,$$

où la fonction p représente la densité de pression sur la parcelle. En utilisant le théorème de Stokes nous avons

$$\vec{F}_{pression} = - \int_{V_t} \vec{\nabla} p(t, y) dy.$$

Indiquons que cette pression existe même lorsque le fluide est en repos comme l'a montré Pascal en 1646 avec l'expérience hydrostatique "crève-tonneau" déjà mentionnée page 2.

- **Viscosité.** Lorsqu'un fluide est visqueux, il réagit comme un corps élastique qui résiste aux déformations et il y a en particulier des phénomènes de friction qui dégagent de la chaleur. Si le fluide est isotrope, homogène et si l'on suppose en plus que le fluide est *newtonien*, alors cette résistance aux déformations se concrétise par des forces de viscosité de la façon suivante

$$\vec{f}_{visc} = \mu \Delta \vec{u} + \lambda \vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{u})),$$

où μ et λ sont des paramètres physiques liés à la nature du fluide. On notera que si le fluide est incompressible ($\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$), alors les seules forces de viscosité sont données par le terme $\mu \Delta \vec{u}$. Voir les livres [16] et [45] pour plus de détails à ce sujet.

Avec cette très courte étude des forces et avec l'incompressibilité du fluide, l'expression (1.9) devient alors

$$\vec{f} = \vec{f}_{internes} + \vec{f}_{externes} = (\vec{f}_{pression} + \vec{f}_{visc}) + \vec{f}_{externes} = (-\vec{\nabla}p + \mu \Delta \vec{u}) + \vec{f}_{externes},$$

et c'est cette formulation qui sera utilisée par la suite.

1.2.6 Equations générales de l'hydrodynamique

Ces équations sont données par la *conservation de la densité*, énoncée dans l'équation (1.5), et par la variation dans le temps de la *quantité de mouvement* donnée par (1.7). En prenant en compte l'étude des forces ci-dessus, les équations de l'hydrodynamique sont alors

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad \text{et} \quad \rho \frac{D}{Dt}\vec{u} = \left(\mu \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}p \right) + \vec{f}_{externes}. \quad (1.10)$$

Comme la densité est supposée constante, on retrouve la relation

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0,$$

pour l'équation de conservation de la densité et, en appliquant la formule de la dérivée matérielle (1.2) à la vitesse \vec{u} dans (1.10), on obtient l'expression suivante pour la variation de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\partial_t \vec{u} + \sum_{i=1}^3 u_i \partial_i \vec{u} \right) = \mu \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}_{externes}.$$

Nous obtenons alors le système d'équations

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \rho \left(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) = \mu \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}_{externes}. \end{cases}$$

Si l'on note maintenant $\nu = \frac{\mu}{\rho} > 0$ et en faisant les abus de notation suivants $p = \frac{1}{\rho}p$ et $\vec{f} = \frac{1}{\rho}\vec{f}_{externes}$, en divisant la deuxième équation ci-dessus par la densité ρ nous avons finalement

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad \nu > 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

et nous avons obtenu ainsi les **équations de Navier-Stokes** telles qu'elles seront étudiées tout au long de ce livre.

Mais avant de commencer une étude mathématiques de ces équations, quelques remarques s'imposent.

- La force extérieure est une donnée du problème, de sorte que les inconnues dans les équations de Navier-Stokes sont la vitesse \vec{u} et la pression p . Ainsi, pour résoudre les équations de Navier-Stokes, il faut alors donner un couple (\vec{u}, p) de fonctions où $\vec{u} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $p : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et un intervalle de temps $[0, T]$ pour lequel on a les relations (1.11).
- Le système d'équations ci-dessus, énoncé sous forme vectorielle, peut se réécrire de la façon suivante où les fonctions u_i, p et f_i avec $1 \leq i \leq 3$ sont définies sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ et à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \partial_{x_1} u_1(t, x_1, x_2, x_3) + \partial_{x_2} u_2(t, x_1, x_2, x_3) + \partial_{x_3} u_3(t, x_1, x_2, x_3) = 0, \\ \partial_t u_1(t, x_1, x_2, x_3) = \nu \Delta u_1(t, x_1, x_2, x_3) - [u_1 \partial_{x_1} u_1 + u_2 \partial_{x_2} u_1 + u_3 \partial_{x_3} u_1](t, x_1, x_2, x_3) - \partial_{x_1} p(t, x_1, x_2, x_3) + f_1(t, x_1, x_2, x_3), \\ \partial_t u_2(t, x_1, x_2, x_3) = \nu \Delta u_2(t, x_1, x_2, x_3) - [u_1 \partial_{x_1} u_2 + u_2 \partial_{x_2} u_2 + u_3 \partial_{x_3} u_2](t, x_1, x_2, x_3) - \partial_{x_2} p(t, x_1, x_2, x_3) + f_2(t, x_1, x_2, x_3), \\ \partial_t u_3(t, x_1, x_2, x_3) = \nu \Delta u_3(t, x_1, x_2, x_3) - [u_1 \partial_{x_1} u_3 + u_2 \partial_{x_2} u_3 + u_3 \partial_{x_3} u_3](t, x_1, x_2, x_3) - \partial_{x_3} p(t, x_1, x_2, x_3) + f_3(t, x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}) = \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3 = 0, \\ \begin{bmatrix} \partial_t u_1 \\ \partial_t u_2 \\ \partial_t u_3 \end{bmatrix} = \nu \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \partial_{x_1} u_1 + u_2 \partial_{x_2} u_1 + u_3 \partial_{x_3} u_1 \\ u_1 \partial_{x_1} u_2 + u_2 \partial_{x_2} u_2 + u_3 \partial_{x_3} u_2 \\ u_1 \partial_{x_1} u_3 + u_2 \partial_{x_2} u_3 + u_3 \partial_{x_3} u_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_{x_1} p \\ \partial_{x_2} p \\ \partial_{x_3} p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Il convient de garder en tête cette écriture des équations de Navier-Stokes car elle explicite son caractère vectoriel tout en donnant une expression détaillée du terme non linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$.

Quelques remarques

- L'hypothèse de conservation de la densité donne la relation d'incompressibilité $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ et nous verrons par la suite que cette hypothèse est cruciale pour mener à bien certains calculs que nous nous proposons de réaliser.
- Notre cadre de travail en variable d'espace est \mathbb{R}^3 tout entier et le fluide est censé remplir tout cet espace. Puisque nous avons supposé que ce fluide est homogène et isotrope, si les équations de Navier-Stokes sont vérifiées au point $x \in \mathbb{R}^3$ alors elles doivent encore être valables au point $x + x_0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Cette propriété implique que tous les objets que nous allons considérer ici devront être *invariants par*

translation : que ce soit les opérateurs différentiels ou les normes qui serviront à caractériser les espaces de fonctions.

- Considérons maintenant $\vec{u} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $p : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution des équations de Navier-Stokes

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p, \quad \text{div}(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \quad (1.13)$$

où, pour plus de simplicité, nous avons pris une force extérieure nulle $\vec{f} = 0$. Pour $\lambda > 0$, nous allons étudier \vec{u}_λ et p_λ les dilatées de facteur λ de la vitesse et de la pression définies par les expressions

$$\vec{u}_\lambda = \lambda^{\alpha_1} \vec{u}(\lambda^{\alpha_2} t, \lambda^{\alpha_3} x) \quad \text{et} \quad p_\lambda = \lambda^{\beta_1} p(\lambda^{\beta_2} t, \lambda^{\beta_3} x),$$

où les paramètres α_i et β_i ($1 \leq i \leq 3$) seront fixés ci-dessous. En effet, par les mêmes raisons d'invariance évoquées au point précédent, si (\vec{u}, p) sont solutions des équations de Navier-Stokes, alors $(\vec{u}_\lambda, p_\lambda)$ doivent également être des solutions de ces équations, mais cette fois-ci il est nécessaire d'imposer des conditions sur les exposants α_i et β_i . En effet, un calcul direct montre que si $\vec{u}(t, x)$ et $p(t, x)$ sont solutions des équations (1.13), alors pour tout $\lambda > 0$ les fonctions

$$\lambda \vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{et} \quad \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x), \quad (1.14)$$

le sont également. Cette propriété d'*homogénéité* des solutions par rapport aux dilatations est totalement fondamentale et elle façonnera les espaces fonctionnels avec lesquels nous allons travailler tout au long de ce livre.

- La constante $\nu > 0$ est reliée à la nature du fluide considéré et représente un facteur de viscosité : plus cette constante est grande, plus le fluide s'écoulera lentement. Au risque de froisser physiciens, ingénieurs -et même mathématiciens- nous supposons dorénavant $\nu = 1$ et ce choix arbitraire n'a pas d'impact mathématique majeur dans les développements que nous allons faire dans ce livre : en effet, si (\vec{u}, p) sont solutions des équations de Navier-Stokes (1.12) pour une certaine viscosité $\nu > 0$, alors si à la place de la transformation (1.14) on considère

$$\nu \vec{u}(\nu t, x) \quad \text{et} \quad \nu^2 p(\nu t, x),$$

alors ces nouvelles variables vérifient également les équations de Navier-Stokes mais cette fois-ci avec une viscosité $\nu = 1$. On remarquera donc que le fait de fixer $\nu = 1$ revient à faire une dilatation en variable de temps, ce qui d'un point de vue purement technique ne pose aucun problème particulier.

* * *

Indiquons pour finir que dans le cas où le paramètre de viscosité ν est nul, on parlera alors de fluide *idéal* et on obtient les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t \vec{u} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \end{cases} \quad (1.15)$$

dont l'étude mathématique complète reste encore un problème ouvert qui ne sera pas abordé ici.

Chapitre 2

Les outils de base

Dans ce chapitre nous allons présenter la plupart des objets mathématiques qui seront nécessaires pour mener à bien l'étude que nous nous proposons de faire sur les équations de Navier-Stokes. Nous supposerons que le lecteur est familier avec les notions de base de l'analyse fonctionnelle, de l'analyse de Fourier et de la théorie des distributions et la plupart des énoncés de ce chapitre seront donnés sans démonstration.

Mais de quoi avons-nous besoin ? En plus de quelques identités vectorielles, nous aurons essentiellement besoin de mesurer la taille des fonctions à l'aide des espaces de Lebesgue ainsi que de leurs dérivées (ce qui sera fait en utilisant les espaces de Sobolev) et ces ingrédients seront plus que suffisants pour une première étude mathématique des équations de Navier-Stokes.

2.1 Généralités

2.1.1 Espaces de fonctions à valeurs réelles

Notre point de départ sera donc l'espace de fonctions continues bornées définies sur l'espace \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$ à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ est continue et bornée}\},$$

normé par $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$. De même, on considèrera l'espace $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^n)$ des fonctions k fois continument dérivables et dont toutes les dérivées sont bornées qui est donné par l'ensemble

$$\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|\varphi\|_{\mathcal{C}_b^k} < +\infty\},$$

où la quantité $\|\varphi\|_{\mathcal{C}_b^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_\infty$ est une norme et où on a utilisé les notations classiques

pour les dérivées : pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, on note $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ sa

longueur et alors nous écrivons $D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$.

Pour tout $k \geq 0$, les fonctions dont les k -ième dérivées existent et sont continues, mais qui ne sont pas nécessairement bornées, seront dite de *classe* $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. On dira qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est *régulière* si elle est indéfiniment dérivable, ce que l'on notera $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lorsque le support des fonctions est *compact*, on adoptera la notation $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$, avec $k \geq 0$ pour désigner cette information supplémentaire. L'espace des *fonctions test*, c'est à dire l'espace des fonctions régulières à support compact, sera noté $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ou encore $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On remarquera que l'on a l'identité d'espaces $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, ou encore $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ et l'on utilisera indistinctement ces notations.

Les espaces de fonctions $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ que nous venons de présenter sont des espaces classiques où l'étude de la régularité des fonctions se réalise au sens *fort* : les fonctions sont suffisamment dérivables et les dérivées des fonctions sont des dérivées usuelles.

Mais dans ce livre nous aurons également besoin de considérer les dérivées des fonctions dans un sens plus large (on parlera alors de dérivées au sens *faible*).

Ainsi, si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, pour tout multi-indice α nous dirons que la *dérivée faible* $D^\alpha \varphi$ de la fonction φ est la fonction ψ si pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \phi(x) dx, \quad (2.1)$$

et cette façon de procéder nous permettra de considérer les dérivées d'objets (qui peuvent être des fonctions bien sûr, mais pas seulement) beaucoup moins réguliers.

Le cadre formel pour étudier ce type de dérivées est celui des distributions, mais par un souci de concision on se limitera dans cet ouvrage aux distributions tempérées : on introduit pour cela la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui se définit comme l'espace des fonctions régulières $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que les quantités

$$p_{k,\alpha}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^k |D^\alpha \varphi(x)|,$$

sont bornées pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout multi-indice $\alpha \geq 0$. A partir de cette classe de fonction on considère alors l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ des *distributions tempérées* comme l'ensemble des formes linéaires continues définies sur la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, si $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction de la classe de Schwartz et si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est une distribution tempérée nous avons le crochet de dualité

$$\langle f, \phi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad (2.2)$$

qui permet de transposer la plupart des opérations sur les fonctions aux distributions tempérées.

L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ contient alors des objets qui peuvent être dérivables au sens de l'expression (2.1) ci-dessus et l'intérêt pour nous de travailler avec cet espace de distributions est double : tout d'abord dans ce livre on utilisera plusieurs espaces fonctionnels (Lebesgue, Lorentz, Sobolev, etc) et tous ces espaces vérifient les inclusions

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset X \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (2.3)$$

où l'on a désigné par X n'importe lequel de ces espaces. D'autre part, ces propriétés d'inclusion nous permettent de délimiter notre cadre de travail d'un point de vue de l'analyse fonctionnelle et en particulier dans tous ces espaces la transformation de Fourier et toutes ses propriétés sont bien définies (au sens des distributions) ce qui donne une cohérence d'ensemble des outils qui seront utilisés par la suite.

Le lecteur trouvera plus de détails concernant tous ces espaces fonctionnels dans les livres [54], [4], [24] et [5].

2.1.2 Fonctions à valeurs vectorielles

Etant donné que nous allons travailler avec des fonctions vectorielles, il est utile de généraliser ces espaces précédents à ce type de fonctions. Nous considérerons tout d'abord l'espace \mathbb{R}^n muni de sa norme euclidienne $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, ensuite on considère des fonctions du type

$$\begin{aligned} \vec{f} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

avec $m, n \geq 1$ où chacune des composantes f_1, \dots, f_n est une fonction définie sur \mathbb{R}^m , à valeurs réelles, et ainsi nous avons

$$|\vec{f}(x)| = \sqrt{f_1(x)^2 + \cdots + f_n(x)^2}.$$

Pour un point x fixé, cette quantité peut être remplacée par n'importe quelle autre quantité équivalente, par exemple $|\vec{f}(x)| = \max_{i=1, \dots, n} |f_i(x)|$ ou encore $|\vec{f}(x)| = \sum_{i=1}^n |f_i(x)|$ et nous ferons abstraction des constantes (qui ne dépendent que de la dimension de l'espace \mathbb{R}^n) qui permettent d'établir l'équivalence de ces quantités. Plus généralement nous avons la remarque suivante.

Remarque 2.1 (Notation) *Si E est un espace normé muni de deux normes $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}$, on utilisera la notation $\|\cdot\|_{\mathcal{E}} \simeq \|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ pour dénoter que ces normes sont équivalentes : il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $e \in E$ on ait $C_1\|e\|_{\mathcal{E}} \leq \|e\|_{\mathbb{E}} \leq C_2\|e\|_{\mathcal{E}}$.*

Avec ces précisions, l'espace des fonctions vectorielles continues bornées définies sur \mathbb{R}^m à valeurs dans \mathbb{R}^n , qui sera noté $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, peut alors se caractériser par la norme

$$\|\vec{f}\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |\vec{f}(x)|.$$

L'espace des fonctions vectorielles k fois continument dérivables $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ se définit de manière similaire en exigeant que chaque composante f_1, \dots, f_n appartienne à l'espace $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^m)$ introduit précédemment. Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{N}^3$ est un multi-indice et si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle, on écrira $D^{\alpha} \vec{f}$ pour désigner le vecteur

$$D^{\alpha} \vec{f} = \begin{bmatrix} D^{\alpha} f_1 \\ D^{\alpha} f_2 \\ D^{\alpha} f_3 \end{bmatrix},$$

et on peut caractériser cet espace par la condition $\|\vec{f}\|_{\mathcal{C}_b^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} \vec{f}\|_{\infty} < +\infty$.

Les idées utilisées pour les fonctions réelles s'appliquent de la même façon aux fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ qui sont continues mais pas nécessairement bornées et aux fonctions vectorielles $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ dont le support est compact.

Remarque 2.2 (Notation) *Si $t \in [0, +\infty[$, $x \in \mathbb{R}^m$ et $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle, on écrira $\vec{f} \in \mathcal{C}_b^k([0, +\infty[, \mathcal{C}_b^{\ell}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ pour désigner les fonctions qui*

sont k -dérivables bornées dans la variable t et ℓ -dérivables bornées dans la variable x . La norme de cet espace est donnée par l'expression :

$$\|\vec{f}\|_{C_{b,t}^k C_{b,x}^\ell} = \sum_{j \leq k} \sum_{|\alpha| \leq \ell} \|\partial_t^j D_x^\alpha \vec{f}(\cdot, \cdot)\|_\infty.$$

Pour finir, la classe de Schwartz vectorielle $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et l'espaces des distributions tempérées vectorielles $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ se définissent de la même manière en considérant chaque composante séparément.

2.2 Quelques définitions et identités vectorielles

Les équations de Navier-Stokes sont des équations vectorielles et il est donc très important d'avoir en tête quelques calculs propres au cadre vectoriel qui permettent de simplifier (ou tout simplement de mener à bien) un certain nombre de calculs. Pour cette raison nous rappelons maintenant quelques définitions du calcul vectoriel sur \mathbb{R}^3 et dans toute cette section nous supposons que toutes les fonctions ci-dessous (réelles ou vectorielles) sont *suffisamment* régulières, dans le sens où les dérivées considérées sont bien définies. Nous avons donc :

- **Le gradient.** Cet opérateur sera noté $\vec{\nabla}$ et il est défini par l'expression

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{bmatrix}.$$

Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles, son gradient est le vecteur déterminé par

$$\vec{\nabla} \varphi = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \varphi \\ \partial_{x_2} \varphi \\ \partial_{x_3} \varphi \end{bmatrix},$$

et bien sûr nous avons $|\vec{\nabla} \varphi| = \sqrt{(\partial_{x_1} \varphi)^2 + (\partial_{x_2} \varphi)^2 + (\partial_{x_3} \varphi)^2}$.

Si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle son gradient est la matrice définie par l'expression

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_1} f_2 & \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_2} f_1 & \partial_{x_2} f_2 & \partial_{x_2} f_3 \\ \partial_{x_3} f_1 & \partial_{x_3} f_2 & \partial_{x_3} f_3 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

- **Le Laplacien.** Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles nous avons

$$\Delta \varphi = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 \varphi,$$

et si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle on écrira

$$\Delta \vec{f} = \begin{bmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{bmatrix}.$$

- **La divergence.** Si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle, on définit la divergence de \vec{f} de la façon suivante

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \partial_{x_1} f_1 + \partial_{x_2} f_2 + \partial_{x_3} f_3. \quad (2.5)$$

Les notations $\operatorname{div}(\vec{f})$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ coexistent, mais nous allons privilégier (dans la mesure du possible) la première notation $\operatorname{div}(\vec{f})$.

Les relations entre le gradient, le Laplacien et la divergence sont nombreuses, en particulier nous avons :

Lemme 2.2.1

- 1) si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction suffisamment régulière, alors

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \Delta \varphi \quad \text{et donc} \quad \operatorname{div}(\vec{\nabla} \varphi) = \Delta \varphi.$$

- 2) si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles et si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle, alors nous avons l'identité

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{f}) = \varphi \operatorname{div}(\vec{f}) + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{f}$$

- **Le produit vectoriel.** Si \vec{a} et \vec{b} sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , on définit leur produit vectoriel¹ $\vec{a} \wedge \vec{b}$ par l'expression :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

et ce produit vectoriel se généralise sans problème aux fonctions vectorielles (en écrivant $\vec{f} \wedge \vec{g}$ ponctuellement).

- **Le rotationnel.** Pour une fonction vectorielle $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nous définissons son rotationnel $\vec{\nabla} \wedge \vec{f}$ par le vecteur

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{bmatrix} \partial_{x_2} f_3 - \partial_{x_3} f_2 \\ \partial_{x_3} f_1 - \partial_{x_1} f_3 \\ \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

cet opérateur explique la manière dont un champ de vecteurs tourne autour d'un point (d'où son nom!) et nous avons les identités suivantes.

Lemme 2.2.2

- 1) Si $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux fonctions vectorielles et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\vec{\nabla} \wedge (\lambda \vec{f} + \vec{g}) = \lambda \vec{\nabla} \wedge \vec{f} + \vec{\nabla} \wedge \vec{g}.$$

- 2) Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles alors

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \varphi) = 0, \quad (2.8)$$

nous avons donc que le rotationnel d'un gradient est toujours nul.

1. La notation $\vec{a} \times \vec{b}$ est également utilisée dans la littérature.

3) Si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle, nous avons l'identité

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \Delta \vec{f}.$$

En particulier, si $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$ on a la formule

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = -\Delta \vec{f}.$$

4) Si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle, alors $\operatorname{div}(\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0$ et donc la divergence d'un rotationnel est toujours nulle.

- **Le produit tensoriel entre vecteurs.** Si \vec{a} et \vec{b} sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , le produit tensoriel $\vec{a} \otimes \vec{b}$ est défini par

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Ainsi, le produit tensoriel de deux vecteurs est un *tenseur* dont l'expression est donnée par une matrice. Cette définition justifie la notation $\vec{\nabla} \otimes \vec{f}$ utilisée précédemment dans (2.4).

- **La divergence d'un tenseur.** Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est la matrice associée à un tenseur, on définit la divergence de ce tenseur par la formule

$$\operatorname{div}(A) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} a_{11} + \partial_{x_2} a_{12} + \partial_{x_3} a_{13} \\ \partial_{x_1} a_{21} + \partial_{x_2} a_{22} + \partial_{x_3} a_{23} \\ \partial_{x_1} a_{31} + \partial_{x_2} a_{32} + \partial_{x_3} a_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Pour clore cette section, nous rappelons que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ est une matrice, alors on notera sa dérivée $\partial_{x_k} A = (\partial_{x_k} a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ et sa norme (usuelle) sera donnée par $|A| = \left(\sum_{i,j=1}^3 |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, mais il est bien sûr possible d'utiliser toute norme équivalente.

Quelques identités utiles

Voici quelques relations qui seront mises à profit dans les calculs des chapitres suivants :

Lemme 2.2.3

1) Si $\phi, \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles alors :

$$\Delta(\phi\varphi) = (\Delta\phi)\varphi + \phi\Delta\varphi + 2\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\varphi.$$

2) Si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle, suffisamment régulière, on a

$$(\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{f} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) \wedge \vec{f} + \vec{\nabla} \frac{|\vec{f}|^2}{2}.$$

2) Si $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux fonctions vectorielles suffisamment régulières et si $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$, alors on a l'identité

$$(\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{g} = \operatorname{div}(\vec{g} \otimes \vec{f}). \quad (2.11)$$

Cette dernière identité est très importante car elle sera constamment appliquée par la suite au terme de transport $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ des équations de Navier-Stokes (1.11).

Il existe, bien entendu, beaucoup d'autres propriétés et relations entre tous ces objets, mais les formules que nous venons d'exposer sont suffisantes pour l'étude que nous nous proposons de faire sur les équations de Navier-Stokes. Le lecteur qui souhaite approfondir certains détails du calcul vectoriel est invité à consulter le livre [1].

2.3 Espaces de Lebesgue

2.3.1 Généralités

Nous supposons que le lecteur est familier avec les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p \leq +\infty$, qui sont définis comme l'ensemble des fonctions mesurables $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

avec les modifications d'usage lorsque $p = +\infty$. Cette quantité est une norme et les espaces $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ sont des espaces de Banach. Parmi les propriétés fondamentales de ces espaces nous avons :

- Pour $1 \leq p < +\infty$, nous avons la relation de dualité $(L^p)' = L^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ce qui nous permet de réécrire la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ de la façon suivante

$$\|\varphi\|_{L^p} = \sup_{\|\phi\|_{L^{p'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\phi(x) dx \right|. \quad (2.12)$$

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz : si φ, ψ sont deux fonctions de carré intégrable, alors le produit $\varphi\psi$ appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$ et on a l'estimation

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)\psi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}. \quad (2.13)$$

- L'inégalité de Hölder, qui n'est rien d'autre qu'une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si φ, ψ et ϕ sont trois fonctions mesurables telles que $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in L^r(\mathbb{R}^n)$, avec la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, alors le produit $\varphi\psi\phi$ est une fonction intégrable et l'on a la majoration

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)\psi(x)\phi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^q} \|\phi\|_{L^r}. \quad (2.14)$$

- Dans le cas particulier $p = 2$, on dispose d'une structure supplémentaire : l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert (réel ou complexe en fonction des valeurs prises par les fonctions) muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2 \times L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx. \quad (2.15)$$

Lemme 2.3.1 (Une inégalité d'interpolation) *Si $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq +\infty$ sont trois indices et si pour une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons les informations $\varphi \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$, alors la fonction φ appartient à l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ et de plus on dispose de l'inégalité*

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^{p_0}}^\theta \|\varphi\|_{L^{p_1}}^{1-\theta}, \quad \text{avec } \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1} \quad \text{et } 0 < \theta < 1. \quad (2.16)$$

Cette inégalité est très intéressante car elle permet de déduire toute une famille d'estimations intermédiaires à partir des informations sur les "bords" L^{p_0} et L^{p_1} .

Une généralisation utile des espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ est donnée par les espaces $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p \leq +\infty$, de fonctions mesurables qui sont *localement* intégrables et qui sont caractérisés par l'ensemble

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \left(\int_K |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty, \quad \text{pour tout compact } K \subset \mathbb{R}^n \right\}. \quad (2.17)$$

Rappelons qu'il n'existe aucune relation d'inclusion entre les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, mais si l'on considère les espaces localement intégrables alors nous avons :

$$L^p \subset L^1_{loc} \quad \text{et} \quad L^p_{loc} \subset L^1_{loc} \quad \text{pour } 1 \leq p \leq +\infty.$$

Dans ce livre nous n'aurons que très occasionnellement besoin d'utiliser les espaces de fonctions localement intégrables, le lecteur qui souhaite avoir plus de détails sur ces espaces peut consulter les livres [24], [4] et [11, 12].

Bien évidemment, les espaces L^p et L^p_{loc} se généralisent sans aucun problème aux fonctions vectorielles mesurables $\vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, en particulier pour $1 \leq p \leq +\infty$ la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ qui caractérise les espaces $L^p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est donnée par l'expression

$$\|\vec{f}\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\vec{f}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec les modifications usuelles lorsque $p = +\infty$. Lorsque $1 \leq p < +\infty$ nous avons également la relation de dualité $(L^p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))' = L^{p'}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et donc l'expression (2.12) devient

$$\|\vec{f}\|_{L^p} = \sup_{\|\vec{g}\|_{L^{p'}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \vec{f}(x) \cdot \vec{g}(x) dx \right|.$$

Les propriétés (2.13), (2.14) et (2.16) présentées ci-dessus se maintiennent bien évidemment dans le cadre de fonctions vectorielles, remarquons simplement que lorsque $p = 2$ le produit scalaire (2.15) s'écrit dans ce cas de la façon suivante :

$$\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle_{L^2 \times L^2} = \int_{\mathbb{R}^m} \vec{f}(x) \cdot \overline{\vec{g}(x)} dx.$$

Remarque 2.3 *Si on considère des fonctions vectorielles $\vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, on désignera les espaces de Lebesgue par $L^p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, dans le cas de fonctions $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on désignera ces espaces par $L^p(\mathbb{R}^n)$ et lorsqu'il n'y a pas de confusion possible on adoptera tout simplement la notation L^p .*

2.3.2 Espaces de Lebesgue temps-espace

Tout au long de ce livre nous devrons étudier la taille de fonctions qui dépendent des variables de temps et d'espace et il sera nécessaire de distinguer la façon dont chacune de ces variables est mesurée. Puisque notre objectif est d'étudier les équations de Navier-Stokes définies sur tout l'espace \mathbb{R}^3 , nous allons concentrer notre étude sur des fonctions vectorielles du type

$$\begin{aligned} \vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\longmapsto \vec{f}(t, x), \end{aligned}$$

dans lesquelles la variable de temps t appartient à l'intervalle $[0, +\infty[$ (ou éventuellement à l'espace \mathbb{R} tout entier) et la variable d'espace x appartient à l'espace \mathbb{R}^3 .

Les objets qui seront définis dans toute cette section et les suivantes porteront principalement sur ce type de fonctions, mais il convient de remarquer que la plupart des définitions et propriétés qui suivent se généralisent aux dimensions autres que 1 (en temps) et 3 (en espace).

La première définition de cette section concerne donc les espaces de Lebesgue $L_t^p L_x^q$ qui nous permettront de mesurer des fonctions en considérant séparément leur intégrabilité suivant ces deux variables.

Définition 2.3.2 (Espaces de Lebesgue $L_t^p L_x^q$) Soit $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle mesurable, si $1 \leq p, q \leq +\infty$ sont deux paramètres réels, nous dirons que la fonction \vec{f} appartient à l'espace $L^p([0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ si elle est L^q -intégrable dans la variable d'espace et que la quantité résultante est L^p -intégrable dans la variable de temps.

L'espace $L^p([0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ peut être normé par la quantité

$$\|\vec{f}\|_{L_t^p L_x^q} = \left(\int_0^{+\infty} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^q}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{f}(t, x)|^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec les modifications nécessaires lorsque $p, q = +\infty$, comme par exemple

$$\|\vec{f}\|_{L_t^\infty L_x^q} = \sup_{t \in [0, +\infty[} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^q},$$

ou encore

$$\|\vec{f}\|_{L_t^\infty L_x^\infty} = \sup_{t \in [0, +\infty[} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^\infty} = \sup_{t \in [0, +\infty[} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |f(t, x)|.$$

Il est très important de remarquer que l'on intègre *d'abord* en variable d'espace et qu'*ensuite* on intègre en variable de temps et cet ordre d'intégration apparaîtra assez naturellement dans les calculs des chapitres suivants.

Remarquons également que cette définition s'applique sans modifications aux fonctions à valeurs réelles $\varphi : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et le choix d'introduire les espaces $L_t^p L_x^q$ dans le cadre des fonctions vectorielles correspond tout simplement aux situations les plus utilisées par la suite.

Indiquons finalement que les notations $L_t^p(L_x^q)$, $L_t^p L_x^q$ et $L^p([0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ coexisteront dans cet ouvrage, et si $I \subset [0, +\infty[$ est un intervalle, si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné et si $A = I \times \Omega$ représente le cylindre temps-espace, alors lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion nous écrirons tout simplement $L_t^p L_x^q(A)$ au lieu de $L^p(I, L^q(\Omega))$.

Voici maintenant une liste de propriétés que le lecteur pourra vérifier par lui-même :

- Si $p = q$, alors on a l'identification d'espaces $L^p([0, +\infty[, L^p(\mathbb{R}^3)) = L^p([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$.
- Si $1 \leq p, q \leq +\infty$, les espaces $L^p([0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ sont des espaces de Banach.
- Si $1 < p, q < +\infty$, les espaces $L^p([0, +\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ sont des espaces réflexifs et l'on a

$$(L_t^p L_x^q)' = L_t^{p'} L_x^{q'}, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

- Par dualité pour $1 \leq p, q < +\infty$, nous avons la formule

$$\|\vec{f}\|_{L_t^p L_x^q} = \sup_{\|\vec{g}\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \leq 1} \left| \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{g}(t, x) dx dt \right|.$$

- Soient $1 \leq p, p_0, p_1, q, q_0, q_1 \leq +\infty$ des indices réels. Pour deux fonctions vectorielles $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telles que $\vec{f} \in L^{p_0}([0, +\infty[, L^{q_0}(\mathbb{R}^3))$ et $\vec{g} \in L^{p_1}([0, +\infty[, L^{q_1}(\mathbb{R}^3))$, nous avons les inégalités de Hölder en temps et en espace :

$$\|\vec{f} \cdot \vec{g}\|_{L_t^p L_x^q} \leq \|\vec{f}\|_{L_t^{p_0} L_x^{q_0}} \|\vec{g}\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}}, \quad (2.18)$$

où $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1}$.

Une conséquence des inégalités de Hölder est l'inégalité d'interpolation suivante

$$\|\vec{f}\|_{L_t^p L_x^q} \leq \|\vec{f}\|_{L_t^{p_0} L_x^{q_0}}^\theta \|\vec{f}\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}}^{1-\theta}, \quad (2.19)$$

où $0 < \theta < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}$ et $1 \leq p, p_0, p_1, q, q_0, q_1 \leq +\infty$.

Lorsqu'on travaille avec des fonctions mesurables qui font intervenir deux variables, nous avons l'inégalité suivante qui sera utilisée à plusieurs reprises par la suite :

Lemme 2.3.3 (Inégalité de Minkowski continue) Soit $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction mesurable et soit $1 \leq p < +\infty$ un indice. Alors nous avons l'inégalité

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_0^{+\infty} \vec{f}(t, x) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{f}(t, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt. \quad (2.20)$$

Une preuve de cette majoration peut se consulter dans le livre [11]. Indiquons que ce résultat peut se réécrire comme suit :

$$\left\| \int_0^{+\infty} \vec{f}(t, \cdot) dt \right\|_{L^p} \leq \int_0^{+\infty} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^p} dt, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

2.3.3 Produit de Convolution

Le produit de convolution entre deux fonctions joue un rôle central en analyse, en particulier par les nombreuses propriétés qui proviennent des liens très forts existants entre ce produit, les dérivées et la transformation de Fourier. Dans l'étude des équations aux dérivées partielles, cet outil est incontournable et il convient de fixer ici les notations et de présenter les principales propriétés qui seront utilisées.

Définition 2.3.4 Si $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions qui appartiennent à l'espace $L^1(\mathbb{R}^3)$, alors le produit de convolution $\varphi * \psi$ est défini par l'expression

$$\varphi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y)\psi(x-y)dy.$$

De plus nous avons $\varphi * \psi \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et $\|\varphi * \psi\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^1}$.

Parmi les propriétés immédiates du produit de convolution nous avons :

- Les identités de commutativité et linéarité $\varphi * \psi = \psi * \varphi$ et $\varphi * (\psi + \phi) = \varphi * \psi + \varphi * \phi$.
- Si l'on note $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$ et si f, g, ϕ sont des fonctions suffisamment régulières, alors on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi * f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\check{\phi} * g(x)dx.$$

- Si φ, ψ sont des fonctions suffisamment régulières, alors pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$:

$$D^\alpha(\varphi * \psi) = (D^\alpha\varphi) * \psi = \varphi * (D^\alpha\psi).$$

- Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et si ψ est une fonction continue bornée, alors le produit de convolution $\varphi * \psi$ est une fonction continue bornée.
- En sortant du cadre L^1 (et en passant aux distributions), nous avons que l'élément neutre du produit de convolution est la masse de Dirac δ_0 , ce qui s'écrit formellement

$$\varphi * \delta_0 = \varphi,$$

pour toute fonction φ suffisamment régulière. Voir les livres [4], [5], [23] et [12] pour plus de détails.

Dans la proposition suivante, nous étendons le domaine de définition du produit de convolution en considérant des fonctions φ et ψ qui appartiennent à des espaces autres que $L^1(\mathbb{R}^3)$.

Proposition 2.3.5 (Inégalités de Young) Si $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables telles que $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $1 \leq p, q \leq +\infty$, alors le produit de convolution $\varphi * \psi$ appartient à l'espace $L^r(\mathbb{R}^3)$ où $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et l'on a l'inégalité

$$\|\varphi * \psi\|_{L^r} \leq \|\varphi\|_{L^p}\|\psi\|_{L^q}. \quad (2.21)$$

Pour une preuve de ces inégalités, voir les livres [24], [12]. Voici maintenant deux cas particuliers très utiles des inégalités de Young :

- Lorsque $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $\psi \in L^1(\mathbb{R}^3)$ nous avons l'inégalité $\|\varphi * \psi\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^1}$.
- Si $1 \leq p, q \leq +\infty$ et si $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors il vient $\|\varphi * \psi\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^q}$.

Les inégalités de Young sont très rigides par rapport aux indices p et q qui déterminent les espaces de Lebesgue des fonctions φ et ψ : une fois ces paramètres fixés, le choix de l'espace L^r dans lequel se trouve $\varphi * \psi$ est déterminé par la relation $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et sans informations supplémentaires il ne sera pas possible de s'affranchir de cette relation entre les indices p, q et r .

Soit maintenant $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et soit $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle. Le produit de convolution $\varphi * \vec{f}$ est alors défini par le vecteur

$$\varphi * \vec{f} = \begin{bmatrix} \varphi * f_1 \\ \varphi * f_2 \\ \varphi * f_3 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

On observera que toutes les propriétés énoncées précédemment se maintiennent dans ce cadre vectoriel : il suffit de raisonner composante par composante.

2.3.4 Transformation de Fourier

Les relations entre le produit de convolution et la transformée de Fourier seront de grande utilité dans les chapitres suivants où nous pourrons voir comment l'analyse en fréquence est un outil indispensable pour étudier les équations de Navier-Stokes.

Définition 2.3.6 Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^3)$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

La fonction résultante $\widehat{\varphi}$ est une fonction continue, qui tend vers 0 à l'infini et vérifie la majoration $\|\widehat{\varphi}\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{L^1}$. Si la fonction $\widehat{\varphi}$ est elle-même intégrable, alors nous avons la formule d'inversion suivante

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}](x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Voici maintenant une liste de quelques propriétés que vérifie la transformation de Fourier d'une fonction φ qu'on supposera intégrable et suffisamment régulière :

Lemme 2.3.7

1) *Dilatation* : pour $\lambda > 0$ on considère la fonction $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$, on a alors

$$\widehat{\varphi_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda^3} \widehat{\varphi}(\xi/\lambda).$$

2) *Translation* : pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, si on pose $\varphi_{x_0}(x) = \varphi(x - x_0)$, alors

$$\widehat{\varphi_{x_0}}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) e^{-ix_0 \cdot \xi}.$$

3) *Dérivation* : si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière intégrable, nous avons la formule

$$\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}}(\xi) = i\xi_k \widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{pour tout } k = 1, 2, 3.$$

Pour une démonstration de ces propriétés le lecteur peut consulter les livres [4], [5] et [23].

Le lien fondamental entre la transformation de Fourier et le produit de convolution est donné par le fait suivant : si φ, ψ sont deux fonctions qui appartiennent à l'espace $L^1(\mathbb{R}^3)$, alors nous avons l'identité

$$\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi),$$

et nous verrons par la suite comment cette formule permet de simplifier bien des calculs. Indiquons seulement que l'action de la plupart des opérateurs qui apparaissent dans l'étude des équations aux dérivées partielles peut se voir comme un produit de convolution, dès lors il est souvent bien plus commode de travailler directement avec un produit algébrique plutôt qu'avec un produit de convolution.

On peut également considérer la transformation de Fourier dans l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^3)$ et dans ce cas particulier nous disposons du résultat ci-dessous.

Théorème 2.3.8 (Plancherel) *Si φ est une fonction qui appartient à l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^3)$, alors nous avons l'équivalence*

$$\|\varphi\|_{L^2} \simeq \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}.$$

Le théorème de Plancherel sera utilisé de façon intensive dans les lignes qui suivent car il permettra de définir certains espaces fonctionnels en passant directement en variable de Fourier.

Pour finir, la transformation de Fourier peut s'étendre aux distributions tempérées, qui comme nous l'avons dit précédemment, constituent un cadre suffisamment large pour les besoins de ce livre (on rappelle les inclusions d'espaces (2.3)). On définit alors la transformation de Fourier d'une distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ en utilisant le crochet de dualité (2.2) :

$$(\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)) \quad \langle \mathcal{F}[f], \phi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle f, \mathcal{F}[\phi] \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}, \quad (2.23)$$

et toutes les propriétés de dilatation, translation, dérivation exposées dans les lignes ci-dessus se maintiennent.

Finalement, lorsque $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle (ou une distribution tempérée vectorielle), on définit la transformée de Fourier $\widehat{\vec{f}}$ par l'expression

$$\widehat{\vec{f}} = \begin{bmatrix} \widehat{f_1} \\ \widehat{f_2} \\ \widehat{f_3} \end{bmatrix},$$

et bien sûr toutes les propriétés exposées ci-dessus peuvent se transposer au cadre vectoriel sans aucun problème.

Remarque 2.4 *Dorénavant, et sauf mention explicite du contraire, on considèrera que tous les objets manipulés (que ce soit des fonctions à valeurs réelles ou vectorielles) sont des*

distributions tempérées et donc la transformation de Fourier devra se concevoir en tant qu'une opération générale explicitée par la formule (2.23).

La transformation de Fourier et les espaces de distributions tempérées sont des outils totalement standards pour l'étude des équations aux dérivées partielles. Le lecteur qui souhaite avoir plus de détails sur les propriétés de l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ et de ses relations avec la transformation de Fourier peut consulter les livres [4], [5], [23], [54] et [24].

2.4 Espaces de Sobolev

Introduits presque simultanément par S. Sobolev et J. Leray dans les années 1934-1935, ces espaces de fonctions sont maintenant totalement incontournables dans l'étude des équations aux dérivées partielles. L'idée de base consiste à utiliser les dérivées faibles (au sens de l'expression (2.1)) des fonctions et à mesurer la taille de celles-ci avec les espaces de Lebesgue.

2.4.1 Espaces de Sobolev non homogènes

A) Espaces de Sobolev d'ordre entier

Une première définition est la suivante.

Définition 2.4.1 (Espaces de Sobolev non homogènes d'ordre entier) Soient $k \in \mathbb{N}$ un entier et $1 \leq p < +\infty$ un paramètre réel. On définit l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$ comme l'ensemble des distributions $\vec{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ qui appartiennent à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ et dont les dérivées $D^\alpha \vec{f}$, prises au sens faible avec $|\alpha| \leq k$, appartiennent également à l'espace $L^p(\mathbb{R}^3)$.

Cet espace peut être muni de la norme $\|\vec{f}\|_{W^{k,p}} = \|\vec{f}\|_{L^p} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \vec{f}\|_{L^p}$.

Cette définition est classique et parmi les propriétés élémentaires de ces espaces nous avons :

- Les espaces $W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$ sont des espaces de Banach.
- Pour $k_2 \geq k_1$ nous avons $W^{k_2,p}(\mathbb{R}^3) \subset W^{k_1,p}(\mathbb{R}^3)$ et de plus $W^{0,p}(\mathbb{R}^3) = L^p(\mathbb{R}^3)$. Ces espaces sont donc décroissants par rapport au degré de régularité k considéré.

Dans ce livre nous allons employer principalement les espaces de Sobolev $W^{k,2}$. Etant donné que lorsque $p = 2$ les espaces de Lebesgue sont des espaces de Hilbert, nous adopterons dorénavant la notation $H^k(\mathbb{R}^3) = W^{k,2}(\mathbb{R}^3)$. En particulier, nous utiliserons très fréquemment l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^3)$ qui peut être caractérisé par la norme

$$\|\vec{f}\|_{H^1} = \|\vec{f}\|_{L^2} + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{f}\|_{L^2}. \quad (2.24)$$

Le fait de travailler sur l'espace de Lebesgue L^2 possède plusieurs avantages, en effet par la formule de Plancherel nous disposons de l'équivalence

$$\|\vec{f}\|_{L^2} \simeq \|\widehat{\vec{f}}\|_{L^2},$$

ce qui nous permet, en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier par rapport aux dérivations, de considérer la caractérisation suivante des espaces de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^3)$ pour

$k \geq 0$:

$$\|\vec{f}\|_{H^k} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \|\widehat{\vec{f}}\|_{L^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2k} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.25)$$

On remarquera alors qu'avec cette caractérisation des espaces de Sobolev qui utilise la transformée de Fourier, la régularité des fonctions se traduit en variable de Fourier par des propriétés de décroissance à l'infini des celles-ci.

B) Espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire

Les espaces de Sobolev ci-dessus mesurent la régularité des fonctions de manière discrète, dans le sens où le nombre de dérivées considérées est donné par le paramètre $k \in \mathbb{N}$. Dans les chapitres suivants nous aurons besoin d'étudier de façon plus fine la régularité, en particulier nous devons prendre en compte des dérivées d'ordre *fractionnaire* et pour cela nous allons considérer les espaces de Sobolev de régularité $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 0$.

Mais avant de donner la définition de ces espaces, nous rappelons quelques propriétés des puissances fractionnaires du Laplacien qui nous permettront justement de calculer des dérivées fractionnaires. Remarquons tout d'abord que, pour une fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, nous avons l'identité

$$\widehat{(-\Delta)\varphi}(\xi) = |\xi|^2 \widehat{\varphi}(\xi),$$

et inspirés par cette expression, pour $s > 0$ un réel nous pouvons définir les puissances fractionnaires du Laplacien $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ par la formule

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi}(\xi) = |\xi|^s \widehat{\varphi}(\xi). \quad (2.26)$$

Ainsi l'action de la puissance fractionnaire du Laplacien sur une fonction peut se lire très facilement au niveau de Fourier et son symbole est tout simplement $|\xi|^s$.

Nous obtenons alors un opérateur $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ qui peut également être défini en variable d'espace par l'expression²

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi(x) = C_{s.v.p.} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{3+s}} dy \quad \text{dans le cas où } 0 < s < 2. \quad (2.27)$$

Indiquons également que l'utilisation de la caractérisation au niveau de Fourier (2.26) de ces opérateurs nous permet d'écrire pour $s_1, s_2 > 0$, au moins formellement et pour φ une fonction suffisamment régulière, la formule suivante

$$(-\Delta)^{\frac{s_1}{2}} [(-\Delta)^{\frac{s_2}{2}}\varphi] = (-\Delta)^{\frac{s_1+s_2}{2}}\varphi.$$

De la même manière, l'interaction entre les dérivées partielles usuelles et les puissances fractionnaires du Laplacien est donnée par l'expression

$$\partial_{x_k} [(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi](x) = (-\Delta)^{\frac{s}{2}} [\partial_{x_k}\varphi](x), \quad \text{pour } k = 1, \dots, n \text{ et } s > 0. \quad (2.28)$$

2. Rappelons que la *valeur principale* de l'intégrale d'une fonction f avec une singularité au point 0 signifie

$$v.p. \int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varepsilon)} f(x) dx.$$

Voir [24] et [50] pour plus de détails concernant les puissances fractionnaires du Laplacien et pour une démonstration rigoureuse de l'équivalence de ces différentes représentations (en variable d'espace et en variable de Fourier) de l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$.

L'opérateur de dérivation fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ s'étend naturellement aux fonctions vectorielles $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en raisonnant composante par composante :

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \vec{f} = \begin{bmatrix} (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_1 \\ (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_2 \\ (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f_3 \end{bmatrix}.$$

Maintenant que nous avons à notre disposition cet opérateur de dérivation fractionnaire, nous pouvons donner la définition qui suit.

Définition 2.4.2 (Espaces de Sobolev non homogènes fractionnaires) *Si on considère $s > 0$ un paramètre réel, nous définissons l'espace de Sobolev non homogène fractionnaire $H^s(\mathbb{R}^3)$ comme l'ensemble des distributions $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ telles que $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et telles que la quantité $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \vec{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^3)$. Cet espace peut être caractérisé par la norme*

$$\|\vec{f}\|_{H^s} = \|\vec{f}\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \vec{f}\|_{L^2}.$$

- Les espaces $H^s(\mathbb{R}^3)$ avec $s > 0$ sont des espaces de Banach.
- Pour $s_2 \geq s_1 > 0$ nous avons les inclusions d'espaces

$$H^{s_2}(\mathbb{R}^3) \subset H^{s_1}(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3). \quad (2.29)$$

- Lorsque $s = k$ les espaces de Sobolev donnés dans la Définition 2.4.3 coïncident avec les espaces de Sobolev d'ordre entier et nous avons l'équivalence des normes

$$\|\vec{f}\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{\frac{k}{2}} \vec{f}\|_{L^2} \simeq \|\vec{f}\|_{L^2} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \vec{f}\|_{L^2}.$$

Bien évidemment, et en totale analogie avec la norme (2.25) donnée dans le cas d'espaces de Sobolev d'ordre entier, nous avons la caractérisation suivante pour $s > 0$:

$$\|\vec{f}\|_{H^s} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \|\widehat{\vec{f}}\|_{L^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.30)$$

Etant donné que nous allons travailler essentiellement avec ces espaces de Sobolev H^s , la formule (2.30) ci-dessus sera très utilisée pour réaliser la plupart des calculs.

Indiquons qu'il est tout à fait possible de définir les espaces de Sobolev $W^{s,p}$ avec $s > 0$ et $1 \leq p \leq +\infty$, mais pour les besoins de ce livre les espaces H^s sont plus que suffisants. Voir [24] et [50] pour plus de détails sur les espaces de Sobolev de régularité fractionnaire.

C) Espaces de Sobolev d'ordre négatif

Nous allons maintenant définir les espaces de Sobolev non homogènes de régularité négative et pour cela nous allons procéder par dualité.

Définition 2.4.3 (Espaces de Sobolev non homogènes de régularité négative)

Si $s > 0$ est un paramètre réel nous définissons l'espace de Sobolev non homogène de régularité négative $H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ comme l'ensemble des distributions $\vec{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ qui vérifient

$$|\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle| \leq C \|\vec{g}\|_{H^s},$$

pour tout $\vec{g} \in H^s(\mathbb{R}^3)$ et pour $\vec{f} \in H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ on note $\|\vec{f}\|_{H^{-s}}$ la plus petite constante possible dans la majoration ci-dessus.

Cette définition est bien trop abstraite pour nos besoins et nous allons maintenant donner une série de propriétés de ces espaces qui les rendront beaucoup plus concrets.

- Si $\vec{f} \in H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ et si $\vec{g} \in H^s(\mathbb{R}^3)$, nous utiliserons souvent la majoration suivante qui se déduit directement de la définition

$$|\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle_{H^{-s} \times H^s}| \leq \|\vec{f}\|_{H^{-s}} \|\vec{g}\|_{H^s}.$$

- Dans le cas des espaces de Sobolev de régularité négative, compte tenu de l'expression (2.30) qui utilise la transformation de Fourier pour caractériser les espaces H^s , nous avons

$$\|\vec{f}\|_{H^{-s}} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{-s} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.31)$$

- A partir des inégalités (2.29), pour $s_2 \geq s_1 > 0$ nous avons par dualité les inclusions

$$L^2(\mathbb{R}^3) \subset H^{-s_1}(\mathbb{R}^3) \subset H^{-s_2}(\mathbb{R}^3), \quad (2.32)$$

ainsi, plus l'indice de régularité est négatif, plus ces espaces sont grands.

- Les espaces de Sobolev de régularité négative peuvent contenir des objets qui ne sont pas nécessairement des fonctions, par exemple si $s > 3/2$ alors nous avons $\delta_0 \in H^{-s}(\mathbb{R}^3)$.

2.4.2 Espaces de Sobolev homogènes

Nous dirons qu'une norme $\|\cdot\|$ définie sur un ensemble de fonctions $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ainsi que son espace fonctionnel associé, est *homogène* si pour tout $\lambda > 0$, si on pose $\vec{f}_\lambda(x) = \vec{f}(\lambda x)$, alors il existe un réel $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|\vec{f}_\lambda\| = \lambda^\sigma \|\vec{f}\|.$$

Les espaces de Lebesgue usuels $L^p(\mathbb{R}^3)$ sont homogènes car nous avons $\|\vec{f}_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-3/p} \|\vec{f}\|_{L^p}$, mais tous les espaces de Sobolev que nous venons de présenter ne sont pas homogènes par rapport à la dilatation : en effet, si nous calculons par exemple la quantité $\|\vec{f}_\lambda\|_{H^1}$ en utilisant la caractérisation donnée dans (2.24) nous obtenons

$$\|\vec{f}_\lambda\|_{H^1} = \|\vec{f}_\lambda\|_{L^2} + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{f}_\lambda\|_{L^2} = \lambda^{-3/2} \|\vec{f}\|_{L^2} + \lambda^{1-3/2} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{f}\|_{L^2},$$

et nous voyons bien que cette norme est donnée comme la somme de deux termes d'homogénéité différente.

Il est donc assez naturel d'utiliser comme cadre de travail des espaces fonctionnels homogènes. Nous aurons besoin des définitions suivantes.

Définition 2.4.4 (Espaces de Sobolev homogènes)

- Si $k \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev homogène d'ordre entier \dot{H}^k est défini comme l'ensemble des distributions $\vec{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ telles que toutes les dérivées $D^\alpha \vec{f}$ avec $|\alpha| = k$ appartiennent à l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$. On peut caractériser cet espace par la condition

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^k} = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \vec{f}\|_{L^2} < +\infty.$$

- Si $s > 0$, l'espace de Sobolev homogène fractionnaire \dot{H}^s est donné comme l'ensemble des distributions $\vec{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ telles que la quantité suivante soit finie :

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \vec{f}\|_{L^2} < +\infty.$$

Voici quelques propriétés de ces espaces qu'il convient d'avoir en tête :

- Ces espaces sont bien homogènes, puisqu'on a

$$\|\vec{f}_\lambda\|_{\dot{H}^k} = \lambda^{k-3/2} \|\vec{f}\|_{\dot{H}^k} \quad \text{et} \quad \|\vec{f}_\lambda\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s-3/2} \|\vec{f}\|_{\dot{H}^s}.$$

- Les espaces de Sobolev homogènes tels qu'ils viennent d'être présentés *ne sont pas des espaces normés* car les quantités $\|\cdot\|_{\dot{H}^k}$ et $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ ne sont que des semi-normes. Plus rigoureusement, pour obtenir des espaces normés, si $0 < s < 3/2$ nous pouvons voir que l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ comme le complété de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ par rapport à la quantité $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \vec{f}\|_{L^2}$, mais si l'on a $3/2 + k \leq s < 3/2 + k + 1$ où k est un entier, alors il faudra considérer l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ comme un espace de distributions modulo les polynômes de degré inférieur ou égal à k .

- En utilisant la formule de Plancherel nous avons

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^s} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \vec{f}\|_{L^2} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.33)$$

- Si $s = k$, alors nous avons l'équivalence

$$\|(-\Delta)^{\frac{k}{2}} \vec{f}\|_{L^2} \simeq \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \vec{f}\|_{L^2},$$

un cas particulier important est donné par l'espace $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ pour lequel on peut écrire

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^1} = \|\vec{\nabla} \otimes \vec{f}\|_{L^2} \simeq \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{f}\|_{L^2} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Pour $s, \alpha > 0$ deux paramètres réels, nous avons

$$\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \vec{f}\|_{\dot{H}^s} \simeq \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} [(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \vec{f}]\|_{L^2} \simeq \|(-\Delta)^{\frac{s+\alpha}{2}} \vec{f}\|_{L^2} \simeq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{s+\alpha}}.$$

- Pour tout $s > 0$ on a $H^s(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ et nous disposons des inégalités

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^s} \leq \|\vec{f}\|_{H^s}. \quad (2.34)$$

- On remarquera que la norme des espaces de Sobolev non homogènes H^s se construit comme la somme d'une norme L^2 et de la quantité qui caractérise les espaces \dot{H}^s :

$$\|\vec{f}\|_{H^s} = \|\vec{f}\|_{L^2} + \|\vec{f}\|_{\dot{H}^s},$$

ce qui nous permet d'écrire $H^s = L^2 \cap \dot{H}^s$.

Passons maintenant aux espaces de Sobolev homogènes de régularité négative. De la même façon que dans le cas non homogène, nous utiliserons la dualité pour définir ces espaces.

Définition 2.4.5 (Espaces de Sobolev homogènes de régularité négative) Si $s > 0$, l'espace de Sobolev homogène de régularité négative \dot{H}^{-s} est donné comme l'ensemble des distributions $\vec{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ qui vérifient

$$|\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle| \leq C \|\vec{g}\|_{\dot{H}^s},$$

pour tout $\vec{g} \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ et on note $\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-s}}$ la plus petite constante possible dans la majoration ci-dessus.

Donnons quelques propriétés de ces espaces qui seront utiles par la suite.

- Pour $s > 0$, nous pouvons caractériser ces espaces par la condition

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-s}} \simeq \|(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \vec{f}\|_{L^2} < +\infty,$$

où l'opérateur $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}$ peut se définir en utilisant la transformation de Fourier par l'expression

$$\widehat{(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \vec{f}}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^s} \widehat{\vec{f}}(\xi). \quad (2.35)$$

En s'inspirant de cette formule, qui caractérise au niveau de Fourier les puissances fractionnaires du Laplacien, on adoptera souvent l'écriture suivante $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \vec{f} = \frac{1}{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}} \vec{f}$ et en particulier on écrira

$$(-\Delta)^{-1} \vec{f} = \frac{1}{(-\Delta)} \vec{f}. \quad (2.36)$$

Remarquons enfin qu'en variable d'espace nous avons la définition suivante

$$(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \vec{f}(x) = C_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{f}(y)}{|x-y|^{3-s}} dy. \quad (2.37)$$

L'opérateur $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}$ est également connu comme le *potentiel de Riesz* de degré s . Voir le livre [24] pour plus de détails.

Remarque 2.5 Les opérateurs $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ et $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}$ sont des opérateurs non locaux comme cela peut se voir avec les formules (2.27) et (2.37) : pour déterminer leur action en un point quelconque d'une fonction donnée il est nécessaire d'utiliser l'information sur tout le domaine de définition de la fonction.

Observons qu'avec la caractérisation (2.35) de l'opérateur $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}$ donnée au niveau de Fourier, nous avons en totale analogie avec la formule (2.28) la relation suivante entre cet opérateur et les dérivées partielles usuelles :

$$\partial_{x_k} [(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \vec{f}](x) = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} [\partial_{x_k} \vec{f}](x), \quad \text{pour } k = 1, \dots, n \text{ et } s > 0. \quad (2.38)$$

Avec ces représentations, et en utilisant la formule de Plancherel, nous pouvons écrire

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-s}} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2s} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad (2.39)$$

Voici quelques observations supplémentaires :

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour $s > 0$ nous avons $\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \vec{f}\|_{\dot{H}^{-s}} \simeq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{\alpha-s}}$.
- Il faut également faire très attention avec ces espaces homogènes : par exemple si $-s < -3/2$ alors, même si φ est une fonction de test, il y a un problème pour donner un sens à l'expression $\|(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} \varphi\|_{L^2}$: il faut exiger *en plus* que la fonction φ ait suffisamment de moments nuls.
- Par dualité, à partir de l'inégalité (2.34), on a l'inclusion

$$\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^3) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^3). \quad (2.40)$$

- Pour $\phi, \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions suffisamment régulières, alors pour $s > 0$ les opérateurs $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ et $(-\Delta)^{-\frac{s}{2}}$ sont autoadjoints, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^3} ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} \phi) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi ((-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi) dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}} \phi \right) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} \phi \left(\frac{1}{(-\Delta)^{\frac{s}{2}}} \varphi \right) dx. \quad (2.41)$$

Remarque 2.6 *Il existe plusieurs caractérisations équivalentes des espaces de Sobolev et l'objectif recherché ici n'est pas celui de faire un exposé complet sur ces espaces de fonctions. Ainsi, nous avons choisi de présenter uniquement les caractérisations et les propriétés qui seront directement utilisées par la suite : les points précédents sont donc très loin d'un exposé rigoureux. Une exposition plus détaillée peut se consulter dans les livres [24], [50] ou [46].*

2.4.3 Inégalités de Sobolev et d'interpolation

Les inégalités de Sobolev permettent de majorer la taille (estimée en norme L^p) des fonctions par la taille de leurs dérivées (estimée au sens d'un espace de Sobolev). Il s'agit donc d'un outil précieux en analyse des équations aux dérivées partielles.

Théorème 2.4.6 (Inégalités de Sobolev)

1) Si $0 < s < n/2$, alors nous avons les inégalités de Sobolev

$$\|\vec{f}\|_{L^q} \leq C \|\vec{f}\|_{\dot{H}^s}, \quad \text{avec} \quad \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - s, \quad (2.42)$$

où $C > 0$ est une constante universelle qui ne dépend que de la dimension n .

2) Si $s = n/2$, alors l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans l'espace de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$ pour tout $2 \leq q < +\infty$.

3) Si $n/2 < s < +\infty$, alors chaque élément de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ peut être modifié sur un ensemble de mesure nulle tel que la fonction résultante soit bornée et uniformément continue. En particulier on a l'inclusion $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Voir les Exercices 2.4 et 2.5 pour une démonstration des inégalités (2.42). Voir également les Exercices 2.8 et 2.9 pour quelques détails concernant les deux derniers points de ce théorème.

Un exemple fondamental dans ce cours est le suivant : si $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle telle que $\vec{\nabla} \otimes \vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, alors nous avons l'inclusion $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$ et la majoration

$$\|\vec{f}\|_{L^6} \leq C \|\vec{f}\|_{\dot{H}^1}. \quad (2.43)$$

Ainsi, si nous disposons d'un contrôle en norme L^2 des premières dérivées de la fonction \vec{f} , nous pouvons immédiatement en déduire un contrôle en norme L^6 de la fonction \vec{f} et cette information supplémentaire sera d'une grande utilité dans les différents calculs que nous allons réaliser, en particulier lorsqu'on la conjugue avec l'inégalité d'interpolation (2.16).

Observons également que l'on a les relations de dualité $(\dot{H}^1)' = \dot{H}^{-1}$ et $(L^6)' = L^{\frac{6}{5}}$ et donc -toujours par dualité- à partir de l'inclusion $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$ qui provient des inégalité de Sobolev (2.42) on obtient l'inclusion d'espaces $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ qui se traduit par l'inégalité

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}} \leq C \|\vec{f}\|_{L^{\frac{6}{5}}}. \quad (2.44)$$

Cette inégalité *duale* est souvent utile dans les calculs.

Plus généralement, indiquons que nous avons également les inégalités suivantes :

Corollaire 2.4.7 (Inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev) *Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction qui appartient à l'espace $L^p(\mathbb{R}^3)$ où $1 < p \leq 2$. Alors pour $0 < s < 3/2$ on a l'inégalité*

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-s}} \leq C \|\vec{f}\|_{L^p}, \quad \text{avec } s + \frac{3}{2} = \frac{3}{p}.$$

Voir deux vérifications différentes de cette estimation (ainsi que quelques généralisations) dans les Exercices 2.4 et 2.5.

Voici maintenant un résultat particulièrement utile dans de nombreuses applications.

Proposition 2.4.8 (Inégalités d'interpolation) *Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction qui appartient à l'espace $\dot{H}^{s_0} \cap \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^3)$ pour $0 \leq s_0 < s_1$. Alors si $0 < \theta < 1$ est un paramètre d'interpolation, on a l'estimation suivante*

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^s} \leq \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{s_0}}^\theta \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{s_1}}^{1-\theta},$$

où $s = \theta s_0 + (1 - \theta)s_1$. Ce résultat se maintient pour les espaces de Sobolev non homogènes.

Preuve. On écrit, en utilisant la formule de Plancherel

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^s} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\xi|^{2\theta s_0} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^{2\theta} \right) \left(|\xi|^{2(1-\theta)s_1} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^{2(1-\theta)} \right) d\xi \right)^{\frac{1}{2}},$$

puis en appliquant l'inégalité de Hölder (avec $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, où $p = \frac{1}{\theta}$ et $q = \frac{1}{1-\theta}$), il vient

$$\|\vec{f}\|_{\dot{H}^s} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s_0} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s_1} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{(1-\theta)}{2}} = \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{s_0}}^\theta \|\vec{f}\|_{\dot{H}^{s_1}}^{1-\theta},$$

ce qui nous donne bien l'estimation recherchée. ■

Il existe bien sûr des versions plus générales de toutes ces inégalités et qui font intervenir d'autres espaces de fonctions plus sophistiqués, mais ces énoncés suffisent largement à nos besoins.

2.4.4 Lois de produit

Nous nous intéressons maintenant à des inégalités qui expliquent le comportement des espaces de Sobolev par rapport au produit de deux fonctions. Le résultat qui suit est totalement fondamental dans l'étude des équations de Navier-Stokes, car il permettra de faire des estimations dans les termes non linéaires.

Théorème 2.4.9 (Lois de produit) *Soient $0 < \delta < 3/2$ et $s \geq 0$ deux réels et si $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions qui appartiennent à l'espace $H^s(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^\delta(\mathbb{R}^3)$ alors nous avons l'inégalité*

$$\|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}} \leq C (\|f\|_{\dot{H}^\delta} \|g\|_{H^s} + \|g\|_{\dot{H}^\delta} \|f\|_{H^s}). \quad (2.45)$$

Lorsque tous les espaces de Sobolev sont des espaces homogènes on a :

$$\|fg\|_{\dot{H}^{s+\delta-3/2}} \leq C (\|f\|_{\dot{H}^\delta} \|g\|_{\dot{H}^s} + \|g\|_{\dot{H}^\delta} \|f\|_{\dot{H}^s}).$$

Un cas particulier important de ce résultat est donné lorsque $\delta = 1$, $s = 3/2$ et alors nous avons l'inégalité

$$\|fg\|_{\dot{H}^1} \leq C \left(\|f\|_{\dot{H}^1} \|g\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} + \|g\|_{\dot{H}^1} \|f\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (2.46)$$

Démonstration. Par un souci d'espace, on se concentre uniquement sur l'inégalité (2.45) et on décompose la vérification de ces inégalités en deux cas.

- Supposons tout d'abord que l'on a $s + \delta - 3/2 \leq 0$.

Nous voulons étudier la quantité $\|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}}$ et pour cela on procède par dualité en considérant une fonction $\psi \in H^{3/2-s-\delta}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\|\psi\|_{H^{3/2-s-\delta}} \leq 1$ et on peut alors écrire

$$\|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}} = \sup_{\|\psi\|_{H^{3/2-s-\delta}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (fg)\psi dx \right|.$$

On remarque que par les inégalités de Sobolev (2.42) on a les injections d'espaces suivantes $H^s(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{6}{3-2s}}(\mathbb{R}^3)$ et $\dot{H}^\delta(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{6}{3-2\delta}}(\mathbb{R}^3)$ et comme par hypothèse nous avons $f, g \in H^s(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^\delta(\mathbb{R}^3)$, on a donc $f, g \in L^{\frac{6}{3-2s}}(\mathbb{R}^3)$ et $f, g \in L^{\frac{6}{3-2\delta}}(\mathbb{R}^3)$. On observe également que l'on a $\psi \in H^{3/2-s-\delta}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{6}{2(s+\delta)}}(\mathbb{R}^3)$, ce qui nous permet d'étudier l'intégrale ci-dessus uniquement avec des espaces de Lebesgue et en appliquant l'inégalité de Hölder il vient

$$\|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}} = \sup_{\|\psi\|_{H^{3/2-s-\delta}} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (fg)\psi dx \right| \leq \sup_{\|\psi\|_{H^{3/2-s-\delta}} \leq 1} \left(\|f\|_{L^{\frac{6}{3-2s}}} \|g\|_{L^{\frac{6}{3-2\delta}}} \|\psi\|_{L^{\frac{6}{2(s+\delta)}}} \right),$$

finalement, en utilisant les inégalités entre espaces de Lebesgue et espaces de Sobolev on obtient

$$\|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}} \leq \sup_{\|\psi\|_{H^{3/2-s-\delta}} \leq 1} \left(\|f\|_{H^s} \|g\|_{\dot{H}^\delta} \|\psi\|_{H^{3/2-s-\delta}} \right),$$

ce qui nous donne le résultat recherché lorsque $s + \delta - 3/2 \leq 0$.

- Etudions maintenant le cas où $s + \delta - 3/2 > 0$.

En utilisant la transformation de Fourier et la formule de Plancherel on écrit

$$\begin{aligned} \|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}}^2 &\simeq \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} |\widehat{f} * \widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &\simeq \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{g}(\zeta) d\zeta \right|^2 d\xi, \end{aligned}$$

on découpe maintenant le domaine d'intégration de la deuxième intégrale ci-dessus et l'on a

$$\begin{aligned} \|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}}^2 &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} \left| \int_{\{|\zeta| < |\xi - \zeta|\}} \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{g}(\zeta) d\zeta \right|^2 d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} \left| \int_{\{|\zeta| > |\xi - \zeta|\}} \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{g}(\zeta) d\zeta \right|^2 d\xi \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ces deux termes se traitent de la même façon, de sorte qu'on se concentre sur la première double intégrale de (2.47) et on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} \left| \int_{\{|\zeta| < |\xi - \zeta|\}} \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{g}(\zeta) d\zeta \right|^2 d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\{|\zeta| < |\xi - \zeta|\}} |\zeta|^{-\delta} |\widehat{f}(\xi - \zeta)| |\zeta|^\delta |\widehat{g}(\zeta)| d\zeta \right)^2 d\xi \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce terme on a

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} \left(\int_{\{|\zeta| < |\xi - \zeta|\}} |\zeta|^{-2\delta} |\widehat{f}(\xi - \zeta)|^2 d\zeta \right) \left(\int_{\{|\zeta| < |\xi - \zeta|\}} |\zeta|^{2\delta} |\widehat{g}(\zeta)|^2 d\zeta \right) d\xi \\ &\leq \|g\|_{\dot{H}^\delta}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\{|\zeta| < |\xi - \zeta|\}} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} |\zeta|^{-2\delta} |\widehat{f}(\xi - \zeta)|^2 d\zeta d\xi. \end{aligned}$$

On pose $\eta = \xi - \zeta$ et donc $\zeta = \xi - \eta$ et avec ce changement de variable nous avons

$$\leq \|g\|_{\dot{H}^\delta}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\{|\xi - \eta| < |\eta|\}} (1 + |\xi|^2)^{s+\delta-3/2} |\xi - \eta|^{-2\delta} |\widehat{f}(\eta)|^2 d\eta d\xi.$$

Maintenant on observe que sur l'ensemble $\{|\xi - \eta| < |\eta|\}$ on a $|\xi| \leq 2|\eta|$, ce qui nous permet d'écrire en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} &\leq \|g\|_{\dot{H}^\delta}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\{|\xi - \eta| < |\eta|\}} (1 + 4|\eta|^2)^s |\widehat{f}(\eta)|^2 (1 + 4|\eta|^2)^{\delta-3/2} |\xi - \eta|^{-2\delta} d\zeta d\xi \\ &\leq \|g\|_{\dot{H}^\delta}^2 \int_{\mathbb{R}^3} (1 + 4|\eta|^2)^s |\widehat{f}(\eta)|^2 (1 + 4|\eta|^2)^{\delta-3/2} \int_{\{|\xi - \eta| < |\eta|\}} |\xi - \eta|^{-2\delta} d\xi d\zeta, \end{aligned}$$

et puisque $0 < \delta < 3/2$, un calcul direct donne $\int_{\{|\xi - \eta| < |\eta|\}} |\xi - \eta|^{-2\delta} d\xi = C|\eta|^{3-2\delta}$ de manière que l'on obtient la majoration

$$\begin{aligned} &\leq C \|g\|_{\dot{H}^\delta}^2 \int_{\mathbb{R}^3} (1 + 4|\eta|^2)^s |\widehat{f}(\eta)|^2 (1 + 4|\eta|^2)^{\delta-3/2} |\eta|^{3-2\delta} d\zeta \\ &\leq C \|g\|_{\dot{H}^\delta}^2 \sup_{\eta \in \mathbb{R}^3} \left((1 + 4|\eta|^2)^{\delta-3/2} |\eta|^{3-2\delta} \right) \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\eta|^2)^s |\widehat{f}(\eta)|^2 d\zeta \\ &\leq C \|g\|_{\dot{H}^\delta}^2 \|f\|_{H^s}^2. \end{aligned}$$

La deuxième double intégrale de (2.47) se traite de façon totalement similaire en interchangeant f par g . Ainsi, on obtient finalement la majoration

$$\|fg\|_{H^{s+\delta-3/2}} \leq C (\|f\|_{\dot{H}^\delta} \|g\|_{H^s} + \|g\|_{\dot{H}^\delta} \|f\|_{H^s}),$$

ce qui termine la démonstration des lois de produits (2.45). \blacksquare

Remarque 2.7 *Il est très important d'observer encore une fois que les inégalités de Hölder (2.18), de Young (2.21), de Sobolev (2.42) et les lois de produit (2.45) présentées ci-dessus sont très rigides, dans le sens où il faut faire attention dans les différentes relations vérifiées par les indices des espaces fonctionnels considérés.*

Nous nous sommes particulièrement focalisés dans les lignes précédentes sur les espaces de Sobolev qui se construisent à partir de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $n = 3$. Dans cet ouvrage, il sera rarement nécessaire d'utiliser d'autres espaces de Sobolev, mais à toutes fins utiles nous introduisons l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ avec $s > 0$ et $1 < p < +\infty$ comme l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui appartiennent à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ et telles que la quantité $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p}$ est bornée. Ces espaces peuvent être normés par la fonctionnelle

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p}.$$

Pour $0 < s < n/p$, les espaces de Sobolev homogènes $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ s'obtiennent comme le complété de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par rapport à la quantité $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p}$. Si $n/p+k \leq s < n/p+k+1$ où k est un entier, alors l'espace $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions modulo les polynômes de degré inférieur ou égal à k telles que $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} < +\infty$. Il vient alors :

Proposition 2.4.10 (Inégalités de Sobolev)

1) Si $0 < s < n/p$, alors nous avons les inégalités de Sobolev

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{\dot{W}^{s,p}}, \quad \text{avec } \frac{n}{q} = \frac{n}{p} - s,$$

où $C > 0$ est une constante universelle qui ne dépend que de la dimension n .

2) Si $s = n/p$, alors l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans l'espace de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \leq q < +\infty$.

3) Si $n/p < s < +\infty$, alors chaque élément de l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ peut être modifié sur un ensemble de mesure nulle tel que la fonction résultante soit bornée et uniformément continue. En particulier on a l'inclusion $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nous avons également le résultat suivant

Proposition 2.4.11 (Inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev) *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui appartient à l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$. Alors pour $0 < s < n/p$ on a l'inégalité*

$$\|(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad \text{avec } s + \frac{n}{q} = \frac{n}{p}.$$

Nous avons soigneusement évité ici les cas limites $p = 1$ et $p = +\infty$ car ils nécessitent un traitement légèrement différent. Les lecteurs intéressés sur ces points ou sur les démonstrations des résultats ci-dessus pourront consulter les livres [49], [6] et [24]. Finalement, pour étudier les fonctions vectorielles, il suffit de raisonner composante par composante.

2.5 Quelques résultats utiles

Nous terminons ce chapitre avec un très court rappel de résultats (plus ou moins classiques selon le bagage mathématique du lecteur) qui seront utilisés à plusieurs reprises par la suite.

2.5.1 Transformées de Riesz

Les transformées de Riesz vont intervenir souvent dans ce livre car elles nous permettront de mettre en lumière dans les chapitres suivants certaines propriétés des champs de vecteurs à divergence nulle.

Définition 2.5.1 Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière. Pour tout $1 \leq j \leq 3$ on définit les transformées de Riesz R_j de φ par la formule

$$R_j(\varphi)(x) = C.v.p. \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{3+1}} \varphi(y) dy.$$

En utilisant la transformation de Fourier nous avons

$$\widehat{R_j(\varphi)}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{\varphi}(\xi),$$

ce qui nous permet d'écrire

$$R_j(\varphi) = \frac{\partial_j}{\sqrt{(-\Delta)}} \varphi.$$

La définition en variable réelle ne sera pas souvent employée dans ce livre, et nous privilégierons plutôt la caractérisation qui utilise la transformation de Fourier car elle nous permettra d'obtenir assez facilement des résultats intéressants : par exemple, un calcul direct en variable de Fourier nous donne l'identité suivante

$$-Id = \sum_{j=1}^3 R_j(R_j) = \sum_{j=1}^3 R_j^2.$$

On remarque également que pour toute fonction suffisamment régulière les transformées de Riesz commutent avec les dérivations :

$$\partial_{x_k}(R_j\varphi) = R_j(\partial_{x_k}\varphi) \quad \text{et} \quad (-\Delta)^{\frac{s}{2}}(R_j\varphi) = R_j((-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi), \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Le résultat fondamental concernant les transformées de Riesz est le suivant.

Théorème 2.5.2 Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui appartient à un espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$ pour $1 < p < +\infty$, alors pour tout $1 \leq j \leq 3$ les transformées de Riesz R_j de φ sont bornées de L^p dans L^p et on a le contrôle suivant

$$\|R_j(\varphi)\|_{L^p} \leq C\|\varphi\|_{L^p}.$$

En particulier, les transformées de Riesz sont bornées dans tous les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ pour $s \in \mathbb{R}$ et l'on a

$$\|R_j(\varphi)\|_{H^s} \leq C\|\varphi\|_{H^s} \quad \text{et} \quad \|R_j(\varphi)\|_{\dot{H}^s} \leq C\|\varphi\|_{\dot{H}^s}.$$

Remarque 2.8 Les transformées de Riesz ne sont pas bornées dans les espaces limites L^1 et L^∞ .

Le lecteur peut trouver une démonstration de ce théorème ainsi que d'autres propriétés des transformées de Riesz dans le livre [24].

La généralisation aux fonctions vectorielles est directe en raisonnant composante par composante : pour $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et pour $1 \leq j \leq 3$ on écrit alors

$$R_j(\vec{f}) = \begin{bmatrix} R_j(f_1) \\ R_j(f_2) \\ R_j(f_3) \end{bmatrix}$$

2.5.2 Trois résultats simples, mais utiles

Voici maintenant quelques résultats utiles dans de nombreuses situations. Le premier est une inégalité importante pour l'analyse des équations aux dérivées partielles :

Lemme 2.5.3 (Inégalité de Grönwall) Soient $\phi, \psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\phi(t) \geq 0$ et $\psi(t) \geq 0$. Si, pour $t_0 \leq t$ on a

$$\phi(t) \leq A + B \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds, \quad (2.48)$$

où A et B sont des constantes positives, alors pour $t_0 \leq t$ on a l'inégalité

$$\phi(t) \leq A \exp \left(B \int_{t_0}^t \psi(s)ds \right). \quad (2.49)$$

Un cas classique d'utilisation de cette inégalité correspond au cas où la fonction ψ vérifie $\psi \equiv 1$ dans la condition (2.48), et alors on obtient tout simplement l'estimation $\phi(t) \leq A e^{B(t-t_0)}$. Une autre situation intéressante est donnée lorsque $A = 0$ dans (2.48), et alors on peut en déduire que $\phi(t) = 0$, ce dernier cas est souvent mis en place pour vérifier l'unicité des solutions d'équations aux dérivées partielles.

Remarque 2.9 L'hypothèse de continuité peut être contournée et ce résultat se généralise aux fonctions positives mesurables en imposant les conditions

$$\int_{t_0}^t \psi(s)ds < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds < +\infty.$$

Ainsi, si $\phi, \psi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables telles que $\phi(t) \geq 0$ et $\psi(t) \geq 0$ et qui vérifient en plus les deux conditions ci-dessus et l'hypothèse (2.48), alors on a l'estimation (2.49).

Voici une autre inégalité générale :

Lemme 2.5.4 (Inégalité de Jensen) Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré de mesure finie tel que $\mu(X) = 1$ et soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et si $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ est une fonction telle que $f(x) \in I$ pour μ -presque tout $x \in X$, alors $\int_X f(x)d\mu(x) \in I$, $\varphi(f)$ est μ -intégrable et nous avons l'inégalité

$$\varphi \left(\int_X f(x)d\mu(x) \right) \leq \int_X \varphi(f)(x)d\mu(x).$$

Le troisième résultat nous indique le comportement d'une fonction localement intégrable par rapport à sa moyenne :

Théorème 2.5.5 (de différentiation de Lebesgue) *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, alors on a la limite*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x),$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Nous avons également la limite presque partout :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(x) - f(y)| dy = 0.$$

Les points pour lesquels ces limites ont lieu sont appelés des points de Lebesgue de l'application f .

En dimension $n = 1$ nous avons en particulier le résultat suivant,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds = f(t),$$

où $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable et $0 < t < +\infty$.

Pour finir, voici l'inégalité de Young pour le produit de deux facteurs positifs qui est constamment utilisée pour faire des estimations sur le produit de deux normes : pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et pour tous paramètres $1 < p, q < +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (2.50)$$

Un exemple fréquemment utilisé par la suite est le suivant, si $f \in \mathbb{X}(\mathbb{R}^3)$ et si $g \in \mathbb{Y}(\mathbb{R}^3)$, où \mathbb{X}, \mathbb{Y} sont des espaces normés quelconques, alors on a tout simplement la majoration

$$\|f\|_{\mathbb{X}} \|g\|_{\mathbb{Y}} = (C \|f\|_{\mathbb{X}}) \left(\frac{1}{C} \|g\|_{\mathbb{Y}} \right) \leq \frac{1}{2} (C \|f\|_{\mathbb{X}})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} \|g\|_{\mathbb{Y}} \right)^2.$$

2.5.3 Banach-Aloaglu et Rellich-Kondrashov

Les deux théorèmes suivants sont très importants car ils donnent un bon cadre pour étudier les limites (fortes ou faibles) de suites de fonctions.

Théorème 2.5.6 (Banach-Aloaglu) *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach séparable, soit $(E', \|\cdot\|_{E'})$ son espace dual et soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace E' . Si la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E' (on a $\|T_n\|_{E'} < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors on peut en extraire une sous-suite $(T_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui est faiblement-* convergente.*

Ce théorème est d'une grande utilité pour obtenir la convergence (au sens faible-*) de suites. Bien évidemment, si les espaces considérés sont réflexifs, alors la convergence faible-* peut se remplacer par la convergence faible car dans ce cas précis la topologie faible coïncide avec la topologie faible-*. En revanche, puisqu'on doit passer par des sous-suites extraites, ce résultat ne donne aucune indication sur l'éventuelle unicité de la limite. Par exemple, si l'on considère

la suite $(-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors on peut en extraire au moins deux sous-suites convergentes : $a_n = 1$ et $b_n = -1$, et on observe bien ici la perte d'unicité.

Le résultat qui suit est fondamental car il permet d'obtenir des injections *compactes* entre les espaces de Sobolev et de Lebesgue mais pour cela les objets considérés doivent être définis sur un sous ensemble Ω borné et à régulier de \mathbb{R}^3 . Ainsi, on dira que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ si l'on a $f \in L^2(\Omega)$ et si la dérivée $\vec{\nabla} f$ prise au sens des distributions appartient à l'espace $L^2(\Omega)$. Cette définition s'étend sans problème aux espaces de Sobolev $H^k(\Omega)$ en demandant que $f \in L^2(\Omega)$ et que les dérivées faibles vérifient $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$, pour $|\alpha| = k$.

Nous avons alors :

Théorème 2.5.7 (Rellich-Kondrashov) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert borné à bord régulier. Si $0 < s < \frac{n}{2}$, alors l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ est continûment inclus dans l'espace $L^{q^*}(\Omega)$ où $q^* = \frac{2n}{n-2s} > 2$. De plus cette inclusion est compacte dans les espaces $L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < q^*$.*

Grâce à ce résultat, on obtient que toute suite faiblement convergente dans $H^1(\Omega)$ possède une sous-suite qui converge fortement dans $L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < q^*$: on a donc un mode de convergence fort (localement) ce qui est particulièrement utile lorsqu'on utilise des arguments d'approximation, mais le prix à payer est le fait de travailler avec des sous-suites. Voir [6] pour une preuve de ce résultat.

Notes et compléments

Dans ce chapitre nous avons réuni la plupart des éléments mathématiques nécessaires pour la présentation des équations de Navier-Stokes que l'on se propose de faire dans les chapitres suivants. Comme nous allons le voir, les espaces de Lebesgue et de Sobolev, ainsi que les outils usuels des équations aux dérivées partielles (transformation de Fourier, convolution, etc.), sont suffisants pour une première introduction à l'analyse mathématique de ces équations de la mécanique des fluides.

En effet, même si les techniques les plus récentes pour étudier les équations de Navier-Stokes mettent en oeuvre des espaces fonctionnels plus sophistiqués (comme les espaces de Besov, de Morrey, de Triebel-Lizorkin, etc.), les difficultés inhérentes de ces équations peuvent s'observer directement dans le cadre donné ici et c'est justement ce qui fait toute la difficulté de ce problème : les outils les plus sophistiqués dont nous disposons aujourd'hui ne permettent pas de réaliser une percée considérable dans la compréhension complète des problèmes d'existence, d'unicité ou de régularité de ces équations.

2.6 Exercices

Exercice 2.1 (Identités vectorielles)

1. Vérifier que l'on a l'identité $\vec{f} \cdot \vec{g} = \text{Tr}(\vec{f} \otimes \vec{g})$.
2. Montrer l'identité $f \Delta g = \Delta(fg) - (\Delta f)g - 2\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g$.

3. Vérifier la formule $(\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{g} = \text{div}(\vec{g} \otimes \vec{f})$. A t-on besoin de $\text{div}(\vec{f}) = 0$, de $\text{div}(\vec{g}) = 0$ ou des deux ?

4. Démontrer l'identité $(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} + \vec{\nabla} \frac{|\vec{u}|^2}{2} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$.

5. Vérifier que l'on a

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = -\Delta \vec{u} + \vec{\nabla} \text{div}(\vec{u}).$$

Exercice 2.2

1. Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle régulière. Montrer par une intégration par parties que l'on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{f} \cdot \vec{f} dx = - \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{f}|^2 dx.$$

2. Soient $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ trois fonctions vectorielles régulières avec uniquement $\text{div}(\vec{f}) = 0$. Vérifier par une intégration par parties que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} [(\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{g}] \cdot \vec{h} dx = - \int_{\mathbb{R}^3} [(\vec{f} \cdot \vec{\nabla})\vec{h}] \cdot \vec{g} dx$$

Exercice 2.3

1. Quelle est l'homogénéité des espaces Lebesgue $L_t^p L_x^q$? Si $\lambda > 0$ et si on considère la fonction $f_\lambda(t, x) = f(\lambda t, \lambda x)$, donner la valeur de $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$\|f_\lambda\|_{L_t^p L_x^q} = \lambda^\sigma \|f\|_{L_t^p L_x^q}.$$

2. Démontrer les inégalités de Hölder données dans la formule (2.18).

Exercice 2.4 (Inégalité de Hedberg et de Hardy-Littlewood-Sobolev) L'objectif de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev suivante

$$\|(-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad (2.51)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, $1 < p < q < +\infty$ et $0 < s < n/p$ sont des paramètres réels qui vérifient l'identité $\frac{n}{p} = s + \frac{n}{q}$.

Pour cela on aura besoin quelques propriétés des fonctions maximales dont voici la définition : pour f une fonction mesurable, on définit $\mathcal{M}(f)$ sa fonction maximale associée par l'expression

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{v_n r^n} \int_{\{|y|<r\}} |f(x-y)| dy,$$

où v_n est le volume de la boule unité n -dimensionnelle. On admettra les points suivants :

- $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$,
- si $f \neq 0$, alors $\mathcal{M}(f)$ n'appartient jamais à l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$,
- pour $1 < p < +\infty$, on a l'estimation $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$.

Une propriété fondamentale des fonctions maximales est la suivante : si $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et décroissante, si $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n et si on pose $\Phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \Phi(x/t)$, alors on a l'inégalité ponctuelle

$$\sup_{t>0} (|f| * \Phi_t)(x) \leq \|\Phi\|_{L^1} f(x).$$

Nous prions le lecteur de consulter [24] pour plus de détails concernant les fonctions maximales et pour une démonstration de ces estimations.

1. En utilisant la caractérisation de l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}$ comme une intégrale de Riemann-Liouville³

$$(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^{+\infty} t^{s/2-1} \mathbf{g}_t * f(x) dt,$$

où \mathbf{g}_t est la fonction gaussienne et Γ est la fonction Gamma usuelle, obtenir la majoration

$$|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x)| \leq \frac{\mathcal{M}(f)(x)}{\Gamma(s/2)} \int_0^T t^{s/2-1} dt + \frac{C}{\Gamma(s/2)} \int_T^{+\infty} t^{s/2-1} t^{-\frac{n}{2p}} \|f\|_{L^p} dt,$$

2. Déterminer la valeur de $T = T(\mathcal{M}(f)(x), \|f\|_{L^p})$ qui permet d'obtenir l'inégalité suivante (connue comme inégalité de Hedberg)

$$|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x)| \leq C \|f\|_{L^p}^{\frac{sp}{n}} \mathcal{M}(f)(x)^{1-\frac{sp}{n}}.$$

3. Reconstruire la norme L^q des deux côtés de cette inégalité ponctuelle pour obtenir l'inégalité recherchée (2.51).

Remarque 2.10 Pour obtenir les inégalités de Sobolev énoncées dans l'expression (2.42), il suffit de considérer que la fonction f est de la forme $f = (-\Delta)^{\frac{s}{2}} g$.

Exercice 2.5 (Espaces de Lorentz) Dans cet exercice nous allons voir une deuxième preuve de l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev (2.51). Pour cela nous aurons besoin de considérer les espaces de Lorentz⁴ $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (avec $1 \leq p < +\infty$) qui sont donnés comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que la quantité suivante est bornée

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \left\{ \alpha \times d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right\} < +\infty,$$

où $d_f(\alpha)$ est la fonction de distribution de f définie par $d_f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f(x)|>\alpha\}}(x) dx$.

1. Montrer l'identité

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

2. Vérifier l'inégalité

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

3. Démontrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{|x|^{n/p}}$ appartient à l'espace de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

3. Passer en variable de Fourier pour vérifier cette identité.

4. Appelés également espaces de Marcinkiewicz ou espace L^p -faibles.

4. En acceptant la variante suivante des inégalités de Young qui fait intervenir des espaces de Lorentz :

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^{p,\infty}} \|g\|_{L^q},$$

où $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ avec $1 < p, q, r < +\infty$, et en utilisant la caractérisation par convolution de l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}$ donnée dans (2.37) dont la version n -dimensionnelle est donnée par $(-\Delta)^{\frac{-s}{2}} f(x) = C_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-s}} dy$, démontrer les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev (2.51).

Voir [24] pour plus de détails concernant les espaces de Lorentz et pour une démonstration des inégalités de Young qui font intervenir ce type d'espace.

Exercice 2.6

1. Soit f une fonction qui appartient aux espaces $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ et $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Montrer l'inégalité

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{\dot{H}^{-1}} \|f\|_{\dot{H}^1}.$$

2. Soit f une fonction qui appartient aux espaces $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ et $\dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$. Montrer l'inégalité

$$\|f\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 \leq \|f\|_{\dot{H}^1} \|f\|_{\dot{H}^2}.$$

3. Si f est une fonction telle que $f \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$, alors vérifier les estimations suivantes :

$$(a) \|f\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \leq \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|f\|_{\dot{H}^2}^{\frac{3}{4}},$$

$$(b) \|f\|_{\dot{H}^1} \leq \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{H}^2}^{\frac{1}{2}},$$

$$(c) \|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|f\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \|f\|_{\dot{H}^2}^{\frac{1}{4}}.$$

4. Si $f \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$, montrer que l'on a

$$\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|f\|_{\dot{H}^{-1}}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{H}^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Ces inégalités dépendent-elles de la dimension ?

Exercice 2.7

1. A-t-on les inclusions d'espaces $\dot{H}^2(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$?
(Indication : passer en Fourier et faire un dessin).
2. Si $f \in \dot{H}^2(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, a-t-on $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$?

Exercice 2.8 Sur l'espace \mathbb{R}^2 on considère la fonction

$$f(x) = \varphi(x) \ln(-\ln|x|),$$

où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est une fonction positive qui vaut 1 sur la boule $B(0, \frac{1}{2})$ et qui vérifie $\text{sup } \varphi \subset B(0, 1)$.

1. Vérifier que la fonction f n'est pas bornée.

2. Montrer que l'on a l'estimation

$$|\partial_{x_j} f(x)| \leq \frac{C}{|x| |\ln|x||},$$

et en déduire que f appartient à l'espace $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$.

3. En déduire que l'espace $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ne s'injecte pas dans l'espace de Lebesgue $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ (cet exemple montre bien que les conditions données dans le deuxième point du Théorème 2.4.6, page 30, sont strictes).

Exercice 2.9 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui appartient à l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^3)$.

1. Montrer que l'on a l'estimation

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\xi)| d\xi.$$

2. En introduisant convenablement le poids $(1 + |\xi|^2)^2$, vérifier l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \leq C \|f\|_{H^2},$$

et en déduire l'inclusion d'espaces $H^2(\mathbb{R}^3) \subset L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

3. La seule information $f \in \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$ suffit-elle pour obtenir $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$?

4. Cette estimation se maintient-elle si l'on travaille sur \mathbb{R}^4 ?

Exercice 2.10 Soit $f \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)$. Montrer que l'on a l'inégalité

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{H}^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Pour cela suivre les étapes suivantes :

1. Pour un paramètre $A > 0$ arbitraire et pour f une fonction sympathique, obtenir l'estimation

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \int_{\{|\xi| < A\}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi + C \int_{\{|\xi| \geq A\}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi.$$

2. En déduire l'inégalité

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} + C \|f\|_{\dot{H}^2}^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Calibrer le paramètre A pour obtenir le résultat recherché pour cette fonction f sympathique, en déduire le résultat général par densité.

Chapitre 3

Solutions classiques

Dans ce chapitre nous allons étudier les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3.1)$$

en utilisant *essentiellement* les outils et les techniques mathématiques qui étaient disponibles au tout début du XX^{ème} siècle, c'est à dire que les fonctions considérées ainsi que leurs dérivées seront continues et dérivables au sens fort. Cette approche peut sembler paradoxale, puisqu'il existe d'autres points de vue qui permettent d'obtenir des conclusions similaires avec un degré supérieur de généralité (en étudiant des dérivées faibles par exemple), mais cette première étude des équations de Navier-Stokes va nous montrer certains aspects explicites très intéressants qui ne sont pas souvent abordés par ailleurs.

Avant de nous lancer dans les calculs, il peut être utile de remarquer que d'une façon très générale les équations de Navier-Stokes (3.1) peuvent se concevoir comme deux problèmes différents sur les deux inconnues¹ \vec{u} et p :

- Une **équation de la chaleur non-linéaire** pour la vitesse \vec{u} : nous pouvons tout simplement réécrire les équations (3.1) ci-dessus de la façon suivante :

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} + \vec{F}_0, \quad (3.2)$$

où le terme $\vec{F}_0 = \vec{F}_0(\vec{u}, p, \vec{f})$ regrouperait tous les termes restants, à savoir

$$\vec{F}_0(\vec{u}, p, \vec{f}) = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}.$$

Ainsi, bien que ce terme \vec{F}_0 concentre l'essentiel des difficultés liées aux équations de Navier-Stokes, il n'est pas totalement inutile de faire quelques rappels sur l'équation de la chaleur (3.2) ci-dessus dans le cas très particulier où \vec{F}_0 serait juste un terme supplémentaire (sans dépendance par rapport à \vec{u} ou p) car, comme nous le verrons plus tard, certaines propriétés intéressantes de cette équation peuvent se transposer sous certaines conditions aux équations de Navier-Stokes.

1. Rappelons que \vec{f} est une force extérieure fixée par avance au même titre que la donnée initiale \vec{u}_0 .

- Une **équation de Poisson** pour la pression p : en effet, en appliquant formellement la divergence aux équations de Navier-Stokes on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\partial_t \vec{u}) &= \operatorname{div}(\Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}) \\ \partial_t(\operatorname{div}(\vec{u})) &= \Delta(\operatorname{div}(\vec{u})) - \operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \Delta p + \operatorname{div}(\vec{f}), \end{aligned}$$

et puisque l'on a $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$, nous obtenons l'équation

$$\Delta p = -\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \operatorname{div}(\vec{f}),$$

que nous réécrivons comme suit

$$\Delta p = F_1, \tag{3.3}$$

où $F_1 = F_1(\vec{u}, \vec{f})$ désigne les termes

$$F_1(\vec{u}, \vec{f}) = -\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \operatorname{div}(\vec{f}).$$

L'équation de Poisson (3.3) mérite également d'être étudiée lorsque le terme F_1 est un terme générique qui ne dépend pas de \vec{u} , car même dans ce cadre on obtiendra des informations qui pourront être exploitées par la suite.

Une fois que nous avons mis en évidence ces deux équations pour la vitesse \vec{u} et la pression p , nous allons étudier dans la Section 3.1 les équations de la chaleur et de Poisson correspondantes à chacune de ces inconnues et cette étude sera faite d'un point de vue assez large mais tout en gardant à l'esprit que ces résultats seront appliqués aux équations de Navier-Stokes : les énoncés seront donc donnés directement en dimension 3 d'espace et on ne recherchera pas forcément la plus grande généralité possible. Ensuite, dans la Section 3.2, nous verrons comment étudier les champs de vecteurs en utilisant la décomposition de Helmholtz, décomposition qui justement séparera les inconnues \vec{u} et p des équations de Navier-Stokes et permettra une application (relativement) directe des résultats de la première section.

Toutefois, avant de nous attaquer directement aux équations de Navier-Stokes nous allons réaliser dans la Section 3.3 une étude des *équations de Stokes* qui sont une simplification considérable des équations (3.1) car le terme le plus difficile à traiter, et qui est donné par la quantité non linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$, n'y est plus pris en compte. Comme nous le verrons ci-après, les équations de Stokes font également intervenir les deux inconnues \vec{u} et p et on pourra alors illustrer dans ce cadre simplifié et de façon très pédagogique l'utilisation de la décomposition de Helmholtz pour séparer ces variables.

Finalement, une fois que nous aurons à notre disposition tous ces résultats, nous réaliserons dans la Section 3.4 une première étude des équations de Navier-Stokes avec des outils issus de l'analyse mathématique classique : nous verrons comment -et sous quelles hypothèses- il est possible de construire des solutions *fortes* de ces équations de la mécanique des fluides.

3.1 Equation de la chaleur et équation de Laplace

Dans cette section nous rappelons quelques résultats importants relatifs aux équations de la chaleur, de Laplace et de Poisson. Ces équations sont sans doute bien connues du lecteur, mais nous allons prendre le temps de mettre en lumière un certain nombre de propriétés qui seront utiles pour la suite. Pour la preuve de ces propriétés, nous avons la possibilité d'utiliser un langage moderne en passant directement par la théorie des distributions, mais nous allons

plutôt privilégier ici une approche plus classique. Ce choix permettra de dégager des outils et un langage qui seront directement mis à profit pour la vérification des principaux théorèmes de ce chapitre.

3.1.1 Equation de la chaleur

Notre point de départ est l'équation de la chaleur homogène : nous cherchons alors une fonction (scalaire pour commencer) $u :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\partial_t u - \Delta u = 0. \quad (3.4)$$

Nous disposons alors de la notion suivante :

Définition 3.1.1 (Solution Fondamentale pour l'équation de la chaleur) La fonction $\mathfrak{g}_t(x) = \mathfrak{g}(t, x)$ déterminée par

$$\mathfrak{g}_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & \text{si } t > 0 \text{ et si } x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

vérifie l'équation de la chaleur (3.4) sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$. Nous dirons que la fonction \mathfrak{g}_t est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. Nous dirons également que \mathfrak{g}_t est le noyau de la chaleur. On notera $\mathfrak{g}_1(x) = \mathfrak{g}(1, x) = \mathfrak{g}(x)$.

Le fait que cette fonction \mathfrak{g}_t satisfait l'équation de la chaleur dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ peut se vérifier directement en variable réelle ou plus rapidement en variable de Fourier et nous laissons les détails au lecteur. Voir également le livre [23].

Remarque 3.1 Les notations \mathfrak{g}_t , \mathcal{W}_t , \mathcal{M}_t ou encore h_t coexistent dans la littérature pour désigner cette fonction. On parlera alors de fonction gaussienne \mathfrak{g}_t , de fonction de Weierstrass \mathcal{W}_t ou de fonction maxwellienne \mathcal{M}_t . La notation h_t provient quant à elle du fait que cette fonction est solution de la "heat equation".

Voici maintenant quelques propriétés de la fonction \mathfrak{g}_t .

Proposition 3.1.2

1) Pour tout $t > 0$ nous avons l'identité

$$\widehat{\mathfrak{g}}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}.$$

2) Pour tout $t, s > 0$ nous avons la propriété de semi-groupe

$$\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_{t+s},$$

et pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière, on pourra également écrire

$$\mathfrak{g}_t * f = e^{t\Delta}(f),$$

on dira alors que l'opérateur $e^{t\Delta}$ est le semi-groupe associé à l'opérateur Laplacien et que son action sur les fonctions est donnée par convolution avec la gaussienne \mathfrak{g}_t .

3) La famille $(\mathbf{g}_t)_{t>0}$ est une approximation de l'identité : pour tout $t > 0$ on a $\|\mathbf{g}_t\|_{L^1} = 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{g}_t = \delta_0$.

4) Pour tout $t > 0$ et pour $\gamma > 0$ on a le contrôle (pour $|x| \geq 1$)

$$\mathbf{g}_t(x) \leq C \frac{t^{\frac{\gamma-n}{2}}}{|x|^\gamma}. \quad (3.5)$$

5) Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et si $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha \mathbf{g}(t, x) \right| \leq \begin{cases} C|x|^{-(n+|\alpha|+2k)} & \text{si } |x|^2 \geq t, \\ Ct^{-\frac{(n+|\alpha|+2k)}{2}} & \text{si } |x|^2 \leq t. \end{cases}$$

Proposition 3.1.3

1) Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et si $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t > 0$ et pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ on a

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha \mathbf{g}(t, \cdot) \right\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{|\alpha|+2k+n(1-1/p)}{2}}.$$

2) Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et si $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t > 0$ et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ on a

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha \mathbf{g}(t, \cdot) * f \right\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{|\alpha|+2k}{2}} \|f\|_{L^p}.$$

La preuve de ces estimations découle directement de la définition même du noyau de la chaleur \mathbf{g}_t et la vérification de ces propositions sera laissée en exercice au lecteur.

Remarque 3.2 La fonction \mathbf{g}_t est de classe C^∞ en variable d'espace pour un paramètre $t > 0$ fixé, mais si l'on est amené à considérer les deux variables, on observe que la variable t introduit une singularité qui peut être très gênante car non nécessairement intégrable.

En effet, soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R}^n)$, on considère $\mathbf{g}_t * f$ pour $t > 0$ et on s'intéresse à étudier la quantité $\|\Delta(\mathbf{g}_t * f)\|_{L_t^1 L_x^1}$. En estimant d'abord la variable d'espace et avec le point 2) de la proposition ci-dessus nous avons

$$\|\Delta(\mathbf{g}_t * f)\|_{L_x^1} \leq \|\Delta \mathbf{g}_t\|_{L_x^1} \|f\|_{L_x^1} \leq Ct^{-1} \|f\|_{L_x^1},$$

et cette dernière expression (en tant que fonction de la variable de temps) n'appartient pas à l'espace $L^1(]0, +\infty[)$: on remarque bien qu'une application directe de estimations ci-dessus n'est pas suffisante pour conclure que la quantité $\|\Delta(\mathbf{g}_t * f)\|_{L_t^1 L_x^1}$ (qui fait intervenir les deux variables) est bornée et il faudra faire très attention à cette particularité.

A) Problème de Cauchy homogène

Dans ce paragraphe nous nous intéressons maintenant à une version vectorielle de l'équation de la chaleur (3.4) avec une donnée initiale et on se place en dimension $n = 3$. Il s'agit alors d'étudier le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}(t, x) = \Delta \vec{u}(t, x), \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \end{cases} \quad (3.6)$$

où la donnée initiale $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifie certaines conditions qui seront bientôt explicitées et l'identité $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u}$ représente le système

$$\begin{bmatrix} \partial_t u_1 \\ \partial_t u_2 \\ \partial_t u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, il suffira de raisonner composante par composante pour obtenir le vecteur solution de cette équation.

Il est bien connu que ce problème d'évolution admet des solutions même pour des données initiales \vec{u}_0 assez générales, et nous y reviendrons un peu plus tard au Chapitre 4, mais dans ce chapitre nous aurons besoin du résultat suivant qui permet d'obtenir des solutions de l'équation (3.6) à partir de la solution fondamentale.

Théorème 3.1.4 Soit $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle telle que $\vec{u}_0 \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^3)$, alors la fonction

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x),$$

vérifie les points suivants.

- 1) $\vec{u}(t, x)$ est continue sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ et l'on a $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$,
- 2) $\vec{u}(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$,
- 3) $\vec{u}(t, x)$ vérifie l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}(t, x) = \Delta \vec{u}(t, x) & \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (3.7)$$

Démonstration. Vérifions tout d'abord que la fonction $\vec{u}(t, x)$ est bien définie, nous avons pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^3$:

$$|\vec{u}(t, x)| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\mathfrak{g}_t(x - y)| |\vec{u}_0(y)| dy \leq \|\mathfrak{g}_t\|_{L^1} \|\vec{u}_0\|_\infty < +\infty.$$

Maintenant, par un changement de variable élémentaire on peut écrire

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_0(x - \sqrt{t} y) \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4}} dy,$$

et puisque $\vec{u}_0 \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^3)$, on observe alors sans problème que la fonction \vec{u} est continue sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ et que l'on a en plus par convergence dominée $\lim_{t \rightarrow 0^+} \vec{u}(t, x) = \vec{u}_0(x)$ et donc $\vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x)$ ce qui donne la continuité sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$. Etant donné que pour $t > 0$ la fonction \mathfrak{g}_t est régulière, on obtient que $\vec{u}(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$. Pour le dernier point il suffit de remarquer que l'on a

$$(\partial_t - \Delta) \vec{u}(t, x) = (\partial_t - \Delta) [\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)] = [(\partial_t - \Delta) \mathfrak{g}_t] * \vec{u}_0(x) = 0,$$

car \mathfrak{g}_t est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et vérifie l'équation (3.7). ■

B) Problème de Cauchy non-homogène avec donnée initiale nulle

Soit maintenant $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs, le problème étudié ici est le suivant.

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} + \vec{f}, \\ \vec{u}(0, x) = 0. \end{cases}$$

Une particularité intéressante de ce problème d'évolution provient du fait qu'en présence d'une force extérieure \vec{f} non nulle et à partir d'une donnée initiale \vec{u}_0 nulle, nous obtenons une solution non nulle de cette équation comme nous l'indique le théorème qui suit.

Théorème 3.1.5 Soit $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une force extérieure donnée qui vérifie $\vec{f} \in \mathcal{C}_b^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$. Alors la fonction

$$\vec{u}(t, x) = \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \vec{f}(s, x) ds, \quad (3.8)$$

vérifie les points suivants :

- 1) $\vec{u}(t, x)$ est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$,
- 2) $\vec{u}(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$ et de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$,
- 3) $\vec{u}(t, x)$ est solution de l'équation de la chaleur non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}(t, x) = \Delta \vec{u}(t, x) + \vec{f}(t, x) & \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Démonstration. Pour le premier point : comme \vec{f} est continue bornée en variable d'espace et la fonction \mathbf{g}_t est intégrable en variable d'espace, on obtient par les propriétés du produit de convolution que la fonction $\mathbf{g}_{t-s} * \vec{f}(s, x)$ est continue sur \mathbb{R}^3 . Maintenant, par un changement de variables nous avons

$$\vec{u}(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{g}_{t-s}(y) \vec{f}(s, x - y) dy ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4}} \vec{f}(s, x - \sqrt{t-s} z) dz ds,$$

et comme la fonction \vec{f} est continue bornée en variable temporelle on obtient bien la continuité de $\vec{u}(t, \cdot)$ pour $t > 0$. Finalement, par convergence dominée en variable de temps on obtient sans problème $\lim_{t \rightarrow 0^+} \vec{u}(t, x) = 0$, ce qui nous permet de conclure la continuité sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$.

Pour le deuxième point, raisonnant composante par composante et pour tout indice $i, j, k = 1, 2, 3$ on obtient

$$\partial_{x_i} u_k(t, x) = \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \partial_{x_i} f_k(s, x) ds,$$

mais comme la fonction $\partial_{x_i} f_k$ appartient à l'espace $\mathcal{C}_b^0([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$ par hypothèse, alors avec les mêmes arguments antérieurs nous déduisons que la fonction $\partial_{x_i} u_k(t, x)$ est continue bornée sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$. De plus on peut écrire

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} u_k(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} \mathbf{g}(z) \partial_{x_j} f_k(s, x - \sqrt{t-s} z) dz \frac{ds}{\sqrt{t-s}}.$$

mais étant donné que la fonction $\partial_{x_i} \mathbf{g}$ est intégrable en variable d'espace, que la fonction $\partial_{x_j} f_k$ est continue bornée en temps et en espace et que le poids $(t-s)^{-1/2}$ est intégrable, on obtient que la fonction $\vec{u}(t, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$.

Pour le dernier point, on remarquera que toutes les fonctions considérées sont continues bornées, de sorte que l'on peut dériver sous le signe somme pour obtenir l'équation vérifiée par la fonction $\vec{u}(t, x)$ définie par (3.8). ■

Il existe bien sûr de nombreuses variantes de ces théorèmes, mais nous ne cherchons pas l'exhaustivité ici : ces énoncés sont suffisants pour nos besoins immédiats.

C) Résultat Général

Avec les deux théorèmes antérieurs et par le principe de superposition du problème homogène avec le problème non-homogène, nous pouvons étudier le cas général.

Théorème 3.1.6 Soit $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une force extérieure telle que l'on ait $\vec{f} \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$. Si la donnée initiale \vec{u}_0 est une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^3 , alors la fonction

$$\vec{u}(t, x) = \mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \vec{f}(s, x) ds,$$

est solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} + \vec{f} & \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

et vérifie les points suivants

- 1) $\vec{u}(t, x)$ est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$,
- 2) $\vec{u}(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$ et de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$.

Remarque 3.3 Nous verrons au Chapitre 4 comment étendre le Théorème 3.1.6 à des données initiales \vec{u}_0 et à des forces extérieures \vec{f} plus générales.

3.1.2 Equation de Laplace et de Poisson

Passons maintenant à l'étude des équations de Laplace et de Poisson qui nous permettront de mieux comprendre la relation entre la vitesse et la pression dans les équations de Navier-Stokes.

A) Equation de Laplace

L'équation de Laplace est historiquement une des premières équations aux dérivées partielles considérées et si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction suffisamment régulière cette équation s'écrit

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 f(x) = 0, \quad (3.9)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En étudiant certaines propriétés d'invariance de cette équation, il est très simple de vérifier que cette équation admet la solution suivante

Définition 3.1.7 (Solution Fondamentale pour l'équation de Laplace) Si v_n est la mesure de la boule unité de \mathbb{R}^n , alors la fonction

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(|x|) & (n = 2), \\ \frac{1}{n(n-2)v_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n > 2), \end{cases} \quad (3.10)$$

définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$ est la solution fondamentale de l'équation de Laplace (3.9) : nous avons

$$\Delta \Phi(x) = 0,$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Le lecteur peut consulter le livre [19] pour une construction de la solution fondamentale Φ en utilisant des outils totalement élémentaires.

Lorsque $n = 3$ (cas qui correspond aux équations de Navier-Stokes étudiées ici), la solution fondamentale est connue comme la *fonction de Green* (ou encore comme le *noyau de Green*) :

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}. \quad (3.11)$$

Dans ce cadre précis, nous pouvons voir sans problème que si $x \neq 0$, alors nous avons les inégalités

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}, \quad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^3}, \quad \text{et} \quad |D^3\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^4}, \quad (3.12)$$

où $C > 0$ est une constante générique.

Remarque 3.4 En utilisant le langage de la théorie des distributions on peut écrire l'identité $-\Delta \Phi = \delta_0$. On remarquera également sans problème que la fonction Φ est régulière en dehors de l'origine.

B) Problème non-homogène : l'équation de Poisson

A partir de la notion de solution fondamentale obtenue dans la section antérieure nous allons pouvoir résoudre l'équation de Poisson donnée par le problème suivant, où pour plus de simplicité nous nous plaçons directement dans le cas $n = 3$. Ainsi, si $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions suffisamment régulières, l'équation de Poisson est alors

$$-\Delta f(x) = g(x), \quad (3.13)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. La solution de ce problème est explicitée dans le résultat ci-dessous.

Théorème 3.1.8 Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^\sigma |D^\alpha g(x)| < +\infty, \quad (3.14)$$

avec $2 < \sigma < 3$. Alors, en utilisant la solution fondamentale de l'équation de Laplace Φ donnée par l'expression (3.10), on peut construire une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante

$$f(x) = \Phi * g(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x - y)g(y)dy, \quad (3.15)$$

et la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ et de plus elle vérifie l'équation de Poisson (3.13) sur \mathbb{R}^3 .

Démonstration. Par les propriétés du produit de convolution nous avons l'identité

$$\Delta f(x) = \Delta \Phi * g(x) = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \Phi * \partial_{x_i} g(x),$$

ce qui nous donne que f est de classe \mathcal{C}^2 car par hypothèse $g \in \mathcal{C}^1$ et Φ est régulière en dehors de l'origine. De plus nous pouvons écrire

$$\Delta f(x) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon < |y| < R} \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} g(x - y) \partial_{x_i} \Phi(y) dy = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon < |y| < R} \vec{\nabla} g(x - y) \cdot \vec{\nabla} \Phi(y) dy,$$

ainsi, par la première formule de Green nous avons l'identité

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\epsilon^2 \int_{\mathbb{S}^2} g(x - \epsilon\sigma) \sum_{i=1}^3 \sigma_i \partial_{x_i} \Phi(\epsilon\sigma) d\sigma - R^2 \int_{\mathbb{S}^2} g(x - R\sigma) \sum_{i=1}^3 \sigma_{x_i} \partial_i \Phi(R\sigma) d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\epsilon < |y| < R} g(x - y) \Delta \Phi(y) dy \right), \end{aligned}$$

et en remarquant que l'on a l'identité $\Delta \Phi = 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ainsi que les formules

$$\sum_{i=1}^3 \sigma_i \partial_{x_j} \Phi(\epsilon\sigma) = -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \text{ et } \sum_{i=1}^3 \sigma_i \partial_{x_j} \Phi(R\sigma) = -\frac{1}{4\pi R^2}, \text{ alors il vient}$$

$$\Delta f(x) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} g(x - \epsilon\sigma) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} g(x - R\sigma) d\sigma \right).$$

On remarque maintenant que par l'hypothèse (3.14), la fonction g est bornée près de l'origine, tend vers 0 à l'infini et en se rappelant que la mesure de la sphère unité \mathbb{S}^2 est 4π , par un passage à la limite nous avons bien l'identité recherchée

$$\Delta f(x) = -g(x),$$

ce qui termine la démonstration du Théorème 3.1.8. ■

La solution (3.15) du problème de Poisson (3.13) est donnée par convolution avec le noyau de Green Φ qui dont les dérivées vérifient les estimations (3.12). Nous aurons besoin d'un résultat général qui nous permettra d'estimer ces produits de convolution :

Lemme 3.1.9 Soient $0 < \alpha < 3$ un indice réel. Alors on a les estimations suivantes

1) Si $0 < \beta < 3$ et $\alpha + \beta - 3 > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{\alpha + \beta - 3}}. \quad (3.16)$$

2) Si $\beta = 3$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha} \max(1, \ln |x|). \quad (3.17)$$

3) Si $\beta > 3$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}. \quad (3.18)$$

Preuve. Observons tout d'abord que grâce à un changement de variable on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x - y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |y|)^\beta} dy,$$

de manière qu'il est totalement équivalent de travailler sur chacune de ces deux expressions ci-dessus.

- Pour obtenir ces estimations, on étudie d'abord le cas où $|x| < 1$ et on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy = \int_{\{|y| < 1\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy + \int_{\{|y| \geq 1\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy.$$

Comme $\frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} \leq 1$ nous écrivons

$$\int_{\{|y| < 1\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy \leq \int_{\{|y| < 1\}} \frac{1}{|y|^\alpha} dy < +\infty,$$

car $0 < \alpha < 3$. Maintenant, puisque on a supposé $|x| < 1$, alors on a les estimations $|y| \leq |x - y| + |x| \leq |x - y| + 1$ et donc $\frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} \leq \frac{1}{|y|^\beta}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\int_{\{|y| \geq 1\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy \leq \int_{\{|y| \geq 1\}} \frac{1}{|y|^{\alpha + \beta}} dy < +\infty,$$

car $\alpha + \beta - 3 > 0$ (ce que l'on a dans les trois cas de figure explicités). Nous avons donc obtenu que lorsque $|x| < 1$, alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy$ est bornée.

- Supposons maintenant que $|x| \geq 1$, nous avons alors :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy = \int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy + \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy.$$

Si on travaille sur l'ensemble $|y| \leq \frac{1}{2}|x|$, alors $|x| \leq |x - y| + |y| \leq |x - y| + \frac{1}{2}|x|$ et donc $\frac{1}{2}|x| \leq |x - y|$, on en déduit l'estimation $\frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\beta}$, il vient alors, car $0 < \alpha < 3$:

$$\int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1 + |x - y|)^\beta} dy \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\beta} \int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{|y|^\alpha} dy \leq \frac{C|x|^{3-\alpha}}{(1 + |x|)^\beta} \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{\alpha + \beta - 3}}.$$

Si on travaille à présent sur l'ensemble $\frac{1}{2}|x| < |y|$ on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy &\leq C \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| > |x|/2\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy \\ &+ C \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pour la première intégrale ci-dessus on remarque que sur l'ensemble $\frac{1}{2}|x| < |y|$, on a les contrôles $|x-y| \leq |x| + |y| \leq 3|y|$, et donc $\frac{1}{|y|^\alpha} \leq \frac{C}{|x-y|^\alpha}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| > |x|/2\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy &\leq \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| > |x|/2\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy \\ &\leq \int_{\{|x-y| > |x|/2\}} \frac{1}{|x-y|^{\alpha+\beta}} dy \leq \frac{C}{|x|^{\alpha+\beta-3}}, \end{aligned}$$

car on a $\alpha + \beta - 3 > 0$ par hypothèse. Pour la deuxième intégrale de l'expression (3.19) ci-dessus, sur l'ensemble $\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}$ on a $\frac{|x|}{2} \leq |y| \leq \frac{3}{2}|x|$, et donc $\frac{1}{|y|^\alpha} \leq \frac{C}{|x|^\alpha}$, et nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy &\leq \frac{C}{|x|^\alpha} \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy \\ &\leq \frac{C}{|x|^\alpha} \int_{\{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy \\ &\leq \frac{C}{|x|^\alpha} \int_{\{|z| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|z|)^\beta} dz. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nous distinguons ici trois cas :

1) Si $0 < \beta < 3$ on a pour l'intégrale ci-dessus :

$$\int_{\{|z| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|z|)^\beta} dz \leq \int_{\{|z| \leq |x|/2\}} \frac{1}{|z|^\beta} dz \leq \frac{C}{|x|^{\beta-3}},$$

ce qui nous donne finalement la majoration suivante lorsque $|x| \geq 1$:

$$\int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{1}{|y|^\alpha} \frac{1}{(1+|x-y|)^\beta} dy \leq \frac{C}{|x|^{\alpha+\beta-3}}.$$

Avec toutes ces estimations pour les cas $|x| < 1$ et $|x| \geq 1$, nous obtenons donc bien l'inégalité (3.16) recherchée.

2) Si $0 < \alpha < 3$ et $\beta = 3$, on a pour l'intégrale (3.20) on a (avec $|x| \gg 1$) :

$$\begin{aligned} \int_{\{|z| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|z|)^3} dz &= \int_{\{|z| \leq 1\}} \frac{1}{(1+|z|)^3} dz + \int_{\{1 < |z| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|z|)^3} dz \\ &\leq C + C' \int_1^{|x|/2} \frac{1}{(1+\rho)^3} d\rho \leq C + C' \int_1^{|x|/2} \frac{1}{\rho} d\rho \\ &\leq C \max(1, \ln(|x|)), \end{aligned}$$

de sorte que l'on a (avec toutes les estimations précédentes) le contrôle général suivant

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \frac{1}{(1+|y|)^\beta} dy \leq C \frac{\max(1, \ln|x|)}{(1+|x|)^\alpha},$$

ce qui démontre l'inégalité (3.17).

3) Finalement, si $\beta > 3$ on a pour l'intégrale (3.20) :

$$\begin{aligned} \int_{\{|z| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|z|)^\beta} dz &= \int_{\{|z| \leq 1\}} \frac{1}{(1+|z|)^\beta} dz + \int_{\{1 < |z| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|z|)^\beta} dz \\ &\leq C + C' \int_1^{|x|/2} \frac{1}{(1+\rho)^{\beta-2}} d\rho \leq C + C' \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{\beta-2}} d\rho = C'' < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui nous donne dans ce cas la majoration

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^\alpha} \frac{1}{(1+|y|)^\beta} dy \leq \frac{C}{(1+|x|)^\alpha},$$

et l'inégalité (3.18) est démontrée. \blacksquare

Remarque 3.5 Si l'on compare les exposants dans la partie de gauche et de droite de la formule (3.16) on notera qu'il y a une perte dans la décroissance obtenue car $\beta > \alpha + \beta - 3 > 0$ puisque $0 < \alpha < 3$. D'autre part, la condition $\alpha < 3$ est nécessaire car si $\alpha = 3$ alors le terme $\frac{1}{|y|^\alpha} = \frac{1}{|y|^3}$ ne serait pas localement intégrable. Bien évidemment ce résultat se généralise lorsque la dimension de l'espace ambiant est autre que $n = 3$.

On notera également une perte de la décroissance dans la formule (3.18) car initialement on a une décroissance de l'ordre de $\beta > 3$ mais la conclusion nous fournit une décroissance d'ordre $3 > \alpha > 0$.

La proposition qui suit explicite deux propriétés des solutions de l'équation de Poisson qui seront utilisées par la suite.

Proposition 3.1.10 Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ qui vérifie la condition

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|)^\sigma |D^\alpha g(x)| < +\infty, \quad \text{avec } 2 < \sigma < 3.$$

Soit f la solution du problème de Poisson (3.13) donnée par l'expression (3.15). Nous avons alors les points suivants :

- 1) $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|)^{\sigma-2} |f(x)| < +\infty,$
- 2) $\sup_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|)^{\sigma-1} |D^\alpha f(x)| < +\infty.$

Démonstration.

- 1) En utilisant l'hypothèse avec $2 < \sigma < 3$ et par définition de la solution fondamentale de l'équation de Laplace Φ donnée dans (3.10), nous avons directement l'estimation

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\Phi(x-y)| |g(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\Phi(x-y)| \frac{(1+|y|)^\sigma |g(y)|}{(1+|y|)^\sigma} dy \\ &\leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^3} (1+|y|)^\sigma |g(y)| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \frac{1}{(1+|y|)^\sigma} dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \frac{1}{(1+|y|)^\sigma} dy \leq C \frac{1}{(1+|x|)^{\sigma-2}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Lemme 3.1.9 pour estimer la dernière intégrale ci-dessus, et à partir de cette inégalité on obtient sans problème le premier point de la proposition.

- 2) Lorsque on a $|\alpha| = 1$, il suffit de combiner les arguments ci-dessus avec la première inégalité de l'expression (3.12) en effet on écrit, par les propriétés du produit de convolution et avec les hypothèses sur la fonction g :

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x)| &= |D^\alpha \Phi * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |D^\alpha \Phi(x-y)| \frac{(1+|y|)^\sigma |g(y)|}{(1+|y|)^\sigma} dy \\ &\leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^3} (1+|y|)^\sigma |g(y)| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} \frac{1}{(1+|y|)^\sigma} dy \\ &\leq C \frac{1}{(1+|x|)^{\sigma-1}}, \end{aligned}$$

où on a appliqué le Lemme 3.1.9 pour obtenir la dernière estimation.

Si $|\alpha| = 2$, on écrit alors pour $|\beta| = |\gamma| = 1$:

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |D^\beta \Phi(x-y)| \frac{(1+|y|)^\sigma |D^\gamma g(y)|}{(1+|y|)^\sigma} dy \\ &\leq C \sup_{y \in \mathbb{R}^3} (1+|y|)^\sigma |D^\gamma g(y)| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^2} \frac{1}{(1+|y|)^\sigma} dy \\ &\leq C \frac{1}{(1+|x|)^{\sigma-1}}, \end{aligned}$$

où nous avons appliqué encore une fois le Lemme 3.1.9 pour obtenir le contrôle annoncé. ■

On remarquera à partir des calculs ci-dessus, que si l'on a pas d'information sur la décroissance des dérivées de la fonction g alors on pourra difficilement obtenir de l'information sur la décroissance de la fonction $D^\alpha f$.

En suivant les arguments précédents, on notera également que pour étudier le comportement de la fonction $D^\alpha f$, on ne pourra pas forcément appliquer des dérivées d'ordre 2 sur le noyau de Green Φ car alors, par la deuxième estimation de l'expression (3.12), on aura $|D^\alpha \Phi(x-y)| \leq \frac{C}{|x-y|^3}$, ce qui nous empêchera d'appliquer le Lemme 3.1.9 (voir la Remarque 3.5). D'autre part, même si l'on suppose une meilleure décroissance pour la fonction g , par exemple si l'on suppose

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|)^\sigma |D^\alpha g(x)| < +\infty,$$

avec un $\sigma \geq 3$, alors on ne pourra pas en toute généralité améliorer la décroissance donnée dans le deuxième point de la proposition précédente car nous serions confronté au troisième point du Lemme 3.1.9. Nous verrons par la suite, dans la Section 3.6 ci-dessous, de quelle façon ces remarques vont influencer le comportement des solutions des équations de Navier-Stokes.

*

Il est bien sûr possible de continuer l'étude des équations de la chaleur et de l'équation de Poisson ainsi que les propriétés de leurs solutions, mais les résultats présentés ci-dessus suffisent amplement pour atteindre nos objectifs.

Nous allons donc étudier dans les pages qui suivent comment obtenir à partir des équations de Navier-Stokes une équation de la chaleur (non linéaire) pour la vitesse et une équation de Poisson pour la pression, mais avant il sera nécessaire d'énoncer un résultat qui va nous permettre de décomposer de manière astucieuse les champs de vecteurs.

3.2 Décomposition de Helmholtz

On s'intéresse ici à une décomposition pour un champ de vecteurs donné en deux champs de vecteurs dont l'un est à *divergence nulle* et l'autre peut se mettre sous la *forme d'un gradient* : plus précisément, si $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs, qui vérifie certaines hypothèses de décroissance, alors on peut écrire

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1,$$

où \vec{F}_0 vérifie $\operatorname{div}(\vec{F}_0) = 0$ (\vec{F}_0 est à divergence nulle) et l'on a pour \vec{F}_1 l'identité $\vec{F}_1 = \vec{\nabla}g$ (et donc \vec{F}_1 s'écrit sous la forme d'un gradient) pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ce qui permet d'écrire $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_1 = 0$. On parlera alors d'un champ de vecteur à divergence nulle et d'un champ de vecteur à rotationnel nul.

Cette écriture d'un champ de vecteurs en fonction de deux termes aux caractéristiques bien distinctes apparaît souvent en électromagnétisme et en mécanique des fluides (cette décomposition est également connue comme le *théorème fondamental du calcul vectoriel*).

Théorème 3.2.1 (Décomposition de Helmholtz) Soit $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 tel que l'on ait le contrôle

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^\sigma |D^\alpha \vec{F}(x)| < +\infty, \quad \text{avec } 2 < \sigma < 3.$$

Il existe alors deux champs de vecteurs $\vec{F}_0, \vec{F}_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^1 tels que l'on ait la décomposition

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1, \quad (3.21)$$

avec les propriétés suivantes :

- 1) Il existe une fonction $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 qui vérifie la condition $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-2} |p(x)| < +\infty$ et telle que $\vec{F}_1 = \vec{\nabla}p$.
- 2) \vec{F}_0 est à divergence nulle ($\operatorname{div}(\vec{F}_0) = 0$) et \vec{F}_1 est irrotationnel ($\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_1 = 0$).
- 3) On a les contrôles

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha \vec{F}_0(x)| < +\infty,$$

et

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha \vec{F}_1(x)| < +\infty.$$

- 4) La décomposition (3.21) ainsi obtenue est unique.

Démonstration. On commence par vérifier l'existence d'une telle décomposition et on considère la divergence du champ de vecteur \vec{F} , qui par hypothèse vérifie la majoration

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^\sigma |D^\alpha \operatorname{div}(\vec{F})| < +\infty, \quad 2 < \sigma < 3.$$

Avec cette estimation, en prenant $\operatorname{div}(\vec{F})$ comme une donnée, nous pouvons considérer l'équation de Poisson suivante avec pour inconnue une fonction $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Delta p = \operatorname{div}(\vec{F}), \quad (3.22)$$

et alors, cette équation de Poisson admet par le Théorème 3.1.8 une solution p qui est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ et qui vérifie, par la Proposition 3.1.10, les inégalités :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-2} |p(x)| &< +\infty, \quad \text{et} \\ \sup_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha p(x)| &< +\infty. \end{aligned} \quad (3.23)$$

La fonction p obtenue ci-dessus est bien de classe \mathcal{C}^2 et satisfait les conditions de décroissance explicitées dans le premier point du théorème. A partir de cette fonction p , on peut maintenant construire deux champs de vecteurs \vec{F}_1 et \vec{F}_0 de la façon suivante :

$$\vec{F}_1 = \vec{\nabla} p, \quad \text{et} \quad \vec{F}_0 = \vec{F} - \vec{F}_1, \quad (3.24)$$

et on remarque sans problème que les champs de vecteurs \vec{F}_0 et \vec{F}_1 sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ par construction.

Passons au deuxième point. Nous avons bien que le champ de vecteurs \vec{F}_1 est de rotationnel nul puisque l'on a l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} p) \equiv 0.$$

Si nous appliquons maintenant l'opérateur divergence au champ de vecteurs \vec{F}_0 , nous obtenons les identités

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}_0) &= \operatorname{div}(\vec{F} - \vec{F}_1) = \operatorname{div}(\vec{F} - \vec{\nabla} p) \\ &= \operatorname{div}(\vec{F}) - \operatorname{div}(\vec{\nabla} p) = \operatorname{div}(\vec{F}) - \Delta p = 0, \end{aligned}$$

car p est justement solution de l'équation de Poisson (3.22). On a ainsi obtenu l'existence de la décomposition $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1$ avec les propriétés recherchées, ce qui démontre le deuxième point du théorème.

Le troisième point se base sur le fait que la fonction p vérifie les estimations (3.23) et on obtient sans problème le contrôle suivant pour \vec{F}_1 :

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha \vec{F}_1(x)| = \sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha \vec{\nabla} p(x)| < +\infty.$$

Pour le champ de vecteurs \vec{F}_0 on utilise sa définition donnée dans l'expression (3.24) et l'hypothèse sur le champ de vecteurs \vec{F} pour obtenir

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha \vec{F}_0(x)| &= \sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha (\vec{F} - \vec{F}_1)(x)| \\ &\leq \sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha \vec{F}(x)| \\ &\quad + \sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D^\alpha \vec{F}_1(x)| < +\infty. \end{aligned}$$

Pour terminer il ne reste plus qu'à étudier l'unicité de la décomposition (3.21). On suppose donc qu'il existe une autre décomposition (\vec{G}_0, \vec{G}_1) avec les mêmes propriétés que le couple (\vec{F}_0, \vec{F}_1) , c'est à dire que $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1$ et $\vec{F} = \vec{G}_0 + \vec{G}_1$ où \vec{F}_0 et \vec{G}_0 sont à divergence nulle et où \vec{F}_1 et \vec{G}_1 sont à rotationnel nul et de plus on a les bonnes conditions de décroissance pour toutes ces champs de vecteurs.

Ainsi, $\vec{G}_1 - \vec{F}_1$ est un champ de vecteurs irrotationnel (i.e. $\vec{\nabla} \wedge (\vec{G}_1 - \vec{F}_1) = 0$) et on peut trouver, de la même façon que précédemment, une fonction q telle que $(\vec{G}_1 - \vec{F}_1) = \vec{\nabla}q$. Nous pouvons alors écrire

$$\operatorname{div}(\vec{G}_1 - \vec{F}_1) = \Delta q,$$

mais comme nous avons $\vec{F}_1 = \vec{F} - \vec{F}_0$ et $\vec{G}_1 = \vec{F} - \vec{G}_0$ nous obtenons la relation

$$\Delta q = \operatorname{div}(\vec{G}_1 - \vec{F}_1) = \operatorname{div}((\vec{F} - \vec{G}_0) - (\vec{F} - \vec{F}_0)) = \operatorname{div}(\vec{G}_0 - \vec{F}_0) = 0,$$

car \vec{F}_0 et \vec{G}_0 sont à divergence nulle. La fonction q est donc harmonique sur \mathbb{R}^3 et ses dérivées de premier ordre s'annulent à l'infini car les fonctions \vec{G}_1 et \vec{F}_1 vérifient les estimations du troisième point. Alors par le principe du maximum (pour les fonctions harmoniques) on a que q est une fonction constante, et donc $\vec{G}_1 - \vec{F}_1 = \vec{\nabla}q = 0$, ce qui nous donne l'unicité recherchée. ■

Cette décomposition des champs de vecteurs sera d'une grande utilité dans l'étude des équations de Navier-Stokes car elle nous permettra de séparer les composantes à divergence nulle et à rotationnel nul d'un champ de vecteurs et de ce fait on pourra étudier chacune des inconnues \vec{u} et p séparément. Nous verrons dans le chapitre suivant comment généraliser ce résultat à un cadre plus moderne en faisant intervenir des champs de vecteurs qui appartiennent à des espaces de fonctions comme les espaces de Lebesgue ou de Sobolev (on parlera alors du projecteur de Leray).

Mais avant de nous lancer dans l'étude des équations de Navier-Stokes, il est très utile de considérer d'abord un système plus simple donné par les équations de Stokes qui seront traitées dans la section qui suit.

3.3 Problème de Stokes et tenseur d'Oseen

Dans la section précédente nous avons vu qu'il est possible de décomposer les champs de vecteurs d'une façon très particulière qui, comme nous allons le voir, nous permettra de considérer des systèmes d'équations comme la superposition d'une équation de la chaleur et d'une équation de Poisson.

A) Le problème de Stokes

Pour mieux comprendre les mécanismes d'application de cette décomposition dans l'étude d'équations aux dérivées partielles, nous nous proposons d'étudier dans cette section le système suivant qui est une simplification des équations de Navier-Stokes classiques :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{g}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

où \vec{u}_0 est une donnée initiale que l'on supposera à divergence nulle, \vec{g} est une force extérieure donnée.

Remarquons que la condition de divergence nulle imposée à la donnée initiale correspond au fait que l'on cherchera des solutions $\vec{u}(t, x)$ qui sont continues en variable de temps, on s'attend donc à obtenir la limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \vec{u}(t, x) = \vec{u}(0, x)$ et par souci de compatibilité il est totalement naturel d'imposer la condition $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$.

Ce problème (3.25) correspond aux *équations de Stokes* et d'un point de vue physique, ces équations modélisent l'évolution dans le temps d'un fluide dont le terme de transport est totalement négligeable par rapport à la viscosité ambiante comme c'est le cas par exemple lorsqu'on étudie les propriétés de certains polymères.

D'un point de vue plus mathématique, on remarquera que par rapport aux équations de Navier-Stokes (3.1), le problème ci-dessus ne prend pas en compte le terme non-linéaire de transport $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$. Il s'agit alors d'un problème *linéaire* en \vec{u} qui sera beaucoup plus simple à étudier.

Toutefois, nous avons ici aussi deux inconnues (\vec{u}, p) et nous allons voir maintenant comment utiliser la décomposition de Helmholtz pour étudier séparément chacune de ces deux inconnues.

Théorème 3.3.1 (Solutions fortes du problème de Stokes) Soit $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 et $\vec{g} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ respectivement, tels que l'on ait :

- $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et $\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |D^\alpha \vec{u}_0(x)| < +\infty$,
- $\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^\sigma |D_x^\alpha \vec{g}(t, x)| < +\infty$, avec $2 < \sigma < 3$.

Alors il existe une unique solution (\vec{u}, p) du problème de Stokes (3.25) telle que

- 1) pour $|\alpha| \leq 2$, la fonction $D_x^\alpha p$ est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$,
- 2) on a le contrôle $\sup_{t \geq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-2} |p(t, x)| < +\infty$ ainsi que la majoration

$$\sup_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \sup_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^{\sigma-1} |D_x^\alpha p(t, x)| < +\infty,$$
- 3) pour $|\alpha| \leq 2$, la fonction $D_x^\alpha \vec{u}$ est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$,
- 4) la fonction $\partial_t \vec{u}$ est continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$.

Cette solution s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{u}(t, x) &= \mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \left(\vec{g} + \vec{\nabla} \Phi * \operatorname{div}(\vec{g}) \right) ds, \\ p(t, x) &= -\Phi * \operatorname{div}(\vec{g})(t, x), \end{aligned} \quad (3.26)$$

où \mathbf{g}_t est le noyau de la chaleur et Φ est la fonction de Green donnée dans (3.11).

Démonstration. Nous allons tout d'abord montrer que le problème de Stokes (3.25) admet une solution (\vec{u}, p) qui s'écrit de la forme (3.26), pour ensuite vérifier les propriétés de ces solutions énoncées dans ce théorème.

Le point de départ pour construire des solutions au problème de Stokes consiste à appliquer la décomposition de Helmholtz au champ de vecteurs \vec{g} (qui vérifie les hypothèses du Théorème 3.2.1), ce qui donne

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{\nabla} q, \quad (3.27)$$

où bien sûr \vec{g}_0 est à divergence nulle et $\vec{\nabla}q$ est à rotationnel nul. On remarquera qu'alors nous avons

$$\operatorname{div}(\vec{g}) = \operatorname{div}(\vec{\nabla}q) = \Delta q. \quad (3.28)$$

En revenant aux équations (3.25) nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u} &= \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}p + (\vec{g}_0 + \vec{\nabla}q) \\ &= (\Delta \vec{u} + \vec{g}_0) - \vec{\nabla}(q - p). \end{aligned}$$

Nous observons ici que dans la dernière identité, le terme $(\Delta \vec{u} + \vec{g}_0)$ est à divergence nulle et le terme $\vec{\nabla}(q - p)$ est à rotationnel nul. Ainsi, si nous appliquons la décomposition de Helmholtz (3.21) pour le champ de vecteurs

$$\vec{F} = (\Delta \vec{u} + \vec{g}_0) - \vec{\nabla}(q - p),$$

nous avons $\vec{F}_0 = \Delta \vec{u} + \vec{g}_0$ et $\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}(q - p)$. D'autre part, si nous étudions cette décomposition pour le champ de vecteur

$$\vec{G} = \partial_t \vec{u},$$

qui est par hypothèse à divergence nulle, nous obtenons alors sans problème que $\vec{G}_0 = \partial_t \vec{u}$ et $\vec{G}_1 = 0$.

Ainsi, comme $\vec{G} = \vec{F}$, en identifiant les termes à divergence nulle et les termes à rotationnel nul nous obtenons les *deux* équations suivantes :

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} + \vec{g}_0 \quad \text{et} \quad 0 = \vec{\nabla}(q - p),$$

mais pour pouvoir étudier ces équations correctement nous avons besoin de quelques petites manipulations supplémentaires. En effet, à partir de cette dernière équation nous obtenons $\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}q$ et donc la décomposition (3.27) $\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{\nabla}q$ nous permet d'écrire

$$\vec{g}_0 = \vec{g} - \vec{\nabla}q = \vec{g} - \vec{\nabla}p.$$

De plus, en appliquant l'opérateur divergence à l'identité $\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}q$, on en déduit la relation suivante

$$\Delta p = \Delta q = \operatorname{div}(\vec{g}),$$

où nous avons utilisé l'identité (3.28).

Avec les relations que nous venons d'obtenir pour \vec{g}_0 et pour le Laplacien de la pression p , nous avons les deux équations recherchées :

- Une équation de Poisson $\Delta p = \operatorname{div}(\vec{g})$ dont la solution est donnée par le Théorème 3.1.8 (on remarquera que les hypothèses sur \vec{g} permettent d'appliquer ce théorème) :

$$p(t, x) = -\Phi * \operatorname{div}(\vec{g})(t, x), \quad (3.29)$$

où Φ est la fonction de Green donnée par l'expression (3.11). De plus la pression p vérifie les estimations explicitées dans la Proposition 3.1.10.

- Une équation de la chaleur non-homogène, avec donnée initiale \vec{u}_0 :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} + (\vec{g} - \vec{\nabla}p), \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \end{cases}$$

dont la solution est donnée par le Théorème 3.1.6 :

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * (\vec{g} - \vec{\nabla} p)(s, x) ds.$$

Il s'agit maintenant de relier ces deux équations pour revenir au problème initial et pour cela on remplace l'expression de la pression donnée par la formule (3.29) dans le problème ci-dessus pour obtenir

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * (\vec{g} + \vec{\nabla} \Phi * \text{div}(\vec{g}))(s, x) ds,$$

et nous avons donc obtenu l'expression (3.26) recherchée.

Pour les conditions 1)-4) énoncées dans le Théorème 3.3.1, il suffit d'exploiter les conclusions du Théorème 3.1.8, de la Proposition 3.1.10 et du Théorème 3.1.6, de sorte que les détails sont laissés au lecteur. ■

B) Le Tenseur d'Oseen

La solution du problème de Stokes calculée dans la section précédente nous incite à définir un noyau de convolution qui concentre l'information de la même façon que les solutions fondamentales données précédemment pour les équations de la chaleur et l'équation de Poisson. Dans ce sens nous avons la définition qui suit :

Définition 3.3.2 (Tenseur d'Oseen) Soit $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$. On définit le tenseur d'Oseen $(\mathcal{O}_{j,k})_{1 \leq j, k \leq 3}$ par la formule

$$\mathcal{O}_{j,k}(t, x) = \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) + \Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} \mathfrak{g}_t(x), \quad (3.30)$$

pour $1 \leq j, k \leq 3$ et où la fonction $\delta_{j,k}$ est la fonction delta de Kronecker. Ici, \mathfrak{g}_t est le noyau de la chaleur et Φ est la fonction de Green.

Remarquons que ce tenseur s'écrit également en notation matricielle de la forme suivante :

$$\mathcal{O}_t(x) = \mathcal{O}(t, x) = \begin{bmatrix} \mathfrak{g}_t + \Phi * \partial_{x_1}^2 \mathfrak{g}_t & \Phi * \partial_{x_1} \partial_{x_2} \mathfrak{g}_t & \Phi * \partial_{x_1} \partial_{x_3} \mathfrak{g}_t \\ \Phi * \partial_{x_2} \partial_{x_1} \mathfrak{g}_t & \mathfrak{g}_t + \Phi * \partial_{x_2}^2 \mathfrak{g}_t & \Phi * \partial_{x_2} \partial_{x_3} \mathfrak{g}_t \\ \Phi * \partial_{x_3} \partial_{x_1} \mathfrak{g}_t & \Phi * \partial_{x_3} \partial_{x_2} \mathfrak{g}_t & \mathfrak{g}_t + \Phi * \partial_{x_3}^2 \mathfrak{g}_t \end{bmatrix},$$

et on observe facilement d'une part que ce tenseur est symétrique $\mathcal{O}_{j,k} = \mathcal{O}_{k,j}$ et d'autre part que l'on a la propriété de divergence nulle

$$\text{div}(\mathcal{O}_t) = 0, \quad (3.31)$$

il suffit pour cela d'appliquer la définition de la divergence d'un tenseur donnée dans la formule (2.10), page 16 :

$$\text{div}(\mathcal{O}_t) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}(\mathfrak{g}_t + \Phi * \partial_{x_1}^2 \mathfrak{g}_t) + \partial_{x_2}(\Phi * \partial_{x_1} \partial_{x_2} \mathfrak{g}_t) + \partial_{x_3}(\Phi * \partial_{x_1} \partial_{x_3} \mathfrak{g}_t) \\ \partial_{x_1}(\Phi * \partial_{x_2} \partial_{x_1} \mathfrak{g}_t) + \partial_{x_2}(\mathfrak{g}_t + \Phi * \partial_{x_2}^2 \mathfrak{g}_t) + \partial_{x_3}(\Phi * \partial_{x_2} \partial_{x_3} \mathfrak{g}_t) \\ \partial_{x_1}(\Phi * \partial_{x_3} \partial_{x_1} \mathfrak{g}_t) + \partial_{x_2}(\Phi * \partial_{x_3} \partial_{x_2} \mathfrak{g}_t) + \partial_{x_3}(\mathfrak{g}_t + \Phi * \partial_{x_3}^2 \mathfrak{g}_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \mathfrak{g}_t + \Delta \Phi * \partial_{x_1} \mathfrak{g}_t \\ \partial_{x_2} \mathfrak{g}_t + \Delta \Phi * \partial_{x_2} \mathfrak{g}_t \\ \partial_{x_3} \mathfrak{g}_t + \Delta \Phi * \partial_{x_3} \mathfrak{g}_t \end{bmatrix},$$

et de se rappeler que l'on a $-\Delta \Phi * f = f$, puisque Φ est la fonction de Green.

Observons maintenant que le tenseur d'Oseen nous permet d'écrire la partie concernant la variable \vec{u} dans la solution (3.26) du problème de Stokes de la façon suivante :

$$u_j(t, x) = \mathfrak{g}_t * u_{0,j}(x) + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{O}_{j,k}(t-s, x-y) g_k(s, y) dy \right) ds,$$

pour $1 \leq j \leq 3$. Afin de simplifier l'écriture, on écrira l'expression ci-dessus de façon vectorielle par

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \vec{g}(s, x) ds, \quad (3.32)$$

où le terme $A :: \vec{v}$ ci-dessus (avec A une matrice 3×3 dont les coefficients $(a_{j,k})_{1 \leq j, k \leq 3}$ sont des fonctions et $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle) désigne le produit de convolution entre un tenseur et un vecteur, dont le résultat est un vecteur. Cette quantité est donnée explicitement par l'expression

$$A :: \vec{v} = \begin{bmatrix} a_{11} * v_1 + a_{12} * v_2 + a_{13} * v_3 \\ a_{21} * v_1 + a_{22} * v_2 + a_{23} * v_3 \\ a_{31} * v_1 + a_{32} * v_2 + a_{33} * v_3 \end{bmatrix}.$$

En utilisant les propriétés du produit de convolution, on notera alors que l'on peut écrire les identités :

$$D_x^\alpha (A :: \vec{v}) = (D_x^\alpha A) :: \vec{v} = A :: (D_x^\alpha \vec{v}).$$

Voici maintenant quelques propriétés importante du tenseur d'Oseen $\mathcal{O}(t, x)$.

Proposition 3.3.3

1) Pour tout $t > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ et pour $1 \leq j, k \leq 3$ nous avons

$$\mathcal{O}_{j,k}(t, x) = \frac{1}{t^{3/2}} \mathcal{O}_{j,k} \left(1, \frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad (3.33)$$

et on notera $\mathcal{O}_{j,k}(x)$ à la fonction $\mathcal{O}_{j,k}(1, x)$.

2) Les composantes du tenseur d'Oseen peuvent se réécrire comme :

$$\mathcal{O}_{j,k}(t, x) = \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) + 2 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{t}{(4\pi t)^{3/2} |x|} \int_0^{|x|} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \right). \quad (3.34)$$

Preuve. Le premier point se déduit directement des propriétés d'homogénéité des fonctions $\mathfrak{g}_t(x)$ et $\Phi(x)$, de sorte que les détails sont laissés au lecteur.

On remarque pour le deuxième point de la proposition que l'on peut écrire par la définition (3.30) :

$$\mathcal{O}_{j,k}(t, x) = \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) + \partial_{x_j} \partial_{x_k} (\Phi * \mathfrak{g}_t)(x),$$

nous observons ici que la fonction $\Phi * \mathfrak{g}_t(x) = \varphi(|x|)$ est une fonction radiale, bornée près de l'origine, qui tend vers zéro à l'infini et qui de plus vérifie l'équation

$$-\Delta \varphi(|x|) = -\Delta \Phi * \mathfrak{g}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \mathcal{G}_t(|x|),$$

et donc nous devons avoir (en passant en coordonnées sphériques) :

$$\varphi''(\rho) + \frac{2}{\rho} \varphi'(\rho) = -\mathcal{G}_t(\rho),$$

ce qui nous permet d'écrire $(\rho\varphi)''(\rho) = -\rho\mathcal{G}_t(\rho)$, mais par la définition de la fonction \mathcal{G}_t ci-dessus, on a également $-\rho\mathcal{G}_t(\rho) = 2t\mathcal{G}_t(\rho)'$ et alors nous avons l'équation

$$(\rho\varphi)''(\rho) = 2t\mathcal{G}_t(\rho)',$$

ce qui nous conduit à l'expression $\varphi(\rho) = \frac{A}{\rho} + B + \frac{2t}{\rho} \int_0^\rho \mathcal{G}_t(s) ds$. Comme la fonction φ est bornée près de l'origine et elle tend vers zéro à l'infini, il vient que $A = B = 0$ et alors nous avons l'expression recherchée

$$\Phi * \mathbf{g}_t(x) = \frac{2t}{(4\pi t)^{3/2}|x|} \int_0^{|x|} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds,$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Corollaire 3.3.4 *Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^3$, les composantes du tenseur d'Oseen $\mathcal{O}_{j,k}$ vérifient l'estimation ponctuelle*

$$|D_x^\alpha \mathcal{O}_{j,k}(1, x)| \leq \frac{C_\alpha}{(1 + |x|)^{3+|\alpha|}}.$$

Cette estimation s'écrit également :

$$|(D_x^\alpha \mathcal{O}_{j,k})(t, x)| \leq \frac{C_\alpha}{(\sqrt{t} + |x|)^{3+|\alpha|}}.$$

Preuve. Par l'expression (3.34), et en fixant $t = 1$, on observe que l'on a

$$|D_x^\alpha \mathcal{O}_{j,k}(1, x)| \leq |D_x^\alpha \mathbf{g}_1(x)| + C \left| D_x^\alpha \partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{1}{(4\pi)^{3/2}|x|} \int_0^{|x|} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \right) \right|,$$

si $|x| < 1$, par les propriétés du noyau de la chaleur \mathbf{g}_1 données dans la Proposition 3.1.2, page 45, et par une estimation de l'intégrale lorsque $|x| < 1$, on obtient sans problème que la quantité ci-dessus est bornée. Maintenant, pour $|x| \geq 1$ (avec la formule de Leibniz généralisée) on observe que l'on a :

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha \mathcal{O}_{j,k}(x)| &\leq |D_x^\alpha \mathbf{g}_1(x)| + C \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} D_x^\alpha \left(\frac{1}{|x|} \int_0^{|x|} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \right) \right| \\ &\leq |D_x^\alpha \mathbf{g}_1(x)| + C \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_x^{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{|x|} \right) D_x^\beta \left(\int_0^{|x|} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \right) \right| \\ &\leq \frac{C_\alpha}{|x|^{3+|\alpha|}} + \frac{C_\alpha}{|x|^{3+|\alpha|+2}} \leq \frac{C_\alpha}{|x|^{3+|\alpha|}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les propriétés du noyau de la chaleur \mathbf{g}_1 (voir la Proposition 3.1.2, page 45), la régularité de la fonction $|x|^{-1}$ lorsque $|x| \geq 1$ et les propriétés de décroissance de la fonction exponentielle. Avec ces deux estimations nous avons donc obtenu la première inégalité du corollaire. La deuxième s'en déduit facilement par homogénéité en utilisant la formule (3.33). ■

Un dernier résultat concernant le tenseur d'Oseen est le suivant :

Corollaire 3.3.5 Si $|x| > 1$, alors on a l'expression suivante :

$$\mathcal{O}_{j,k}(t, x) = \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) - 2\partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{t}{(4\pi t)^{3/2} |x|} \int_{|x|}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \right).$$

Preuve. A partir de la formule (3.34) on écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{j,k}(t, x) &= \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) + 2\partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{t}{(4\pi t)^{3/2} |x|} \int_0^{|x|} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \right) \\ &= \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) + 2\partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{t}{(4\pi t)^{3/2} |x|} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds - \frac{t}{(4\pi t)^{3/2} |x|} \int_{|x|}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \right), \end{aligned}$$

et puisque $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds = \sqrt{\pi t}$, il vient :

$$\mathcal{O}_{j,k}(t, x) = \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) + \partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{1}{4\pi |x|} \right) - 2\partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{t}{(4\pi t)^{3/2} |x|} \int_{|x|}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \right),$$

et par la définition du noyau de Green Φ donnée dans l'expression (3.11), page 50, on obtient :

$$\mathcal{O}_{j,k}(t, x) = \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) - 2\partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{t}{(4\pi t)^{3/2} |x|} \int_{|x|}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \right),$$

ce qui termine la démonstration de ce corollaire. ■

3.4 Solutions classiques des équations de Navier-Stokes

Nous nous proposons dans cette section d'étudier les équations de Navier-Stokes générales en utilisant tous les ingrédients présentés jusqu'à présent. L'idée de base repose sur le problème de Stokes dont l'étude a été réalisée dans la section précédente :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{g}, & \text{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \text{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

et de remplacer -du moins formellement- la force \vec{g} ci-dessus par le terme

$$\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u},$$

où \vec{f} est une force extérieure et $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ est le terme de transport non linéaire, pour obtenir de la sorte le système de Navier-Stokes usuel :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} p + (\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}), & \text{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \text{div}(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Ainsi on obtiendrait, avec la formule (3.32) et les expressions (3.26) qui donnent la solution de l'équation de Stokes, la formulation intégrale suivante pour le problème précédent :

$$\begin{cases} \vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \\ p(t, x) = -\Phi * \operatorname{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (t, x), \end{cases} \quad (3.36)$$

bien évidemment nous devons donner un sens à ces quantités car nous n'avons que transformé l'équation différentielle (3.35) en un système intégro-différentiel (3.36) et c'est ce système que nous allons étudier ci-dessous.

Pour simplifier un peu la présentation, on introduit les notations \vec{v}_0 et q_0 où :

$$\vec{v}_0(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \vec{f}(s, x) ds \quad \text{et} \quad q_0(t, x) = -\Phi * \operatorname{div}(\vec{f})(t, x), \quad (3.37)$$

et ces quantités regroupent les informations concernant la donnée initiale \vec{u}_0 et la force extérieure \vec{f} . Ainsi nous pouvons réécrire (3.36) :

$$\begin{cases} \vec{u}(t, x) = \vec{v}_0(t, x) - \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \\ p(t, x) = q_0(t, x) + \Phi * \operatorname{div} \left((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (t, x). \end{cases} \quad (3.38)$$

Cette formulation de la vitesse \vec{u} et de la pression p donnent (formellement) une solution des équations de Navier-Stokes (3.35), mais il faut bien évidemment justifier cette écriture.

L'idée originale d'Oseen parue dans l'article [41] de 1911 que nous allons développer ici considère un développement en série des fonctions \vec{u} et p du type suivant

$$\vec{u}_\varepsilon = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \vec{u}_n, \quad \operatorname{div}(\vec{u}_n) = 0 \quad \text{et} \quad p_\varepsilon = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n p_n, \quad (3.39)$$

pour un certain $\varepsilon > 0$ et nous allons injecter cette représentation dans le système intégro-différentiel (3.38) *mais pour lequel on a rajouté un paramètre ε supplémentaire* :

$$\begin{cases} \vec{u}_\varepsilon(t, x) = \vec{v}_0(t, x) - \varepsilon \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left((\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \right) (s, x) ds \\ p_\varepsilon(t, x) = q_0(t, x) + \varepsilon \Phi * \operatorname{div} \left((\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \right) (t, x). \end{cases} \quad (3.40)$$

Il s'agira alors de regrouper les termes \vec{u}_n en suivant les puissances de ε pour obtenir de la sorte une "cascade" de problème de Stokes que nous sommes en mesure de résoudre. Dans ce processus on devra donc trouver un temps T qui nous permettra d'une part d'obtenir des contrôles uniformes sur chacun des termes \vec{u}_n afin de reconstruire la fonction \vec{u} et d'autre part ces estimations uniformes nous donnerons les arguments nécessaires pour passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 1$, ce qui nous fournira une solution du système de Navier-Stokes sous formulation intégrale (3.36).

Le résultat que l'on obtient est alors le suivant :

Théorème 3.4.1 (Solutions Classiques des Equations de Navier-Stokes)

Soient $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 tels que l'on ait les propriétés

1) Pour la donnée initiale : $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |D^\alpha \vec{u}_0(x)| = A_0 < +\infty. \quad (3.41)$$

2) Pour la force extérieure, pour $|\alpha| \leq 2$, $D_x^\alpha \vec{f}$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$.

3) De plus, on a l'estimation

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1 + |x|)^4 |D_x^\alpha \vec{f}(t, x)| = B_0 < +\infty. \quad (3.42)$$

Alors il existe un temps $T > 0$ et une unique solution (\vec{u}, p) des équations de Navier-Stokes sous formulation intégrale :

$$\begin{cases} \vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \\ p(t, x) = -\Phi * \operatorname{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (t, x). \end{cases} \quad (3.43)$$

Démonstration du Théorème 3.4.1. Il est utile d'étudier rapidement comment se comporte le terme non linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ lorsqu'on remplace \vec{u} par \vec{u}_ε donné par l'expression (3.39). En effet, si l'on a le développement en série

$$\vec{u}_\varepsilon = \vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1 + \varepsilon^2 \vec{u}_2 + \varepsilon^3 \vec{u}_3 + \dots,$$

alors on peut voir aisément que l'on a

$$\begin{aligned} (\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon &= (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + \varepsilon [(\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0] \\ &\quad + \varepsilon^2 [(\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_2 + (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0] + \dots \end{aligned} \quad (3.44)$$

Avec cette expression, nous allons maintenant étudier les relations vérifiées par les termes \vec{u}_n et p_n dans les équations (3.40). En effet, si l'on se concentre pour l'instant sur la première équation du système (3.40) on a formellement

$$\begin{aligned} \vec{u}_\varepsilon &= \vec{v}_0 - \varepsilon \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left((\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \right) ds \\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \vec{u}_n \right) &= \vec{v}_0 - \varepsilon \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \vec{u}_n \right) \cdot \vec{\nabla} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \vec{u}_n \right) ds, \end{aligned}$$

ce qui nous conduit, grâce à l'expression (3.44), aux identifications suivantes en fonction des

puissances du paramètres ε (où \vec{v}_0 est défini par la formule (3.37)) :

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 &= \vec{v}_0 \\ \vec{u}_1 &= - \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 ds \\ \vec{u}_2 &= - \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: [(\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0] ds \\ \vec{u}_3 &= - \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: [(\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_2 + (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0] ds \\ &\vdots\end{aligned}$$

et plus généralement, pour tout $n \geq 0$ nous avons la formule

$$\vec{u}_{n+1} = - \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left[\sum_{k=0}^n (\vec{u}_k \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{n-k} \right] ds, \quad (3.45)$$

ce qui nous donne une expression pour les termes \vec{u}_{n+1} .

De même, si nous étudions maintenant la pression p_ε , nous avons, par la deuxième équation de l'expression (3.40) :

$$\begin{aligned}p_\varepsilon &= q_0 + \varepsilon \Phi * \operatorname{div} \left((\vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \right) \\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \mathbf{p}_k \right) &= q_0 + \varepsilon \Phi * \operatorname{div} \left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \vec{u}_n \cdot \vec{\nabla} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \vec{u}_n \right) \right),\end{aligned}$$

de sorte qu'en identifiant les termes avec les mêmes puissances du paramètres ε nous avons les relations (avec q_0 donné par l'expression (3.37)) :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= q_0 \\ \mathbf{p}_1 &= \Phi * \operatorname{div} \left((\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 \right) \\ \mathbf{p}_2 &= \Phi * \operatorname{div} \left((\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 \right) \\ &\vdots\end{aligned}$$

ce qui nous donne la formule générale pour $n \geq 0$:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \Phi * \operatorname{div} \left(\sum_{k=0}^n (\vec{u}_k \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{n-k} \right). \quad (3.46)$$

On remarquera que dans les expressions (3.45) et (3.46) chaque couple $(\vec{u}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1})$ dépend uniquement des valeurs précédentes $(\vec{u}_k, \mathbf{p}_k)$ pour $0 \leq k \leq n$ et nous avons donc linéarisé le problème initial.

Avec toutes ces observations, nous pouvons maintenant exhiber la "cascade" d'équations de Stokes mentionnée précédemment. En effet, les équations vérifiées par les couples $(\vec{u}_n, \mathbf{p}_n)$ sont les suivantes :

- pour \vec{u}_0 nous avons le système

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_0 = \Delta \vec{u}_0 + \vec{f} - \vec{\nabla} p_0, & \text{div}(\vec{u}_0) = 0, \\ \vec{u}_0(0, x) = \vec{u}_0. \end{cases} \quad (3.47)$$

- pour tout $n \geq 0$ les équations pour le terme \vec{u}_{n+1} sont :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_{n+1} = \Delta \vec{u}_{n+1} - \sum_{k=0}^n (\vec{u}_k \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{n-k} - \vec{\nabla} p_{n+1}, & \text{div}(\vec{u}_{n+1}) = 0, \\ \vec{u}_n(0, x) = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Observons qu'avec les hypothèses du Théorème 3.4.1 et par construction des termes ci-dessus, nous pouvons sans problème particulier obtenir les solutions (\vec{u}_n, p_n) de cette cascade d'équations.

La partie essentielle de la démonstration consiste donc à montrer que l'on peut obtenir un contrôle uniforme sur les quantités \vec{u}_n et p_n (ainsi que sur leurs dérivées) pour pouvoir reconstruire une solution des équations de Navier-Stokes de la forme

$$\vec{u}_\varepsilon = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon^n \vec{u}_n \quad \text{et} \quad p_\varepsilon = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon^n p_n, \quad (3.49)$$

où le rayon de convergence ε peut être mis égal à 1.

Plus précisément, notre objectif est d'obtenir les contrôles uniformes qui suivent

- (i) Pour les vitesses \vec{u}_n :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_n(t, x)| < +\infty. \quad (3.50)$$

- (ii) Pour les pressions p_n :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha p_n(t, x)| < +\infty. \quad (3.51)$$

On remarquera que ces deux conditions nous donnent la convergence normale des séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \vec{u}_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n,$$

dans l'espace $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^3))$.

Remarque 3.6

- 1) Les solutions (\vec{u}_n, p_n) de cette cascade d'équations de Stokes étant uniques, lors de la reconstruction des fonctions \vec{u} et p en suivant les formules (3.49) ci-dessus et avec les contrôles uniformes (3.50) et (3.51), on obtiendra aussi l'unicité pour ces fonctions.

2) On remarquera qu'on obtient également l'information suivante sur les dérivées temporelles :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t \leq T} |\partial_t \vec{u}_n(t, x)| < +\infty,$$

en effet, les fonctions $(\partial_t \vec{u}_n)_{n \geq 0}$ vérifient les équations (3.47)-(3.48) et, à partir des informations (3.50) et (3.51), chaque terme de la partie de droite de ces équations vérifie les contrôles adaptés.

3) Nous allons obtenir les contrôles (3.50) et (3.51) de manière totalement uniforme par rapport au paramètre ε : on pourra alors non seulement "reconstruire" les fonctions \vec{u} et p à partir des fonctions \vec{u}_n et \mathbf{p}_n , mais en plus on pourra considérer la limite $\varepsilon \rightarrow 1$ dans le système (3.40) pour obtenir ainsi une solution du problème de Navier-Stokes.

Nous allons tout d'abord étudier les estimations (3.50) pour ensuite en déduire le contrôle (3.51) sur les pressions.

(i) *Contrôle sur les vitesses* :

Afin d'exploiter au mieux les résultats de la section précédente portant sur les équations de Stokes, nous allons réécrire les systèmes (3.47) et (3.48) en utilisant la propriété de divergence nulle des vecteurs considérés, ainsi, pour tout $n \geq 0$ nous réécrivons ces systèmes de la façon suivante

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_n = \Delta \vec{u}_n + \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \vec{h}_{j,n} - \vec{\nabla} \mathbf{p}_n, & \text{div}(\vec{u}_n) = 0, \\ \vec{u}_n(0, x) = \delta_{n,0} \vec{u}_0(x), \end{cases} \quad (3.52)$$

où nous avons posé pour les termes de transport

$$\vec{h}_{j,0} = -\vec{f} * \partial_{x_j} \Phi \quad \text{et} \quad \vec{h}_{j,n+1} = -\sum_{k=0}^n \mathbf{u}_{j,k} \vec{u}_{n-k}. \quad (3.53)$$

Le lecteur vérifiera sans peine que ces quantités sont bien celles qui interviennent dans (3.47) et (3.48). En particulier, pour $n = 0$, on a

$$\sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \vec{h}_{j,0}(t, x) = -\sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} (\vec{f} * \partial_{x_j} \Phi)(t, x) = -\Delta(\vec{f} * \Phi)(t, x) = \vec{f}(t, x). \quad (3.54)$$

Avec les résultats de la section précédente il vient que les candidats qui sont solution de ces problèmes de Stokes (3.52) s'écrivent

$$\vec{u}_n = \delta_{n,0} \mathbf{g}_t * \vec{u}_0 + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} \mathbf{::} \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \vec{h}_{j,n} ds, \quad (3.55)$$

et maintenant nous allons estimer les quantités \vec{u}_n ainsi que $D^\alpha \vec{u}_n$ pour pouvoir donner un sens à la série $\vec{u} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \vec{u}_n$.

- On commence par étudier \vec{u}_0 qui est donné par l'expression

$$\vec{u}_0 = \mathbf{g}_t * \vec{u}_0 + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \vec{h}_{j,0} ds,$$

qui par la formule (3.54) se réécrit comme

$$\vec{u}_0 = \mathbf{g}_t * \vec{u}_0 + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \vec{f}(s, x) ds.$$

Ainsi, pour $|\alpha| \leq 2$ on se concentre sur l'expression $D_x^\alpha \vec{u}_0$ et il vient

$$\sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_0(t, x)| \leq \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha (\mathbf{g}_t * \vec{u}_0)(x)| + \sup_{0 < t \leq T} \left| \int_0^t D_x^\alpha (\mathcal{O}_{t-s} :: \vec{f})(s, x) ds \right|. \quad (3.56)$$

Nous allons étudier tout d'abord le premier terme de droite de l'inégalité ci-dessus, on écrit alors

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t \leq T} |\mathbf{g}_t * D_x^\alpha \vec{u}_0(x)| &\leq \sup_{0 < t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{g}_t(x-y)| |D_x^\alpha \vec{u}_0(y)| dy \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^3} (1+|y|) |D_x^\alpha \vec{u}_0(y)| \times \sup_{0 < t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{g}_t(x-y)}{1+|y|} dy, \end{aligned}$$

mais par les propriétés du noyau de la chaleur nous avons l'estimation

$$\sup_{0 < t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{g}_t(x-y)}{1+|y|} dy = \sup_{0 < t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{g}_t(y)}{1+|x-y|} dy \leq \frac{C}{1+|x|}. \quad (3.57)$$

En effet, on remarque tout d'abord que par les inégalités de Young pour la convolution, nous avons le contrôle uniforme par rapport à la variable de temps :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{g}_t(y)}{1+|x-y|} dy \right| \leq \|\mathbf{g}_t\|_{L^1} \left\| \frac{1}{1+|\cdot|} \right\|_{L^\infty} < +\infty,$$

ce qui nous indique que cette intégrale est bornée en t et en x . Ensuite, on écrit pour $|x| \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{g}_t(y)}{1+|x-y|} dy &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{g}_t(x-y)}{1+|y|} dy \\ &= \int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{\mathbf{g}_t(x-y)}{1+|y|} dy + \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\}} \frac{\mathbf{g}_t(x-y)}{1+|y|} dy. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale ci-dessus on utilise la majoration $\mathbf{g}_t(x-y) \leq C|x-y|^{-3}$ (voir la formule (3.5), page 46) ainsi que le fait que sur l'ensemble $\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}$ on a les inégalités $|x| \leq |x-y| + |y| \leq |x-y| + \frac{1}{2}|x|$, on en déduit que $\frac{1}{2}|x| \leq |x-y|$ et $|x-y|^{-3} \leq C|x|^{-3}$. Il vient alors

$$\int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{\mathbf{g}_t(x-y)}{1+|y|} dy \leq \int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{C}{|x-y|^3} \frac{1}{1+|y|} dy \leq \frac{C}{|x|^3} \int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{|y|} dy \leq \frac{C}{|x|}.$$

Pour la deuxième intégrale on a sur l'ensemble $\{\frac{1}{2}|x| < |y|\}$ l'inégalité $\frac{1}{1+|y|} \leq \frac{C}{1+|x|}$, et donc on a

$$\int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\}} \frac{\mathbf{g}_t(x-y)}{1+|y|} dy \leq \frac{C}{1+|x|} \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\}} \mathbf{g}_t(x-y) dy \leq \frac{C}{1+|x|} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}_t(x-y) dy \leq \frac{C}{1+|x|}.$$

Pour finir, étant donné que toute l'intégrale de la partie de gauche de l'expression (3.57) est bornée, on obtient bien que cette intégrale se majore par la fonction $\frac{C}{(1+|x|)}$.

Ainsi, avec (3.57) et avec l'hypothèse (3.41) sur \vec{u}_0 nous pouvons écrire le contrôle suivant pour le premier terme de (3.56) :

$$\sup_{0 < t \leq T} |\mathfrak{g}_t * D_x^\alpha \vec{u}_0(x)| \leq \frac{CA_0}{(1+|x|)}. \quad (3.58)$$

Etudions maintenant le deuxième terme de droite de l'expression (3.56), nous avons alors

$$\sup_{0 < t \leq T} \left| \int_0^t D_x^\alpha (\mathcal{O}_{t-s} :: \vec{f})(s, x) ds \right| \leq \sup_{0 < t \leq T} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{O}_{t-s}(x-y)| |D_x^\alpha \vec{f}(s, y)| dy ds,$$

par les propriétés du tenseur d'Oseen données le Corollaire 3.3.4, page 63, et par l'hypothèse (3.42) sur la force extérieure nous écrivons :

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t \leq T} \left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: D_x^\alpha \vec{f}(s, x) ds \right| &\leq C \sup_{|\alpha| \leq 2, 0 < t \leq T, y \in \mathbb{R}^3} \{(1+|y|)^4 |D_x^\alpha \vec{f}(t, y)|\} \\ &\quad \times \sup_{0 < t \leq T} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^3} \frac{1}{(1+|y|)^4} dy ds \\ &\leq CB_0 \sup_{0 < t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^3} \frac{1}{(1+|y|)^4} ds dy. \end{aligned}$$

On remarque maintenant que l'on a les estimations

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{C}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^3} ds &\leq \int_0^t \frac{C}{((t-s)^{\frac{3}{2}} + |x-y|^3)} ds \\ &\leq \frac{C}{|x-y|} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^{\frac{3}{2}}} du \leq \frac{C}{|x-y|}, \end{aligned}$$

où nous avons réalisé un changement de variable en variable de temps dans la dernière intégrale ci-dessus. Il vient alors, avec le Lemme 3.1.9, page 52 :

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t \leq T} \left| \int_0^t D_x^\alpha (\mathcal{O}_{t-s} :: \vec{f})(s, x) ds \right| &\leq CB_0 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|y|)^4} \frac{1}{|x-y|} dy \\ &\leq \frac{CB_0}{(1+|x|)}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Donc, avec les estimations (3.58) et (3.59), si nous revenons à l'expression (3.56) nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_0(t, x)| \leq C_0(A_0 + B_0) \frac{1}{(1+|x|)}.$$

Et ceci nous donne l'estimation

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t \leq T} (1+|x|) |D_x^\alpha \vec{u}_0(t, x)| < +\infty,$$

pour le premier terme \vec{u}_0 .

- On continue notre étude avec le terme $D_x^\alpha \vec{u}_n(t, x)$ et par récurrence on va montrer que pour un certain $0 \leq \delta < 1/2$ on a l'inégalité

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_n(t, x)| \leq \frac{(K_\delta T^\delta C_0(A_0 + B_0))^n C_0(A_0 + B_0)}{(1+n)^4 (1+|x|)}. \quad (3.60)$$

On remarque sans problème à partir des calculs précédents que cette estimation est vraie pour $n = 0$, supposons donc que ceci est vrai pour n et vérifions que cela reste vrai pour $n + 1$.

Par la définition du terme \vec{u}_{n+1} donnée dans (3.55), nous avons :

$$D_x^\alpha \vec{u}_{n+1}(t, x) = \sum_{j=1}^3 \int_0^t \partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s} :: D_x^\alpha \vec{h}_{j,n+1}(s, x) ds,$$

et nous écrivons alors

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_{n+1}(t, x)| &\leq \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{h}_{j,n+1}(t, y)| \times \\ &\left(\sup_{0 < t \leq T} \int_0^t |\partial_{x_j} \mathcal{O}(t-s, x-y)| ds \right) dy. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Observons maintenant que par le Corollaire 3.3.4, page 63, nous pouvons écrire

$$|\partial_{x_j} \mathcal{O}(t-s, x-y)| \leq \frac{C}{(t-s)^2 + |x-y|^4},$$

et pour un certain $0 \leq \delta < 1/2$ nous avons l'estimation

$$\frac{C}{(t-s)^2 + |x-y|^4} \leq \frac{Ct^\delta}{(t-s)^\delta} \frac{1}{(t-s)^2 + |x-y|^4},$$

ce qui nous permet d'obtenir, par un changement de variable en temps, la majoration

$$\begin{aligned} \int_0^t |\partial_{x_j} \mathcal{O}(t-s, x-y)| ds &\leq Ct^\delta \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\delta} \frac{1}{(t-s)^2 + |x-y|^4} ds \\ &\leq \frac{Ct^\delta}{|x-y|^{2+2\delta}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^\delta} \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &\leq \frac{Ct^\delta}{|x-y|^{2+2\delta}}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^\delta} \frac{1}{u^2 + 1} du$ est finie (elle est intégrable sur l'ensemble $|u| < 1$ car $0 \leq \delta < 1/2$ et elle est intégrable sur l'ensemble $|u| > 1$ puisqu'on a suffisamment de décroissance à l'infini) ainsi, en revenant à la formule (3.61) nous obtenons :

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_{n+1}(t, x)| \leq \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{h}_{j,n+1}(t, y)| \frac{CT^\delta}{|x-y|^{2+2\delta}} dy. \quad (3.63)$$

Nous utilisons maintenant la définition des quantités $\vec{h}_{j,n+1}$ donnée dans (3.53) pour écrire

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{h}_{j,n+1}(t, y)| \leq \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} \sum_{k=0}^n |D_x^\alpha (u_{j,k} \vec{u}_{n-k})(t, y)|.$$

En utilisant la règle de Leibniz pour la quantité $D_x^\alpha (u_{j,k} \vec{u}_{n-k})$ avec $|\alpha| \leq 2$ et par l'hypothèse de récurrence (3.60) sur les termes $u_{j,k}$ et \vec{u}_{n-k} qui sont d'ordre inférieur, nous avons le contrôle

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{h}_{j,n+1}(t, y)| &\leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{(K_\delta T^\delta C_0 (A_0 + B_0))^k}{(1+k)^4} \frac{(K_\delta T^\delta C_0 (A_0 + B_0))^{n-k}}{(1+n-k)^4} \right) \\ &\quad \times C_1 \frac{(C_0 (A_0 + B_0))^2}{(1+|y|)^2} \\ &\leq \left(K_\delta T^\delta C_0 (A_0 + B_0) \right)^n \times C_1 \frac{(C_0 (A_0 + B_0))^2}{(1+|y|)^2} \times \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+k)^4 (1+n-k)^4} \\ &\leq \left(K_\delta T^\delta C_0 (A_0 + B_0) \right)^n \times C_1 \frac{(C_0 (A_0 + B_0))^2}{(1+|y|)^2} \times \frac{C_2}{(2+n)^4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+k)^4} \\ &\leq \left(K_\delta T^\delta C_0 (A_0 + B_0) \right)^n \times \frac{(C_0 (A_0 + B_0))^2}{(1+|y|)^2} \times \frac{C_1 C_2 C_3}{(2+n)^4}, \end{aligned}$$

et avec cette estimation on revient à (3.63) pour écrire

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_{n+1}(t, x)| &\leq \frac{(K_\delta T^\delta C_0 (A_0 + B_0))^n}{(2+n)^4} \times C_1 C_2 C_3 C_4 T^\delta \times (C_0 (A_0 + B_0))^2 \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|y|)^2 |x-y|^{2+2\delta}} dy. \end{aligned}$$

On remarque maintenant que par le Lemme 3.1.9, page 52, on a l'estimation suivante (car $0 \leq \delta < 1/2$ et donc $0 < 2 + 2\delta < 3$) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|y|)^2 |x-y|^{2+2\delta}} dy \leq C_\delta \frac{1}{(1+|x|)^{1+2\delta}} \leq C_\delta \frac{1}{(1+|x|)},$$

de sorte que l'inégalité précédente peut se réécrire comme suit

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_{n+1}(t, x)| &\leq \frac{(K_\delta T^\delta C_0 (A_0 + B_0))^n}{(2+n)^4} \times \\ &\quad \times C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 C_\delta T^\delta (A_0 + B_0) \frac{C_0 (A_0 + B_0)}{(1+|x|)}, \end{aligned}$$

et alors si on pose $K_\delta = C_1 C_2 C_3 C_4 C_\delta$ on a bien

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_{n+1}(t, x)| \leq \frac{(K_\delta T^\delta C_0 (A_0 + B_0))^{n+1}}{(1+(n+1))^4} \frac{C_0 (A_0 + B_0)}{(1+|x|)},$$

ce qui démontre la relation (3.60) pour le terme \vec{u}_{n+1} .

(ii) *Contrôle sur les pressions :*

A partir des relations (3.46) et en utilisant les fonctions $\vec{h}_{j,n}$ définies dans (3.53) nous pouvons écrire

$$D_x^\alpha \mathbf{p}_n = - \sum_{j=1}^3 D_x^\alpha \vec{h}_{j,n} * \partial_{x_j} \Phi.$$

En procédant de manière totalement similaire (par récurrence et avec sensiblement les mêmes estimations), nous avons l'inégalité

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \mathbf{p}_n(t, x)| \leq C \frac{(K_\delta T^\delta C_0(A_0 + B_0))^n C_0(A_0 + B_0)}{(1+n)^4 (1+|x|)}. \quad (3.64)$$

Nous observons ainsi, qu'avec les estimations (3.60) et (3.64) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}_n(t, x)| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \frac{(K_\delta T^\delta C_0(A_0 + B_0))^n C_0(A_0 + B_0)}{(1+n)^4 (1+|x|)} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \mathbf{p}_n(t, x)| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \frac{C (K_\delta T^\delta C_0(A_0 + B_0))^n C_0(A_0 + B_0)}{(1+n)^4 (1+|x|)}. \end{aligned}$$

On remarque maintenant que si le temps T est *suffisamment petit* pour que l'on ait

$$K_\delta T^\delta C_0(A_0 + B_0) \leq 1, \quad (3.65)$$

alors les sommes précédentes convergent et nous en déduisons sans aucun problème les contrôles uniformes (3.50) et (3.51).

Ayant ainsi obtenu la convergence normale des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \vec{u}_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{p}_n$ dans l'espace de fonctions $\mathcal{C}([0, T], \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^3))$, et avec les contrôles uniformes obtenus, nous pouvons alors faire $\varepsilon \rightarrow 1$ dans le système (3.40) et nous sommes donc en mesure de construire une solution des équations de Navier-Stokes sous la formulation intégrale (3.35). ■

Avec les calculs réalisés dans la démonstration de ce théorème, nous pouvons en déduire le résultat suivant qui nous fournit quelques informations supplémentaires sur la solution que nous venons d'obtenir :

Corollaire 3.4.2 (Solutions classiques) Soient $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une donnée initiale et $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une force extérieure. Si ces deux champs de vecteurs sont de classe \mathcal{C}^2 et vérifient les hypothèses du Théorème 3.4.1, alors la solution (\vec{u}, p) des équations de Navier-Stokes obtenue par ce théorème satisfait les points suivants :

1) pour $|\alpha| \leq 2$, les fonctions $D_x^\alpha \vec{u}$ et $D_x^\alpha p$ sont continues sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$, et

2) on a le contrôle $\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1+|x|) |D_x^\alpha \vec{u}(t, x)| < +\infty$,

3) ainsi que l'estimation $\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1+|x|) |D_x^\alpha p(t, x)| < +\infty$.

Nous verrons plus tard quelques propriétés supplémentaires de ces solutions, pour l'instant nous allons nous focaliser sur la notion de *temps d'existence* de celles-ci : en effet, le théorème précédent nous fournit uniquement un temps $T > 0$ sous certaines conditions qu'il convient d'étudier de plus près.

Remarque 3.7 *Il est fondamental d'observer que le temps T d'existence des solutions est donné par la relation (3.65) qui fait intervenir des constantes génériques mais qui surtout fait apparaître les contrôles A_0 et B_0 de la donnée initiale \vec{u}_0 et de la force extérieure \vec{f} donnés dans les hypothèses (3.41) et (3.42) respectivement.*

Ainsi, à partir de la condition (3.65) nous obtenons l'inégalité

$$T^\delta \leq \frac{1}{C(A_0 + B_0)}, \quad (3.66)$$

et cette estimation nous indique que si les données sont "grandes" (ce qui se traduit par le fait que l'on a $A_0, B_0 \gg 1$), alors le temps d'existence pour les solutions que nous avons obtenu pour les équations de Navier-Stokes sera "petit".

Observons maintenant, toujours à partir de la condition (3.65), que puisque le paramètre δ vérifie $0 \leq \delta < 1/2$, alors si l'on fait tendre $\delta \rightarrow 0$ dans cette condition (3.65), nous avons naturellement la relation

$$K_0 C_0 (A_0 + B_0) \leq 1, \quad (3.67)$$

qui nous permet de conclure l'argument de convergence sans faire intervenir le temps T , mais le prix à payer est que la taille des données A_0 et B_0 doit être petite et cette observation nous permet d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 3.4.3 (Solutions globales) *Il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que si nous avons les estimations*

$$1) \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |D^\alpha \vec{u}_0(x)| = A_0 < \varepsilon_0,$$

$$2) \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 \leq t} (1 + |x|)^4 |D_x^\alpha \vec{f}(t, x)| = B_0 < \varepsilon_0,$$

alors la solution (\vec{u}, p) des équations de Navier-Stokes associée à ces données initiales est définie globalement en temps et vérifie les majorations

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t} (1 + |x|) |D_x^\alpha \vec{u}(t, x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t} (1 + |x|) |D_x^\alpha p(t, x)| < +\infty.$$

Démonstration. La démonstration de ce résultat est la même que celle du Théorème 3.4.1. En effet, sous les hypothèses de ce théorème, si les quantités A_0 et B_0 sont suffisamment petites pour vérifier (3.67), alors on peut appliquer la démonstration précédente sans aucune contrainte sur la variable de temps. ■

Cet aspect, qui relie la taille des données avec le temps d'existence, reviendra souvent lorsqu'on étudie les équations de Navier-Stokes comme nous aurons l'opportunité de le voir dans les chapitres suivants.

Nous allons maintenant étudier plus généralement l'unicité des solutions que nous venons de d'obtenir avec le Théorème 3.4.1 : en effet, nous savons déjà par la Remarque 3.6, page

68, qu'à partir d'une donnée initiale \vec{u}_0 et d'une force extérieure \vec{f} fixées, le processus utilisé fournit par construction une solution unique (\vec{u}, p) des équations de Navier-Stokes sous forme intégrale (3.43), mais si (\vec{v}, q) est une *autre* solution de ce système qui vérifie les mêmes propriétés de décroissance et qui provient des mêmes données initiales \vec{u}_0 et \vec{f} , alors nous allons voir que l'on a $\vec{u} = \vec{v}$ et $p = q$ et ce *indépendamment* de la technique utilisée pour obtenir le couple (\vec{v}, q) .

Théorème 3.4.4 (Unicité) Soient \vec{u}_0 et \vec{f} deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 telles que l'on ait la propriété $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et les contrôles

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |D^\alpha \vec{u}_0(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1 + |x|)^4 |D_x^\alpha \vec{f}(t, x)| < +\infty.$$

Si (\vec{u}, p) est une solution classique (au sens du Corollaire 3.4.2) du système intégral de Navier-Stokes (3.43) sur l'intervalle de temps $[0, T[$ et si (\vec{v}, q) est une solution du problème suivant sur le même intervalle de temps

$$\begin{cases} \vec{v}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) (s, x) ds \\ q(t, x) = -\Phi * \operatorname{div} \left(\vec{f} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) (t, x), \end{cases}$$

où les fonctions \vec{v} et q sont de classe \mathcal{C}^2 et vérifient les estimations

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1 + |x|) |D_x^\alpha \vec{v}(t, x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1 + |x|) |D_x^\alpha q(t, x)| < +\infty,$$

alors on a $\vec{u} = \vec{v}$ et $p = q$.

Démonstration. On remarque tout d'abord qu'il suffit d'étudier l'unicité pour les vitesses puisque si $\vec{u} = \vec{v}$ alors par la formule ci-dessus qui détermine la pression q on obtiendra directement que $p = q$.

Nous posons alors $\vec{w}(t, x) = \vec{v}(t, x) - \vec{u}(t, x)$ et on obtient sans problème les identités

$$\vec{w}(0, x) = \vec{v}(0, x) - \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x) - \vec{u}_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\vec{w}) = \operatorname{div}(\vec{v}) - \operatorname{div}(\vec{u}) = 0,$$

et comme par hypothèse on a les contrôles

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1 + |x|) |\vec{v}(t, x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1 + |x|) |\vec{u}(t, x)| < +\infty,$$

alors on a également

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1 + |x|) |\vec{w}(t, x)| < +\infty.$$

On note maintenant $0 < T^*$ le temps maximal sur lequel on a $\vec{w}(t, x) = 0$ sur l'ensemble $[0, T^*[\times \mathbb{R}^3$ et on suppose (afin d'obtenir une contradiction) que l'on a $T^* < T_0 \leq T$ pour un certain T_0 qui sera fixé par la suite.

Remarquons à présent que l'on a par la bilinéarité de l'application $(\vec{\varphi} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\varphi}$ et par les propriétés de divergence nulle les identités

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} = \operatorname{div}(\vec{w} \otimes \vec{v} + \vec{u} \otimes \vec{w}),$$

et ainsi nous pouvons écrire, pour tout T_0 tel que $T^* < T_0 \leq T$ et pour $T^* < t < T_0$:

$$\begin{aligned}\vec{w}(t, x) &= \int_{T^*}^t \mathcal{O}_{t-s} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(s, x) ds - \int_{T^*}^t \mathcal{O}_{t-s} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) ds \\ &= \int_{T^*}^t \mathcal{O}_{t-s} \cdot \left((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(s, x) - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) \right) ds \\ &= \int_{T^*}^t \mathcal{O}_{t-s} \cdot (\operatorname{div}(\vec{w} \otimes \vec{v} + \vec{u} \otimes \vec{w}))(s, x) ds.\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}(1 + |x|)|\vec{w}(t, x)| &\leq (1 + |x|) \sum_{j=1}^3 \left(\int_{T^*}^t \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(y)| |\vec{w} \otimes \vec{v}|(s, x - y) dy ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{T^*}^t \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(y)| |\vec{u} \otimes \vec{w}|(s, x - y) dy ds \right),\end{aligned}$$

et avec les contrôles sur les fonctions \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} explicités ci-dessus on peut écrire

$$\begin{aligned}(1 + |x|)|\vec{w}(t, x)| &\leq C(1 + |x|) \|(1 + |\cdot|)\vec{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty \left(\|(1 + |\cdot|)\vec{v}(\cdot, \cdot)\|_\infty + \|(1 + |\cdot|)\vec{u}(\cdot, \cdot)\|_\infty \right) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^3 \int_{T^*}^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(y)|}{(1 + |x - y|)^2} dy ds.\end{aligned}\tag{3.68}$$

Nous avons maintenant :

$$\int_{T^*}^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(y)|}{(1 + |x - y|)^2} dy ds = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1 + |x - y|)^2} \int_{T^*}^t |\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(y)| ds dy,$$

et en suivant les calculs donnés dans la formule (3.62), page 72, on a pour $0 < \delta < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\int_{T^*}^t |\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(y)| ds &\leq Ct^\delta \int_{T^*}^t \frac{1}{(t-s)^\delta} \frac{1}{(t-s)^2 + |y|^4} ds \\ &\leq \frac{Ct^\delta}{|y|^{2+2\delta}} \int_{T^*}^t \frac{1}{u^\delta} \frac{1}{u^2 + 1} du \leq \frac{Ct^\delta}{|y|^{2+2\delta}} \int_{T^*}^t \frac{1}{u^\delta} du \\ &\leq \frac{Ct^\delta (t^{1-\delta} - T^{*1-\delta})}{|y|^{2+2\delta}} \leq \frac{CT_0^\delta (T_0^{1-\delta} - T^{*1-\delta})}{|y|^{2+2\delta}},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait $T^* < t < T_0 < T$. Nous pouvons alors écrire, par le Lemme 3.1.9, page 52 :

$$\begin{aligned}\int_{T^*}^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(y)|}{(1 + |x - y|)^2} dy ds &\leq CT_0^\delta (T_0^{1-\delta} - T^{*1-\delta}) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1 + |x - y|)^2} \frac{1}{|y|^{2+2\delta}} dy \\ &\leq C \frac{T_0^\delta (T_0^{1-\delta} - T^{*1-\delta})}{(1 + |x|)^{1+2\delta}} \leq C \frac{T_0^\delta (T_0^{1-\delta} - T^{*1-\delta})}{(1 + |x|)},\end{aligned}$$

et alors, en revenant à l'expression (3.68), on obtient

$$\begin{aligned}(1 + |x|)|\vec{w}(t, x)| &\leq C(1 + |x|) \|(1 + |\cdot|)\vec{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty \left(\|(1 + |\cdot|)\vec{v}(\cdot, \cdot)\|_\infty + \|(1 + |\cdot|)\vec{u}(\cdot, \cdot)\|_\infty \right) \\ &\quad \times \frac{T_0^\delta (T_0^{1-\delta} - T^{*1-\delta})}{(1 + |x|)} \\ &\leq \|(1 + |\cdot|)\vec{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty \left(\|(1 + |\cdot|)\vec{v}(\cdot, \cdot)\|_\infty + \|(1 + |\cdot|)\vec{u}(\cdot, \cdot)\|_\infty \right) \\ &\quad \times \left(T_0^\delta (T_0^{1-\delta} - T^{*1-\delta}) \right),\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'estimation

$$\begin{aligned} \|(1 + |\cdot|)\vec{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty &\leq \|(1 + |\cdot|)\vec{w}(\cdot, \cdot)\|_\infty \left(\|(1 + |\cdot|)\vec{v}(\cdot, \cdot)\|_\infty + \|(1 + |\cdot|)\vec{u}(\cdot, \cdot)\|_\infty \right) \\ &\quad \times \left(T_0^\delta (T_0^{1-\delta} - T^{*1-\delta}) \right), \end{aligned}$$

maintenant en fixant T_0 suffisamment proche de T^* (ce qui est possible car le choix de $T_0 > T^*$ est arbitraire) tel que l'on ait

$$\left(\|(1 + |\cdot|)\vec{v}(\cdot, \cdot)\|_\infty + \|(1 + |\cdot|)\vec{u}(\cdot, \cdot)\|_\infty \right) \times \left(T_0^\delta (T_0^{1-\delta} - T^{*1-\delta}) \right) < 1,$$

alors on obtient une contradiction ($1 < 1$), ce qui nous permet de conclure que la fonction \vec{w} est nulle sur tout l'intervalle $[0, T[$. On en déduit de la sorte que l'on a l'identité $\vec{v} = \vec{u}$ et nous avons obtenu l'unicité recherchée. ■

3.5 Formulation différentielle et formulation intégrale

Nous avons obtenu par le Théorème 3.4.1 précédent des solutions des équations de Navier-Stokes sous formulation intégrale :

$$\begin{cases} \vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, x) ds \\ p(t, x) = -\Phi * \operatorname{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (t, x). \end{cases}$$

Dans le résultat qui suit, nous allons voir dans quel sens ces fonctions vérifient les équations de Navier-Stokes usuelles :

Théorème 3.5.1 Soient $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 qui vérifient les hypothèses du Théorème 3.4.1. Si le couple (\vec{u}, p) vérifie les estimations du Corollaire 3.4.2 :

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T \\ |\alpha| \leq 2}} (1 + |x|) |D_x^\alpha \vec{u}(t, x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T \\ |\alpha| \leq 2}} (1 + |x|) |D_x^\alpha p(t, x)| < +\infty,$$

et si (\vec{u}, p) est une solution du problème de Navier-Stokes intégral

$$\begin{cases} \vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, x) ds \\ p(t, x) = -\Phi * \operatorname{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (t, x), \end{cases} \quad (3.69)$$

alors (\vec{u}, p) est une solution du problème de Navier-Stokes différentiel

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Pour $h > 0$ on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}(t+h, x) - \vec{u}(t, x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\mathfrak{g}_{t+h} * \vec{u}_0(x) + \int_0^{t+h} \mathcal{O}_{t+h-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, x) ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{h} \left(\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, x) ds \right), \end{aligned}$$

et en utilisant les propriétés de linéarité de la convolution et de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}(t+h, x) - \vec{u}(t, x)}{h} &= \frac{\mathfrak{g}_{t+h} - \mathfrak{g}_t}{h} * \vec{u}_0(x) + \left(\int_0^t \frac{\mathcal{O}_{t+h-s} - \mathcal{O}_{t-s}}{h} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \right) \\ &+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathcal{O}_{t+h-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds, \end{aligned}$$

rappelons que le tenseur d'Oseen est donné par l'expression

$$\mathcal{O}_{j,k}(t, x) = \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t(x) + \Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} \mathfrak{g}_t(x),$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}(t+h, x) - \vec{u}(t, x)}{h} &= \frac{\mathfrak{g}_{t+h} - \mathfrak{g}_t}{h} * \vec{u}_0(x) + \left(\int_0^t \frac{\mathcal{O}_{t+h-s} - \mathcal{O}_{t-s}}{h} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \right) \\ &+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\delta_{j,k} \mathfrak{g}_{t+h-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \\ &+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} \mathfrak{g}_{t+h-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds, \end{aligned}$$

et nous réécrivons la dernière intégrale de l'expression précédente comme :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}(t+h, x) - \vec{u}(t, x)}{h} &= \frac{\mathfrak{g}_{t+h} - \mathfrak{g}_t}{h} * \vec{u}_0(x) + \left(\int_0^t \frac{\mathcal{O}_{t+h-s} - \mathcal{O}_{t-s}}{h} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \right) \\ &+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\delta_{j,k} \mathfrak{g}_{t+h-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \\ &+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \vec{\nabla} \left((\Phi * \mathfrak{g}_{t+h-s}) * \text{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) \right) (s, x) ds. \end{aligned}$$

Ainsi si l'on fait tendre $h \rightarrow 0$ ci-dessus, par convergence dominée et en remarquant qu'avec l'expression $\mathcal{O}_{j,k} = \delta_{j,k} \mathfrak{g}_t + \Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} \mathfrak{g}_t$ les dérivées temporelles affectent uniquement la fonction gaussienne, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u}(t, x) &= \partial_t \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \left(\int_0^t (\delta_{j,k} \partial_t \mathfrak{g}_{t-s} + \Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_t \mathfrak{g}_{t-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \right) \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\delta_{j,k} \mathfrak{g}_{t+h-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \vec{\nabla} \left((\Phi * \mathfrak{g}_{t+h-s}) * \text{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) \right) (s, x) ds. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que l'on a $\partial_t \mathfrak{g}_t = \Delta \mathfrak{g}_t$ et on peut écrire

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u}(t, x) &= \Delta \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \left(\int_0^t \Delta (\delta_{j,k} \mathfrak{g}_{t-s} + \Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} \mathfrak{g}_{t-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \right) \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\delta_{j,k} \mathfrak{g}_{t+h-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \vec{\nabla} \left((\Phi * \mathfrak{g}_{t+h-s}) * \text{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) \right) (s, x) ds, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit également comme

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{u}(t, x) &= \Delta \left[\mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \left(\int_0^t (\delta_{j,k} \mathbf{g}_{t-s} + \Phi * \partial_{x_j} \partial_{x_k} \mathbf{g}_{t-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \right) \right] \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\delta_{j,k} \mathbf{g}_{t+h-s})_{j,k} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \vec{\nabla} \left((\Phi * \mathbf{g}_{t+h-s}) * \operatorname{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) \right) (s, x) ds.\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 2.5.5 de différentiation de Lebesgue dans les deux limites ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{u}(t, x) &= \Delta \left[\mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \right] + \mathbf{g}_0 * \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (t, x) \\ &\quad + \vec{\nabla} \left((\Phi * \mathbf{g}_0) * \operatorname{div} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) \right) (t, x).\end{aligned}$$

Etant donné que l'on a $\mathbf{g}_0 = \delta_0$, où la fonction δ_0 est la fonction Delta de Dirac qui est l'élément neutre de la convolution et puisque \vec{u} et p sont donnés par les formules (3.69), l'équation ci-dessus se réécrit comme

$$\partial_t \vec{u}(t, x) = \Delta \vec{u}(t, x) + \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (t, x) - \vec{\nabla} p(t, x),$$

ce qui termine la démonstration du théorème à condition de montrer que l'on a bien la propriété $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$. On applique alors l'opérateur divergence à l'expression de \vec{u} (on se rappellera que chaque terme de l'intégrale est bien défini) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{u})(t, x) &= \operatorname{div} \left(\mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds \right) \\ &= \mathbf{g}_t * \operatorname{div}(\vec{u}_0)(x) + \int_0^t \operatorname{div} \left(\mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) \right) (s, x) ds,\end{aligned}$$

en remarquant que le tenseur d'Oseen est symétrique et en notant, pour \vec{f} et \vec{g} deux fonctions vectorielles, $\vec{f} : \vec{g} = f_1 * g_1 + f_2 * g_2 + f_3 * g_3$, nous avons

$$\operatorname{div}(\vec{u})(t, x) = \mathbf{g}_t * \operatorname{div}(\vec{u}_0)(x) + \int_0^t \operatorname{div}(\mathcal{O}_{t-s}) : \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds,$$

ainsi, puisque par hypothèse on a $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et que l'on a $\operatorname{div}(\mathcal{O}_{t-s}) = 0$ (voir la formule (3.31, page 61), on obtient sans problème que si \vec{u} est donné par cette formule intégrale alors $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$. ■

3.6 Propriétés de décroissance spatiale des solutions classiques

L'objectif de cette section est d'étudier plus en détail le comportement de la vitesse $\vec{u}(t, \cdot)$ en variable d'espace et plus précisément on souhaite donner des estimations plus fines sur la décroissance à l'infini de la fonction $\vec{u}(t, \cdot)$. Ce point est particulièrement important car il nous amènera à nous confronter avec la structure interne des équations de Navier-Stokes comme nous allons le voir dans les lignes qui suivent.

Nous savons déjà par le Théorème 3.4.1 et son Corollaire 3.4.2, que si l'on part de données \vec{u}_0 et \vec{f} qui vérifient les propriétés

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|) |D^\alpha \vec{u}_0(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1 + |x|)^4 |D_x^\alpha \vec{f}(t, x)| < +\infty,$$

alors la vitesse $\vec{u}(t, x)$ solution des équations de Navier-Stokes possède un comportement du type

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1 + |x|) |D_x^\alpha \vec{u}(t, x)| < +\infty, \quad (3.70)$$

ce qui nous donne quelques informations de la décroissance à l'infini (en variable d'espace) de \vec{u} . Voyons tout d'abord comment améliorer un peu ce résultat :

Proposition 3.6.1 *Soient $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 qui vérifient*

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^2 |D^\alpha \vec{u}_0(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1 + |x|)^4 |D_x^\alpha \vec{f}(t, x)| < +\infty,$$

alors la vitesse \vec{u} qui est la solution associée à ces données pour les équations de Navier-Stokes vérifie l'estimation :

$$\sup_{|\alpha| \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1 + |x|)^2 |D_x^\alpha \vec{u}(t, x)| < +\infty.$$

Preuve. Considérons tout d'abord le cas où $|\alpha| = 0$. On remarque alors que ces hypothèses de travail nous permettent d'invoquer le Théorème 3.4.1, page 66 : nous avons donc des solutions \vec{u} qui vérifient l'estimation $\sup_{0 < t \leq T} |\vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)}$ et qui en plus s'écrivent sous la

formulation $\vec{u}(t, x) = \mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: (\vec{f} - \text{div}(\vec{u} \otimes \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds$. Nous devons alors estimer chacun des trois termes de droite de l'inégalité ci-dessous :

$$|\vec{u}(t, x)| \leq |\mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x)| + \left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \vec{f}(s, x) ds \right| + \left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})(s, x) ds \right|. \quad (3.71)$$

Pour le premier terme, en utilisant l'hypothèse sur \vec{u}_0 et en suivant les calculs réalisés entre les expressions (3.57) et (3.58) on obtient sans problème l'estimation

$$\sup_{0 < t \leq T} |\mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^2}. \quad (3.72)$$

Pour le deuxième terme de (3.71) qui fait intervenir la force extérieure on écrit

$$\left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \vec{f}(s, x) ds \right| \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{O}_{t-s}(x - y)| |\vec{f}(s, y)| dy ds,$$

et par les propriétés du tenseur d'Oseen données le Corollaire 3.3.4, page 63, ainsi que par l'hypothèse sur la force extérieure nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{O}_{t-s}(x - y)| |\vec{f}(s, y)| dy ds &\leq C \sup_{0 < t \leq T, y \in \mathbb{R}^3} \{(1 + |y|)^4 |D_x^\alpha \vec{f}(t, y)|\} \\ &\times \sup_{0 < t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^3} \frac{1}{(1 + |y|)^4} ds dy. \end{aligned}$$

Maintenant, pour un $0 < \epsilon < 1$ fixé, par les inégalités de Young on a les majorations

$$(t^\epsilon |x|^{3-2\epsilon}) \leq C_\epsilon \left((t^\epsilon)^{\frac{3}{2\epsilon}} + (|x|^{3-2\epsilon})^{\frac{3}{3-2\epsilon}} \right) \leq C_\epsilon (\sqrt{t} + |x|)^3,$$

ce qui nous permet d'écrire $\frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^3} \leq C_\epsilon \frac{1}{(t-s)^\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}}$, et donc il vient

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{O}_{t-s}(x-y)| |\vec{f}(s,y)| dy ds &\leq C_\epsilon \sup_{0 < t \leq T} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} \frac{1}{(1+|y|)^4} ds dy \\ &\leq C_\epsilon T^{1-\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} \frac{1}{(1+|y|)^4} dy, \end{aligned}$$

et avec le Lemme 3.1.9, page 52, il vient finalement (le temps T étant borné)

$$\sup_{0 < t \leq T} \left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \vec{f}(s,x) ds \right| \leq \frac{C_\epsilon T^{1-\epsilon}}{(1+|x|)^{3-2\epsilon}} \leq \frac{C}{(1+|x|)^2}. \quad (3.73)$$

Pour le troisième terme de (3.71) on écrit

$$\left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})(s,x) ds \right| \leq C \sum_{j=1}^3 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(x-t)| |\vec{u} \otimes \vec{u}(s,y)| dy ds.$$

Comme on a $\sup_{0 < t \leq T} |\vec{u}(t,x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)}$ alors on obtient $\sup_{0 < t \leq T} |\vec{u} \otimes \vec{u}| \leq \frac{C}{(1+|x|)^2}$ et par les estimations concernant le tenseur d'Oseen données dans le Corollaire 3.3.4, page 63, nous avons :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(x-t)| |\vec{u} \otimes \vec{u}(s,y)| dy ds \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4} \frac{1}{(1+|y|)^2} ds dy. \quad (3.74)$$

De plus, par les inégalités de Young on a

$$(t^{\frac{2}{3}} |x|^{\frac{8}{3}}) \leq C \left((t^{\frac{2}{3}})^3 + (|x|^{\frac{8}{3}})^{\frac{3}{2}} \right) \leq C (\sqrt{t} + |x|)^4,$$

ce qui nous donne l'estimation

$$\frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4} \leq C \frac{1}{(t-s)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{|x-y|^{\frac{8}{3}}}, \quad (3.75)$$

et nous pouvons écrire

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4} \frac{1}{(1+|y|)^2} ds dy \leq CT^{\frac{1}{3}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^{\frac{8}{3}}} \frac{1}{(1+|y|)^2} dy.$$

On peut appliquer le premier point du Lemme 3.1.9, page 52 pour obtenir

$$\left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})(s,x) ds \right| \leq CT^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{5}{3}}}. \quad (3.76)$$

En observant que l'on a le contrôle $\frac{1}{(1+|x|)^2} \leq \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{5}{3}}}$, alors avec les estimations (3.72)-(3.73) et (3.76), en revenant à l'estimation (3.71), nous avons démontré que l'on a

$$\sup_{0 < t \leq T} |\vec{u}(t,x)| \leq C \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{5}{3}}}, \quad (3.77)$$

ce qui est une amélioration de l'estimation de base (3.70) car $1 < \frac{5}{3}$.

Pour obtenir la décroissance annoncée il suffit de réappliquer les arguments précédents : en effet, à partir de (3.77) on obtient sans problème $\sup_{0 < t \leq T} |\vec{u} \otimes \vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\frac{10}{3}}}$ et donc la majoration (3.74) devient

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_j} \mathcal{O}_{t-s}(x-t)| |\vec{u} \otimes \vec{u}(s, y)| dy ds &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4} \frac{1}{(1+|y|)^{\frac{10}{3}}} ds dy \\ &\leq CT^{\frac{1}{3}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|^{\frac{8}{3}}} \frac{1}{(1+|y|)^{\frac{10}{3}}} dy \\ &\leq CT^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{8}{3}}} \leq CT^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(1+|x|)^2}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'estimation (3.75) et le troisième point du Lemme 3.1.9, page 52. Ainsi, avec cette majoration, tous les termes de (3.71) ont une décroissance de l'ordre de $(1+|x|)^{-2}$.

Etudions maintenant le cas où $|\alpha| = 1$. Nous devons estimer alors :

$$|D_x^\alpha \vec{u}(t, x)| \leq |\mathfrak{g}_t * D_x^\alpha \vec{u}_0(x)| + \left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: D_x^\alpha \vec{f}(s, x) ds \right| + \left| \int_0^t D_x^\alpha (\mathcal{O}_{t-s} :: (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u})(s, x) ds \right|.$$

Avec les hypothèses disponibles, les deux premiers termes ci-dessus se traitent de la même manière que précédemment et en suivant les calculs utilisés pour obtenir les estimations (3.72) et (3.73) on obtient sans problème :

$$\sup_{0 < t \leq T} |\mathfrak{g}_t * D_x^\alpha \vec{u}_0(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^2} \quad \text{et} \quad \sup_{0 < t \leq T} \left| \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: D_x^\alpha \vec{f}(s, x) ds \right| \leq \frac{C}{(1+|x|)^2}.$$

On remarque maintenant que l'on a $\sup_{0 < t \leq T} |\vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^2}$ (par les lignes précédentes) et que l'on dispose de la majoration $\sup_{0 < t \leq T} |\partial_{x_j} \vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)}$ pour $1 \leq j \leq 3$ (par le Corollaire 3.4.2, page 74), ce qui nous permet d'écrire

$$\sup_{0 < t \leq T} |(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^3} \leq \frac{C}{(1+|x|)^2},$$

et avec cette estimation, on obtient (car $|\alpha| = 1$) :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t D_x^\alpha (\mathcal{O}_{t-s} :: (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u})(s, x) ds \right| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha \mathcal{O}_{t-s}(x-y)| |(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x)| dy ds \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4} \frac{1}{(1+|y|)^2} ds dy, \end{aligned}$$

et donc, en suivant les arguments exposés entre les formules (3.74) et (3.77) et avec les deux estimations précédentes, nous avons

$$\sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}(t, x)| \leq C \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{5}{3}}},$$

ce qui constitue une première amélioration pour la quantité $D_x^\alpha \vec{u}$. Afin d'obtenir l'estimation recherchée, il suffira de réinjecter cette estimation pour obtenir le contrôle

$$\sup_{0 < t \leq T} |(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\frac{11}{3}}},$$

(où l'on a utilisé $\sup_{0 < t \leq T} |\vec{u}(t, x)| \leq C \frac{1}{(1+|x|)^2}$ et $\sup_{0 < t \leq T} |\partial_{x_i} \vec{u}(t, x)| \leq C \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{5}{3}}}$). Ainsi, en suivant les mêmes idées exposées ci-dessus il est alors possible d'obtenir sans problème le contrôle recherché

$$\sup_{0 < t \leq T} |D_x^\alpha \vec{u}(t, x)| \leq C \frac{1}{(1+|x|)^2},$$

ce qui termine la démonstration de cette proposition. ■

On remarquera que l'on procède ici par étapes pour obtenir une meilleure décroissance : on obtient tout d'abord un gain de décroissance sur \vec{u} qui convenablement réinjecté permet, en itérant les arguments, d'obtenir le résultat souhaité. On pourrait donc croire que si l'on renforce les hypothèses sur la donnée initiale \vec{u}_0 et sur la force extérieure \vec{f} (en imposant plus de décroissance), alors il sera possible d'améliorer la décroissance de la fonction \vec{u} .

Ce programme est envisageable, mais uniquement jusqu'à un certain point. En effet, si la force extérieure est quelconque (sans aucune structure particulière), alors on sera vite confronté à l'estimation (3.73) qui nous fournira une décroissance de l'ordre de $|x|^{-(3-2\epsilon)}$ et nous verrons dans la Remarque 3.9 ci-dessous que l'on peut en fait obtenir dans ce cas général une décroissance de l'ordre de $|x|^{-3}$. Toutefois, si l'on considère une force extérieure nulle (pour faire abstraction du problème ci-dessus, ce qui après tout est possible car il s'agit d'une donnée que l'on peut choisir à notre guise), ce programme se heurtera à un seuil structural en dessous duquel il ne sera pas possible de descendre. On démontrera alors que pour une solution de Navier-Stokes "générique" on ne pourra pas obtenir une meilleure décroissance à l'infini que $|x|^{-4}$. Cette particularité des équations de Navier-Stokes est le reflet des propriétés du tenseur d'Oseen et pour mettre en lumière ce point nous commencerons par vérifier que l'on peut effectivement obtenir une vitesse $\vec{u}(t, \cdot)$ avec un comportement à l'infini de l'ordre $|x|^{-4}$. On verra ensuite que cette décroissance ne peut être améliorée à moins de vérifier certaines conditions très précises.

Comme il a été indiqué dans les lignes précédentes, la décroissance de l'ordre $|x|^{-4}$ ne peut pas être atteignable pour une force extérieure \vec{f} quelconque, mais si celle-ci s'écrit comme la divergence d'un tenseur alors nous pourrions obtenir ce comportement à l'infini. Ainsi, dans ce qui suit on supposera que la force \vec{f} peut s'écrire comme

$$\vec{f} = \operatorname{div}(\mathbb{F}),$$

où $\mathbb{F} = (f_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est un tenseur. Cette expression nous permettra de traiter de manière similaire le terme provenant de la force extérieure et le terme non linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ qui s'écrit lui aussi comme $\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})$. Avec cette écriture pour la force extérieure nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.6.2 Soient $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\vec{f} = \operatorname{div}(\mathbb{F}) : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 qui vérifient

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1+|x|)^4 |D^\alpha \vec{u}_0(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1+|x|)^4 |D_x^\alpha \mathbb{F}(t, x)| < +\infty,$$

alors la vitesse \vec{u} qui est la solution associée à ces données pour les équations de Navier-Stokes vérifie l'estimation :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1+|x|)^4 |\vec{u}(t, x)| < +\infty.$$

Démonstration. On notera que les hypothèses ci-dessus sont plus fortes que celle du Théorème 3.4.1, page 66, et donc nous pouvons représenter la vitesse \vec{u} par l'expression

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \operatorname{div} (\mathbb{F} - \vec{u} \otimes \vec{u})(s, x) ds,$$

et on écrit alors

$$|\vec{u}(t, x)| \leq |\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)| + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_i} \mathcal{O}_{t-s}(x-y)| (|\mathbb{F}(s, y)| + |\vec{u} \otimes \vec{u}(s, y)|) dy ds. \quad (3.78)$$

Nous allons maintenant estimer ces deux termes ci-dessus.

- Pour la donnée initiale \vec{u}_0 on a les inégalités

$$\begin{aligned} |\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\mathfrak{g}_t(x-y)| |\vec{u}_0(y)| dy \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^3} \{(1+|y|)^4 |\vec{u}_0(y)|\} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathfrak{g}_t(x-y)}{(1+|y|)^4} dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy, \end{aligned} \quad (3.79)$$

et on remarque que l'on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy \right| \leq \|\mathfrak{g}_t\|_{L^1} \left\| \frac{1}{(1+|\cdot|)^4} \right\|_{L^\infty} < +\infty,$$

ce qui nous indique que cette intégrale est bornée en t et en x . Ensuite, toujours pour $|x| \geq 1$ on écrit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy = \int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy + \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\}} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy.$$

Ainsi, pour la première intégrale ci-dessus, sur l'ensemble $\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}$ on a l'estimation $\frac{1}{2}|x| \leq |x-y|$, ce qui implique $\frac{1}{(1+|x-y|)^4} \leq \frac{C}{(1+|x|)^4}$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy &\leq \frac{C}{(1+|x|)^4} \int_{\{|y| \leq \frac{1}{2}|x|\}} \mathfrak{g}_t(y) dy \\ &\leq \frac{C}{(1+|x|)^4} \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{g}_t(y) dy \leq \frac{C}{(1+|x|)^4}. \end{aligned}$$

On considère maintenant la deuxième intégrale ci-dessus et on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\}} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy &= \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| > |x|/2\}} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy \\ &\quad + \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy, \end{aligned}$$

et par les mêmes arguments utilisés précédemment on a

$$\int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| > |x|/2\}} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy \leq \frac{C}{(1+|x|)^4}.$$

Maintenant, par la majoration $\mathfrak{g}_t(y) \leq Ct^{\frac{1}{2}}|y|^{-4}$ (voir la formule (3.5), page 46) on écrit

$$\int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{\mathfrak{g}_t(y)}{(1+|x-y|)^4} dy \leq C \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{|y|^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy,$$

mais comme sur l'ensemble $\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}$ on a bien les inégalités $\frac{1}{2}|x| \leq |y| \leq \frac{3}{2}|x|$, on a donc les contrôles $\frac{1}{|y|^4} \leq \frac{C}{|x|^4}$ et il vient alors (comme $0 < t \leq T$) :

$$\frac{CT^{\frac{1}{2}}}{|x|^4} \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |y|\} \cap \{|x-y| \leq |x|/2\}} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy \leq \frac{CT^{\frac{1}{2}}}{|x|^4}.$$

Pour finir, étant donné que toute l'intégrale (3.79) est bornée, on obtient bien que cette quantité se majore par la fonction $\frac{CT^{\frac{1}{2}}}{(1+|x|)^4}$, nous avons donc

$$|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)| \leq \frac{CT^{\frac{1}{2}}}{(1+|x|)^4}. \quad (3.80)$$

- On considère maintenant les termes de la formule (3.78) qui font intervenir les quantités \mathbb{F} et $\vec{u} \otimes \vec{u}$. On sait d'une part, que par hypothèse sur la force extérieure on a

$$|\mathbb{F}(t, x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^4}.$$

D'autre part, compte tenu du cadre de travail considéré (qui utilise des hypothèses fortes de décroissance), alors par la Proposition 3.6.1 nous avons les estimations

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leq T} (1+|x|)^2 |\vec{u}(t, x)| < +\infty.$$

ce qui nous permet d'écrire le contrôle suivant

$$|\vec{u} \otimes \vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^4}.$$

Finalement, par le Corollaire 3.3.4, page 63, on a l'estimation

$$|\partial_{x_i} \mathcal{O}_{t-s}(x-y)| \leq \frac{C}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4}.$$

Ainsi, avec toutes ces informations nous pouvons écrire

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_i} \mathcal{O}_{t-s}(x-y)| (|\mathbb{F}| + |\vec{u} \otimes \vec{u}|(s, y)) dy ds \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4} \frac{1}{(1+|y|)^4} dy ds$$

Montrons tout d'abord que lorsque $|x| < 1$ alors la double intégrale ci-dessus est finie pour tout $0 < t \leq T$. En effet on a

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4} \frac{1}{(1+|y|)^4} dy ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |y|)^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds$$

et puisque $\frac{1}{(1+|x-y|)^4} \leq 1$, on écrit avec le changement de variable $u = \frac{y}{\sqrt{t-s}}$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |y|)^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |y|)^4} dy ds \\ &\leq \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|u|)^4} du ds \leq Ct^{\frac{1}{2}} \\ &\leq CT^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que cette double intégrale est bornée.

Etudions à présent le cas $|x| \geq 1$, on écrit alors

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds &= \int_0^t \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |x-y|\}} \frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds \\ &+ \int_0^t \int_{\{|x-y| < \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds. \end{aligned}$$

Pour la première intégrale ci-dessus, si $\frac{1}{2}|x| < |x-y|$, on a bien $\frac{1}{(1+|x-y|)^4} \leq \frac{C}{(1+|x|)^4}$, il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |x-y|\}} \frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds &\leq \frac{C}{(1+|x|)^4} \int_0^t \int_{\{\frac{1}{2}|x| < |x-y|\}} \frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} dy ds \\ &\leq \frac{C}{(1+|x|)^4} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} dy ds, \end{aligned}$$

et par le changement de variable $u = \frac{y}{\sqrt{t-s}}$ on obtient

$$\leq \frac{C}{(1+|x|)^4} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|u|)^4} du \leq \frac{CT^{\frac{1}{2}}}{(1+|x|)^4}.$$

Nous remarquons maintenant que si $|x-y| < \frac{1}{2}|x|$, alors on a $\frac{1}{2}|x| \leq |y|$, ce qui implique l'inégalité $\frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} \leq \frac{C}{(\sqrt{t-s}+|x|)^4}$, et nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\{|x-y| < \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds &\leq \int_0^t \frac{C}{(\sqrt{t-s}+|x|)^4} \\ &\times \int_{\{|x-y| < \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds, \end{aligned}$$

et en élargissant le domaine d'intégration en variable d'espace, on a

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \frac{C}{(\sqrt{t-s}+|x|)^4} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds \leq \int_0^t \frac{C}{(\sqrt{t-s}+|x|)^4} ds = \int_0^t \frac{C}{(\sqrt{s}+|x|)^4} ds \\ &\leq \frac{C}{|x|^2} \int_0^{\frac{t}{|x|^2}} \frac{1}{(1+\sqrt{u})^4} du, \end{aligned} \tag{3.81}$$

où nous avons utilisé le changement de variable $u = \frac{s}{|x|^2}$ dans l'avant-dernière intégrale ci-dessus. Il vient alors

$$\frac{C}{|x|^2} \int_0^{\frac{t}{|x|^2}} \frac{1}{(1+\sqrt{u})^4} du \leq \frac{C}{|x|^2} \int_0^{\frac{t}{|x|^2}} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{C}{|x|^2} \arctan\left(\frac{t}{|x|^2}\right).$$

Donc, étant donné que l'on souhaite étudier le comportement lorsque $|x|$ est grand (rappelons que $0 < t \leq T < +\infty$), peut écrire en utilisant un développement limité lorsque $\frac{T}{|x|^2} < 1$:

$$\arctan\left(\frac{t}{|x|^2}\right) \leq C \frac{t}{|x|^2} \leq C \frac{T}{|x|^2}.$$

Ainsi, avec cette estimation, nous pouvons retourner à l'intégrale (3.81) et l'on obtient alors (lorsque $|x| \gg 1$)

$$\int_0^t \int_{\{|x-y| < \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{(\sqrt{t-s}+|y|)^4} \frac{1}{(1+|x-y|)^4} dy ds \leq \frac{CT}{|x|^4}.$$

Nous avons donc démontré la majoration

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_i} \mathcal{O}_{t-s}(x-y)| (|\mathbb{F}| + |\vec{u} \otimes \vec{u}|(s,y)) dy ds &\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4} \frac{1}{(1+|y|)^4} dy ds \\ &\leq C \max\{T^{\frac{1}{2}}, T\} \frac{1}{(1+|x|)^4}. \end{aligned}$$

Si nous revenons à l'estimation (3.78) et nous utilisons la majoration (3.80) pour le terme qui fait intervenir la donnée initiale \vec{u}_0 et la majoration ci-dessus qui contient la force extérieure et le terme non linéaire, alors nous avons obtenu l'estimation suivante pour $0 < t \leq T$:

$$|\vec{u}(t, x)| \leq C \max\{T^{\frac{1}{2}}, T\} \frac{1}{(1+|x|)^4},$$

ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Remarque 3.8 *On notera que l'écriture $\vec{f} = \text{div}(\mathbb{F})$ permet de considérer les quantités $|\partial_{x_i} \mathcal{O}_{j,k}(t, x)|$, qui par le Corollaire 3.3.4, page 63, ont une meilleure décroissance que les termes $|\mathcal{O}_{j,k}(t, x)|$.*

Insistons sur le fait que, étant donné que la donnée initiale \vec{u}_0 et que la force extérieure (via le tenseur \mathbb{F}) sont des fonctions pour lesquelles on dispose de toute liberté, elles peuvent être choisies à décroissance rapide ou même à support compact (et en ce qui concerne la force extérieure on pourrait même ne pas la prendre en compte du tout en posant tout simplement $\vec{f} = 0$). On remarque alors que ce résultat de décroissance de la vitesse $\vec{u}(t, \cdot)$ provient d'un bon contrôle de l'intégrale suivante

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_{x_i} \mathcal{O}_{t-s}(x-y)| |\vec{u} \otimes \vec{u}(s, y)| dy.$$

Or, par le Corollaire 3.3.4, page 63, on a *uniquement* l'estimation $|\partial_{x_i} \mathcal{O}_{t-s}(x-y)| \leq \frac{C}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^4}$ ainsi, si l'on suppose que l'on est capable d'obtenir une inégalité du type

$$|\vec{u} \otimes \vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\beta},$$

pour un certain $\beta > 3$, alors (en faisant abstraction -à des fins pédagogiques- de la variable de temps dans l'estimation concernant le tenseur d'Oseen) on sera vite limité dans nos majorations par le dernier point du Lemme 3.1.9, page 52.

On pourrait toutefois penser que des estimations plus fines pourraient donner une meilleure décroissance pour une vitesse *générique* \vec{u} , solution des équations de Navier-Stokes, mais nous allons voir qu'il n'en est rien. En effet, nous allons maintenant montrer cette décroissance d'ordre $|x|^{-4}$ est en réalité un seuil en dessous duquel on ne pourra pas descendre, à moins de vérifier certaines propriétés très particulières, et pour vérifier cette assertion, nous aurons besoin du résultat suivant :

Théorème 3.6.3 Soient $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^2 tels que l'on ait les propriétés :

1) Pour la donnée initiale : $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^5 |D^\alpha \vec{u}_0(x)| < +\infty.$$

2) Pour la force extérieure, pour $|\alpha| \leq 2$, $D_x^\alpha \vec{f}$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ et vérifie

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1 + |x|)^6 |D_x^\alpha \vec{f}(t, x)| < +\infty.$$

Si on considère la solution classique (\vec{u}, p) des équations de Navier-Stokes associée à cette donnée initiale \vec{u}_0 et à cette force extérieure \vec{f} , alors, pour tout temps $0 < t \leq T$, la vitesse $\vec{u}(t, \cdot)$ possède le développement asymptotique suivant lorsque $|x| \rightarrow +\infty$:

$$\vec{u}(t, x) = \sum_{k=1}^3 \mathcal{A}_k(t) \vec{\nabla}_{\partial_{x_j}} \Phi(x) - \sum_{k,m=1}^3 \mathcal{B}_{k,m}(t) \vec{\nabla}_{\partial_{x_j}} \partial_{x_k} \Phi(x) + o(|x|^{-4}),$$

où Φ est le noyau de Green et les fonctions $\mathcal{A}_k(t)$ et $\mathcal{B}_{k,m}(t)$ sont définies par les formules :

$$\mathcal{A}_k(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_k(s, x) dx ds \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{k,m}(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u_k(s, x) u_m(s, x) + x_k f_m(s, x) dx ds.$$

Démonstration. Sous les hypothèses de ce théorème, on peut appliquer le Théorème 3.4.1, page 66, pour obtenir que la vitesse \vec{u} s'écrit de la manière suivante :

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds,$$

Nous allons estimer séparément le terme relié à la donnée initiale et le terme qui comporte la force extérieure ainsi que la partie non linéaire.

Ainsi, en suivant les mêmes calculs exposés dans (3.79) et (3.80), on obtient sans problème à partir de l'hypothèse sur la donnée initiale \vec{u}_0 , l'estimation

$$|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^5},$$

ce qui nous donne bien un comportement du type $o(|x|^{-4})$ pour ce terme lorsque $|x| \rightarrow +\infty$.

Passons maintenant à l'étude du terme qui contient les quantités $\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ et on commence par étudier les informations disponibles pour la vitesse : sous les hypothèses considérées ici, nous pouvons appliquer la Proposition 3.6.1, donné page 81, et nous avons les estimations :

$$|\vec{u}(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-2} \quad \text{et} \quad |\partial_{x_j} \vec{u}(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-2}, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

de plus, nous pouvons aussi appliquer le Théorème 3.6.2, page 84 (car les hypothèses considérées ci-dessus sont plus fortes), et il vient

$$|\vec{u}(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-4},$$

on déduit sans problème que l'on a alors

$$|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-6}. \quad (3.82)$$

Par les hypothèses sur la force extérieure on a également le contrôle

$$|\vec{f}(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-6}. \quad (3.83)$$

Ces deux estimations seront la base des calculs utilisés par la suite, maintenant donnons une majoration fondamentale pour le tenseur d'Oseen : en utilisant le Corollaire 3.3.4, page 63, nous avons l'inégalité

$$|\mathcal{O}(t-s, x-y)| \leq \frac{C}{(\sqrt{t-s} + |x-y|)^3},$$

et pour $0 < \epsilon < 1$, par les inégalités de Young on a les majorations

$$(t^\epsilon |x|^{3-2\epsilon}) \leq C_\epsilon \left((t^\epsilon)^{\frac{3}{2\epsilon}} + (|x|^{3-2\epsilon})^{\frac{3}{3-2\epsilon}} \right) \leq C_\epsilon (\sqrt{t} + |x|)^3,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$|\mathcal{O}(t-s, x-y)| \leq C_\epsilon \frac{1}{(t-s)^\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}}. \quad (3.84)$$

Avec ce contrôle que nous venons d'obtenir (qui permet de séparer les variables de temps et d'espace), nous allons à présent estimer plus précisément le terme

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{O}_{t-s}(x-y) \cdot \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, y) dy ds. \quad (3.85)$$

On décompose alors l'espace \mathbb{R}^3 de la manière suivante

$$\mathbb{R}^3 = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

où les ensembles D_1 , D_2 et D_3 sont donnés par les expressions

$$\begin{aligned} D_1 &= \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \geq \frac{1}{2}|x|\} \cap \{y \in \mathbb{R}^3 : |x-y| \leq |x|\} \\ D_2 &= \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \geq \frac{1}{2}|x|\} \cap \{y \in \mathbb{R}^3 : |x-y| > |x|\} \\ D_3 &= \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| < \frac{1}{2}|x|\}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{O}_{t-s}(x-y) \cdot \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, y) dy ds = I_1 + I_2 + I_3,$$

où pour $1 \leq \ell \leq 3$ on a posé

$$\vec{I}_\ell = \int_0^t \int_{D_\ell} \mathcal{O}_{t-s}(x-y) \cdot \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, y) dy ds,$$

et nous allons estimer chacun des termes \vec{I}_ℓ .

- Pour \vec{I}_1 on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned} |\vec{I}_1| &\leq \int_0^t \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| \leq |x|\}} |\mathcal{O}_{t-s}(x-y)| \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, y) |dyds \\ &\leq C \int_0^t \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| \leq |x|\}} \frac{1}{(t-s)^\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} \frac{1}{(1+|y|)^6} dyds, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'estimation (3.84) pour le tenseur d'Oseen et les majorations (3.82)-(3.83) pour le terme $\left| \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) \right|$. Ainsi, en intégrant par rapport à la variable de temps on a :

$$\begin{aligned} |\vec{I}_1| &\leq Ct^{1-\epsilon} \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| \leq |x|\}} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} \frac{1}{(1+|y|)^6} dy \\ &\leq Ct^{1-\epsilon} \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| \leq |x|\}} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} \frac{1}{|y|^6} dy. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le support d'intégration, on a $|y| \geq \frac{1}{2}|x|$ et donc

$$\begin{aligned} |\vec{I}_1| &\leq \frac{Ct^{1-\epsilon}}{|x|^6} \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| \leq |x|\}} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} dy \leq \frac{Ct^{1-\epsilon}}{|x|^6} \int_{\{|x-y| \leq |x|\}} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} dy \\ &\leq \frac{Ct^{1-\epsilon}}{|x|^6} \int_{\{|z| \leq |x|\}} \frac{1}{|z|^{3-2\epsilon}} dz \leq \frac{Ct^{1-\epsilon}}{|x|^{6-2\epsilon}}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

- De façon totalement symétrique on a pour \vec{I}_2 :

$$\begin{aligned} |\vec{I}_2| &\leq \int_0^t \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| > |x|\}} |\mathcal{O}_{t-s}(x-y)| \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, y) |dyds \\ &\leq C \int_0^t \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| > |x|\}} \frac{1}{(t-s)^\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} \frac{1}{(1+|y|)^6} dyds \\ &\leq Ct^{1-\epsilon} \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| > |x|\}} \frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} \frac{1}{|y|^6} dy, \end{aligned}$$

et en prenant en compte le support d'intégration on a $|x-y| > |x|$ ce qui nous permet d'écrire $\frac{1}{|x-y|^{3-2\epsilon}} \leq \frac{1}{|x|^{3-2\epsilon}}$, il vient alors

$$\begin{aligned} |\vec{I}_2| &\leq \frac{Ct^{1-\epsilon}}{|x|^{3-2\epsilon}} \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x\} \cap \{|x-y| > |x|\}} \frac{1}{|y|^6} dy \leq \frac{Ct^{1-\epsilon}}{|x|^{3-2\epsilon}} \int_{\{|y| \geq \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{|y|^6} dy \\ &\leq \frac{Ct^{1-\epsilon}}{|x|^{6-2\epsilon}}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

étant donné qu'on peut fixer $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ on a bien $6 - 2\epsilon > 4$, et avec les estimations (3.86) et (3.87) on obtient bien (lorsque $|x|$ est suffisamment grand) la propriété suivante

$$|\vec{I}_1| + |\vec{I}_2| = o(|x|^{-4}).$$

- Pour \vec{I}_3 , nous devons étudier

$$\vec{I}_3 = \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x\}} \mathcal{O}_{t-s}(x-y) \cdot \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, y) dyds.$$

Afin de faciliter l'exposition nous considérons les composantes de ce vecteur et l'on écrit alors pour $1 \leq j \leq 3$:

$$\begin{aligned} I_{3_j} &= \sum_{k=1}^3 \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \mathcal{O}(t-s, x-y)_{j,k} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds \\ &= \sum_{k=1}^3 I_{3_{j,k}}, \end{aligned}$$

où on a noté $I_{3_{j,k}} = \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \mathcal{O}_{j,k}(t-s, x-y) \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds$. On décompose maintenant chacun de ces termes de la manière suivante

$$\begin{aligned} I_{3_{j,k}} &= \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \left(\mathcal{O}_{j,k}(t-s, x-y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x-y) \right) \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds \\ &+ \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \left(\partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x-y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right) \\ &\quad \times \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds \\ &+ \int_0^t \int_{\{|y| > \frac{1}{2}|x|\}} \left(-\partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right) \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) - \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right) \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds \\ &= \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_4. \end{aligned}$$

* Le premier terme \mathbb{I}_1 donné ci-dessus se contrôle de la manière suivante : on écrit

$$|\mathbb{I}_1| \leq \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \left| \mathcal{O}_{j,k}(t-s, x-y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x-y) \right| \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds,$$

mais comme on s'intéresse au comportement de ces quantités lorsque $|x|$ est très grand ($|x| \rightarrow +\infty$), par le Corollaire 3.3.5, page 64, on a

$$\left| \mathcal{O}_{j,k}(t-s, x-y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x-y) \right| \leq |\mathfrak{g}_t(x-y)| + 2 \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \left(\frac{t}{(4\pi t)^{3/2} |x-y|} \int_{|x-y|}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} ds \right) \right|,$$

alors, en utilisant la décroissance exponentielle de la fonction gaussienne (et en remarquant que sur l'ensemble $\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}$ on a les inégalités $\frac{1}{2}|x| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|x|$), peut écrire

$$\left| \mathcal{O}_{j,k}(t-s, x-y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x-y) \right| \leq \frac{C(t-s)^{\frac{5}{2}}}{|x-y|^8},$$

et il vient (avec les estimations (3.82)-(3.83)) :

$$\begin{aligned} |\mathbb{I}_1| &\leq C \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \frac{(t-s)^{\frac{5}{2}}}{|x-y|^8} \frac{1}{(1+|y|)^6} dy ds \leq C \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \frac{(t-s)^{\frac{5}{2}}}{|x-y|^8} dy ds \\ &\leq C t^{\frac{7}{2}} \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \frac{1}{|x-y|^8} dy, \end{aligned}$$

et puisque sur l'ensemble $\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}$ on a l'inégalité $\frac{1}{2}|x| \leq |x - y|$, on obtient

$$|\mathbb{I}_1| \leq \frac{Ct^{\frac{7}{2}}}{|x|^8} \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} dy = \frac{Ct^{\frac{7}{2}}}{|x|^5},$$

et donc, si $|x| \rightarrow +\infty$ et pour $0 < t < T$, on obtient le comportement suivant

$$|\mathbb{I}_1| = o(|x|^{-4}).$$

* Pour le deuxième terme \mathbb{I}_2 , on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{I}_2| &\leq \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x - y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right| \\ &\quad \times \left| \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) \right| dy ds \\ &\leq \int_0^t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x - y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right| \frac{1}{(1 + |y|)^6} dy ds \\ &\leq t \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x - y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right| \frac{1}{(1 + |y|)^6} dy \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les estimations (3.82)- (3.83) et on a intégré par rapport à la variable de temps. On remarque maintenant que l'on a, par un développement limité à l'ordre deux, l'estimation

$$\begin{aligned} \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x - y) - \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right| &\leq |D^2 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x)| |y|^2 \\ &\leq \frac{C|y|^2}{|x|^5}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet alors d'écrire :

$$|\mathbb{I}_2| \leq Ct \int_{\{|y| < \frac{1}{2}|x|\}} \frac{|y|^2}{|x|^5} \frac{1}{(1 + |y|)^6} dy \leq \frac{Ct}{|x|^5} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|y|^2}{(1 + |y|)^6} dy = \frac{Ct}{|x|^5},$$

de sorte que lorsque $|x|$ est grand on a bien

$$|\mathbb{I}_2| = o(|x|^{-4}).$$

* Le troisième terme \mathbb{I}_3 se majore de la façon suivante : en utilisant les estimations (3.82)-(3.83) ainsi que les propriétés (3.12) données page 50 du noyau de Green, nous avons

$$\begin{aligned} |\mathbb{I}_3| &\leq \int_0^t \int_{\{|y| > \frac{1}{2}|x|\}} \left| \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right| \left| \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) \right| dy ds \\ &\leq C \int_0^t \int_{\{|y| > \frac{1}{2}|x|\}} \left(\frac{1}{|x|^3} + \frac{|y|}{|x|^4} \right) \frac{1}{(1 + |y|)^6} dy ds \\ &\leq \frac{Ct}{|x|^6}, \end{aligned}$$

et on a bien lorsque $|x|$ est grand :

$$|\mathbb{I}_3| = o(|x|^{-4}).$$

* Le dernier terme \mathbb{I}_4 ne peut pas être négligé par rapport à $|x|^{-4}$ car nous devons étudier l'expression

$$\mathbb{I}_4 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) - \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right) \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds,$$

et par les propriétés du noyau de Green Φ (voir les formules (3.12), page 50), ce terme générique fait intervenir les quantités $\partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x)$ qui se comportent comme $|x|^{-3}$.

Remarque 3.9 *On notera qu'avec cette décomposition on peut obtenir une décroissance de l'ordre de $|x|^{-3}$ pour une force générique qui ne s'écrit pas sous forme divergence.*

Nous avons donc, en regroupant tous ces contrôles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 I_{3,j,k} &= \sum_{k=1}^3 \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 + \mathbb{I}_4 \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) - \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) y_m \right) \\ &\quad \times \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds + o(|x|^{-4}), \end{aligned}$$

et cette expression se réécrit comme

$$\begin{aligned} I_{3,j} = \sum_{k=1}^3 I_{3,j,k} &= \sum_{k=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \partial_{x_j} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} y_m \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore, sous forme vectorielle, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{I}_3 = \sum_{k=1}^3 I_{3,j,k} &= \sum_{k=1}^3 \vec{\nabla} \partial_{x_k} \Phi(x) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds \\ &\quad - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \vec{\nabla} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} y_m \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds. \end{aligned}$$

Avec toutes ces estimations, si nous revenons à l'expression (3.85), nous avons obtenu la décomposition

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{O}_{t-s}(x-y) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, y) dy ds &= \sum_{\ell=1}^3 \int_0^t \int_{D_\ell} \mathcal{O}_{t-s}(x-y) \cdot \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, y) dy ds \\ &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 \\ &= \sum_{k=1}^3 \vec{\nabla} \partial_{x_k} \Phi(x) A_k(t) - \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \vec{\nabla} \partial_{x_k} \partial_{x_m} \Phi(x) B_{k,m}(t), \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$A_k(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds, \quad B_{k,m}(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} y_m \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right)_k (s, y) dy ds.$$

Afin d'obtenir le résultat énoncé dans le Théorème 3.6.3 il est nécessaire de faire deux remarques supplémentaires. On note tout d'abord que l'on a $((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})_k = u_1 \partial_{x_1} u_k + u_2 \partial_{x_2} u_k + u_3 \partial_{x_3} u_k$, de plus on a $|u_k(t, y)| \leq \frac{C}{(1+|y|)^4}$ et $|\partial_{x_j} u_k(t, y)| \leq \frac{C}{(1+|y|)^2}$ pour $1 \leq j \leq 3$ (le produit $u_j \partial_{x_j} u_k$ est alors intégrable et ces fonctions tendent vers zéro à l'infini) de sorte que l'on peut écrire par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})_k(t, y) dy &= \int_{\mathbb{R}^3} u_1 \partial_{x_1} u_k(t, y) + u_2 \partial_{x_2} u_k(t, y) + u_3 \partial_{x_3} u_k(t, y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} u_k(t, y) (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3)(t, y) dy = 0, \end{aligned}$$

puisque $\operatorname{div}(\vec{u}) = \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3 = 0$, et ainsi le terme $A_k(t)$ devient

$$A_k(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}_k(s, y) dy ds,$$

ce qui correspond bien au terme $A_k(t)$ défini dans l'énoncé du Théorème 3.6.3.

Maintenant, par les mêmes arguments, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} y_m (u_1 \partial_{x_1} u_k + u_2 \partial_{x_2} u_k + u_3 \partial_{x_3} u_k) dy &= - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_1} (y_m u_1) u_k + \partial_{x_2} (y_m u_2) u_k \\ &\quad + \partial_{x_3} (y_m u_3) u_k dy \\ &= -\delta_{k,m} \int_{\mathbb{R}^3} u_k(t, y) u_m(t, y) dy, \end{aligned}$$

ce nous permet d'écrire le terme $B_{k,m}(t)$ comme

$$B_{k,m}(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} y_m f_k(s, y) + u_k(t, y) u_m(s, y) dy ds,$$

de sorte que l'on a bien $B_{k,m}(t) = \mathcal{B}_{k,m}(t)$ comme annoncé dans le Théorème 3.6.3.

Finalement, avec les estimations sur la donnée initiale $\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u}(t, x) &= \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathcal{O}_{t-s} :: \left(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right) (s, x) ds \\ &= \sum_{k=1}^3 \mathcal{A}_k(t) \vec{\nabla} \partial_{x_j} \Phi(x) - \sum_{k,m=1}^3 \mathcal{B}_{k,m}(t) \vec{\nabla} \partial_{x_j} \partial_{x_k} \Phi(x) + o(|x|^{-4}), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de ce théorème. ■

Cette décomposition générique des solutions des équations de Navier-Stokes va nous donner des conditions nécessaires pour obtenir une meilleure décroissance que $|x|^{-4}$ et nous avons alors le résultat ci-dessous :

Corollaire 3.6.4 *Soient \vec{u}_0 et \vec{f} des données régulières avec $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et soit (\vec{u}, p) une solution classique des équations de Navier-Stokes sur l'ensemble $[0, T[\times \mathbb{R}^3$. Si on suppose que l'on a*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^5 |\vec{u}_0(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{t > 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^6 |\vec{f}(t, x)| < +\infty,$$

alors pour un $0 < t < T$ fixé, une condition nécessaire pour obtenir la décroissance à l'infini de la vitesse \vec{u} du type

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^4 |\vec{u}(t, x)| = 0,$$

est que la vitesse \vec{u} et la force extérieure \vec{f} doivent satisfaire les contraintes suivantes :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f_k(s, x) dx ds = 0, \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} y_m f_k(s, y) + u_k(t, y) u_m(s, y) dy ds = 0,$$

pour $1 \leq k, m \leq 3$ et $k \neq m$.

Bien évidemment, si ces conditions ne sont pas vérifiées, alors on ne peut espérer obtenir une meilleure décroissance à l'infini.

On remarque finalement que les fonctions \vec{f} et \vec{u} étant continues par rapport à la variable de temps, on peut alors énoncer le résultat suivant :

Corollaire 3.6.5 Soient \vec{u}_0 et \vec{f} des données régulières avec $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et soit (\vec{u}, p) une solution classique des équations de Navier-Stokes sur l'ensemble $[0, T] \times \mathbb{R}^3$. Si on suppose que l'on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^5 |\vec{u}_0(x)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{t > 0, x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^6 |\vec{f}(t, x)| < +\infty,$$

et si l'on a les conditions suivantes pour la donnée initiale \vec{u}_0 et pour la force extérieure \vec{f}

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_k(0, x) dx \neq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^3} y_m f_k(0, y) + u_{0,k}(y) u_{0,m}(y) dy \neq 0,$$

pour $1 \leq k, m \leq 3$ et $k \neq m$, alors il existe un temps $t_0 > 0$ tel que l'on ait pour tout $0 < t < t_0$:

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^4 |\vec{u}(t, x)| > 0.$$

Remarque 3.10 Le corollaire ci-dessus nous indique qu'en toute généralité, il y a une dispersion instantanée du support des solutions des équations de Navier-Stokes, et même si l'on part d'une force extérieure nulle et d'une donnée initiale \vec{u}_0 régulière à support compact (nulle à l'infini) qui ne vérifie pas les conditions ci-dessus, alors on ne peut pas s'attendre à une meilleure décroissance à l'infini que $|x|^{-4}$.

Dans le résultat qui suit nous énonçons quelques conséquences importantes de ces résultats qu'il convient d'expliciter

Corollaire 3.6.6

- 1) Si la force extérieure \vec{f} est non nulle, à décroissance rapide ou même à support compact, mais ne s'écrit pas sous forme divergence ($\vec{f} = \operatorname{div}(\mathbb{F})$) ou ne vérifie pas les conditions des Corollaires 3.6.4 et 3.6.5, alors il existe un temps $t_0 > 0$ tel que pour tout $0 < t < t_0$ on a

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^3 |\vec{u}(t, x)| > 0,$$

et on ne peut s'attendre à une meilleure décroissance que $|x|^{-3}$. Une conséquence de ce fait est que, dans ce cadre, la vitesse \vec{u} n'est pas intégrable en variable d'espace : $\vec{u}(t, \cdot) \notin L^1(\mathbb{R}^3)$.

2) Si la force extérieure \vec{f} est nulle, alors pour une donnée initiale \vec{u}_0 quelconque (à décroissance rapide à l'infini ou à support compact) mais qui ne vérifie pas la condition

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_{0,k}(y)u_{0,m}(y)dy \neq 0,$$

pour $1 \leq k, m \leq 3$ et $k \neq m$, alors il existe un temps $t_0 > 0$ tel que l'on ait pour tout $0 < t < t_0$:

$$\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^4 |\vec{u}(t, x)| > 0,$$

et on ne peut s'attendre à une meilleure décroissance que $|x|^{-4}$.

Notes et compléments

Nous avons vu dans ce chapitre qu'il est possible de construire des solutions classiques des équations de Navier-Stokes, dans le sens où les dérivées considérées sont des dérivées usuelles (des dérivées fortes), nous sommes donc en mesure de résoudre les équations de Navier-Stokes dans un cadre très précis.

Toutefois il convient de souligner deux points très importants :

- Le temps d'existence des solutions obtenues (\vec{u}, p) dépend de la taille des données initiales \vec{u}_0 et \vec{f} comme indiqué dans la relation (3.66) donnée page 75 : si les données initiales sont grandes, alors le temps d'existence sera petit. Réciproquement, si les données initiales sont suffisamment petites, alors on pourra considérer des solutions globales en temps, mais en dehors de ces relations, le Théorème 3.4.1 ne nous donne aucune piste d'étude. Cette interdépendance du temps d'existence des solutions et de la taille des données initiales provient de la technique mise en oeuvre pour la construction des solutions : il s'agit donc d'un problème de méthode et non pas d'une propriété intrinsèque des équations.
- Avec le Théorème 3.6.3 et ses Corollaires 3.6.4 et 3.6.5, nous voyons qu'en toute généralité, et pour tout temps $0 < t < t_0$, la vitesse $\vec{u}(t, x)$ a -au mieux- une décroissance à l'infini de l'ordre $|x|^{-3}$ et que sous certaines conditions sur la force extérieure, on peut améliorer cette décroissance en $|x|^{-4}$, mais pas au-delà. Cette dispersion instantanée du support spatial est indépendante de la nature de la donnée initiale (qui peut être totalement régulière et à support compact), il s'agit donc d'une propriété inhérente aux équations de Navier-Stokes. Ce comportement à l'infini se maintient bien évidemment si l'on considère un cadre encore plus régulier (par exemple dans lequel on exigerait un contrôle sur des dérivées d'ordre supérieur à celui exposé dans le Théorème 3.4.1) mais exclut totalement toute étude dans les espaces de fonctions à décroissance rapide. Ces conditions étudiées dans le Théorème 3.6.3 ont été développées par Dobrokhotov et Shafarevitch [17] en 1994.

Dans tous les chapitres qui suivent nous allons considérer un cadre de travail plus général et plus moderne, dans le sens où nous allons travailler avec des dérivées faibles et avec des outils plus récents. Mais comme nous allons le voir, cette généralisation n'entraînera pas forcément une amélioration substantielle des deux points précédents.

3.7 Exercices

Exercice 3.1 Vérifier les propriétés du noyau de la chaleur \mathbf{g}_t énoncées dans les Propositions 3.1.2, page 45 et Proposition 3.1.3, page 46.

Exercice 3.2 (Equation de Transport) Soit $B = (B_1, \dots, B_n)$ un vecteur fixe de \mathbb{R}^n et soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une donnée initiale. On considère l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + B \cdot \nabla u(t, x) = 0 & \text{sur } [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = g(x) & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

1. Si on suppose que la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 , vérifier que la solution de ce problème s'écrit $u(t, x) = g(x - tB)$ et qu'il s'agit d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 .
2. On se place en dimension 1, montrer que si $\text{sup}(u_0) \subset [a, b]$, alors on a

$$\text{sup}(u(t, \cdot)) \subset [a + Ct, b + Ct].$$

3. En dimension quelconque, montrer que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ on a l'identité :

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p}.$$

4. Soit maintenant $f \in L^1([0, +\infty[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$ et on considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + B \cdot \nabla u(t, x) = f(t, x) & \text{sur } [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = g(x), \quad g \in \mathcal{C}^1 & \text{sur } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.88)$$

- (a) Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on pose $\varphi(s) = u(t + s, x + sB)$, vérifier que l'on a

$$\varphi'(s) = \partial_t u(t + s, x + sB) + \nabla u(t + s, x + sB) \cdot B = f(t + s, x + sB)$$

- (b) Remarquer que $\varphi(0) = u(t, x)$ et que $\varphi(-t) = g(x - tB)$, en déduire les identités

$$\varphi(0) - \varphi(-t) = \int_{-t}^0 \varphi'(s) ds \quad \text{et} \quad u(t, x) - g(x - tB) = \int_{-t}^0 f(t + s, x + sB) ds.$$

- (c) Obtenir que la solution s'écrit :

$$u(t, x) = g(x - tB) + \int_0^t f(s, x + (s - t)B) ds, \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0). \quad (3.89)$$

- (d) Si $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et si $f \in L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^n))$, montrer que la solution (3.89) du problème (3.88) vérifie

$$|u(t, x)| \leq C(1 + T),$$

pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 3.3 Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $B :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière. On considère le problème :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + B(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = 0 & \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Si l'on note $U(s) = u(s, X(s))$, où $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, déterminer $U'(s)$.
2. Si on suppose que $X'(s) = B(s, X(s))$ et si u est solution du problème ci-dessus, que peut-on dire sur U' ? Que peut-on dire sur $u(s, X(s))$?

Exercice 3.4 On considère le problème suivant

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u(x) = 0. \quad (3.90)$$

1. Vérifier que si $u(x)$ est une solution de l'équation de Laplace (3.90), alors pour tout $\tau \in \mathbb{R}^n$, la fonction $u(x + \tau)$ l'est aussi.
2. Si $u(x)$ est une solution de l'équation de Laplace (3.90), vérifier que pour tout angle $\theta \in [0, 2\pi]$ la fonction $u(R_\theta[x])$ est aussi solution où $R_\theta[x]$ est la matrice de rotation d'angle θ .
3. On pose $u(x) = \varphi(\rho)$ avec $\rho = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, si $x \neq 0$, montrer que l'on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3}.$$

4. Vérifier les identités $\partial_{x_i} u(x) = \varphi'(\rho) \frac{x_i}{\rho}$ et $\partial_{x_i}^2 u(x) = \varphi''(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + \varphi'(\rho) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3} \right)$.
5. Montrer que $\Delta u = 0$ équivaut au problème $\varphi''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} \varphi'(\rho) = 0$.
6. Si $\varphi' \neq 0$, réécrire cette équation comme $\log(\varphi')' = \frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{1-n}{\rho}$, et en déduire que l'on a d'une part la formule $\varphi'(\rho) = \frac{C_1}{\rho^{n-1}}$ et que l'on a d'autre part

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} C_2 \log(\rho) + C_3 & (n = 2) \\ \frac{C_2}{\rho^{n-2}} + C_3 & (n > 2). \end{cases}$$

Exercice 3.5 Soit $u \in C^2(\Omega)$ une fonction harmonique.

1. On pose $\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y)$. Montrer que l'on a

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z).$$

2. Obtenir les identités

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y).$$

3. A l'aide de la formule de Green montrer que l'on a

$$\varphi'(r) = \frac{r}{n|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy = 0.$$

4. Déduire des points antérieurs que l'on a

$$\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) = u(x).$$

5. Obtenir la formule de la moyenne suivante

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y).$$

6. Maintenant, montrer que l'on a

$$\int_{B(x, r)} u(y) dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x, s)} u dS \right) ds.$$

7. A partir des points ci-dessus obtenir la formule

$$\int_{\partial B(x, s)} u dS = n v_n s^{n-1} u(x).$$

8. Remarquer que l'on a

$$\int_0^r \left(\int_{\partial B(x, s)} u dS \right) ds = u(x) \int_0^r n v_n s^{n-1} ds = r^n v_n u(x),$$

et en déduire la deuxième formule de la moyenne suivante

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy = u(x).$$

9. Montrer que si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que l'on ait

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

pour toute boule $B(x, r) \subset \Omega$, alors la fonction u est une fonction harmonique.

Exercice 3.6 Soit Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et soit $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ une fonction qui vérifie les identités

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy,$$

pour toute boule $B(x, r)$ de Ω .

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, de classe \mathcal{C}^∞ à support contenu dans la boule unité et d'intégrale égale à 1. Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$. Vérifier que la fonction u_ε définie par $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u$ sur l'ensemble $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

2. Soit $x \in \Omega_\varepsilon$ un point. Montrer que l'on a l'identité

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x, r)} u dS \right) dr.$$

3. En déduire que l'on a

$$u_\varepsilon(x) = u(x) \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(0, \varepsilon)} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy = u(x).$$

4. Obtenir que l'on a $u_\varepsilon = u$ sur Ω_ε et que la fonction u est de classe C^∞ sur Ω_ε pour tout $\varepsilon > 0$. Conclure que la fonction u est régulière sur Ω .

Exercice 3.7 Pour $n \geq 2$, on note Φ la solution fondamentale de l'équation de Laplace

1. Calculer $\nabla\Phi(x)$ pour tout $x \neq 0$.
2. Si on considère $u(x, y) = (e^{2x} + e^{-2x})(e^{2y} + e^{-2y})$, quelle est l'équation vérifiée par Δu ?
3. Si on pose $u(x, y) = (e^{kx} + e^{-kx})(e^{ky} + e^{-ky})$, quelle est l'équation vérifiée par Δu ?
4. Que peut-on dire sur les vecteurs propres du Laplacien ?

Exercice 3.8 Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière. On considère le problème

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(0, y) = \frac{\sin(ny)}{n}, \quad \partial_x u(0, y) = 0. \end{cases}$$

1. Etudier les solutions de la forme $u(x, y) = A(x)B(y)$.
2. Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 3.9 Dans cet exercice on souhaite démontrer le Théorème 3.1.8, mais en utilisant des hypothèses différentes : on supposera ici que la fonction g est de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ et qu'elle est à support compact.

1. Vérifier que la fonction f donnée par l'expression (3.15) est bien définie.
2. Démontrer que cette fonction f est de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ (on pourra utiliser le fait que la fonction g est de classe C^2).
3. Pour vérifier que la fonction f donnée par convolution est solution de l'équation de Poisson considérer les intégrales

$$\Delta f = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x g(x-y) dy = \underbrace{\int_{B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x g(x-y) dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{B(0, \varepsilon)^c} \Phi(y) \Delta_x g(x-y) dy}_{I_2}.$$

(a) Pour le premier terme I_1 montrer que l'on a

$$|I_1| \leq \int_{B(0, \varepsilon)} |\Phi(y) \Delta_x g(x-y)| dy \leq C \|\Delta g\|_\infty \int_{B(0, \varepsilon)} |\Phi(y)| dy \leq C\varepsilon^2.$$

(b) Pour le deuxième terme I_2 , obtenir par une intégration par parties l'expression

$$I_2 = - \underbrace{\int_{B(0, \varepsilon)^c} \nabla\Phi(y) \nabla g(x-y) dy}_{I_3} + \underbrace{\int_{\partial B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial g}{\partial \nu}(x-y) dS(y)}_{I_4},$$

où ν est le vecteur unitaire le long du bord $\partial B(0, \varepsilon)$

(c) Pour l'intégrale I_4 , vérifier que l'on a

$$|I_4| \leq \|\nabla g\|_\infty \int_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi(y)| dS(y) \leq C\varepsilon.$$

(d) Pour l'intégrale I_3 , avec une deuxième intégration par parties obtenir

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{B(0,\varepsilon)^c} \Delta\Phi(y)g(x-y)dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)g(x-y)dS(y) \\ &= - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y)g(x-y)dS(y). \end{aligned}$$

(e) Utiliser les propriétés de la fonction Φ pour obtenir sur $\partial B(0,\varepsilon)$ l'identité

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y) = \nu \cdot \nabla\Phi(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}.$$

(f) En déduire la limite suivante

$$I_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} g(x-y)dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -g(x).$$

4. Conclure que l'on a bien

$$-\Delta f(x) = g(x).$$

Exercice 3.10 On suppose les points suivants :

- Pour la donnée initiale : $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et $\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^5 |D^\alpha \vec{u}_0(x)| < +\infty$,
- Pour la force extérieure, pour $|\alpha| \leq 2$, $D^\alpha \vec{f}$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ et vérifie

$$\sup_{|\alpha| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0} (1 + |x|)^6 |D^\alpha \vec{f}(t, x)| < +\infty.$$

Vérifier que l'on a l'estimation

$$\sup_{0 < t \leq T} |\vec{u}(t, x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{3-\delta}},$$

pour un paramètre $0 < \delta < 1$. On pourra utiliser le Lemme 3.1.9 et l'estimation (3.84).

Chapitre 4

Solutions *mild*

Dans ce chapitre nous présentons une technique très générale pour *construire* par un processus itératif des solutions d'équations qui peuvent s'écrire sous la forme

$$e = e_0 - B(e, e), \quad (4.1)$$

où e_0 est une donnée initiale et $B(\cdot, \cdot)$ est une application bilinéaire¹ et continue d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ sur lui-même, c'est à dire que l'on a l'inégalité

$$\|B(e, f)\|_E \leq C_B \|e\|_E \|f\|_E,$$

pour tout $e, f \in E$, avec C_B la constante de continuité de l'application $B(\cdot, \cdot)$. Comme nous allons voir par la suite, il suffira de disposer d'une relation entre la constante de continuité C_B de l'application bilinéaire et le contrôle δ de la donnée initiale (*i.e.* $\|e_0\|_E \leq \delta$) pour obtenir une solution pour ce type d'équations. Ce procédé - connu comme *principe de contraction* ou *méthode de point fixe* - s'applique très naturellement dans de nombreux cadres et, en particulier, dans l'étude des équations aux dérivées partielles il s'avère être un outil particulièrement efficace pour obtenir l'existence ainsi que l'unicité de solutions.

Bien sûr, un tel degré de généralité pose un certain nombre de problèmes lorsqu'on souhaite l'appliquer aux équations de Navier-Stokes : tout d'abord ces équations ne sont pas de la forme (4.1) et pour utiliser le principe de contraction on devra considérer une formulation intégrale adéquate. Mais surtout, nous verrons que cette technique soulève le problème du temps d'existence des solutions : il existe une dichotomie entre la *taille* de la donnée initiale (exprimée par le contrôle δ) et le *temps d'existence* des solutions (qui provient de la constante de continuité). En effet, soit la taille de la donnée initiale est grande et dans ce cas le temps d'existence est petit ; soit inversement la taille de la donnée initiale est petite et alors le temps d'existence pourra être plus grand. Mais en dehors de ces deux possibilités, le formalisme donné par le principe de contraction ne donne aucune piste d'étude. Nous étudierons plus en détail cet aspect précis dans la Section 4.6 où nous donnerons quelques critères d'explosion.

Ainsi, après avoir rappelé le principe de contraction dans la Section 4.1, nous verrons dans les Sections 4.2 et 4.3 comment transformer les équations de Navier-Stokes pour les mettre sous la forme de l'équation (4.1) : on parlera alors de formulation *mild* ou de formulation intégrale. Cette transformation met en place des outils très particuliers qui permettront de mettre en lumière des relations intéressantes entre la vitesse et la pression. Dans la Section 4.4 on donnera une démonstration du théorème de Fujita et Kato, obtenu en 1964 [20], où

1. Rappelons que cela veut dire que l'application $B(\cdot, \cdot)$ est linéaire dans chacune de ses composantes prises séparément, c'est à dire que l'on a $B(e_0 + \lambda e_1, f) = B(e_0, f) + \lambda B(e_1, f)$ et $B(e, f_0 + \lambda f_1) = B(e, f_0) + \lambda B(e, f_1)$.

l'on applique ce formalisme *mild* aux équations de Navier-Stokes et les solutions obtenues par cette méthode seront désignées comme des solutions *mild*.

4.1 Principe de contraction

La technique de base de ce chapitre repose sur le résultat général suivant :

Théorème 4.1.1 (Principe de contraction de Banach-Picard) *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et soit $B : E \times E \rightarrow E$ une application bilinéaire bornée : pour tout $e, f \in E$ on a l'estimation*

$$\|B(e, f)\|_E \leq C_B \|e\|_E \|f\|_E. \quad (4.2)$$

Si $e_0 \in E$ est telle que $\|e_0\|_E \leq \delta$ et si on a la relation

$$0 < \delta < \frac{1}{4C_B},$$

alors l'équation

$$e = e_0 - B(e, e), \quad (4.3)$$

admet une unique solution $e \in E$ qui vérifie $\|e\|_E \leq 2\delta$.

Nous avons de plus une dépendance continue par rapport à la donnée initiale : si f_0 est une autre donnée initiale telle que $\|f_0\|_E \leq \delta$ et si f est solution de l'équation $f = f_0 - B(f, f)$ avec $\|f\|_E \leq 2\delta$, alors

$$\|e - f\|_E \leq \frac{1}{1 - 4C_B\delta} \|e_0 - f_0\|_E.$$

Démonstration. On va construire la solution e par un processus itératif. En effet, à partir de la donnée initiale e_0 nous pouvons écrire

$$e_{n+1} = e_0 - B(e_n, e_n),$$

et nous allons voir que lorsque $n \rightarrow +\infty$ on obtient une solution de l'équation (4.3). On commence donc par vérifier que l'on a bien $\|e_{n+1}\|_E \leq 2\delta$. Ceci est vrai par hypothèse pour e_0 , de sorte que l'on fait l'hypothèse de récurrence $\|e_n\|_E \leq 2\delta$ et nous allons démontrer que cela reste vrai pour e_{n+1} . En effet, en utilisant l'hypothèse de continuité de l'application $B(\cdot, \cdot)$ donnée dans (4.2) nous avons :

$$\|e_{n+1}\|_E \leq \|e_0\|_E + \|B(e_n, e_n)\|_E \leq \|e_0\|_E + C_B \|e_n\|_E^2 \leq \delta + 4C_B\delta^2,$$

mais puisque l'on a $4C_B\delta < 1$, nous obtenons $\|e_{n+1}\|_E \leq 2\delta$ et ceci montre que pour tout $n \geq 1$, l'élément e_n ainsi construit appartient à la boule fermée $\overline{B}(0, 2\delta)$.

Maintenant, il suffit de vérifier que l'on tend vers une solution e lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour cela on considère la quantité $e_{n+1} - e_n$ et, en utilisant la bilinéarité de l'application $B(\cdot, \cdot)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|e_{n+1} - e_n\|_E &= \|(e_0 - B(e_n, e_n)) - (e_0 - B(e_{n-1}, e_{n-1}))\|_E = \|-B(e_n, e_n) + B(e_{n-1}, e_{n-1})\|_E \\ &= \|B(e_n - e_{n-1}, e_n) + B(e_{n-1}, e_n - e_{n-1})\|_E \\ &\leq \|B(e_n - e_{n-1}, e_n)\|_E + \|B(e_{n-1}, e_n - e_{n-1})\|_E, \end{aligned}$$

et par hypothèse de continuité de l'application $B(\cdot, \cdot)$ ainsi qu'en utilisant les estimations $\|e_{n-1}\|_E \leq 2\delta$ et $\|e_n\|_E \leq 2\delta$ obtenues précédemment, on a :

$$\|e_{n+1} - e_n\|_E \leq C_B \|e_n - e_{n-1}\|_E \|e_n\|_E + C_B \|e_{n-1}\|_E \|e_n - e_{n-1}\|_E \leq 4C_B \delta \|e_n - e_{n-1}\|_E.$$

A partir de cette majoration, par itération, nous obtenons le contrôle

$$\|e_{n+1} - e_n\|_E \leq (4C_B \delta)^n \|e_1 - e_0\|_E,$$

mais étant donné que $4C_B \delta < 1$, et que $\|e_1 - e_0\|_E \leq \|e_1\|_E + \|e_0\|_E \leq 3\delta$, nous avons que la partie de droite de l'inégalité ci-dessus s'annule si $n \rightarrow +\infty$: on obtient bien la convergence au sens de la norme $\|\cdot\|_E$ de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un élément $e \in E$ qui sera solution de l'équation (4.3) et qui vérifie $\|e\|_E \leq 2\delta$. L'unicité est immédiate par construction car nous travaillons sur un espace de Banach.

Étudions maintenant la dépendance par rapport aux données initiales. Soient $e, f \in E$ deux solutions obtenues à partir du procédé antérieur en fonction des données initiales e_0 et f_0 . En utilisant la bilinéarité de l'application $B(\cdot, \cdot)$ nous écrivons

$$\begin{aligned} \|e - f\|_E &= \|(e_0 - B(e, e)) - (f_0 - B(f, f))\|_E = \|e_0 - f_0 - B(e - f, e) - B(f, e - f)\|_E \\ &\leq \|e_0 - f_0\|_E + \|B(e - f, e)\|_E + \|B(f, e - f)\|_E \\ &\leq \|e_0 - f_0\|_E + C_B \|e\|_E \|e - f\|_E + C_B \|f\|_E \|e - f\|_E \\ &\leq \|e_0 - f_0\|_E + 4C_B \delta \|e - f\|_E, \end{aligned}$$

et comme nous avons la condition $4C_B \delta < 1$, on obtient

$$\|e - f\|_E \leq \frac{1}{1 - 4C_B \delta} \|e_0 - f_0\|_E.$$

Cette dépendance continue par rapport aux données initiales nous dit que si e_0 et f_0 sont deux données initiales proches l'une de l'autre (au sens de la norme $\|\cdot\|_E$), alors leurs solutions associées le sont également. ■

Remarque 4.1 *On observera que ce théorème s'applique tel quel à l'étude des équations de la forme*

$$e = e_0 + B(e, e),$$

c'est-à-dire que le signe devant l'application bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$ n'intervient pas.

Ce procédé de construction de solutions d'équations du type (4.3) est très abstrait et, mis à part la continuité de l'application bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$, il ne prend aucun compte des propriétés particulières de celle-ci. Ce degré de généralité fait du principe de contraction un outil standard qui peut s'appliquer à un grand nombre d'équations aux dérivées partielles.

4.2 Vitesse, pression et projecteur de Leray

Nous voulons maintenant appliquer le principe de contraction de Banach-Picard donné dans le Théorème 4.1.1 aux équations de Navier-Stokes

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0.$$

Mais pour cela, il sera nécessaire tout d'abord de reformuler ces équations pour obtenir un problème de la forme

$$e = e_0 - B(e, e),$$

et seulement après nous devons choisir un espace fonctionnel E bien adapté qui nous fournisse le contrôle de continuité (4.2) pour l'application bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$. En effet, les équations de Navier-Stokes, telles qu'elles sont présentées ci-dessus ne peuvent pas se mettre *directement* sous la forme $e = e_0 - B(e, e)$, non seulement parce que le système de Navier-Stokes est un problème d'évolution mais surtout parce qu'il y a *deux* inconnues, la vitesse \vec{u} et la pression p , ce qui ne correspond pas du tout au cadre d'application du principe de contraction de Banach-Picard... on devra alors étudier comment concentrer notre étude sur une seule inconnue, mais laquelle des deux ?

Dans la Section 4.3 ci-après, en étudiant une équation de la chaleur non homogène générique, nous verrons qu'il est finalement assez naturel de privilégier une étude sur la vitesse \vec{u} plutôt que sur la pression p (comme nous l'avons déjà signalé lors de l'étude classique de ces équations réalisée au chapitre précédent). Pour conforter cette approche, il est fondamental de remarquer que la pression p et la vitesse \vec{u} sont reliées de sorte que si l'on étudie un problème qui ne fait intervenir que la vitesse \vec{u} , on pourra récupérer sans difficulté la pression. En effet, et en reprenant quelques calculs réalisés précédemment (voir la page 44), si l'on applique l'opérateur divergence aux équations de Navier-Stokes on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\partial_t \vec{u}) &= \operatorname{div}(\Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}) \\ 0 &= -\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \Delta p + \operatorname{div}(\vec{f}), \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'équation qui relie la pression à la vitesse $-\Delta p = \operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f})$ que nous réécrivons formellement comme suit

$$p = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right), \quad (4.4)$$

où l'on rappelle que l'opérateur $\frac{1}{(-\Delta)}$ est donné au niveau de Fourier par $\widehat{\frac{1}{(-\Delta)}\phi}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2} \widehat{\phi}(\xi)$ pour toute fonction ϕ telle que cette quantité ait un sens.

Ainsi, comme la force extérieure est une donnée du problème, si nous sommes capables d'obtenir des informations sur la vitesse \vec{u} , nous pourrons grâce à l'équation (4.4) en déduire des informations sur la pression p .

Cette particularité nous permettra donc de considérer un problème dans lequel la seule variable qui intervient est la vitesse \vec{u} . Pour cela nous aurons besoin de décomposer les équations de Navier-Stokes de sorte qu'on puisse concentrer notre étude sur la vitesse \vec{u} et ceci pourra être réalisé à l'aide du projecteur de Leray qui nous aidera à séparer les champs de vecteurs qui sont à divergence nulle (comme la vitesse \vec{u}) de ceux qui ne le sont pas.

Définition 4.2.1 (Projecteur de Leray) Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle qui appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$. Le projecteur de Leray \mathbb{P} est défini par l'expression

$$\mathbb{P}(\vec{f}) = \vec{f} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = \vec{f} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\operatorname{div}(\vec{f})). \quad (4.5)$$

On peut réécrire cet opérateur de la façon suivante

$$\mathbb{P}(\vec{f}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial_{x_1}}{(-\Delta)}[\partial_{x_1}f_1 + \partial_{x_2}f_2 + \partial_{x_3}f_3] \\ \frac{\partial_{x_2}}{(-\Delta)}[\partial_{x_1}f_1 + \partial_{x_2}f_2 + \partial_{x_3}f_3] \\ \frac{\partial_{x_3}}{(-\Delta)}[\partial_{x_1}f_1 + \partial_{x_2}f_2 + \partial_{x_3}f_3] \end{bmatrix},$$

ou encore, en passant en variable de Fourier

$$\widehat{\mathbb{P}(\vec{f})} = \begin{bmatrix} \widehat{f}_1 \\ \widehat{f}_2 \\ \widehat{f}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-\xi_1}{|\xi|^2}[\xi_1\widehat{f}_1 + \xi_2\widehat{f}_2 + \xi_3\widehat{f}_3] \\ \frac{-\xi_2}{|\xi|^2}[\xi_1\widehat{f}_1 + \xi_2\widehat{f}_2 + \xi_3\widehat{f}_3] \\ \frac{-\xi_3}{|\xi|^2}[\xi_1\widehat{f}_1 + \xi_2\widehat{f}_2 + \xi_3\widehat{f}_3] \end{bmatrix},$$

identité que l'on peut réécrire (en utilisant le produit tensoriel de deux vecteurs donné dans (2.9), page 16) comme

$$\widehat{\mathbb{P}(\vec{f})}(\xi) = \left(Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right) \cdot \widehat{\vec{f}}(\xi). \quad (4.6)$$

Si on note \vec{R} le vecteur formé des trois transformées de Riesz R_1, R_2 et R_3 définies au niveau de Fourier par $\widehat{R_j \phi}(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{\phi}(\xi)$ pour $1 \leq j \leq 3$ (voir la Définition 2.5.1, page 35), nous avons également l'expression :

$$\mathbb{P}(\vec{f}) = (Id_{3 \times 3} - \vec{R} \otimes \vec{R}) \vec{f}.$$

Une fois que nous avons exhibé plusieurs manières d'écrire cet opérateur, on observe sans problème que le projecteur de Leray \mathbb{P} est un opérateur linéaire :

$$\mathbb{P}(\lambda \vec{f} + \vec{g}) = \lambda \mathbb{P}(\vec{f}) + \mathbb{P}(\vec{g}),$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et \vec{f}, \vec{g} deux champs de vecteurs suffisamment réguliers.

Bien évidemment, la définition et les caractérisations que nous venons de donner sont pour l'instant purement formelles et la première chose à faire maintenant est de vérifier que cet opérateur est bien défini sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$. Pour cela il suffit de passer en variable de Fourier pour écrire :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}(\vec{f})\|_{L^2} &= \left\| \vec{f} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \right\|_{L^2} \leq \|\vec{f}\|_{L^2} + \left\| \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \right\|_{L^2} \\ &\leq \|\vec{f}\|_{L^2} + \sum_{j,k=1}^3 \left\| \partial_{x_j} \frac{1}{(-\Delta)} (\partial_{x_k} f_k) \right\|_{L^2} \\ &\leq \|\widehat{\vec{f}}\|_{L^2} + C \sum_{j,k=1}^3 \left\| \xi_j \frac{1}{|\xi|^2} (\xi_k \widehat{f}_k) \right\|_{L^2} \leq C \|\widehat{\vec{f}}\|_{L^2} = C' \|\vec{f}\|_{L^2}, \end{aligned}$$

car les transformées de Riesz R_j sont bornées sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ (voir le Théorème 2.5.2, page 35), ce qui montre que cet opérateur, étant linéaire et borné, est alors continu (et donc bien posé) dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$.

On remarquera qu'il est possible de généraliser le domaine de définition du projecteur de Leray aux espaces de Sobolev H^s , H^{-s} avec $s > 0$ et à leurs versions homogènes \dot{H}^s et

\dot{H}^{-s} : il suffit pour cela d'utiliser les caractérisations de ces espaces (2.30), (2.31) et (2.33), (2.39) qui sont données au niveau de Fourier. Nous avons donc en particulier les estimations suivantes pour $\vec{f} \in H^s(\mathbb{R}^3)$ (ou encore $\vec{f} \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$) avec $s \in \mathbb{R}$:

$$\|\mathbb{P}(\vec{f})\|_{H^s} \leq C\|\vec{f}\|_{H^s} \quad \text{et} \quad \|\mathbb{P}(\vec{f})\|_{\dot{H}^s} \leq C\|\vec{f}\|_{\dot{H}^s}. \quad (4.7)$$

Ces estimations seront utilisées de façon intensive dans ce chapitre et les suivants et elles généralisent le domaine de définition du projecteur de Leray donné dans la Définition 4.2.1 ci-dessus.

Passons maintenant aux propriétés de cet opérateur de projection :

- Si \vec{f} est à divergence nulle ($\text{div}(\vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$) alors nous avons l'identité

$$\mathbb{P}(\vec{f}) = \vec{f},$$

qui se déduit directement à partir de l'expression (4.5), autrement dit, le projecteur de Leray laisse invariants les champs de vecteurs à divergence nulle et cette propriété sera fondamentale dans tout ce qui suit.

- Si \vec{f} est un gradient, c'est à dire s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\vec{f} = \vec{\nabla}g$, alors

$$\mathbb{P}(\vec{f}) = \vec{\nabla}g + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}g) = \vec{\nabla}g + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\Delta g) = \vec{\nabla}g - \vec{\nabla}g = 0,$$

et on observe que le projecteur de Leray annule les champs de vecteurs qui s'expriment comme un gradient, on gardera donc en tête que pour une fonction $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière (dans un espace L^2 , \dot{H}^1 ou \dot{H}^2 , par exemple), on a l'identité

$$\mathbb{P}(\vec{\nabla}p) = 0. \quad (4.8)$$

- Si \vec{f} est un rotationnel : si $\vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{g}$, alors on a

$$\mathbb{P}(\vec{f}) = \mathbb{P}(\vec{\nabla} \wedge \vec{g}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{g} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{g}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{g} = \vec{f},$$

car la divergence d'un rotationnel est toujours nulle et donc $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{g}) \equiv 0$ (voir le dernier point du Lemme 2.2.2, page 15) et on obtient alors que le projecteur de Leray laisse les rotationnels invariants.

- Si on applique le projecteur de Leray puis l'opérateur divergence à une fonction \vec{f} on a l'identité

$$\text{div}(\mathbb{P}(\vec{f})) = \vec{\nabla} \cdot \mathbb{P}(\vec{f}) = 0. \quad (4.9)$$

En effet, on écrit

$$\text{div}(\mathbb{P}(\vec{f})) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{f} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} - \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0.$$

- Le projecteur de Leray est un opérateur *non local* : en effet, dans l'expression (4.5) nous avons explicitement l'opérateur $\frac{1}{(-\Delta)}$ qui intervient et qui peut se définir en variable d'espace par la formule (voir également la formule (2.37) page 29) :

$$\frac{1}{(-\Delta)} \vec{f}(x) = C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{f}(y)}{|x-y|} dy,$$

et ainsi, pour calculer la valeur de $\frac{1}{(-\Delta)}\vec{f}$ en un seul point, nous avons besoin d'intégrer l'information sur *tout* l'espace : ce qui montre clairement le caractère non local du projecteur de Leray.

- Pour \vec{f} et \vec{g} deux champs de vecteurs suffisamment "réguliers" (dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ par exemple, mais cela peut se généraliser sans problème aux espaces de Sobolev basés sur L^2), on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \mathbb{P}(\vec{g}) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{P}(\vec{f}) \cdot \vec{g} dx. \quad (4.10)$$

En effet, en raisonnant par densité pour des fonctions suffisamment régulières, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \mathbb{P}(\vec{g}) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \left(\vec{g} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{g} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) \right) dx, \end{aligned}$$

par une intégration par parties on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \mathbb{P}(\vec{g}) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{g} dx - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \left(\frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) \right) dx,$$

puis en utilisant le fait que l'opérateur $\frac{1}{(-\Delta)}$ est autoadjoint (voir la formule (2.41) page 30) on écrit, avec une dernière intégration par parties :

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{g} dx - \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \right) (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\vec{f} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) \right) \cdot \vec{g} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{P}(\vec{f}) \cdot \vec{g} dx. \end{aligned}$$

En particulier, pour deux champs de vecteurs dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, le projecteur de Leray est auto-adjoint.

- On a la propriété de commutation suivante valable pour tout multi-indice α et pour une fonction \vec{f} suffisamment régulière :

$$\mathbb{P}(D^\alpha \vec{f}) = D^\alpha (\mathbb{P}(\vec{f})),$$

pour le vérifier, il suffit de d'appliquer la transformation de Fourier et d'utiliser l'expression (4.6) qui caractérise le projecteur de Leray en variable de Fourier.

Il existe un lien naturel entre le projecteur de Leray \mathbb{P} et la décomposition de Helmholtz présentée dans le Théorème 3.2.1, page 56. En effet, si \vec{F} est un champ de vecteur qui vérifie les conditions de ce théorème, alors nous pouvons le décomposer de la manière suivante

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1,$$

où \vec{F}_0 est à divergence nulle ($div(\vec{F}_0) = 0$) et \vec{F}_1 s'écrit comme un gradient : $\vec{F}_1 = \vec{\nabla} p$. Ainsi, l'action du projecteur de Leray sur le champ de vecteurs \vec{F} consiste à garder uniquement le premier terme \vec{F}_0 de la décomposition de Helmholtz (c'est à dire $\mathbb{P}(\vec{F}) = \vec{F}_0$) car on a par les propriétés explicitées ci-dessus :

$$\mathbb{P}(\vec{F}) = \mathbb{P}(\vec{F}_0 + \vec{F}_1) = \mathbb{P}(\vec{F}_0) + \mathbb{P}(\vec{F}_1) = \vec{F}_0 + \mathbb{P}(\vec{\nabla} p) = \vec{F}_0.$$

On remarquera en particulier que le domaine d'application du projecteur de Leray est beaucoup plus large que celui de la décomposition de Helmholtz donnée dans le chapitre précédent : nous pouvons maintenant travailler avec des espaces de Lebesgue, de Sobolev, etc.

Dans la section qui suit nous appliquerons cet opérateur aux équations de Navier-Stokes afin de transformer ces dernières en un problème du type (4.3).

4.3 Formulation intégrale et solutions *mild*

4.3.1 Motivation

Nous souhaitons utiliser le projecteur de Leray pour obtenir une formulation des équations de Navier-Stokes qui nous permette d'appliquer le principe de contraction de Banach, mais avant de nous lancer dans des calculs techniques, il est utile de faire quelques remarques concernant l'équation de la chaleur non homogène suivante

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + f, \\ u(0, x) = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

où nous considérons des fonctions u, f définies sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ et à valeurs dans \mathbb{R} et où f appartient à l'espace $L^2([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))$ pour un certain temps fini $0 < T < +\infty$.

L'espace \mathcal{C}_0^∞ étant dense dans L^2 on considèrera pour commencer une fonction $f(\cdot, \cdot)$ qui est régulière à support compact en variable de temps et d'espace. Ainsi, pour une telle fonction f , la solution du problème (4.11) est classique et par le Théorème 3.1.5 page 48, elle s'écrit

$$u(t, x) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * f(s, x) ds. \quad (4.12)$$

De plus, nous savons en particulier, par le deuxième point du Théorème 3.1.5, que si f appartient à l'espace $\mathcal{C}_b^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$, alors la solution u est de classe $\mathcal{C}^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$ et de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$.

Qu'en est-il de ces informations de régularité si nous supposons uniquement que la fonction f appartient à l'espace $L_t^2 L_x^2$?

Nous allons voir ici que non seulement cette formulation (4.12) est bien définie dans un sens beaucoup plus large que celui donné au Chapitre 3, mais aussi que cette information de régularité se maintient : on pourra donner un sens aux dérivées d'ordre un et d'ordre deux de u . En effet, toujours en supposant que $f(\cdot, \cdot)$ est régulière à support compact, si nous étudions la quantité $\|u(t, \cdot)\|_{H^1}$ avec $0 < t < T$, où la fonction u est donnée par l'expression intégrale (4.12), nous avons alors

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{H^1} &= \|u(t, \cdot)\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &= \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * f(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} + \sup_{\|\psi\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * f(s, x) ds \right) \psi(x) dx \right|, \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini, l'inégalité de Minkowski continue (2.20), présentée page 20 et en passant le produit de convolution du bon côté on obtient

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^1} \leq \int_0^t \|\mathfrak{g}_{t-s} * f(s, \cdot)\|_{L^2} ds + \sup_{\|\psi\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f(s, x) (-\Delta)^{\frac{1}{2}} (\mathfrak{g}_{t-s} * \psi(x)) dx ds \right|,$$

en utilisant les inégalités de Young pour les convolutions et l'inégalité de Cauchy-Schwarz en variable d'espace d'abord puis en variable de temps, nous écrivons

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{H^1} &\leq \int_0^t \|\mathfrak{g}_{t-s}\|_{L^1} \|f(s, \cdot)\|_{L^2} ds + \sup_{\|\psi\|_{L^2} \leq 1} \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{L^2} \|\mathfrak{g}_{t-s} * \psi\|_{\dot{H}^1} ds \\ &\leq t^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_t^2 L_x^2} + \sup_{\|\psi\|_{L^2} \leq 1} \|f\|_{L_t^2 L_x^2} \|\mathfrak{g}_{t-s} * \psi\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}, \end{aligned}$$

puisque $0 < t < T$ et en utilisant la formule de Plancherel et le théorème de Fubini, il vient

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^1} \leq T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_t^2 L_x^2} + \|f\|_{L_t^2 L_x^2} \sup_{\|\psi\|_{L^2} \leq 1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 dt d\xi \right)^{\frac{1}{2}},$$

et avec le changement de variable $\tau = 2t|\xi|^2$ dans l'intégrale ci-dessus on obtient

$$\|u(t, \cdot)\|_{H^1} \leq T^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_t^2 L_x^2} + C \|f\|_{L_t^2 L_x^2} \sup_{\|\psi\|_{L^2} \leq 1} \|\widehat{\psi}\|_{L^2} \leq C \left(1 + T^{\frac{1}{2}}\right) \|f\|_{L_t^2 L_x^2} \quad (4.13)$$

Nous avons alors que la fonction u donnée par l'expression (4.12) appartient à l'espace $L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3))$.

Poussons un peu plus loin notre analyse et, avec cette information sur la fonction u que nous venons d'obtenir, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{\nabla} u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} u(t, x) \cdot (\vec{\nabla} \partial_t u(t, x)) dx = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} u(t, x) \cdot \vec{\nabla} (\Delta u(t, x) + f(t, x)) dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta u(t, x)|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u(t, x) f(t, x) dx \\ &\leq -2 \|\Delta u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \|\Delta u(t, \cdot)\|_{L^2} \|f(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &\leq -2 \|\Delta u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|f(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = -\|\Delta u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|f(t, \cdot)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, et comme la donnée initiale est nulle, nous avons

$$\|\vec{\nabla} u(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\Delta u(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds \leq \|f\|_{L_t^2 L_x^2}^2. \quad (4.14)$$

Nous remarquons maintenant que l'estimation ci-dessus se maintient par densité lorsque la fonction f appartient à l'espace $L_t^2 L_x^2$. A partir de ces calculs et des estimations (4.13) et (4.14), nous avons donc les points suivants :

- si le terme f appartient à l'espace $L_t^2 L_x^2$, les quantités préservées par l'équation correspondent aux espaces $L_t^\infty H_x^1$ et $L_t^2 \dot{H}_x^2$.
- Ainsi, lorsque $f \in L_t^2 L_x^2$, la fonction définie par $u(t, x) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * f(s, x) ds$ appartient à l'espace $L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ et elle est solution de l'équation (4.11).

Dans ce cadre que nous venons d'exposer, nous dirons alors que la fonction

$$u(t, x) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * f(s, x) ds,$$

est une solution *mild* de l'équation $\partial_t u = \Delta u + f$. On remarquera en particulier que ce formalisme *mild* permet de travailler dans le cadre d'espaces fonctionnels usuels (espaces de Lebesgue, de Sobolev) en variable d'espace : nous généralisons ainsi les calculs réalisés au Chapitre 3.

4.3.2 Formulation Intégrale

Une fois que nous disposons d'une première approche à ce type de solutions *mild*, notre objectif est de généraliser ce procédé aux équations de Navier-Stokes, et plus précisément, nous souhaitons utiliser une formulation intégrale de celles-ci pour pouvoir appliquer le principe de contraction de Banach-Picard. Notre point de départ est alors le système

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

qu'il convient de réécrire de la façon suivante en utilisant l'identité $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})$ (voir l'expression (2.11) de l'Exercice 2.1, page 17)

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

où la force extérieure \vec{f} appartient à l'espace $L^2([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))$ pour un certain temps donné $0 < T < +\infty$ et où la donnée initiale \vec{u}_0 vérifie $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Ces deux informations fixeront notre cadre de travail : en effet, inspirés de l'exemple précédent donné par l'équation (4.11) et de sa solution *mild* (4.12), on cherchera à travailler sur l'espace fonctionnel $L^\infty([0, T[, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

Mais pour obtenir une formulation intégrale adéquate nous avons besoin d'une étape supplémentaire qui fait intervenir le projecteur de Leray défini dans la section précédente. En effet, et comme on l'a souligné précédemment, dans les équations de Navier-Stokes ci-dessus, il y a deux inconnues, la vitesse \vec{u} et la pression p et nous allons voir maintenant comment obtenir un système d'équations équivalentes qui considère uniquement la vitesse \vec{u} . Ainsi, en appliquant le projecteur de Leray aux équations de Navier-Stokes (4.15) nous avons

$$\mathbb{P}(\partial_t \vec{u}) = \mathbb{P}(\Delta \vec{u}) - \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) - \mathbb{P}(\vec{\nabla} p) + \mathbb{P}(\vec{f}).$$

Etant donné que l'on a par hypothèse $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ et que l'on a $\mathbb{P}(\vec{\nabla} p) = 0$ par la propriété (4.8) du projecteur de Leray, nous pouvons écrire

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) + \mathbb{P}(\vec{f}), \quad \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x). \quad (4.16)$$

La principale particularité de l'équation ci-dessus repose sur le fait qu'elle ne fait intervenir que la variable \vec{u} et pas la pression p : et cela ne pose pas de problème conceptuel car si l'on résout cette équation et on obtient une vitesse \vec{u} avec de bonnes propriétés, on pourra alors en déduire la pression p en utilisant l'expression (4.4) page 106.

Ceci nous amène à voir l'équation (4.16) comme une équation de la chaleur non homogène comme celle considérée dans (4.11) et nous obtenons alors l'expression suivante (voir également le Théorème 3.1.6, page 49)

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds, \quad (4.17)$$

et c'est précisément ce problème que nous allons étudier. Mais avant de continuer nous avons besoin d'une définition.

Définition 4.3.1 (Solutions mild) *Nous dirons qu'un couple (\vec{u}, p) est une solution mild des équations de Navier-Stokes (4.15) si la vitesse \vec{u} vérifie l'identité (4.17) et si la pression vérifie la formule (4.4).*

Une fois que nous avons à notre disposition le problème (4.17), si l'on note \vec{U}_0 par

$$\vec{U}_0 = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds,$$

qui est donné par les données \vec{u}_0 et \vec{f} , et si on note $B(\cdot, \cdot)$ par

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds, \quad (4.18)$$

qui est une application bilinéaire, alors nous obtenons une formulation des équations de Navier-Stokes du type

$$\vec{u} = \vec{U}_0 - B(\vec{u}, \vec{u}), \quad (4.19)$$

et grâce à cette réécriture de ces équations, nous allons appliquer dans la section suivante le principe de contraction de Banach-Picard pour obtenir des solutions *mild* des équations de Navier-Stokes.

4.4 Théorème de Fujita-Kato

Comme nous avons vu dans la Section 4.1, pour appliquer le principe de contraction de Banach-Picard au problème (4.19) ci-dessus, il est nécessaire de fixer un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ tel que l'on ait les contrôles suivants :

- $\|\vec{U}_0\|_E \leq \delta < +\infty$,
- $\|B(\vec{u}, \vec{v})\|_E \leq C_B \|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_E$,

et une fois que l'on dispose de ces majorations, il suffira d'exiger la relation $0 < \delta < \frac{1}{4C_B}$, pour obtenir des solutions de l'équation $\vec{u} = \vec{U}_0 - B(\vec{u}, \vec{u})$.

Il est important de remarquer que le choix de l'espace fonctionnel E est absolument fondamental pour satisfaire les deux conditions précédentes et il existe plusieurs espaces qui permettent d'obtenir les majorations nécessaires pour *fermer* l'argument de point fixe. D'un point de vue chronologique, le premier exemple d'un tel espace pour les équations de Navier-Stokes est donné par le résultat suivant.

Théorème 4.4.1 (Fujita-Kato –1964) Soit $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale avec $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et soit une force extérieure $\vec{f} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T \leq +\infty$.

Alors il existe un temps $0 < T_0 < T$ et \vec{u} une fonction qui appartient à l'espace

$$L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)),$$

telle que \vec{u} est solution sur $[0, T_0] \times \mathbb{R}^3$ du problème

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds. \quad (4.20)$$

Comme annoncé, nous allons appliquer le principe de contraction de Banach-Picard dans l'espace fonctionnel $E_{T_0} = L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ muni de la norme

$$\|\vec{\varphi}(\cdot, \cdot)\|_{E_{T_0}} = \sup_{0 \leq t \leq T_0} (\|\vec{\varphi}(t, \cdot)\|_{L^2} + \|\vec{\varphi}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}) + \left(\int_0^{T_0} \|\Delta \vec{\varphi}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.21)$$

et (quitte à répéter ce qui a été dit plusieurs fois précédemment) nous devons donc obtenir les estimations suivantes pour chacun de ces termes

- Pour les données :

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{E_{T_0}} \leq C_1 \quad \text{et} \quad \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right\|_{E_{T_0}} \leq C_2,$$

où les constantes C_1, C_2 seront déterminées par la suite,

- Pour le terme bilinéaire

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds \right\|_{E_{T_0}} \leq C_B \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} \|\vec{u}\|_{E_{T_0}},$$

où C_B sera la constante de continuité de la forme bilinéaire, qui comme on le verra un peu plus tard jouera un rôle très important.

Avec ces majorations il suffira de vérifier les hypothèses du Théorème 4.1.1 (c'est à dire une relation entre la taille des données et la constante de continuité de la forme bilinéaire) pour obtenir des solutions *mild* des équations de Navier-Stokes.

Remarque 4.2 On notera que dans la définition de l'espace fonctionnel E_{T_0} , il y a intrinsèquement une dépendance par rapport au temps T_0 : l'intervalle de temps $[0, T_0]$ dans lequel on va construire une solution devra être déterminé et nous verrons ci-après qu'il dépendra de la taille des données. On remarquera également que ce temps d'existence est a priori contrôlé par l'information que l'on dispose sur la force extérieure car $0 < T_0 < T$.

4.4.1 Lemmes Techniques

Nous allons énoncer maintenant trois lemmes qui nous seront utiles pour obtenir ces majorations et qui seront réutilisés souvent dans ce chapitre et dans les chapitres suivants.

Lemme 4.4.2

1) Si $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle telle que l'on ait les informations $\vec{f} \in L^\infty([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et $\vec{f} \in L^2([0, +\infty[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$. Alors on a l'inégalité

$$\|\vec{f}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{3}{2}}} \leq \|\vec{f}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

2) Si $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est telle que $\vec{f} \in L^\infty([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, alors

$$\|\vec{f}(\cdot, \cdot)\|_{L_t^4 \dot{H}_x^1} \leq T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}. \quad (4.23)$$

Preuve.

1) En utilisant la formule de Plancherel et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons

$$\|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 \simeq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^3 |\widehat{\vec{f}}(t, \xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} |\xi| |\widehat{\vec{f}}(t, \xi)| \times |\xi|^2 |\widehat{\vec{f}}(t, \xi)| d\xi \leq \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2},$$

et à partir de cette estimation il suffit de prendre la norme L^4 en la variable de temps pour obtenir le résultat recherché :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^4 dt &\leq C \int_0^{+\infty} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2}^2 dt \\ &\leq C \|\vec{f}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^2 \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^2. \end{aligned}$$

2) Pour ce deuxième point il suffit d'écrire

$$\|\vec{f}(\cdot, \cdot)\|_{L_t^4 \dot{H}_x^1} = \left(\int_0^{T_0} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \leq \|\vec{f}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} \left(\int_0^{T_0} dt \right)^{\frac{1}{4}} = T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}.$$

■

Le lemme suivant permettra d'estimer les données initiales :

Lemme 4.4.3

1) Si $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ alors $\mathfrak{g}_t * \vec{f} \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$ et nous avons

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq \|\vec{f}\|_{L^2}.$$

2) Si $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ alors $\mathfrak{g}_t * \vec{f} \in L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et de plus on a

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \leq C \|\vec{f}\|_{L^2}.$$

Preuve.

1) Il suffit d'utiliser les inégalités de Young et les propriétés du noyau de la chaleur pour obtenir $\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L^2} \leq \|\mathfrak{g}_t\|_{L^1} \|\vec{f}\|_{L^2} = \|\vec{f}\|_{L^2}$ et avec cette estimation uniforme en temps nous pouvons écrire $\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq \|\vec{f}\|_{L^2}$.

2) Nous utilisons maintenant la formule de Plancherel et le théorème de Fubini :

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^2 \simeq \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\xi dt = \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 dt d\xi.$$

Si on pose $\tau = 2t|\xi|^2$ on obtient alors $\|\mathbf{g}_t * \vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^2 \simeq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} |\widehat{\vec{f}}(\xi)|^2 d\tau d\xi = \frac{1}{2} \|\widehat{\vec{f}}\|_{L^2}^2$
ce qui nous donne $\|\mathbf{g}_t * \vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \leq C \|\vec{f}\|_{L^2}$. \blacksquare

Voici un troisième résultat qui sera fondamental par la suite car il fait intervenir les intégrales de la formulation *mild* (4.17). En particulier, le deuxième point de ce lemme est crucial car il donne une estimation optimale qui fait intervenir les principaux ingrédients des équations de Navier-Stokes : le Laplacien, le semi-groupe de la chaleur et une intégration par rapport à la variable de temps.

Lemme 4.4.4 *Si $\vec{f} \in L^2([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$ et si l'on note $\vec{F}(t, x) = \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \vec{f}(s, x) ds$, alors nous avons les estimations suivantes*

- 1) $\|\vec{F}(t, \cdot)\|_{\dot{H}_x^1} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}$,
- 2) $\|\Delta \vec{F}(\cdot, \cdot)\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}$.

Cette dernière estimation est connue comme la régularité maximale du noyau de la chaleur.

Il est possible d'obtenir des variantes de la régularité maximale du noyau de la chaleur dans les espaces $L_t^p L_x^q$ (le lecteur peut consulter le livre [44] pour une démonstration dans le cas $L_t^p L_x^q$ avec $1 < p, q < +\infty$), mais pour nos besoins la version $L_t^2 L_x^2$ est suffisante.

Preuve.

1) En raisonnant par dualité nous écrivons

$$\begin{aligned} & \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{F}(t, \cdot)\|_{L^2} = \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{F}(t, x) \cdot \vec{\varphi}(x) dx \right| \\ &= \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t (-\Delta)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{g}_{t-s} * \vec{f}(s, x)) ds \cdot \vec{\varphi}(x) dx \right| \\ &= \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}) \cdot \vec{f}(s, x) dx ds \right| \\ &\leq \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{L^2} \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi})\|_{L^2} ds \leq \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \|\vec{f}(\cdot, \cdot)\|_{L_t^2 L_x^2} \|\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}, \end{aligned}$$

mais par le deuxième point du Lemme 4.4.3 nous avons $\|\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \leq C \|\vec{\varphi}\|_{L^2}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\|\vec{F}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}.$$

2) Etant donné que l'on a l'identité

$$\Delta \vec{F}(t, x) = \int_0^t \Delta [\mathbf{g}_{t-s}] * \vec{f}(s, x) ds,$$

en prenant la transformée de Fourier dans la variable spatiale et en faisant un changement de variable (en temps) on obtient

$$\mathcal{F}_x [\Delta \vec{F}] (t, \xi) = \int_0^t -|\xi|^2 e^{-(t-s)|\xi|^2} \mathcal{F}_x [\vec{f}] (s, \xi) ds = \int_0^t -|\xi|^2 e^{-\eta|\xi|^2} \mathcal{F}_x [\vec{f}] (t-\eta, \xi) d\eta,$$

donc, si on prolonge la fonction $\vec{f}(t, x)$ par 0 si $t < 0$, alors nous avons

$$\mathcal{F}_x [\Delta \vec{F}] (t, \xi) = \int_0^{+\infty} -|\xi|^2 e^{-\eta|\xi|^2} \mathcal{F}_x [\vec{f}] (t - \eta, \xi) d\eta,$$

si l'on prend la transformée de Fourier en la variable de temps on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{t,x} [\Delta \vec{F}] (\tau, \xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} -|\xi|^2 e^{-\eta|\xi|^2} \mathcal{F}_x [\vec{f}] (t - \eta, \xi) d\eta \right) e^{-it\tau} dt \\ &= \int_0^{+\infty} -|\xi|^2 e^{-\eta|\xi|^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_x [\vec{f}] (t - \eta, \xi) e^{-it\tau} dt \right) d\eta \\ &= \int_0^{+\infty} -|\xi|^2 e^{-\eta|\xi|^2} \left(e^{-i\eta\tau} \mathcal{F}_{t,x} [\vec{f}] (\tau, \xi) \right) d\eta = \frac{-|\xi|^2}{|\xi|^2 + i\tau} \times \mathcal{F}_{t,x} [\vec{f}] (\tau, \xi), \end{aligned}$$

où on a appliqué la formule de Fubini et les propriétés de translation de la transformation de Fourier (voir le Lemme 2.3.7, page 22).

On remarquera que le symbole $\frac{-|\xi|^2}{|\xi|^2 + i\tau}$ est borné, et donc

$$\|\Delta \vec{F}\|_{L_t^2 L_x^2} \simeq \left\| \mathcal{F}_{t,x} [\Delta \vec{F}] \right\|_{L_t^2 L_x^2} = \left\| \frac{-|\xi|^2}{|\xi|^2 + i\tau} \times \mathcal{F}_{t,x} [\vec{f}] \right\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2},$$

ce qui termine la preuve de la régularité maximale du noyau de la chaleur. \blacksquare

Remarque 4.3 *La notion de régularité maximale exprime le fait que le noyau de la chaleur \mathbf{g}_t peut "absorber" au plus deux dérivées en variable d'espace (représentées ici par l'opérateur Laplacien) tout en gardant un comportement acceptable en variable de temps (reflété ici par la norme L^2 en variable de temps).*

Démonstration du Théorème 4.4.1

Avec ces résultats préliminaires nous allons démontrer le Théorème de Fujita-Kato. Il s'agit d'étudier les quantités (1), (2) et (3) ci-dessous au sens de la norme $\|\cdot\|_{E_{T_0}}$ donnée par l'expression (4.21) :

$$\vec{u}(t, x) = \underbrace{\mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x)}_{(1)} + \underbrace{\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds}_{(2)} - \underbrace{\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds}_{(3)}. \quad (4.24)$$

1) Etude de la donnée initiale \vec{u}_0

Pour la première partie de (4.24) et sous l'hypothèse $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, nous devons étudier chacun des termes suivants

$$\|\mathbf{g}_t * \vec{u}_0\|_{E_{T_0}} = \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\underbrace{\|\mathbf{g}_t * \vec{u}_0\|_{L^2}}_{(1.a)} + \underbrace{\|\mathbf{g}_t * \vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}}_{(1.b)} \right) + \underbrace{\left(\int_0^{T_0} \|\Delta(\mathbf{g}_t * \vec{u}_0)\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}_{(1.c)}. \quad (4.25)$$

Pour la partie (1.a) nous avons directement par le premier point du Lemme 4.4.3 la majoration

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \|\mathbf{g}_t * \vec{u}_0\|_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2},$$

tandis que pour le deuxième terme (1.b), en utilisant le même raisonnement il suffit d'écrire

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{g}_t * \vec{u}_0)\|_{L^2} = \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|\mathbf{g}_t * (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\vec{u}_0\|_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}.$$

Pour la partie (1.c), avec la formule de Plancherel et le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta(\mathbf{g}_t * \vec{u}_0)|^2 dx dt &\simeq \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^4 e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} |\xi|^2 e^{-2t|\xi|^2} |\xi|^2 |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 dt d\xi, \end{aligned}$$

maintenant, avec le changement de variable $\tau = 2t|\xi|^2$ il vient

$$\int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta(\mathbf{g}_t * \vec{u}_0)|^2 dx dt \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau} d\tau \right) |\xi|^2 |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \leq C \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}^2.$$

Avec chacune de ces estimations pour les termes (1.a), (1.b) et (1.c) nous avons

$$\|\mathbf{g}_t * \vec{u}_0\|_{E_{T_0}} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2} + \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1} + C \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1},$$

ce qui nous donne l'estimation suivante pour l'expression (4.25) :

$$\|\mathbf{g}_t * \vec{u}_0\|_{E_{T_0}} \leq C_1 \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}.$$

2) Etude de la force extérieure \vec{f}

Pour la deuxième partie de l'expression (4.24), il faut étudier les termes suivants avec l'hypothèse $\vec{f} \in L^2([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{E_{T_0}} &= \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\underbrace{\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L^2}}_{(2.a)} + \underbrace{\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{\dot{H}^1}}_{(2.b)} \right) \\ &\quad + \underbrace{\left(\int_0^{T_0} \left\| \Delta \left(\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right) \right\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}_{(2.c)}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Pour le premier terme (2.a) nous écrivons en utilisant l'inégalité de Minkowski continue (2.20), présentée page 20, les inégalités de Young pour la convolution, les propriétés du noyau de la chaleur et du projecteur de Leray

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} &\leq \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\int_0^t \|\mathbf{g}_{t-s}\|_{L^1} \|\mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot)\|_{L^2} ds \right) \\ &\leq C \int_0^{T_0} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{L^2} ds, \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz en variable de temps et comme $T_0 < T$, il vient

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} \leq CT_0^{\frac{1}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3))} \leq CT_0^{\frac{1}{2}} \|\vec{f}\|_{L^2([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))}.$$

Pour le terme (2.b) nous allons utiliser le premier point du Lemme 4.4.4 ainsi, avec les propriétés de continuité du projecteur de Leray, on obtient :

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{\dot{H}^1} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}.$$

Nous remarquons maintenant que le dernier terme (2.c) se déduit directement de la régularité maximale du noyau de la chaleur donnée dans le deuxième point du Lemme 4.4.4 et nous pouvons écrire

$$\left(\int_0^{T_0} \left\| \Delta \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right) \right\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}.$$

Avec toutes ces estimations pour les termes (2.a), (2.b) et (2.c), nous avons finalement la majoration suivante pour la quantité (4.26) :

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{E_{T_0}} \leq C_2 \left(1 + T_0^{\frac{1}{2}} \right) \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}.$$

3) Etude de la non-linéarité $\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v})$

Pour appliquer le théorème de point fixe énoncé en début de chapitre nous allons étudier la quantité

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds,$$

et nous recherchons une estimation de la forme

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})\|_{E_{T_0}} \leq C \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}}.$$

Ainsi, pour le dernier terme de l'expression (4.24), on écrit :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right\|_{E_{T_0}} = \\ & \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\underbrace{\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right\|_{L^2}}_{(3.a)} + \underbrace{\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right\|_{\dot{H}^1}}_{(3.b)} \right) \\ & \quad + \underbrace{\left(\int_0^{T_0} \left\| \Delta \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right) \right\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}_{(3.c)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nous allons étudier les termes (3.a), (3.b) et (3.c) qui constituent l'expression (4.27).

Terme (3.a) En utilisant l'inégalité de Minkowski continue, les inégalités de Young, les propriétés du noyau de la chaleur et celles du projecteur de Leray (continuité dans l'espace L^2), nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} & \leq \sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_0^t \|\mathfrak{g}_{t-s}\|_{L^1} \|\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, \cdot)\|_{L^2} ds \\ & \leq C \sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_0^t \|\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v})(s, \cdot)\|_{L^2} ds, \end{aligned}$$

et maintenant, avec la majoration $\|div(\vec{u} \otimes \vec{v})(s, \cdot)\|_{L^2} \leq C\|\vec{u} \otimes \vec{v}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz en variable de temps, nous écrivons

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T_0} \int_0^t \|div(\vec{u} \otimes \vec{v})(s, \cdot)\|_{L^2} ds &\leq C \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left(\int_0^t ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \\ &\leq CT_0^{\frac{1}{2}} \|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A ce stade nous invoquons les lois de produit énoncées au Chapitre 2, et nous utilisons en particulier l'inégalité (2.46) donnée page 32 pour écrire (avec une inégalité de Hölder en variable de temps qui nous fait passer de la norme L^2 aux normes L^4)

$$\|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \leq C \left(\|\vec{u}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{3}{2}}} \|\vec{v}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^1} + \|\vec{v}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^1} \right),$$

de sorte qu'en utilisant les inégalités (4.22) et (4.23) du Lemme 4.4.2 on obtient

$$\|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \leq C \left(\|\vec{u}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^{\frac{1}{2}} \times T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{v}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} + \|\vec{v}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^{\frac{1}{2}} \times T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} \right), \quad (4.29)$$

ainsi, en revenant à (4.28) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} &\leq CT_0^{\frac{1}{2}} \left(\|\vec{u}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^{\frac{1}{2}} \times T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{v}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} \right. \\ &\quad \left. + \|\vec{v}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^{\frac{1}{2}} \times T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} \right). \end{aligned}$$

Maintenant il ne reste plus qu'à observer que chacune des normes qui intervient dans la partie de droite de l'expression ci-dessus peut être majorée par la norme

$$\|\cdot\|_{E_{T_0}} = \|\cdot\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\cdot\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} + \|\cdot\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2},$$

de sorte que l'on a l'inégalité

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} \leq CT_0^{\frac{1}{2}} T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}}. \quad (4.30)$$

Terme (3.b) Nous devons étudier le terme

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right\|_{\dot{H}^1},$$

mais en appliquant la première partie du Lemme 4.4.4 et en utilisant la continuité du projecteur de Leray, nous pouvons écrire

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right\|_{\dot{H}^1} \leq C \|\mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{v}))\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1},$$

et en utilisant l'inégalité (4.29) pour traiter le terme $\|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}$ on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right\|_{\dot{H}^1} &\leq C \left(\|\vec{u}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^{\frac{1}{2}} \times T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{v}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} \right. \\ &\quad \left. + \|\vec{v}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^{\frac{1}{2}} \times T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} \right) \end{aligned}$$

en remarquant que chacune des normes de la partie de droite de l'inégalité ci-dessus est majorée par la norme $\|\cdot\|_{E_{T_0}} = \|\cdot\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\cdot\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} + \|\cdot\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}$, il vient alors

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right\|_{\dot{H}^1} \leq CT_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_E. \quad (4.31)$$

Terme (3.c) Il nous reste plus qu'à étudier maintenant la dernière partie de l'expression (4.27) :

$$\left(\int_0^{T_0} \left\| \Delta \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right) \right\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \Delta \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right) \right\|_{L_t^2 L_x^2}.$$

En prolongeant les quantités impliquées par 0 si $t > T_0$, nous pouvons appliquer le deuxième point du Lemme 4.4.4 pour écrire

$$\left(\int_0^{T_0} \left\| \Delta \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right) \right\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1},$$

et en utilisant les mêmes raisonnements précédents pour estimer la quantité $\|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}$, on obtient la majoration suivante

$$\left(\int_0^{T_0} \left\| \Delta \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \right) \right\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq CT_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_E. \quad (4.32)$$

Avec les estimations (4.30), (4.31) et (4.32) nous avons terminé l'étude des termes (3.a), (3.b) et (3.c) qui composent l'expression (4.27) et nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v}))(s, \cdot) ds \right\|_{E_{T_0}} = (3.a) + (3.b) + (3.c) \\ & \leq CT_0^{\frac{1}{2}} T_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} + CT_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} + CT_0^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}} \\ & \leq C_3 T_0^{\frac{1}{4}} \left(1 + T_0^{\frac{1}{2}} \right) \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} \|\vec{v}\|_{E_{T_0}}. \end{aligned}$$

Grâce à cette estimation, nous obtenons qu'une borne supérieure de la constante de continuité de l'application bilinéaire est donnée par $C_3 T_0^{\frac{1}{4}} \left(1 + T_0^{\frac{1}{2}} \right)$ ce qui conclut l'étude de la troisième partie de l'expression (4.24).

Bilan des estimations

Récapitulons maintenant toutes les informations obtenues pour étudier les équations de Navier-Stokes sous formulation intégrale

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds.$$

Nous avons utilisé l'espace fonctionnel $E_{T_0} = L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$, muni de la norme $\|\cdot\|_{E_{T_0}} = \|\cdot\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\cdot\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} + \|\cdot\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}$ et nous avons obtenu les majorations suivantes :

- $\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{E_{T_0}} \leq C_1 \|\vec{u}_0\|_{H^1}$, et $\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, \cdot) ds \right\|_{E_{T_0}} \leq C_2 \left(1 + T_0^{\frac{1}{2}}\right) \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}$,
- $\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds \right\|_{E_{T_0}} \leq C_3 T_0^{\frac{1}{4}} \left(1 + T_0^{\frac{1}{2}}\right) \|\vec{u}\|_{E_{T_0}} \|\vec{u}\|_{E_{T_0}}$,

Ainsi, à partir de ces estimations, pour pouvoir appliquer le principe de contraction de Banach-Picard nous avons besoin des conditions suivantes

$$C_1 \|\vec{u}_0\|_{H^1} + C_2 \left(1 + T_0^{\frac{1}{2}}\right) \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq \delta \quad \text{et} \quad \delta < \frac{1}{4C_3 T_0^{\frac{1}{4}} \left(1 + T_0^{\frac{1}{2}}\right)}. \quad (4.33)$$

On remarquera à partir de ces deux conditions que l'on ne peut espérer avoir simultanément un temps d'existence T_0 grand et des données initiales (\vec{u}_0, \vec{f}) grandes. Mais une fois que les quantités $\|\vec{u}_0\|_{H^1}$ et $\|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}$ sont fixées (qu'elles soient grandes ou petites), on peut exhiber un temps d'existence $T_0 > 0$ et une fonction $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$, telle que \vec{u} est solution au sens *mild* des équations de Navier-Stokes, et ceci termine la démonstration du Théorème 4.4.1. \blacksquare

Remarque 4.4 *Insistons sur le fait que la condition (4.33) impose une dichotomie entre la taille des données initiales (\vec{u}_0, \vec{f}) et le temps d'existence T_0 . En effet, on a la condition*

$$T_0^{\frac{1}{4}} < \frac{1}{4C_3(1 + T_0^{\frac{1}{2}}) \left(C_1 \|\vec{u}_0\|_{H^1} + C_2(1 + T_0^{\frac{1}{2}}) \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}\right)},$$

qui peut s'écrire, pour T_0 suffisamment petit, comme

$$T_0 < \frac{C}{\left(\|\vec{u}_0\|_{H^1} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}\right)^4}. \quad (4.34)$$

Nous avons alors les deux situations suivantes :

- soit les données initiales sont petites, et dans ce cas le temps d'existence T_0 peut être grand,
- soit les données initiales sont grandes et alors le temps d'existence T_0 est petit,

et en dehors de ces deux conditions, le Théorème de Fujita-Kato 4.4.1 ne donne aucune information sur l'éventuelle existence de solutions des équations de Navier-Stokes.

Remarque 4.5 *Si le temps d'existence T_0 est borné ($0 < T_0 < +\infty$) alors la solution $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ que nous venons de construire avec le théorème précédent appartient également à l'espace $L^2([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3))$ et en particulier elle appartient à l'espace $L^2([0, T_0], H^2(\mathbb{R}^3))$. Ainsi, par les injections de Sobolev données dans le point 3) du Théorème 2.4.6 page 30, nous en déduisons que la solution appartient à l'espace $L^2([0, T_0], L^\infty(\mathbb{R}^3))$.*

En effet, puisqu'on sait que la solution \vec{u} appartient à l'espace $L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3))$, on a sans problème $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3))$. Le temps T_0 étant borné, nous avons alors

$$\|\vec{u}\|_{L_t^2 L_x^2} = \left(\int_0^{T_0} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{0 < t < T_0} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} T_0^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Nous avons donc $\vec{u} \in L^2([0, T_0], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$, ce qui nous donne bien le contrôle $\vec{u} \in L^2([0, T_0], H^2(\mathbb{R}^3))$.

Le résultat qui suit nous donne une information très importante par rapport à la continuité en temps de la fonction $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1}$.

Corollaire 4.4.5 *Sous les hypothèses du Théorème 4.4.1, la vitesse \vec{u} appartient à l'espace*

$$\mathcal{C}([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)).$$

Preuve. En effet, on sait par construction que la quantité $\sup_{0 < t < T_0} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1}$ est bornée et de plus on a la représentation intégrale

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds.$$

Ainsi, pour tout $0 < t_1 < t_2 < T_0$, si nous étudions la quantité $\|\vec{u}(t_2, \cdot) - \vec{u}(t_1, \cdot)\|_{H^1}$ on a

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t_2, \cdot) - \vec{u}(t_1, \cdot)\|_{H^1} &= \left\| \left(\mathfrak{g}_{t_2} * \vec{u}_0 + \int_0^{t_2} \mathfrak{g}_{t_2-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds - \int_0^{t_2} \mathfrak{g}_{t_2-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) ds \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\mathfrak{g}_{t_1} * \vec{u}_0 + \int_0^{t_1} \mathfrak{g}_{t_1-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds - \int_0^{t_1} \mathfrak{g}_{t_1-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) ds \right) \right\|_{H^1} \\ &\leq \|\vec{u}_0 * (\mathfrak{g}_{t_2} - \mathfrak{g}_{t_1})\|_{H^1} + \left\| \int_0^{t_2} \mathfrak{g}_{t_2-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds - \int_0^{t_1} \mathfrak{g}_{t_1-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds \right\|_{H^1} \\ &\quad + \left\| \int_0^{t_2} \mathfrak{g}_{t_2-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) ds - \int_0^{t_1} \mathfrak{g}_{t_1-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) ds \right\|_{H^1}, \end{aligned}$$

et avec les propriétés de semi-groupe du noyau de la chaleur ainsi que par la linéarité de l'intégrale en variable de temps, on obtient

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t_2, \cdot) - \vec{u}(t_1, \cdot)\|_{H^1} &\leq \|\vec{u}_0 * (\mathfrak{g}_{t_2} - \mathfrak{g}_{t_1})\|_{H^1} + \left\| \int_0^{t_1} \mathfrak{g}_{t_1-s} * (\mathfrak{g}_{t_2-t_1} * \mathbb{P}(\vec{f}) - \mathbb{P}(\vec{f})) ds \right\|_{H^1} \\ &+ \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{g}_{t_2-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds \right\|_{H^1} + \left\| \int_0^{t_1} \mathfrak{g}_{t_1-s} * (\mathfrak{g}_{t_2-t_1} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) - \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))) ds \right\|_{H^1} \\ &\quad + \left\| \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{g}_{t_2-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) ds \right\|_{H^1}, \end{aligned}$$

et une application directe du théorème de convergence dominée nous fournit (voir également les propriétés du noyau de la chaleur données dans la Proposition 3.1.2, page 45) :

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \|\vec{u}(t_2, \cdot) - \vec{u}(t_1, \cdot)\|_{H^1} = 0,$$

nous obtenons alors la continuité de la fonction $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1}$. En particulier on obtient également la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1} = \|\vec{u}_0\|_{H^1}$. ■

Avec le Théorème 4.4.1 nous avons obtenu une solution *mild* de l'équation (4.20), mais cette équation fait intervenir le projecteur de Leray qui a le bon goût d'annuler la pression p : nous nous sommes donc concentrés sur un problème à une seule inconnue et le résultat est alors une fonction \vec{u} qui appartient aux bons espaces fonctionnels. Toutefois, cela ne suffit pas pour terminer notre présentation et nous devons étudier maintenant la pression p .

Dans ce sens nous avons le résultat suivant :

Corollaire 4.4.6 Soit $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale à divergence nulle et soit une force extérieure $\vec{f} \in L^2([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T \leq +\infty$. Soit $0 < T_0 < T$ un temps d'existence et soit $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ la solution mild obtenue avec le Théorème de Fujita-Kato 4.4.1.

Alors la pression $p = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right)$ appartient à l'espace $L^2([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

Preuve. En utilisant cette expression pour la pression p on a directement l'estimation

$$\|p\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \leq \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) \right) \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} + \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\vec{f}) \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}. \quad (4.35)$$

On remarque que l'on a

$$\left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \simeq \left\| (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \right\|_{L_t^2 L_x^2} = \left\| \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) \right\|_{L_t^2 L_x^2} \simeq \left\| \vec{u} \otimes \vec{u} \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1},$$

mais par l'estimation (4.29) étudiée à la page 120, nous savons que si $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$, alors la quantité $\|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}$ est bornée. De plus, pour le terme qui fait intervenir la force extérieure \vec{f} nous écrivons

$$\left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\vec{f}) \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \simeq \left\| \frac{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\vec{f}) \right\|_{L_t^2 L_x^2} \leq \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2},$$

mais on sait par hypothèse que $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2$ et donc cette dernière quantité est bien bornée.

Tous les termes de la partie de droite de l'inégalité (4.35) sont donc bornés, et on en déduit alors sans problème que $p \in L^2([0, T_0], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$. ■

Remarque 4.6 Avec les fonctions (\vec{u}, p) que nous venons de construire, nous obtenons une solution aux équations de Navier-Stokes au sens mild. On remarquera que grâce au projecteur de Leray, toute l'étude que nous avons réalisé se concentre sur la vitesse \vec{u} .

4.5 Formulation différentielle et formulation intégrale

Avec le Théorème 4.4.1 nous avons obtenu, à partir d'une donnée initiale $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle et d'une force extérieure $\vec{f} \in L^2([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T \leq +\infty$, un temps $0 < T_0 < T$ et une fonction $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ qui est solution du problème intégral

$$\vec{u}(t, x) = \mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds.$$

Nous allons maintenant vérifier qu'en fait on est bien solution du problème de Navier-Stokes usuel et pour cela on considère le résultat suivant qui nous donne l'équivalence entre ces deux points de vue.

Théorème 4.5.1 Soit $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale telle que $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et soit $\vec{f} \in L^2([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))$ une force extérieure avec $0 < T \leq +\infty$. Soit $0 < T_0 < T$ un temps fini et soit $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$, alors les deux points suivants sont équivalents :

1) \vec{u} est une solution du problème de Navier-Stokes intégral

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds, \quad (4.36)$$

avec $0 < t \leq T_0$.

2) Sur l'intervalle de temps $0 < t \leq T_0$, \vec{u} est une solution du problème de Navier-Stokes différentiel

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

où la pression p est reliée à la vitesse \vec{u} et à la force extérieure \vec{f} par la formule

$$p = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right). \quad (4.38)$$

Démonstration. L'équivalence entre les équations (4.36)-(4.37) ne se fera pas directement et il sera nécessaire d'introduire une étape intermédiaire qui nous permettra d'étudier sans ambiguïté la pression.

On commence tout d'abord par vérifier que le problème (4.36) est équivalent au système différentiel

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}), \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \quad (4.39)$$

et on remarquera sans difficulté que dans ces problèmes (4.36) et (4.39) la pression p n'intervient pas.

Donc, si $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ et si \vec{u} s'écrit de la forme intégrale suivante

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds,$$

alors nous allons vérifier que \vec{u} est solution du problème (4.39). En effet, par tous les calculs réalisés dans la Section 4.4 nous savons que les termes de la formule ci-dessus ont bien un sens dans l'espace $L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$, et nous écrivons alors, pour $h > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}(t+h, x) - \vec{u}(t, x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\mathfrak{g}_{t+h} * \vec{u}_0 + \int_0^{t+h} \mathfrak{g}_{t+h-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds - \int_0^{t+h} \mathfrak{g}_{t+h-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{h} \left(\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0 + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) ds \right), \end{aligned}$$

ce qui, par les propriétés de linéarité de la convolution et des intégrales, se réécrit comme

$$\begin{aligned} \frac{\vec{u}(t+h, x) - \vec{u}(t, x)}{h} &= \frac{1}{h}(\mathfrak{g}_{t+h} - \mathfrak{g}_t) * \vec{u}_0(x) + \frac{1}{h} \left(\int_0^t (\mathfrak{g}_{t+h-s} - \mathfrak{g}_{t-s}) * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{h} \left(\int_0^t (\mathfrak{g}_{t+h-s} - \mathfrak{g}_{t-s}) * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds \right) \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathfrak{g}_{t+h-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathfrak{g}_{t+h-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds, \end{aligned}$$

ainsi, en faisant tendre $h \rightarrow 0$ (faiblement), on a par convergence dominée et en se rappelant que l'on a $\partial_t \mathfrak{g}_t = \Delta \mathfrak{g}_t$:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u}(t, x) &= \Delta \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \Delta \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \Delta \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathfrak{g}_{t+h-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathfrak{g}_{t+h-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds, \end{aligned}$$

on utilise maintenant le Théorème 2.5.5 de différentiation de Lebesgue (les objets considérés sont bien localement intégrables en variable de temps) pour obtenir

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u}(t, x) &= \Delta \left(\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds \right) \\ &\quad + \mathfrak{g}_0 * \mathbb{P}(\vec{f})(t, x) - \mathfrak{g}_0 * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(t, x), \end{aligned}$$

mais comme $\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds$, et $\mathfrak{g}_0 = \delta_0$, on a bien

$$\partial_t \vec{u}(t, x) = \Delta \vec{u}(t, x) + \mathbb{P}(\vec{f})(t, x) - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(t, x).$$

Ainsi, si \vec{u} est solution du problème (4.36) alors \vec{u} vérifie le problème (4.39).

Vérifions maintenant l'implication réciproque. En utilisant la linéarité du projecteur de Leray on écrit

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u} &= \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}) = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{f}) \\ \partial_t \vec{u} &= \Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\vec{F}), \end{aligned} \tag{4.40}$$

où nous avons posé $\vec{F} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{f}$. Rappelons que par hypothèse on a $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2$ et que $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$, alors, puisque $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})$ car $\text{div}(\vec{u}) = 0$, en suivant les estimations réalisées dans la formule (4.29) page 120, nous avons (car $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$) :

$$\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L_t^2 L_x^2} = \|\text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})\|_{L_t^2 L_x^2} = \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} < +\infty,$$

et nous en déduisons que \vec{F} et la quantité $\mathbb{P}(\vec{F})$ appartiennent à l'espace $L_t^2 L_x^2$. Donc, en suivant les idées exposées dans la Section 4.3.1 (avec cette fois-ci une donnée initiale), la solution de l'équation (4.40) s'écrit

$$\vec{u} = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0 + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{F}) ds = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0 + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{f}) ds,$$

et nous avons vérifié que si $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ est solution de l'équation (4.39) alors \vec{u} est également solution du problème (4.36).

Nous allons à présent montrer que le problème (4.39) est en fait équivalent au problème (4.37). La première implication est facile : on remarque sans problème que si \vec{u} est solution des équations (4.37), alors elle est à divergence nulle et en appliquant le projecteur de Leray à cette équation (4.37) on obtient sans problème que \vec{u} est solution du système (4.39).

Pour établir la réciproque, nous allons tout d'abord étudier la pression. En effet, si $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ est solution de l'équation (4.37), alors nous avons que la pression p est déterminée de façon unique par l'expression (4.38) : si nous appliquons l'opérateur divergence dans l'équation (4.37), en utilisant le fait que $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ et que $\operatorname{div}(\vec{\nabla} p) = \Delta p$, on obtient

$$-\Delta p = \operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}), \quad (4.41)$$

mais, par hypothèse on a d'une part $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2$, et donc $\operatorname{div}(\vec{f}) \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ et d'autre part, puisque $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$, on sait par l'estimation (4.29), donnée page 120, que $\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})$ appartient à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$, et donc la partie de droite de l'expression (4.41) est bien définie et on a

$$p = p_0 + p_1,$$

où on a défini $p_0 = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right) \in L_t^2 \dot{H}_x^1$ (par le Corollaire 4.4.6) et où la fonction $p_1 : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction harmonique ($\Delta p_1 = 0$). Nous allons vérifier que $p_1 \equiv 0$, et pour cela on considère $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ une fonction de test en variable de temps et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ une fonction de test en variable d'espace, il vient alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} p_1(t, x) \phi(t) \varphi(x) dx dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} p - \vec{\nabla} p_0)(t, x) \phi(t) \varphi(x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left((-\partial_t \vec{u} + \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{f})(t, x) - \vec{\nabla} p_0(t, x) \right) \phi(t) \varphi(x) dx dt, \end{aligned}$$

on note que tous les termes de droite ci-dessus sont bien définis (au sens des distributions) car par hypothèse on sait que $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$, et donc $\partial_t \vec{u} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ puisque l'on a $\Delta \vec{u} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$, $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \in L_t^2 L_x^2$, $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2$, et $\vec{\nabla} p_0 \in L_t^2 L_x^2$. Ainsi, on en déduit que le terme $\vec{\nabla} p_1$ appartient à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ et de plus on a par construction $\Delta p_1 = 0$.

On observe maintenant que $\Delta p_1 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} p_1)$, et comme $\vec{\nabla} p_1 \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$, en passant à la transformation de Fourier au sens des distributions tempérées on a, pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\Delta p_1}(t, \xi) \psi(t, \xi) d\xi dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} i\xi \cdot \widehat{\vec{\nabla} p_1}(t, \xi) \psi(t, \xi) d\xi dt,$$

ce qui nous permet d'affirmer que le support en variable de Fourier de la fonction $\vec{\nabla} p_1$ est concentré sur l'origine et qu'alors la fonction p_1 est un polynôme, mais comme on appartient à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$, il ne peut pas s'agir d'un polynôme et on en déduit donc que $p_1 \equiv 0$.

Donc si $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ est solution du problème (4.37), alors on sait que la pression p peut être uniquement déterminée par la formule

$$p = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right).$$

Ainsi, si $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ est solution du problème (4.39), alors on a

$$\partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} = -\mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}),$$

et pour montrer que \vec{u} est également solution du problème (4.37) on doit vérifier que l'on a

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0,$$

et que l'on a l'identité

$$-\mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}) = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}. \quad (4.42)$$

Nous étudions d'abord l'identité ci-dessus, qui se réécrit comme

$$\begin{aligned} -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \vec{f} - \mathbb{P}(\vec{f}) &= \vec{\nabla}p \\ &= \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule (4.38) qui relie la pression à la vitesse \vec{u} et à la force extérieure \vec{f} . Nous avons donc

$$-\left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) \right) \right] + \left[\vec{f} + \frac{\vec{\nabla}}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}(\vec{f}) \right) \right] = -\mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}),$$

et à ce stade on se rappelle la définition du projecteur de Leray donnée dans la formule (4.5), page 106, $\mathbb{P}(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\vec{\varphi})$, ce qui nous permet de conclure que l'on a bien l'identité (4.42) : ainsi, si \vec{u} est solution de l'équation (4.39), alors \vec{u} est solution de l'équation $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}$.

Montrons maintenant que si \vec{u} est solution du problème (4.39), alors on a $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$. En utilisant l'identité $\operatorname{div}(\mathbb{P}(\vec{\varphi})) = 0$ (voir la formule (4.9) page 108), si l'on applique l'opérateur divergence à toute l'équation (4.39), il vient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\partial_t \vec{u}) &= \operatorname{div} \left(\Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}) \right) \\ \partial_t (\operatorname{div}(\vec{u})) &= \Delta (\operatorname{div}(\vec{u})), \end{aligned}$$

mais on sait par hypothèse que $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$, donc on a $\operatorname{div}(\vec{u}) \in L_t^2 \dot{H}_x^1$ et le problème ci-dessus est bien posé. Ainsi, si l'on multiplie cette équation par $\operatorname{div}(\vec{u})$ et on intègre en variable d'espace, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t (\operatorname{div}(\vec{u})) \operatorname{div}(\vec{u}) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta (\operatorname{div}(\vec{u})) \operatorname{div}(\vec{u}) dx,$$

ce qui se réécrit comme

$$\frac{d}{dt} \|\operatorname{div}(\vec{u})(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta (\operatorname{div}(\vec{u})) \operatorname{div}(\vec{u}) dx = -2 \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{u}))|^2 dx,$$

et en intégrant par rapport au temps on a

$$\|\operatorname{div}(\vec{u})(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|\operatorname{div}(\vec{u}_0)\|_{L^2}^2 - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{u}))|^2 dx ds,$$

mais comme $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et que le terme $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{u}))|^2 dx ds$ est positif on obtient

$$\|\operatorname{div}(\vec{u})(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}(\operatorname{div}(\vec{u}))|^2 dx ds,$$

et cette formule nous permet de conclure que pour tout temps $t > 0$ on a bien la condition de divergence nulle $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$. Nous avons donc montré que si \vec{u} est solution de l'équation (4.39) alors elle est également solution du problème (4.37).

L'équivalence entre les problèmes (4.36), (4.39) et (4.37) a donc été établie, ce qui termine la démonstration du théorème. \blacksquare

Nous savons que la fonction $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ obtenue par le Théorème de Fujita-Kato 4.4.1 à partir d'une donnée initiale \vec{u}_0 est *par construction* unique (car provenant d'un argument du point fixe de Banach-Picard). On se pose maintenant la question de savoir quelle est la relation entre cette fonction \vec{u} obtenue par ce procédé et une *autre* fonction $\vec{v} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ qui serait éventuellement obtenue par le biais d'un tout autre procédé et qui vérifierait les équations de Navier-Stokes avec les mêmes données \vec{u}_0 et \vec{f} . Dans ce sens nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.5.2 (unicité des solutions *mild*) Soit $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale à divergence nulle et soit $\vec{f} \in L^2([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))$ une force extérieure avec $0 < T \leq +\infty$. Soit $\vec{u} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T_0 < T$, la solution des équations de Navier-Stokes associée à ces données obtenue au moyen du Théorème de Fujita-Kato 4.4.1. Si $\vec{v} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ est également une solution sur l'ensemble $[0, T_0] \times \mathbb{R}^3$ de l'équation de Navier-Stokes (avec la même donnée initiale \vec{u}_0 et la même force extérieure \vec{f}) sous formulation intégrale

$$\vec{v}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{v}))(s, x) ds,$$

alors on a $\vec{u} = \vec{v}$.

Preuve. On pose $\vec{w}(t, x) = \vec{u}(t, x) - \vec{v}(t, x)$ pour tout $t \geq 0$. Etant donné que l'on a $\vec{u}(0, x) = \vec{v}(0, x) = \vec{u}_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ (car la donnée initiale pour ces deux solutions \vec{u} et \vec{v} est la même), alors on a sans problème l'identité $\vec{w}(0, x) = 0$. De plus, comme on a $\vec{u}, \vec{v} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$, alors on a

$$\vec{w} \in L^\infty([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_0], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)).$$

Ainsi, en utilisant la formulation intégrale des équations de Navier-Stokes et la bilinéarité des objets considérés, nous avons

$$\begin{aligned} \vec{w}(t, x) &= \vec{u}(t, x) - \vec{v}(t, x) = - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{v}))(s, x) ds \\ &= - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{w} \otimes \vec{v}))(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{w}))(s, x) ds, \end{aligned}$$

et nous allons montrer avec cette formulation et par contradiction que pour tout $t > 0$ on a $\vec{w}(t, x) = 0$.

A cet effet, on définit $T^* \in [0, T_0]$ le temps maximal tel que l'on ait $\vec{w} = 0$ sur l'ensemble $[0, T^*[\times\mathbb{R}^3$ et on supposera qu'il existe un temps T_1 tel que $T^* < T_1 < T_0$ et tel que la fonction \vec{w} n'est pas identiquement nulle sur l'intervalle $[T^*, T_1]$. Nous allons donc étudier la norme de la fonction \vec{w} dans l'espace $L^\infty([0, T_1[, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T_1[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ et nous avons (puisque $\vec{w}(t, x) = 0$ sur l'intervalle de temps $0 < t \leq T^*$ et qu'on suppose que $\vec{w}(t, x) \neq 0$ sur l'intervalle de temps $T^* < t < T_1 < T$) la formulation suivante :

$$\vec{w}(t, x) = - \int_{T^*}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{w} \otimes \vec{v}))(s, x) ds - \int_{T^*}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{w}))(s, x) ds,$$

et il vient alors

$$\begin{aligned} \|\vec{w}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} &\leq \left\| \int_{T^*}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{w} \otimes \vec{v}))(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} \\ &+ \left\| \int_{T^*}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{w}))(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Les deux termes ci-dessus se traitent la même manière, car l'information sur les fonctions \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} est la même, de sorte que nous étudierons que la première de ces quantités. Donc, en suivant les mêmes calculs réalisés dans l'estimation (4.28), page 120, et en prenant compte que l'intervalle d'intégration en temps est $[T^*, T_1]$, nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{T^*}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{w} \otimes \vec{v}))(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2} &\leq \sup_{T^* \leq t \leq T_1} \left(\int_{T^*}^t ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\vec{w} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \\ &\leq (T_1 - T^*)^{\frac{1}{2}} \|\vec{w} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \\ &\leq C(T_1 - T^*)^{\frac{1}{2}} \left(\|\vec{w}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{w}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}^{\frac{1}{2}} \right) (T_1 - T^*)^{\frac{1}{4}} \|\vec{v}\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} \\ &\leq C(T_1 - T^*)^{\frac{1}{2}} (T_1 - T^*)^{\frac{1}{4}} \|\vec{w}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} \|\vec{v}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'estimation (4.29), page 120 dans l'avant-dernière inégalité ci-dessus (voir également le deuxième point du Lemme 4.4.2, page 115). D'autre part, nous avons en utilisant l'estimation (4.31), page 121 :

$$\left\| \int_{T^*}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{w} \otimes \vec{v}))(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^\infty \dot{H}_x^1} \leq C(T_1 - T^*)^{\frac{1}{4}} \|\vec{w}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} \|\vec{v}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2},$$

et, finalement, en suivant les calculs (4.32), page 121, on obtient

$$\left\| \int_{T^*}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{w} \otimes \vec{v}))(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2} \leq C(T_1 - T^*)^{\frac{1}{4}} \|\vec{w}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} \|\vec{v}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2},$$

ainsi, en revenant à l'inégalité (4.43), et en répétant ces arguments pour le terme qui fait intervenir la quantité $\vec{u} \otimes \vec{w}$, nous avons l'inégalité

$$\|\vec{w}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} \leq C(T_1 - T^*)^{\frac{1}{4}} (1 + (T_1 - T^*)^{\frac{1}{2}}) \|\vec{w}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} \left(\|\vec{v}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} + \|\vec{u}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} \right),$$

et puisque la quantité $\|\vec{w}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2}$ est non nulle et bornée, alors on obtient la majoration

$$1 \leq C(T_1 - T^*)^{\frac{1}{4}} (1 + (T_1 - T^*)^{\frac{1}{2}}) \left(\|\vec{v}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} + \|\vec{u}\|_{L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2} \right).$$

Donc, si la quantité $T_1 - T^*$ est suffisamment petite alors le terme de droite peut être rendu strictement plus petit que 1, ce qui nous donne une contradiction : on peut en déduire que la fonction \vec{w} est nulle sur l'intervalle $[0, T_1]$, et en répétant ces arguments pour des intervalles de temps de plus en plus grands, on obtient finalement que la fonction \vec{w} est nulle sur tout l'intervalle $[0, T_0]$, ce qui termine la preuve de cette proposition. \blacksquare

4.6 Temps d'existence des solutions et critères d'explosion

Grâce au théorème que nous venons de démontrer, nous sommes en mesure d'obtenir des solutions des équations de Navier-Stokes dans le cadre de l'espace $L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$. Mais dans le cas de données initiales (\vec{u}_0, \vec{f}) grandes, nous avons le problème du temps d'existence pour de telles solutions : au mieux on aura un temps d'existence T_0 potentiellement très petit.

Cependant, grâce au Corollaire 4.4.5 ci-dessus, nous savons que la vitesse appartient à l'espace $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T_0], H^1(\mathbb{R}^3))$ et donc nous pouvons être tentés de prendre comme donnée initiale la valeur $\vec{u}_0(x) = \vec{u}(T_0, x)$ puisque la quantité ponctuelle en variable de temps $\|\vec{u}(T_0, \cdot)\|_{H^1}$ a bien un sens. Ainsi, étant donné que la force extérieure \vec{f} est définie sur l'intervalle $[0, T]$ où $T_0 < T$ et qu'elle vérifie $\vec{f} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$, nous disposons au temps T_0 d'un cadre de travail très similaire à celui du Théorème 4.4.1.

L'idée que l'on souhaite alors appliquer consiste à répéter l'argument de point fixe précédent de façon à obtenir une solution dont le temps d'existence serait $T_0 + \delta'$ pour un certain $\delta' > 0$, éventuellement petit, et si possible itérer ce processus pour construire des solutions globales en temps, indépendamment de la taille des données initiales. Ainsi on obtiendrait un temps d'existence $T_0 + \delta' + \delta'' + \delta''' + \dots$ ce qui nous conduirait éventuellement vers des solutions dont le temps d'existence est *grand*.

Malheureusement, comme nous allons voir dans cette section, il existe quelques obstructions pour appliquer ce programme lorsque les données initiales (\vec{u}_0, \vec{f}) ne sont pas petites. En effet, dans les résultats ci-dessous nous allons donner quelques critères d'explosion, dans le sens où, si l'on souhaite prolonger le temps d'existence des solutions, on perdra le contrôle des informations obtenues dans la section précédente et alors il ne sera plus possible de réaliser un point fixe : on ne pourra donc pas itérer indéfiniment ce processus.

Avant de rentrer dans les détails, il convient de fixer quelques concepts et notations concernant le temps d'existence des solutions.

Définition 4.6.1 (Temps Maximal) Soit $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale à divergence nulle, soit $0 < T_\infty \leq +\infty$ et soit une force extérieure \vec{f} définie sur l'ensemble $[0, T_\infty[\times \mathbb{R}^3$ qui vérifie $\vec{f} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ pour tout temps $0 < T < T_\infty$.

Alors on notera $0 < T_{max} \leq T_\infty$ le temps maximal d'existence pour lequel on peut construire une solution \vec{u} des équations de Navier-Stokes en utilisant le Théorème 4.4.1 et tel que, pour tout $0 < T < T_{max}$ on ait

$$\vec{u} \in L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)).$$

Si $T_{max} = T_\infty$ on dira alors que la solution \vec{u} est une solution globale (en temps).

On remarquera que le temps T_∞ est déterminé par la force extérieure, qui est une donnée du problème. On pourra alors fixer, et ce sans perte de généralité, que l'on a $T_\infty = +\infty$.

Une fois que nous avons cette notion de temps maximal d'existence T_{max} , il est très naturel d'étudier si l'on peut obtenir en général $T_{max} = T_\infty$, et si cela n'est pas possible, sous quelles conditions raisonnables on peut étendre le plus possible de temps d'existence des solutions. Un premier critère est le suivant.

Théorème 4.6.2 (Critères d'explosion) Soit $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, soit $0 < T_\infty \leq +\infty$ et soit $\vec{f} : [0, T_\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une force extérieure qui vérifie $\vec{f} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ pour tout $0 < T < T_\infty$.

Soit T_{max} le temps maximal d'existence de solutions mild \vec{u} tel que pour tout $0 < T < T_{max}$ on ait $\vec{u} \in L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$. Nous avons les points suivants.

1) Si $T_{max} < T_\infty$, alors $\sup_{0 < t < T_{max}} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1} = +\infty$.

2) Si $T_{max} < T_\infty$, alors $\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 dt = +\infty$.

3) Il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que si l'on a $\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon_0$ et si $\int_0^{T_\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 ds < \varepsilon_0^2$, alors $T_{max} = T_\infty$.

Remarque 4.7 On note que la condition du point 3) ci-dessus pour obtenir des solutions globales en temps dépend de la petitesse de la donnée initiale \vec{u}_0 exprimée en norme $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et non pas en norme $H^1(\mathbb{R}^3)$. Ceci peut sembler étrange d'un premier abord, mais nous avons l'estimation $\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}_0\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \leq \|\vec{u}_0\|_{H^1}$, ainsi si \vec{u}_0 est une donnée initiale suffisamment petite en norme $H^1(\mathbb{R}^3)$ (ce qui correspond au cadre du Théorème 4.4.1) nous pouvons bien obtenir des solutions globales.

Démonstration.

1) Fixons T_1 tel que $T < T_{max} < T_1 < T_\infty$. Nous disposons d'une solution \vec{u} définie sur l'intervalle de temps $[0, T]$ qui vérifie l'équation

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds. \quad (4.44)$$

De plus, sur l'intervalle $T < t < T + \delta'$, on peut considérer le problème

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_{t-T} * \vec{u}_T(x) + \int_T^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_T^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\text{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds, \quad (4.45)$$

où, par le Corollaire 4.4.5, page 123 la donnée initiale donnée par $\vec{u}_T(x) = \vec{u}(T, x)$ appartient bien à l'espace $H^1(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, en réappliquant l'algorithme de point fixe on obtient une solution mild dont le gain de temps δ' vérifie (en suivant les calculs réalisés pour obtenir la formule (4.34) page 122) :

$$\delta' = \min \left(T_1 - T, 1, \frac{C}{\left(\|\vec{u}_T\|_{H^1} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2} \right)^4} \right). \quad (4.46)$$

De cette façon, avec les calculs précédents, par la linéarité des intégrales en temps et par les propriétés de semi-groupe du noyau \mathfrak{g}_t , en combinant (4.44) et (4.45) on obtient une solution mild des équations de Navier-Stokes sur l'intervalle $[0, T + \delta']$. Mais comme T_{max} est le temps maximal d'existence, on doit avoir $T + \delta' < T_{max}$, ou encore $\delta' < T_{max} - T$, ce qui implique que plus on s'approche de T_{max} , plus δ' devient petit. La norme $\|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}$ étant fixée, on déduit par la contrainte (4.46) le fait suivant

$$\liminf_{t \rightarrow T_{max}^-} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1} = +\infty.$$

- 2) Par le premier point nous savons que la norme $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1} = \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} + \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$ explose lorsque $t \rightarrow T_{max}^-$. On remarquera qu'à ce stade nous ne savons pas laquelle des deux quantités qui conforment la norme H^1 explose (ou si elles explosent les deux en même temps). Pour cette raison on fera une étude séparée des deux termes $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ et $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$ ce qui nous permettra de vérifier le deuxième point du théorème.

Commençons par étudier la norme $L^2(\mathbb{R}^3)$. Si \vec{u} est une solution *mild* sur l'intervalle de temps $[0, T_{max}[$, on a l'équation suivante

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) + \mathbb{P}(\vec{f}),$$

avec $\vec{u} \in L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$. Mais étant donné que l'on a les bornes $T < T_{max} < +\infty$, nous avons également que la vitesse \vec{u} appartient à l'espace $L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$. En effet, on écrit tout simplement

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1},$$

et en intégrant par rapport au temps, il vient

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{L_t^2 L_x^2} &= \left(\int_0^T \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\vec{u}\|_{L_t^\infty H_x^1} \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty H_x^1} < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, si on étudie chacun des termes de l'équation ci-dessus nous obtenons sans problème que $\partial_t \vec{u} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ car :

- $\vec{u} \in L^2([0, T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ et donc $\Delta \vec{u} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$,
- $\vec{f} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ par hypothèse (et le projecteur de Leray est continu dans $L^2(\mathbb{R}^3)$),
- en suivant les calculs (4.28)-(4.30) donnés page 120 nous avons que le terme non linéaire $\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})$ appartient à l'espace $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ et de plus comme $T < T_{max} < +\infty$, nous avons également $\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$.

Donc, avec l'information $\partial_t \vec{u} \in L_t^2 L_x^2$, nous pouvons réaliser les calculs suivants

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \partial_t \vec{u} dx = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) + \mathbb{P}(\vec{f})) dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \mathbb{P}(\vec{f}) dx, \end{aligned}$$

le terme $-2 \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx$ étant négatif et en utilisant le fait que le projecteur de Leray est auto-adjoint (voir la formule (4.10) page 109) ainsi que les inégalités de Young pour le dernier terme on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2 dx \leq -2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) dx + \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^2}^2. \quad (4.47)$$

On remarque qu'avec les informations $\vec{u} \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) dx$ est bien définie (on pourra utiliser l'estimation (4.29) donnée page 120 et observer que,

puisque l'intervalle de temps $[0, T]$ est borné, alors on a $\vec{u} \in L_t^2 H_x^1$, ainsi, avec une intégration par parties on peut maintenant écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + |\vec{u}|^2 \operatorname{div}(\vec{u}) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) dx, \end{aligned} \quad (4.48)$$

car $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$, ce qui implique l'égalité $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) dx$ à partir de laquelle on déduit $2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) dx = 0$, ainsi, en revenant à l'inégalité (4.47) nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}(t, x)|^2 dx \leq \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^2}^2,$$

et avec une intégration dans la variable de temps, il vient

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}^2 + \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds,$$

en appliquant l'inégalité de Grönwall (voir le Lemme 2.5.3, page 36) nous obtenons

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq (\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}^2) e^t \leq (\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}\|_{L_t^2 L_x^2}^2) e^{T_{max}}, \quad (4.49)$$

ce qui nous indique que la quantité $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ est bornée et n'explose pas : ce sera donc le terme $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$ qui devra exploser.

Etudions donc plus en détail l'expression $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2(t, x) dx$, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2(t, x) dx &= 2 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot \partial_{x_j} (\partial_t \vec{u})(t, x) dx \\ &= 2 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot \partial_{x_j} (\Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(t, x) + \mathbb{P}(\vec{f}))(t, x) dx. \end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés du projecteur de Leray, du fait que $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ et par des intégrations par parties nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx = -2 \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta \vec{u}|^2 dx - 2 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot \partial_{x_j} (\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{u} \cdot \vec{f} dx.$$

Remarquons maintenant que pour le deuxième terme ci-dessus on a l'identité

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot \partial_{x_j} (\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot (((\partial_{x_j} \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) dx.$$

En effet, on a $\partial_{x_j} (\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) = \partial_{x_j} ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) = ((\partial_{x_j} \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) (\partial_{x_j} \vec{u})$ et avec une petite modification de l'identité (4.48), nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) (\partial_{x_j} \vec{u})) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot (((\partial_{x_j} \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) dx,$$

2. Car on a $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}(t, x) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}(t, x) dx$ et donc $2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f}(t, x) dx = 0$.

ce qui nous donne bien que cette quantité est nulle et donc que l'on a bien l'identité

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot \partial_{x_j} (\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) dx = \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot (((\partial_{x_j} \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) dx,$$

ce qui nous donne :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx = -2 \int_{\mathbb{R}^3} |\Delta \vec{u}|^2 dx - 2 \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \vec{u} \cdot (((\partial_{x_j} \vec{u}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{u} \cdot \vec{f} dx.$$

Nous pouvons alors écrire, en utilisant les inégalités de Hölder (avec $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$) et les inégalités de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx &\leq -2 \|\Delta \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \sum_{j=1}^3 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\partial_{x_j} \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^3} \|\partial_{x_j} \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^6} \\ &\quad + 2 \|\Delta \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Avec les injections de Hardy-Littlewood-Sobolev nous avons $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$ et par les inégalités de Young on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx &\leq -2 \|\Delta \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2C \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \|\Delta \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &\quad + 2 \|\Delta \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^2} \\ \frac{d}{dt} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2 \|\Delta \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \left(\|\Delta \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + C \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 \right) \\ &\quad + \left(\|\Delta \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \right) \\ \frac{d}{dt} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq C \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

ainsi, en intégrant par rapport à la variable de temps et en appliquant l'inégalité de Grönwall il vient

$$\begin{aligned} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq C \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 ds + \int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds + \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_0\|_{L^2}^2, \\ &\leq \left(\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds \right) \exp \left(C \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 ds \right), \quad (4.50) \end{aligned}$$

et cette estimation nous permet de terminer la preuve du deuxième point : en effet, nous avons par le premier point du Théorème 4.6.2 que l'on a :

$$\liminf_{t \rightarrow T_{max}^-} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{H^1} = +\infty,$$

mais nous savons également par l'inégalité (4.49) que la norme $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ reste bornée : c'est donc la norme $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$ qui doit exploser. De plus, comme les deux quantités $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_0\|_{L^2}^2$ et $\int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds$ sont bornées par hypothèse, on en déduit à partir de l'inégalité (4.50) ci-dessus que l'on doit avoir :

$$\int_0^{T_{max}} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 ds = +\infty,$$

ce qui termine la démonstration du deuxième point du théorème.

- 3) Pour obtenir le critère énoncé nous allons utiliser le point précédent et nous allons mettre en oeuvre un procédé qui nous permettra de majorer (sous les hypothèses du troisième point du Théorème 4.6.2) la quantité $\int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 ds$ pour tout temps t .

Etant donné que l'hypothèse de petitesse de la donnée initiale \vec{u}_0 s'exprime en termes de la quantité $\|\cdot\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$, nous allons étudier l'évolution dans le temps de $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$ et pour cela nous écrivons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{1}{4}} \vec{u}|^2 dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{4}} \vec{u} \cdot \partial_t (-\Delta)^{\frac{1}{4}} \vec{u} dx = 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{u} \cdot \partial_t \vec{u} dx \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{u} \cdot (\Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) + \mathbb{P}(\vec{f})) dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{u} \cdot (-\Delta) \vec{u} dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{u} \cdot \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{u} \cdot \mathbb{P}(\vec{f}) dx. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le projecteur de Leray est auto-adjoint, que \vec{u} est à divergence nulle et l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{u} \cdot (-\Delta) \vec{u} dx = \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{3}{4}} \vec{u} \cdot (-\Delta)^{\frac{3}{4}} \vec{u} dx,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{3}{4}} \vec{u}|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{u} \cdot \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \vec{u} \cdot \vec{f} dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{3}{4}} \vec{u}|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{3}{4}} \vec{u} \cdot (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{3}{4}} \vec{u} \cdot (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} \vec{f} dx. \end{aligned}$$

Par une intégration par parties dans la deuxième intégrale et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les deux dernières intégrales nous avons

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 \leq -2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 + 2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + 2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}.$$

En appliquant les lois de produit données dans le Théorème 2.4.9 page 32 au terme $\|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 &\leq -2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 + \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \left(C_0 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &\quad + 2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

et avec les inégalités de Young on obtient

$$\begin{aligned} &\leq -2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 + C_0 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 \\ &\leq \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 (C_0 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} - 1) + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2. \end{aligned}$$

Si on intègre par rapport à la variable de temps, il vient

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 (C_0 \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} - 1) ds + \int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 ds + \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2. \quad (4.51)$$

A partir de cette estimation nous voyons que si la donnée initiale \vec{u}_0 vérifie l'inégalité $\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2C_0}$ et si la force \vec{f} vérifie $\int_0^{T_\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 ds \leq \frac{1}{4C_0^2}$, alors on a la majoration

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 (C_0 \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} - 1) ds + \frac{1}{2C_0^2}. \quad (4.52)$$

Etant donné qu'on part d'une donnée initiale $\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \frac{1}{4C_0^2}$ et que la quantité $\|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$ est continue dans la variable de temps (puisque par interpolation on a $\|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}}$ et ces deux normes sont continues par le Corollaire 4.4.5), on obtient par l'estimation (4.52) -qui est valable pour tout temps- que la quantité $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2$ vérifie l'inégalité

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}C_0},$$

en effet, à partir de la majoration (4.52), par continuité de la fonction $\|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$, si on part de la condition $\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 \leq \frac{1}{4C_0^2}$, alors pour un temps petit $0 < s < t$, la quantité $C_0 \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} - 1$ sera négative, et raisonnant de proche en proche on obtient bien le contrôle annoncé.

Ainsi, en revenant à l'estimation (4.51) nous pouvons finalement écrire

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 ds \leq \int_0^{T_\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 ds + \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 < +\infty.$$

Donc, sous les hypothèses exigées de petitesse de la donnée initiale \vec{u}_0 et de la force \vec{f} , on obtient que la quantité $\int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 ds$ est bornée uniformément par rapport au temps, ce qui avec le deuxième point du Théorème 4.6.2 que nous avons démontré ci-dessus, nous permet de conclure que l'on a bien $T_{max} = +\infty$. ■

Notes et compléments

Le Théorème 4.4.1 de Fujita-Kato a été démontré en 1964 [20] en utilisant une donnée initiale $\vec{u}_0 \in H^1$ et comme espace de résolution pour le point fixe l'espace $L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$. Depuis, d'autres espaces fonctionnels ont été considérés et on notera en particulier l'utilisation des espaces suivants :

- Les espaces de Sobolev fractionnaires ont été utilisés par Chemin en 1992 [15] avec $\vec{u}_0 \in H^s$, $s > 1/2$, pour la donnée initiale, $\vec{f} \in L_t^2 H_x^{s-1}$ pour la force extérieure et $L_t^\infty H_x^s \cap L_t^2 \dot{H}_x^{s+1}$ comme espace de résolution.
- L'espace de Sobolev critique $H^{\frac{1}{2}}$ peut également être utilisé : on suppose alors que l'on a $\vec{u}_0 \in H^{\frac{1}{2}}$, $\vec{f} \in L_t^2 H_x^{-\frac{1}{2}}$ et on considère l'espace de résolution $L_t^\infty H_x^{\frac{1}{2}} \cap L_t^2 \dot{H}_x^{\frac{3}{2}}$. La particularité de ce cas réside dans le fait que la condition de petitesse du temps d'existence ne s'exprime plus comme une puissance de la norme de la donnée initiale du type (4.34). Voir plus de détails dans [45].

- Les espaces de Lebesgue L^p ont aussi été étudiés par Kato [29], dans le cas d'une force nulle, et par Cannone et Planchon [9] avec une force non nulle. La donnée initiale vérifie $\vec{u}_0 \in L^p$ avec $p > 3$, la force extérieure satisfait $\vec{f} \in L_t^r L_x^q$ avec $\frac{2}{r} + \frac{3}{q} < 2 + \frac{3}{p}$ et l'espace de résolution est $L_t^\infty L_x^p$.
- Le cas critique correspondant aux espaces de Lebesgue L^3 est plus délicat, car l'application bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$ donnée par l'expression (4.18), page 113, n'est plus continue dans l'espace $L_t^\infty L_x^3$, voir F. Oru [40]. Des solutions ont été apportées par Weissler [53] et Kato [29].
- D'autres espaces plus "exotiques" sont également utilisés par de nombreux auteurs pour obtenir des solutions en utilisant un argument de point fixe. Pour les données initiales, on notera entre autres l'utilisation des espaces de Besov $B_q^{s,p}$ et les espaces de Morrey $M^{q,a}$, voir plus de détails dans les livres [44], [45].

Quel est l'intérêt de considérer un point fixe dans différents espaces ? Tout d'abord, plus un espace fonctionnel est grand, plus sa norme est petite et ainsi, les données initiales *grandes* dans un certain espace fonctionnel peuvent devenir plus petites dans un autre espace fonctionnel, et cela représente un certain intérêt. D'autre part, cette multitude d'espaces permet de considérer des données initiales et des forces extérieures avec des propriétés variées, ce qui peut être très utile dans les applications.

Mais il convient d'insister sur le fait que travailler avec différents espaces de fonctions ne permet pas de supprimer la dichotomie existante entre la taille de la donnée initiale et le temps d'existence, dichotomie qui est inhérente à la *méthode* mise en place et non au choix de l'espace fonctionnel.

4.7 Exercices

Exercice 4.1 Démontrer le Théorème 4.1.1, page 104, en considérant l'équation

$$e = e_0 + B(e, e).$$

On notera en particulier que le signe devant l'application bilinéaire $B(\cdot, \cdot)$ ne joue aucun rôle.

Exercice 4.2 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et soit $L : E \rightarrow E$ une application linéaire bornée :

$$\|L(e)\|_E \leq C_L \|e\|_E$$

Si $e_0 \in E$ est telle que $\|e_0\|_E \leq \delta$ et si $C_L < 1$, montrer qu'alors l'équation

$$e = e_0 - L(e),$$

admet une unique solution $e \in E$ qui vérifie $\|e\|_E \leq 2\delta$.

Exercice 4.3 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et soit $B : E \times E \times E \rightarrow E$ une application trilinéaire bornée

$$\|B(e, f, g)\|_E \leq C_B \|e\|_E \|f\|_E \|g\|_E.$$

Si $e_0 \in E$ est telle que $\|e_0\|_E \leq \delta$ et si $0 < \delta^2 < \frac{1}{12C_B}$, alors montrer que l'équation

$$e = e_0 + B(e, e, e),$$

admet une unique solution $e \in E$ telle que $\|e\|_E \leq 2\delta$.

Exercice 4.4 Montrer que l'on a l'identité suivante

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}(\vec{f})) = \mathbb{P}(\vec{f}),$$

pour tout champ de vecteur $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suffisamment régulier (par exemple $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3), H^s(\mathbb{R}^3), H^{-s}(\mathbb{R}^3)$ avec $s \in \mathbb{R}$). On pourra utiliser le Lemme 2.2.1, page 15.

Exercice 4.5 Dans le Lemme 4.4.3, donné page 115, montrer que si $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, il est alors possible d'améliorer le premier point de ce lemme de la façon suivante :

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^\infty L_x^2} = \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

(Indication : utiliser Plancherel).

Exercice 4.6

1. Soit $s > 0$ et soit $k \in \mathbb{N}$ un entier tel que $0 < \frac{s}{2} < k$. Vérifier que l'on a l'identité suivante pour f une fonction régulière :

$$(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(k - s/2)} \int_0^{+\infty} \tau^{k - \frac{s}{2} - 1} (-\Delta)^k (\mathfrak{g}_\tau * f)(x) d\tau,$$

(on pourra considérer cette expression en variable de Fourier).

2. Montrer que l'on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(f)\|_{L^1} \leq & \frac{1}{\Gamma(k - s/2)} \left(\int_0^A \tau^{k - \frac{s}{2} - 1} \|(-\Delta)^k f\|_{L^1} d\tau \right. \\ & \left. + \int_A^{+\infty} \tau^{k - \frac{s}{2} - 1} \|f\|_{L^1} \|(-\Delta)^k \mathfrak{g}_\tau\|_{L^1} d\tau \right), \end{aligned}$$

où A est une échelle de coupure qui sera fixée postérieurement.

3. En utilisant la Proposition 3.1.3, page 46, montrer que l'on a l'estimation

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(f)\|_{L^1} \leq C \left(\|(-\Delta)^k f\|_{L^1} A^{k - \frac{s}{2}} + A^{-\frac{s}{2}} \|f\|_{L^1} \right).$$

4. En calibrant correctement l'échelle de coupure A , obtenir l'inégalité

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(f)\|_{L^1} \leq C \|(-\Delta)^k f\|_{L^1}^{\frac{s}{2k}} \|f\|_{L^1}^{1 - \frac{s}{2k}}.$$

Cette inégalité permet d'estimer la norme L^1 d'une puissance fractionnaire d'une fonction par le produit de la norme L^1 de puissances entières du Laplacien de la fonction et de la norme L^1 de cette fonction. Autrement dit, si on a des informations sur les dérivées entières on peut obtenir des informations sur les dérivées fractionnaires.

Mais attention ! La quantité $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(f)\|_{L^1}$ n'est pas équivalente à un espace de Sobolev.

On peut utiliser la quantité $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(f)\|_{L^p}$ avec $s > 0$ et $1 < p < +\infty$ pour caractériser (avec des précautions) les espaces de Sobolev homogènes $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ mais les cas limites $p = 1$ ou $p = +\infty$ doivent être exclus.

5. Pour $0 < \frac{s}{2} < 1$ et pour $1 < p < +\infty$, obtenir l'estimation

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(f)\|_{L^2} \leq C \|\Delta f\|_{L^p}^{\frac{s}{2}} \|f\|_{L^p}^{1-\frac{s}{2}},$$

en déduire l'inégalité d'interpolation suivante (voir également l'Exercice 2.6, page 41) :

$$\|f\|_{\dot{H}^s} \leq C \|f\|_{\dot{H}^2}^{\frac{s}{2}} \|f\|_{L^2}^{1-\frac{s}{2}}.$$

Exercice 4.7 Soit $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ trois fonctions vectorielles qui appartiennent à l'espace $L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T < +\infty$.

1. Montrer l'estimation

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{\nabla}) \vec{h}(t, x) dx dt \leq \int_0^T \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^3} \|\vec{g}(t, \cdot)\|_{L^6} \|\vec{h}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} dt.$$

2. Vérifier que l'on a $\|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^3} \leq C \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$, $\|\vec{g}(t, \cdot)\|_{L^6} \leq C \|\vec{g}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}$ et montrer que

$$\|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}} \leq \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{H^1}.$$

3. Déduire la majoration suivante

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot (\vec{g} \cdot \vec{\nabla}) \vec{h}(t, x) dx dt \leq CT \|\vec{f}\|_{L_t^\infty H_x^1} \|\vec{g}\|_{L_t^\infty H_x^1} \|\vec{h}\|_{L_t^\infty H_x^1}.$$

Exercice 4.8 Soit $f, g, h : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions réelles qui appartiennent à l'espace $L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T < +\infty$.

1. Pour $1 \leq j, k, \ell \leq 3$, montrer l'estimation

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} f(t, x) g(t, x) \partial_{x_k} \partial_{x_\ell} h(t, x) dx dt \leq \int_0^T \|\partial_{x_j} f(t, \cdot)\|_{L^3} \|g(t, \cdot)\|_{L^6} \|h(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2} dt.$$

2. Vérifier que l'on a $\|\partial_{x_j} f(t, \cdot)\|_{L^3} \leq C \|f(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}$ et montrer que

$$\|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}} \leq \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^2}^{\frac{1}{2}}.$$

3. Montrer que l'on a $f, g, h \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ et en déduire que $f, g, h \in L^2([0, T], H^2(\mathbb{R}^3))$.

4. Déduire la majoration suivante

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} f(t, x) g(t, x) \partial_{x_k} \partial_{x_\ell} h(t, x) dx dt \leq C \|f\|_{L_t^2 H_x^2} \|g\|_{L_t^\infty H_x^1} \|h\|_{L_t^2 \dot{H}_x^2}.$$

Exercice 4.9 Pour $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, on considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(t, x) + \left((-\Delta)^{\frac{1}{2}} u(t, x) \right)^2 * f(t, x), & (1 < \alpha \leq 2) \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.53)$$

où $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une donnée initiale, $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un terme d'amortissement et où l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ avec $1 \leq \alpha \leq 2$ est la puissance fractionnaire du Laplacien dont l'action au niveau de Fourier peut se voir par l'expression $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{\varphi}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$ (se rappeler des formules (2.26) et (2.27) données page 25). Le semi-groupe associé à l'opérateur

$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ sera noté $e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}$ avec $t > 0$ et son action pour les fonctions dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est donnée au niveau de Fourier par $\widehat{\left(e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\varphi\right)}(\xi) = e^{-t|\xi|^\alpha}\widehat{\varphi}(\xi)$. Cet opérateur admet donc un noyau de convolution qui sera noté \mathbf{p}_t^α (autrement dit, on a la formule $e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}(\varphi) = \mathbf{p}_t^\alpha * \varphi$).

Pour le noyau \mathbf{p}_t^α on admettra les points suivants :

- pour tout $t > 0$ on a $\|\mathbf{p}_t^\alpha\|_{L^1} = 1$,
- pour tout $t > 0$ et $s > 0$ on a $\|(Id - \Delta)^{\frac{s}{2}}\mathbf{p}_t^\alpha\|_{L^1} \leq C \max\{1, t^{-\frac{s}{\alpha}}\}$ où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de la dimension de l'espace ambiant.

Le lecteur pourra consulter une preuve de ces deux points dans les livres [27] et [31].

Dans cet exercice on cherche à obtenir des solutions mild pour le problème (4.53) dans l'espace de résolution $L^\infty([0, T_0[, H^1(\mathbb{R}^n))$, où T_0 est un temps d'existence qui sera déterminé par la suite. On considère donc la formulation intégrale suivante

$$u(t, x) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0(x) + \int_0^t e^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}} \left((-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\right)^2 * f(s, x) ds, \quad (1 < \alpha \leq 2), \quad (4.54)$$

où la donnée initiale u_0 appartient à l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ et où le terme d'amortissement f appartient à l'espace $L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^n))$.

1. Vérifier que l'application

$$B_f(u, u) = \int_0^t e^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}} \left((-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\right)^2 * f(s, x) ds,$$

est une application bilinéaire.

2. Montrer que l'on a l'estimation

$$\left\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0\right\|_{L_t^\infty H_x^1} \leq \|u_0\|_{H^1}.$$

3. Démontrer la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \left\|(Id - \Delta)^{\frac{1}{2}}e^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}} \left((-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\right)^2 * f(s, \cdot)\right\|_{L^2} &\leq \left\|(Id - \Delta)^{\frac{1}{2}}\mathbf{p}_{t-s}^\alpha\right\|_{L^1} \\ &\quad \times \left\|\left((-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\right)^2(s, \cdot)\right\|_{L^1} \|f(s, \cdot)\|_{L^2} \end{aligned}$$

4. Vérifier que l'on a l'estimation

$$\|B_f(u, u)\|_{L_t^\infty H_x^1} \leq C \sup_{0 < t \leq T_0} \int_0^t \max\{1, (t-s)^{-\frac{1}{\alpha}}\} \left\|\left((-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\right)^2(s, \cdot)\right\|_{L^1} \|f(s, \cdot)\|_{L^2} ds$$

5. En remarquant que le terme $(t-s)^{-\frac{1}{\alpha}}$ est intégrable puisqu'on a $1 < \alpha \leq 2$, obtenir l'inégalité

$$\|B_f(u, u)\|_{L_t^\infty H_x^1} \leq CT_0^{1-\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L_t^\infty L_x^2} \|u\|_{L_t^\infty H_x^1} \|u\|_{L_t^\infty H_x^1}.$$

6. Etablir une relation entre la constante de continuité de l'application bilinéaire B_f et la donnée initiale u_0 pour pouvoir appliquer un argument de point fixe dans l'espace $L_t^\infty H_x^1$.
7. Conclure que l'équation (4.53) admet une unique solution mild dans l'espace de fonctions $L_t^\infty([0, T_0[, H_x^1(\mathbb{R}^n))$ où l'on donnera une borne supérieure pour le temps d'existence T_0 en fonction des données du problème.

Exercice 4.10 On considère ici \vec{u}_0 une donnée initiale à divergence nulle telle que l'on ait $\vec{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$ où $p = \frac{3}{\epsilon}$ avec $0 < \epsilon < 1$ un paramètre fixé une fois pour toutes (on remarquera que l'on a alors $3 < p < +\infty$).

1. Vérifier l'inégalité $\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^\infty L_x^p} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^p}$.
2. Montrer que l'on a

$$\|(-\Delta)^{\frac{1+\epsilon}{2}} \mathfrak{g}_{t-s}\|_{L^1} \leq C(t-s)^{-\frac{1+\epsilon}{2}}.$$

(On pourra raisonner par homogénéité, en passant par Fourier si nécessaire, sinon utiliser l'Exercice 4.6).

3. Démontrer l'estimation

$$\|(-\Delta)^{-\frac{\epsilon}{2}} \vec{f}\|_{L^p} \leq C\|\vec{f}\|_{L^q},$$

où $\epsilon + \frac{3}{p} = \frac{3}{q}$. On remarquera en particulier que l'on a $2q = p$.

4. On étudie le problème suivant

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) ds.$$

Avec les estimations précédentes, appliquer un argument de point fixe pour obtenir une solution mild des équations de Navier-Stokes dans l'espace $L_t^\infty L_x^p$: pour cela on démontrera que l'on a l'estimation

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^p} \leq CT^{\frac{1-\epsilon}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^p} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^p}.$$

On pourra considérer par exemple l'expression

$$\left\| \int_0^t (-\Delta)^{\frac{1+\epsilon}{2}} \mathfrak{g}_{t-s} * (-\Delta)^{-\frac{\epsilon}{2}} \mathbb{P}(\vec{u} \otimes \vec{u}) ds \right\|_{L^p},$$

puis on utilisera les inégalités de Minkowski, de Young et les points précédents (on notera que l'on a $\frac{1+\epsilon}{2} < 1$, ce qui rend la singularité en temps produite par le noyau de la chaleur intégrable).

Exercice 4.11 Soit $\mathbb{F}(t, x)$ un tenseur qui appartient à l'espace $L^\infty([0, +\infty[, H^{-s}(\mathbb{R}^3))$ avec $s \gg 1$. Montrer que la quantité

$$\vec{u}(t, x) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \operatorname{div}(\mathbb{F})(s, x) ds,$$

appartient à l'espace $L^\infty([0, T[, H^{-s}(\mathbb{R}^3))$ pour un $T < +\infty$ borné. On notera que la formulation intégrale ci-dessus a un sens même si \mathbb{F} est très irrégulier (car $s \gg 1$). Montrer que \vec{u} vérifie (au sens des distributions) l'équation de la chaleur

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} + \operatorname{div}(\mathbb{F}).$$

Chapitre 5

Solutions faibles de Leray

Par les calculs réalisés aux chapitres précédents, nous savons déjà que lorsque les données (\vec{u}_0, \vec{f}) sont *grandes*, un argument de point fixe (dans un espace fonctionnel bien choisi) nous permet par un processus itératif de construire des solutions pour les équations de Navier-Stokes. L'existence et l'unicité de ces solutions sont donc assurés, mais uniquement sur un intervalle de temps *petit* qui est déterminé en fonction de la taille de ces données. En particulier, plus celles-ci sont grandes, plus le temps d'existence est petit et le Théorème 4.6.2, page 132, donne quelques critères d'explosion dans le cadre des solutions *mild* de Fujita-Kato : en toute généralité on ne pourra pas étendre indéfiniment le temps d'existence par ces méthodes car il y a une perte des contrôles nécessaires pour faire tourner les algorithmes.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une autre approche qui nous permettra de considérer des solutions issues à partir de données quelconques (grandes) mais dont le temps d'existence peut être *prolongé* en toute sécurité : on parlera alors de *solutions globales* (en temps). Pour construire de telles solutions nous allons suivre la méthode introduite par Jean Leray en 1934 dans l'article [34] et qui consiste à :

- (i) choisir un cadre fonctionnel adapté en s'inspirant de la structure de l'équation,
- (ii) régulariser le problème initial et appliquer un argument de point fixe pour le problème régularisé,
- (iii) obtenir un contrôle *a priori* afin de prolonger dans le temps les solutions du problème régularisé,
- (iv) passer à la limite pour supprimer la régularisation et obtenir des solutions *globales en temps* du problème initial. Indiquons que lors du passage à la limite, on obtiendra des solutions *faibles* et non plus des solutions *mild*.

Toutes les étapes de ce programme seront explicitées dans les lignes qui suivent, mais il convient de faire quelques remarques générales :

- Contrairement aux arguments de point fixe, le temps d'existence des solutions obtenues par ce procédé ne dépendra pas de la taille des données, on pourra alors parler de solutions globales en temps, que ce soit pour des données “petites” ou pour des données “grandes”.
- En revanche, ce type de solutions ne seront pas uniques car le processus dépend d'un

passage à la limite qui impose un raisonnement par sous-suites extraites. Il y a une perte d'unicité et c'est le prix à payer pour obtenir des solutions globales en temps en suivant cette méthode.

- Le passage à la limite se fera dans les deux variables de temps et d'espace et les informations sur ces variables seront mesurées au sens *faible*. Les solutions que nous allons obtenir vont en plus vérifier certaines propriétés particulières, ce qui justifie leur appellation de *solutions faibles de Leray*.
- Il sera naturel de comparer les solutions obtenues par les deux procédés étudiés jusqu'ici (les solutions *mild* et les solutions *faibles*). En fait, nous verrons dans la Section 5.5 qu'il y a unicité dans le petit intervalle de temps *commun* d'existence, (on démontrera que toutes ces solutions coïncident) : la perte d'unicité intervient donc lorsqu'on souhaite *prolonger* les solutions.

Indiquons pour finir cette courte introduction que les solutions que nous allons construire dans ce chapitre sont le point de départ de très nombreux développements actuels.

5.1 Motivation

Afin de dégager un cadre fonctionnel adapté, il est très utile d'étudier la structure de l'équation pour avoir une intuition de ce que l'on peut éventuellement *obtenir* si l'on est *très* optimiste. Dans toute cette section nous allons donc supposer (à des fins purement pédagogiques) que les objets manipulés sont très réguliers. Ceci nous permettra d'obtenir des informations importantes qui seront exploitées plus rigoureusement dans les sections suivantes.

Notre point de départ est donc l'équation de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

sur laquelle nous ne faisons aucune hypothèse sur les données (\vec{u}_0, \vec{f}) : les conditions apparaîtront au fur et à mesure des calculs réalisés.

Nous multiplions maintenant toute cette équation par \vec{u} , l'idée étant de réaliser des intégrations par parties (on supposant que cela soit possible, car sans un cadre préalable sur ces objets, ces calculs n'ont pas de sens!) pour faire apparaître des quantités qui "ressemblent" à des normes : on aura ainsi une idée des espaces fonctionnels qui entrent en jeu naturellement, c'est à dire en fonction de la structure interne de l'équation. Il vient alors :

$$\vec{u} \cdot \partial_t \vec{u} = \vec{u} \cdot [\Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}],$$

puis en intégrant en espace on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \partial_t \vec{u} \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \Delta \vec{u} \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} p \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \vec{f} \, dx,$$

et avec des intégrations par parties (formelles) pour le premier terme à gauche et pour le premier et troisième terme à droite de cette identité, nous avons

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |\vec{u}|^2 \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} p (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \vec{f} \, dx,$$

ainsi, en utilisant le fait que $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dx = \int_{\mathbb{R}^3} p \operatorname{div}(\vec{u}) dx = 0.$$

Maintenant, on remarque que l'on a par une intégration par parties (toujours purement formelle) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + |\vec{u}|^2 \operatorname{div}(\vec{u}) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} dx,$$

(car $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$) ce qui implique que la quantité $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} dx$ est nulle. (Voir également la formule (4.48) page 134).

Nous avons alors l'identité

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |\vec{u}|^2 dx = - \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \vec{f} dx,$$

qu'il convient de réécrire de la façon suivante

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = -2\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \vec{f} dx. \quad (5.1)$$

Cette identité nous donne des informations sur le comportement en temps (*i.e.* de la dérivée temporelle) de la quantité $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ et, au vu de cette formule, la norme L^2 semble être une quantité intéressante pour mesurer la fonction \vec{u} en variable d'espace. Mais si cette norme L^2 en espace est adoptée pour la partie de gauche de (5.1), pour le premier terme à droite de cette identité nous aurons naturellement besoin de contrôler la norme $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ de $\vec{u}(t, \cdot)$, et cette information nous imposera des conditions sur la force extérieure qui intervient dans le deuxième terme à droite de l'identité (5.1) : en effet, si l'on a $\vec{u}(t, \cdot) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, pour que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \vec{f} dx$ ait un sens, nous demanderons, par dualité, la condition $\vec{f}(t, \cdot) \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

Etudions plus en détail cette identité (5.1). En effet, les considérations précédentes portent uniquement sur la variable d'espace et pour étudier la variable de temps nous commençons par écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &= -2\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u} \cdot \vec{f} dx \\ &\leq -2\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2\|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}, \end{aligned}$$

en appliquant les inégalités de Young pour le produit des deux normes ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} &\leq -2\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 + \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 \\ &\leq -\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Maintenant, on intègre par rapport à la variable de temps et l'on a

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds. \quad (5.2)$$

Pour la force extérieure \vec{f} nous avons déjà supposé que $\vec{f}(t, \cdot) \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$, nous supposons maintenant que la quantité $\|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}$ est une fonction de carré intégrable dans la

variable de temps, ce qui nous donne la contrainte $\vec{f} \in L^2([0, T^*], \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ pour un certain $0 < T^* < +\infty$. Pour la donnée initiale \vec{u}_0 nous imposons tout naturellement la condition $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Ainsi, l'inégalité (5.2) nous permet de contrôler (si elle existe!) la solution \vec{u} au sens des quantités $\|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}$ et $\|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}$ et ce, à partir des contraintes imposés aux données (\vec{u}_0, \vec{f}) . Observons de plus que, tant que la force \vec{f} est définie sur l'intervalle de temps $[0, T^*]$ et vérifie les conditions indiquées, alors nous avons le contrôle (5.2) sur *tout* l'intervalle $[0, T^*]$.

Pour insister sur ce contrôle, on remarquera en particulier que si la force extérieure est *nulle*, alors l'estimation (5.2) devient tout simplement

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 < +\infty,$$

ce qui montre peut être encore plus clairement le contrôle uniforme en temps des quantités qui apparaissent dans la partie de gauche de cette inégalité. Autrement dit, les normes $\|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}$ et $\|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}$ sont *préservées* dans le temps (elles ne peuvent pas exploser, car elles sont bornées par la quantité $\|\vec{u}_0\|_{L^2}$) et cela indique qu'il est sans doute intéressant de les étudier en détail.

Bien que les calculs précédents soient totalement heuristiques, la majoration (5.2) donne, en réalité, une bonne intuition (nous verrons un peu plus tard comment donner un sens rigoureux à cette inégalité) et elle nous invite à chercher une solution des équations de Navier-Stokes dans l'espace

$$L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)),$$

pour un certain temps $0 < T < +\infty$ muni de la norme

$$\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\cdot\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}.$$

On notera sans problème que cette norme (à une racine carrée près) n'est rien d'autre que la partie de gauche de l'inégalité (5.2) et nous avons ainsi un contrôle uniforme en temps pour cette norme $\|\cdot\|_T$ (on parlera alors d'information *a priori*) qui nous permettra, comme nous allons le voir par la suite, de *prolonger* le temps d'existence des solutions pour obtenir de cette façon des solutions globales en temps.

Le cadre fonctionnel dans lequel on souhaite travailler étant posé, nous essayerons dans la section qui suit de construire une solution en utilisant un argument de point fixe, mais nous verrons assez rapidement que ce n'est *pas possible* de le faire directement : le problème est mal posé en dimension 3 dans l'espace de résolution $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$. Nous montrerons alors qu'une régularisation bien adaptée permet de contourner ce problème.

Point fixe dans l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$: un problème mal posé

A partir des idées dégagées dans la section précédente on commence par fixer les données de notre problème : on supposera que l'on a

- $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\text{div}(\vec{u}_0) = 0$ et,
- $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec le contrôle $\vec{f} \in L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ où l'intervalle de temps $[0, T^*[$, avec $0 < T^* \leq +\infty$, dans lequel on dispose ce contrôle est fixé une fois pour toutes.

En utilisant les propriétés du projecteur de Leray \mathbb{P} nous nous intéressons au problème

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}), & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Rappelons que la pression p n'intervient pas dans les équations ci-dessus et qu'elle pourra se récupérer à partir de la vitesse \vec{u} et de la force extérieure \vec{f} par la formule :

$$p = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right).$$

Nous allons maintenant étudier l'équation (5.3) et pour cela nous allons appliquer un argument de point fixe dans l'espace fonctionnel $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ muni de la norme

$$\|\vec{u}\|_T = \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L_x^2} + \left(\int_0^T \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}_x^1}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.4)$$

pour un certain temps T tel que $0 < T < T^*$ qui sera fixé par la suite : en effet, on rappelle ici que le schéma itératif de Picard que nous allons mettre en place ne donnera qu'un temps d'existence qui dépend des données et qui peut donc être potentiellement très petit.

Nous utilisons alors la formulation intégrale du problème (5.3) :

$$\vec{u}(t, x) = \underbrace{\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)}_{(1)} + \underbrace{\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, x)) ds}_{(2)} - \underbrace{\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds}_{(3)}, \quad (5.5)$$

et nous allons essayer d'estimer au sens de la norme (5.4) chacun des termes (1), (2) et (3) ci-dessus pour appliquer le Théorème 4.1.1, page 104.

Indiquons tout de suite que les deux premiers termes pourront être estimés assez facilement, la difficulté se concentre dans le dernier terme qui est justement le terme non-linéaire.

1) Estimation de la donnée initiale

L'estimation de la norme $\|\cdot\|_T$ du terme (1) ci-dessus est facile à traiter et nous avons le résultat qui suit.

Proposition 5.1.1 *Si $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, alors on a*

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_T \leq C \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Preuve. Nous avons par définition

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_T = \|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1},$$

il suffit alors d'appliquer les deux points du Lemme 4.4.3 donné page 115 pour obtenir l'estimation recherchée. ■

2) Estimation de la force extérieure

Nous allons étudier la norme $\|\cdot\|_T$ du deuxième terme de droite de l'expression (5.5), en effet nous avons la

Proposition 5.1.2 *Soit $0 < T < T^*$, si $\vec{f} \in L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ alors nous avons la majoration*

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_T \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

Preuve. Par définition nous avons

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_T = \underbrace{\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2}}_{(2.a)} + \underbrace{\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}}_{(2.b)}.$$

On commence par la quantité (2.a) et nous écrivons

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2} = \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_x^2}.$$

On étudiera d'abord la norme L^2 dans la variable d'espace pour ensuite considérer la norme L^∞ dans la variable de temps. Ainsi, par dualité on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L^2} &= \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, x)) ds \right) \cdot \vec{\varphi}(x) dx \right| \\ &= \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{g}_{t-s}(x-y) \mathbb{P}(\vec{f}(s, y)) \cdot \vec{\varphi}(x) dy ds dx \right| \\ &= \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}(-y) \cdot \mathbb{P}(\vec{f}(s, y)) dy ds \right|. \end{aligned}$$

Maintenant, par dualité entre les espaces \dot{H}^1 et \dot{H}^{-1} nous avons alors

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L^2} &\leq \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left(\int_0^t \|\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}\|_{\dot{H}^1} \|\mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot))\|_{\dot{H}^{-1}} ds \right) \\ &\leq \|\mathbb{P}(\vec{f})\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \|\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}, \end{aligned}$$

et en utilisant la continuité du projecteur de Leray, ainsi que le deuxième point du Lemme 4.4.3, on obtient

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L^2} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

Ainsi, en prenant la norme $L^\infty([0, T])$ dans la variable de temps, on obtient finalement

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}. \quad (5.6)$$

Nous étudions maintenant la quantité (2.b) et nous écrivons :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} &= \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * (-\Delta)^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^2 L_x^2} \\ &= \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \Delta \left[(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) \right] ds \right\|_{L_t^2 L_x^2} \\ &= \left\| \Delta \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \left[(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) \right] ds \right\|_{L_t^2 L_x^2}. \end{aligned}$$

Si l'on applique maintenant la propriété de régularité maximale du noyau de la chaleur donnée au deuxième point du Lemme 4.4.4, page 116, nous avons directement l'inégalité

$$\left\| \Delta \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \left[(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) \right] ds \right\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(\vec{f}) \right\|_{L_t^2 L_x^2} = C \left\| \mathbb{P}(\vec{f}) \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

Ainsi, en utilisant la continuité du projecteur de Leray dans les espaces de Sobolev nous pouvons écrire la majoration suivante :

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \leq C \|\mathbb{P}(\vec{f})\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

Pour finir, on utilise cette inégalité précédente et la majoration (5.6) pour reconstruire la norme $\|\cdot\|_T$, nous avons alors :

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_T \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}},$$

et la Proposition 5.1.2 est démontrée. ■

3) Estimation de la non-linéarité : problèmes

Passons maintenant à l'étude du terme (3) de (5.5) :

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_T. \quad (5.7)$$

Nous savons grâce à la Proposition 5.1.2 précédente que si le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ appartenait à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$, alors nous pourrions obtenir une majoration qui permettrait de fermer le point fixe du problème intégral (5.5) avec la norme $\|\cdot\|_T$.

Mais -et c'est sur ce point particulier que se concentre le problème principal- en utilisant l'information $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ donnée par l'espace dans lequel on souhaite faire le point fixe, nous ne pouvons pas conclure que l'on a $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$. En effet, nous avons

$$\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} = \|\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \simeq \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L_t^2 L_x^2},$$

ce qui revient, pour faire simple, à étudier les normes $\|u_j u_k\|_{L_t^2 L_x^2}$ pour $1 \leq j, k \leq 3$. Alors pour "séparer" les informations sur les fonctions u_j et u_k , on doit utiliser les inégalités de Hölder et l'on a

$$\|u_j u_k\|_{L_t^2 L_x^2} \leq \|u_j\|_{L_t^{p_0} L_x^{q_0}} \|u_k\|_{L_t^{p_1} L_x^{q_1}},$$

où les paramètres p_0, p_1, q_0, q_1 sont liés par les relations

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1}, \quad (5.8)$$

et ici nous *ne pouvons pas* déduire à partir de l'information donnée par l'espace ambiant $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ (espace dans lequel on souhaite fermer l'argument de point fixe) que l'on a effectivement $u_j \in L_t^{p_0} L_x^{q_0}$ et $u_k \in L_t^{p_1} L_x^{q_1}$ où ces paramètres vérifient les contraintes (5.8) indiquées.

En effet, par les inégalités de Sobolev, nous savons que si l'on appartient à l'espace $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, alors on appartient à l'espace $L^6(\mathbb{R}^3)$ (voir l'inégalité (2.43), page 30), et l'information que l'on dispose est donc $u_j, u_k \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 L_x^6$. Mais ceci *ne permet pas* de vérifier la condition (5.8) : par interpolation, les seules contrôles de type Lebesgue que l'on peut obtenir à partir des espaces $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 L_x^6$ sont $\vec{u} \in L_t^p L_x^q$ où les indices p et q vérifient les conditions

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{6} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2}, \quad (5.9)$$

pour un paramètre $0 < \theta < 1$, puisqu'on a la majoration

$$\|\vec{u}\|_{L_t^p L_x^q} \leq \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^\theta \|\vec{u}\|_{L_t^2 L_x^6}^{1-\theta}.$$

Il est alors facile de vérifier (il s'agit de simples contraintes algébriques) qu'il n'existe pas deux paramètres $0 < \theta_0, \theta_1 < 1$ tels que les indices p_0, q_0 et p_1, q_1 qui s'obtiennent à partir de (5.9) puissent vérifier la condition (5.8). Voir plus de détails dans l'Exercice 5.1.

La conséquence de ces remarques est que l'on ne peut pas estimer les termes (5.7) avec les normes des espaces $L_t^\infty L_x^2$ ou $L_t^2 \dot{H}_x^1$ et qu'on ne peut donc pas *fermer* l'argument de point fixe.

Remarque 5.1 *Observons néanmoins que le contrôle que l'on peut obtenir ici est le suivant :* $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-\frac{3}{2}}$.

En effet, on remarque que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \in \dot{H}^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ équivaut à $\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) \in \dot{H}^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et il faut donc étudier si l'on a $\vec{u} \otimes \vec{u} \in \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. En utilisant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev (voir le Corollaire 2.4.7, page 31) puis l'inégalité de Hölder on a

$$\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{\dot{H}^{-\frac{3}{2}}} = \|\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})\|_{\dot{H}^{-\frac{3}{2}}} \simeq \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}} \leq C \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq C \|\vec{u}\|_{L^2} \|\vec{u}\|_{L^6}, \quad (5.10)$$

et avec la majoration $\|\vec{u}\|_{L^6} \leq C \|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}$ nous obtenons $\|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}} \leq C \|\vec{u}\|_{L^2} \|\vec{u}\|_{\dot{H}^1}$. Pour finir, il suffit de prendre la norme L^2 dans la variable de temps pour avoir la majoration

$$\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-\frac{3}{2}}} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}. \quad (5.11)$$

Nous avons bien le contrôle de la norme $L_t^2 \dot{H}_x^{-\frac{3}{2}}$ du terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$, mais encore une fois, il ne sera pas possible d'obtenir à partir des informations $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 \dot{H}_x^1$ un contrôle en norme $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$.

Avec ces calculs, nous voyons bien que nous ne pouvons pas appliquer l'idée initiale de réaliser un point fixe dans l'espace fonctionnel $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$: le terme non-linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ ne peut pas être correctement contrôlé et il est alors nécessaire de contourner cet obstacle.

5.2 Régularisation de Leray

Comme nous venons de le voir, l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ n'est pas un bon espace pour appliquer directement un point fixe. L'idée originale de Leray pour résoudre ce problème est d'introduire une *régularisation* du terme non-linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ qui nous permette de réaliser les calculs nécessaires afin de fermer l'argument de point fixe.

Pour cela nous considérons une fonction positive $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \theta(x) dx = 1, \quad (5.12)$$

et nous définissons pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Par les propriétés bien connues du produit de convolution, si f est une fonction mesurable telle que $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ alors $f * \theta_\varepsilon$ est une fonction *beaucoup* plus régulière : d'une part on pourra appliquer les inégalités de Young au produit de convolution $f * \theta_\varepsilon$, ce qui permet de gagner un degré de liberté supplémentaire, et, d'autre part nous avons à $\varepsilon > 0$ fixé que la fonction $f * \theta_\varepsilon$ appartient à l'espace $H^s(\mathbb{R}^3)$ pour tout $s > 0$. De plus, nous avons la limite $\|f * \theta_\varepsilon\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|f\|_{L^2}$, ce qui nous permet de récupérer la fonction f initiale.

Le programme de travail est alors assez clair : avec une régularisation bien posée du terme non-linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ nous pourrions réaliser un certain nombre de calculs pour obtenir les estimations recherchées. En effet, avec les différentes estimations déjà réalisées pour les termes (1) et (2) de l'expression (5.5) page 147, on verra qu'il est assez simple d'appliquer le schéma itératif de Picard pour le problème régularisé. Mais on se gardera bien de croire que cela représente la fin des calculs : il y a une dépendance par rapport au paramètre de régularisation ε et il faudra *revenir* au problème original en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$. Ce passage à la limite n'est pas totalement trivial et il sera étudié en détail dans la section suivante.

Revenons à la régularisation. Avec cette fonction auxiliaire θ_ε , définie ci-dessus, si nous remplaçons le terme non-linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ dans la partie (3) de la formulation intégrale (5.5) par la version régularisée suivante

$$([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}, \quad (\varepsilon > 0),$$

nous obtenons

$$\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(s, x) ds,$$

et maintenant nous voulons contrôler la norme $\|\cdot\|_T$, définie dans (5.4), de cette expression (on remarquera sans problème que cette formule régularisée définit une application bilinéaire).

Inspirés par la Proposition 5.1.2, nous savons qu'un contrôle en norme $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ de la quantité $([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ est utile pour obtenir des inégalités adaptées à nos besoins, en effet, en supposant pour l'instant que l'on a $([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$, si l'on applique directement les calculs précédents nous avons bien l'estimation

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(s, x) ds \right\|_T \leq C \|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}},$$

et c'est précisément ici que nous pouvons voir l'utilité de la régularisation : sans celle-ci, nous n'avons pas de contrôle dans l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ à partir des informations de l'espace ambiant $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ dans lequel on souhaite travailler.

Dans ce sens, nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.2.1 *Soit $0 < T < T^*$. Si \vec{u} est un champ de vecteurs à divergence nulle tel que*

$$\vec{u} \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)),$$

et si la fonction $\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ se construit à partir de la fonction θ donnée dans (5.12) pour tout $\varepsilon > 0$, alors nous avons l'inégalité

$$\|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq C \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2. \quad (5.13)$$

Preuve. Etudions pour commencer la norme \dot{H}^{-1} . Comme $\operatorname{div}(\vec{u} * \theta_\varepsilon) = \operatorname{div}(\vec{u}) * \theta_\varepsilon = 0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} &= \|\operatorname{div}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \otimes \vec{u})(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} \simeq \|[\vec{u} * \theta_\varepsilon] \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &\leq \|[\vec{u} * \theta_\varepsilon](t, \cdot)\|_{L^\infty} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &\leq \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\theta_\varepsilon\|_{L^2} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les inégalités de Hölder et de Young pour la convolution. Ainsi, avec la norme L^2 en variable de temps nous avons

$$\|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq C \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2,$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Remarque 5.2 *Si nous remplaçons le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ par la régularisation $([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$, nous pouvons donner un sens à la norme $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ de cette dernière quantité en fonction des informations données par notre cadre de travail sur la vitesse \vec{u} , à savoir $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$. Toutefois, le contrôle obtenu n'est pas uniforme par rapport au paramètre de régularisation ε comme on peut le voir dans la conclusion de la proposition ci-dessus.*

Avec tous les résultats précédents, on peut concevoir sans trop de problème que cette estimation (5.13) nous permettra de fermer l'argument de point fixe : chaque terme de la représentation intégrale (5.5) page 147, des équations considérées pourra être correctement contrôlé.

Nous avons donc maintenant suffisamment de matériel pour énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre qui nous donne l'existence de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes.

Toutefois, avant de clore cette section nous insistons sur le fait que la régularisation introduite dans le terme non-linéaire $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ n'est pas sans conséquences et elle nous amène à étudier un problème approché (à $\varepsilon > 0$ fixé) dont les solutions vont dépendre du paramètre ε .

On remarquera en particulier que si l'on fait naïvement tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, alors l'estimation (5.13) n'est d'aucune utilité car on perd le contrôle annoncé puisque la quantité $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$

explose : nous aurons besoin de quelques ingrédients supplémentaires pour nous défaire de cette régularisation. Indiquons rapidement qu'un des ingrédients qui nous permettra de nous défaire de cette régularisation est justement les estimations *a priori* obtenues dans la formule (5.2), page 145.

5.3 Théorème Principal

Voici maintenant le résultat qui nous donne l'existence des solutions faibles des équations de Navier-Stokes par la méthode utilisée par J. Leray en 1934 dans l'article [34].

Théorème 5.3.1 (Leray –1934) Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale avec $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et soit $\vec{f} \in L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T^* \leq +\infty$. Alors nous avons les points suivants :

1) Il existe une fonction \vec{u} qui appartient à l'espace $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T < T^*$ qui vérifie au sens faible les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0. \end{cases}$$

2) La solution \vec{u} vérifie également l'inégalité d'énergie suivante

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds,$$

pour tout $0 < t < T$.

Il est très important de souligner ici que l'on obtient seulement un résultat d'*existence* de solutions dont la "durée de vie" dépend uniquement des propriétés de la force extérieure, si celle-ci est définie sur $[0, +\infty[$, alors on obtient des solutions *globales* en temps, et ce sans aucune contrainte par rapport à la taille de la donnée initiale \vec{u}_0 ou de la force extérieure \vec{f} . De plus, le dernier point fournit une inégalité d'énergie pour ce type de solutions faibles et cette estimation est fondamentale dans l'analyse des équations de Navier-Stokes comme nous pourrons le voir par la suite.

Démonstration du Théorème 5.3.1. Nous allons décomposer la démonstration de ce résultat en plusieurs étapes :

- A) Régularisation des équations de Navier-Stokes et séparation des variables
- B) Etude (locale en temps) de l'équation régularisée
- C) Inégalité d'énergie pour l'équation régularisée
- D) Solutions globales en temps pour l'équation régularisée
- E) Passage à la limite et retour aux équations de Navier-Stokes
- F) Etude de la pression
- G) Inégalité d'énergie pour les solutions faibles.

A) Régularisation des équations de Navier-Stokes et séparation des variables

On commence par considérer (comme dans (5.12)), une fonction positive $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^3} \theta(x) dx = 1$ et pour $\varepsilon > 0$ on pose $\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \theta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Avec cette fonction régularisante et pour un $\varepsilon > 0$ fixé nous allons étudier le problème régularisé suivant

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - ([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Nous appliquons maintenant le projecteur de Leray pour obtenir d'une part le système

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}\left([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{f}), \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

et d'autre par l'identité

$$p = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}\left([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u} - \operatorname{div}(\vec{f}) \right).$$

Ainsi, une fois que l'on sera en mesure d'obtenir une solution \vec{u} du système ci-dessus, on pourra alors en déduire des informations sur la pression p au moyen de la formule précédente.

Dans les lignes qui suivent nous allons donc concentrer notre étude au problème régularisé :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}\left([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{f}), \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, & \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Rappelons qu'ici la donnée initiale $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$ et est à divergence nulle et la force extérieure $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ appartient à l'espace $L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T^* \leq +\infty$.

B) Etude (locale en temps) de l'équation régularisée

On s'intéresse au problème approché (5.15) avec un $\varepsilon > 0$ fixé et notre objectif ici est d'obtenir une solution locale en temps de cette équation, pour cela on utilise la formulation intégrale de cette équation :

$$\vec{u}(t, x) = \mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, x)) ds - \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}\left([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{u}(s, x) ds. \quad (5.16)$$

Nous allons donc appliquer un argument de point fixe dans l'espace $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ muni de la norme

$$\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\cdot\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1},$$

pour un certain temps $0 < T < T^*$ qui sera déterminé plus tard et qui dépendra des données \vec{u}_0, \vec{f} et du paramètre de régularisation $\varepsilon > 0$.

Par les Propositions 5.1.1 et 5.1.2 nous avons déjà les majorations

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_t * \vec{u}_0\|_T &\leq C \|\vec{u}_0\|_{L^2} && \text{et} \\ \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_T &\leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Il ne reste plus qu'à étudier le terme $\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_T$ et nous avons

Proposition 5.3.2 *Si \vec{u} appartient à l'espace $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ muni de la norme $\|\cdot\|_T$, alors on a l'inégalité*

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_T \leq C \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T} \|\vec{u}\|_T^2. \quad (5.18)$$

Preuve. Nous reprenons une parties des calculs pour la commodité du lecteur : il s'agit alors d'étudier les quantités

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_T &= \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2} \\ &+ \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pour la première quantité ci-dessus on procède par dualité. En effet, par les propriétés de la convolution et par la continuité du projecteur de Leray, on a

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} &= \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, x) ds \right) \cdot \vec{\varphi}(x) dx \right| \\ &\leq \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \int_0^t \|\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}\|_{\dot{H}^1} \|\mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})\|_{\dot{H}^{-1}} ds \\ &\leq C \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \int_0^t \|\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}\|_{\dot{H}^1} \|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})\|_{\dot{H}^{-1}} ds, \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la variable de temps nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} &\leq C \|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \left(\int_0^t \|\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1} \|\mathbf{g}_{t-s} * \vec{\varphi}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}, \end{aligned}$$

et par le deuxième point du Lemme 4.4.3 donné page 115 on obtient (car $\|\vec{\varphi}\|_{L^2} \leq 1$) :

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_{L^2} \leq C \|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

Ainsi, en prenant la norme L^∞ en variable de temps et en appliquant l'inégalité (5.13) de la Proposition 5.2.1, page 152, nous avons

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla} \vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq C \varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2. \quad (5.20)$$

Pour la deuxième expression de droite de la formule (5.19), nous utilisons la régularité maximale du noyau de la chaleur, la continuité du projecteur de Leray et l'estimation (5.13) pour obtenir

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} &= \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \Delta \left(\frac{\mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, \cdot)}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \right) ds \right\|_{L_t^2 L_x^2} \\ &\leq \left\| \frac{\mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u})}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}} \right\|_{L_t^2 L_x^2} = \left\| \mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \\ &\leq C\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2, \quad (5.21) \end{aligned}$$

ainsi, avec les majorations (5.20) et (5.21) nous reconstruisons la norme $\|\cdot\|_T$ et nous avons la majoration

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, \cdot) ds \right\|_T \leq C\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 \leq C\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T} \|\vec{u}\|_T^2,$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ■

Maintenant, avec l'inégalité (5.18) et les majorations (5.17) nous pouvons appliquer le principe de contraction de Banach-Picard au problème intégral (5.16) : avec les notations du Théorème 4.1.1 donné page 104 du Chapitre 4, (voir également la formule (4.19), page 113) nous pouvons réécrire l'équation

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, x)) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds,$$

comme

$$\vec{u} = \vec{U}_0 - B(\vec{u}, \vec{u}),$$

où nous avons noté \vec{U}_0 par

$$\vec{U}_0 = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0 + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds,$$

et où $B(\cdot, \cdot)$ est une application bilinéaire donnée par

$$B(\vec{u}, \vec{u}) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) ds,$$

(le lecteur vérifiera sans peine que l'application ci-dessus est effectivement bilinéaire).

En particulier nous savons que si l'on a les estimations

$$\|\vec{U}_0\|_T \leq \delta, \quad \text{et} \quad \|B(\vec{u}, \vec{u})\|_T \leq C_B \|\vec{u}\|_T \|\vec{u}\|_T,$$

alors l'équation $\vec{u} = \vec{U}_0 - B(\vec{u}, \vec{u})$ admet une unique solution si $0 < \delta < \frac{1}{4C_B} < 1$.

Ainsi, en revenant à notre problème de point fixe, nous pouvons poser par tous les calculs précédents (voir la Proposition 5.1.1, page 147 et la Proposition 5.1.2, page 148 pour le terme \vec{U}_0 et la Proposition 5.3.2 pour le terme $B(\vec{u}, \vec{u})$) :

$$\delta = C \left(\|\vec{u}_0\|_{L^2} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \right) \quad \text{et} \quad C_B = C\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \sqrt{T},$$

de sorte que nous obtenons l'existence d'une unique solution \vec{u} dans l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ du problème sous forme intégrale

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, x)) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) ds, \quad (5.22)$$

qui est équivalent (voir la Section 4.5, page 124) au problème sous forme différentielle :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{f}), \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, \quad \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \quad (5.23)$$

sur un intervalle de temps $[0, T]$ où $0 < T < T^*$ est suffisamment petit pour vérifier

$$T < \frac{\varepsilon^3}{C \left(\|\vec{u}_0\|_{L^2} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \right)^2}. \quad (5.24)$$

Remarque 5.3 Les solutions que nous venons d'obtenir dépendent bien évidemment du paramètre ε . Nous les noterons \vec{u}_ε et nous avons $\vec{u}_\varepsilon \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$, ce qui correspond bien à la première partie de notre programme. Toutefois, le temps T d'existence de la solution dépend également du paramètre $\varepsilon > 0$ comme le montre l'inégalité ci-dessus : il faudra donc une étape supplémentaire pour pouvoir faire tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ sans perte d'information.

Remarque 5.4 Pour tout temps $0 < t \leq T$, les solutions $\vec{u}_\varepsilon(t, x)$ de l'équation (5.23) vérifient la condition $\operatorname{div}(\vec{u}_\varepsilon)(t, x) = 0$.

En effet, on remarque tout d'abord que puisque $\vec{u}_\varepsilon \in L_t^2 \dot{H}_x^1$ alors $\operatorname{div}(\vec{u}_\varepsilon) \in L_t^2 L_x^2$ ce qui montre que cette quantité a bien un sens. Ensuite, en utilisant l'expression (5.22) de \vec{u}_ε , nous appliquons l'opérateur divergence à cette identité et nous avons

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div}(\vec{u}_\varepsilon)\|_{L_t^2 L_x^2} &= \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq 1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} \left(\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0 + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} ds \right) \cdot \vec{\varphi} dx dt \\ &= \sup_{\|\vec{\varphi}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq 1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\mathfrak{g}_t * \operatorname{div}(\vec{u}_0) \right) \cdot \vec{\varphi} + \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \operatorname{div}(\mathbb{P}(\vec{f})) ds \right) \cdot \vec{\varphi} \\ &\quad - \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \operatorname{div}(\mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u})(s, x) ds \right) \cdot \vec{\varphi} dx dt \end{aligned}$$

mais puisque la donnée initiale vérifie $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et par la propriété générique $\operatorname{div}(\mathbb{P}(\vec{f})) = 0$ du projecteur de Leray (voir la formule (4.9), page 108), on en déduit sans problème que l'on a bien $\operatorname{div}(\vec{u}_\varepsilon) = 0$.

C) Inégalité d'énergie pour l'équation régularisée

Passons maintenant à l'inégalité d'énergie pour cette solution \vec{u}_ε et nous allons obtenir l'estimation (5.2), page 145, mais en procédant cette fois-ci de manière rigoureuse. Il convient pour cela de faire un bilan des informations que nous avons maintenant à notre disposition :

- on a $\vec{u}_\varepsilon \in L_t^2 \dot{H}_x^1$, car il s'agit de la solution obtenue ci-dessus,
- nous savons que $\mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ (voir la Proposition 5.2.1, page 152),
- comme conséquence du premier point on a $\Delta \vec{u}_\varepsilon \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$,

- par hypothèse on a également $\mathbb{P}(\vec{f}) \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$.

Ainsi, à partir de tous ces points, comme on a $\partial_t \vec{u}_\varepsilon = \Delta \vec{u}_\varepsilon - \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon + \mathbb{P}(\vec{f})$, on en déduit que l'on a $\partial_t \vec{u}_\varepsilon \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$. Donc, par dualité entre les espaces $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ et $L_t^2 \dot{H}_x^1$, nous pouvons alors donner un sens aux quantités

$$\partial_t \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon, \quad \Delta \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon, \quad \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon, \quad \mathbb{P}(\vec{f}) \cdot \vec{u}_\varepsilon,$$

et on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \partial_t \vec{u}_\varepsilon dx = 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \left(\Delta \vec{u}_\varepsilon - \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon + \mathbb{P}(\vec{f}) \right) dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\varepsilon|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \mathbb{P}(\vec{f}) dx. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du projecteur de Leray (c'est un opérateur auto-adjoint et son action sur \vec{u}_ε est transparente car $\mathbb{P}(\vec{u}_\varepsilon) = \vec{u}_\varepsilon$ puisque $\operatorname{div}(\vec{u}_\varepsilon) = 0$), nous avons

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = -2 \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\varepsilon|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot ([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{f} dx. \quad (5.25)$$

Rappelons à présent que la quantité suivante est bien définie par la dualité $L_t^2 \dot{H}_x^{-1} - L_t^2 \dot{H}_x^1$

$$\left\langle ([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon, \vec{u}_\varepsilon \right\rangle, \quad (5.26)$$

et avec une intégration par parties nous obtenons l'identité

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} ([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} ([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}_\varepsilon|^2 \operatorname{div}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon]) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} ([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{u}_\varepsilon dx, \end{aligned}$$

puisque $\operatorname{div}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon]) = 0$, ce qui nous permet de conclure que l'on a bien

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot ([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon dx = 0.$$

Insistons que ce calcul, réalisé de manière formelle dans l'introduction, est maintenant correct et rigoureux. En revenant à (5.25) nous avons alors :

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = -2 \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\varepsilon|^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_\varepsilon \cdot \vec{f} dx. \quad (5.27)$$

Avec les informations sur \vec{u}_ε et \vec{f} , il vient (par dualité et par les inégalités de Young)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2 \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2 \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} \\ &\leq -\|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2, \end{aligned} \quad (5.28)$$

de sorte qu'en intégrant par rapport à la variable de temps sur l'intervalle $[0, t]$ on obtient finalement l'estimation

$$\|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds, \quad (5.29)$$

valable pour tout $0 < t \leq T$.

Remarque 5.5 *Les calculs précédents donnent un sens à l'inégalité d'énergie (5.2) qui a été obtenue heuristiquement au début de ce chapitre. On observera que maintenant tous les objets ci-dessus ont bien un sens, chaque quantité est bien définie et les calculs réalisés sont justifiés... mais il y a toutefois une dépendance importante par rapport au paramètre de régularisation $\varepsilon > 0$. Néanmoins, cette dépendance n'intervient que dans la partie de gauche de cette estimation : autrement dit nous avons un contrôle uniforme en $\varepsilon > 0$ qui sera mis à profit dans ce qui suit.*

Remarque 5.6 *On notera sans problème que l'estimation (5.29) reste valable tant qu'on dispose d'un bon contrôle sur la force \vec{f} (qui est, rappelons-le, une donnée du problème).*

D) Solutions globales en temps pour l'équation régularisée

Voyons maintenant comment prolonger le temps d'existence des solutions obtenues dans les lignes ci-dessus. Notre point de départ est une donnée initiale $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et une force extérieure \vec{f} qui appartient à l'espace $L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T^* \leq +\infty$. L'algorithme de point fixe mis en place pour $\varepsilon > 0$ permet donc d'obtenir une unique solution $\vec{u}_\varepsilon \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ avec un temps $0 < T < T^*$ qui vérifie l'estimation (5.24) et qui est potentiellement très petit car on souhaite travailler avec des données (\vec{u}_0, \vec{f}) grandes.

Remarque 5.7 *On notera que par les mêmes arguments donnés dans le Corollaire 4.4.5, page 123, on obtient qu'à $\varepsilon > 0$ fixé, la solution mild approchée \vec{u}_ε appartient également à l'espace $\mathcal{C}([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$.*

Cette continuité en variable de temps nous permet d'affirmer que la quantité ponctuelle (en variable de temps) $\|\vec{u}_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2}$ est bornée : on pourra prendre cette valeur comme une nouvelle donnée initiale.

Ainsi, on peut réappliquer le même algorithme précédent au problème avec $T \leq t$:

$$\vec{u}_\varepsilon(t, x) = \mathfrak{g}_{t-T} * \vec{u}_{\varepsilon, T}(x) + \int_T^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_T^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds, \quad (5.30)$$

où, comme on l'a vu, la donnée initiale $\vec{u}_{\varepsilon, T}(x) = \vec{u}_\varepsilon(T, x)$ appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$: on obtiendra de la sorte une solution *mild* (notée \vec{u}_ε) de ce système approché dans l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ pour un certain intervalle de temps du type $[T, T + \delta]$.

En principe le gain de temps δ doit dépendre de la taille de la donnée initiale $\vec{u}_{\varepsilon, T}$ mais nous allons voir que c'est précisément ici qu'intervient l'information *a priori* obtenue dans la section précédente et qu'elle nous permettra d'obtenir un gain de temps uniforme : en effet, par l'inégalité d'énergie (5.29) on a la majoration *uniforme* (en ε et en temps) suivante

$$\|\vec{u}_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}^2,$$

inégalité à partir de laquelle on déduit la majoration

$$\|\vec{u}_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2} + 2\|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}},$$

qui nous donne à son tour l'estimation qui suit

$$\frac{1}{\|\vec{u}_0\|_{L^2} + 2\|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}} \leq \frac{1}{\|\vec{u}_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}},$$

ainsi, à $\varepsilon > 0$ fixé, si le gain de temps δ vérifie la condition suivante (qui est plus forte que (5.24)) :

$$\delta < \frac{\varepsilon^3}{C \left(\|\vec{u}_0\|_{L^2} + 2\|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \right)^2} \leq \frac{\varepsilon^3}{C \left(\|\vec{u}_\varepsilon(T, \cdot)\|_{L^2} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \right)^2},$$

on obtient alors l'existence d'une solution unique \vec{u}_ε sur l'intervalle $[T, T + \delta]$ qui s'écrit sous la forme (5.30).

Une fois que nous avons obtenu une unique solution \vec{u}_ε sur l'intervalle $[0, T]$ et une unique solution \vec{u}_ε sur $[T, T + \delta]$, on peut tout simplement définir

$$\vec{u}_\varepsilon = \vec{u}_\varepsilon \mathbf{1}_{[0, T[} + \vec{u}_\varepsilon \mathbf{1}_{[T, T + \delta]},$$

pour obtenir une unique solution du système approché sur l'intervalle $[0, T + \delta]$ tout entier qui vérifie $\vec{u}_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T + \delta], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T + \delta], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$. En effet, on écrit

$$\begin{aligned} \vec{u}_\varepsilon(t, x) &= \vec{u}_\varepsilon(t, x) \mathbf{1}_{[0, T[}(t) + \vec{u}_\varepsilon(t, x) \mathbf{1}_{[T, T + \delta]}(t) \\ &= \left(\mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbf{1}_{[0, T[}(t) + \\ &\quad \left(\mathbf{g}_{t-T} * \vec{u}_{\varepsilon, T}(x) + \int_T^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_T^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbf{1}_{[T, T + \delta]}(t), \end{aligned}$$

puis, en remarquant que l'on a

$$\vec{u}_{\varepsilon, T}(x) = \mathbf{g}_T * \vec{u}_0(x) + \int_0^T \mathbf{g}_{T-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^T \mathbf{g}_{T-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds,$$

il vient

$$\begin{aligned} \vec{u}_\varepsilon(t, x) &= (\mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x)) \mathbf{1}_{[0, T[}(t) + (\mathbf{g}_{t-T} * (\mathbf{g}_T * \vec{u}_0(x))) \mathbf{1}_{[T, T + \delta]}(t) \\ &\quad + \left(\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right) \mathbf{1}_{[0, T[}(t) + \left(\mathbf{g}_{t-T} * \int_0^T \mathbf{g}_{T-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right) \mathbf{1}_{[T, T + \delta]}(t) \\ &\quad + \left(\int_T^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right) \mathbf{1}_{[T, T + \delta]}(t) \\ &\quad - \left(\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbf{1}_{[0, T[}(t) \\ &\quad - \left(\mathbf{g}_{t-T} * \int_0^T \mathbf{g}_{T-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbf{1}_{[T, T + \delta]}(t) \\ &\quad - \left(\int_T^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbf{1}_{[T, T + \delta]}(t). \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le théorème de Fubini pour intervertir l'intégrale en temps et l'intégrale qui provient de la convolution et les propriétés de semi-groupe du noyau de la chaleur \mathbf{g}_t , on peut écrire

$$\mathbf{g}_{t-T} * \int_0^T \mathbf{g}_{T-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds = \int_0^T \mathbf{g}_{t-T} * \mathbf{g}_{T-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds = \int_0^T \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds,$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
\vec{u}_\varepsilon(t, x) &= (\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)) \mathbb{1}_{[0, T[}(t) + (\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x)) \mathbb{1}_{[T, T+\delta[}(t) \\
&+ \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right) \mathbb{1}_{[0, T[}(t) + \left(\int_0^T \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right) \mathbb{1}_{[T, T+\delta[}(t) \\
&+ \left(\int_T^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right) \mathbb{1}_{[T, T+\delta[}(t) \\
&- \left(\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbb{1}_{[0, T[}(t) \\
&- \left(\int_0^T \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbb{1}_{[T, T+\delta[}(t) \\
&- \left(\int_T^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbb{1}_{[T, T+\delta[}(t),
\end{aligned}$$

et par linéarité de l'intégrale nous avons bien

$$\vec{u}_\varepsilon(t, x) = \left(\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon(s, x) ds \right) \mathbb{1}_{[0, T+\delta[}(t),$$

ce qui nous fournit une solution $\vec{u}_\varepsilon(t, x)$ du problème approché (5.22) sur l'intervalle de temps $[0, T + \delta[$.

Il est alors possible de répéter tous ces arguments précédents pour obtenir une solution sur l'intervalle $[0, T + 2\delta]$ puis sur $[0, T + 3\delta]$, etc, où le pas de temps δ est le *même* à chaque application du processus de point fixe : il n'y a pas de perte d'information et même si ce gain de temps δ est petit (car les quantités $\|\vec{u}_0\|_{L^2}$ et $\|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}$ sont quelconques), il reste uniforme. Ceci nous permet de *prolonger* de proche en proche (par continuité en variable de temps) le temps d'existence de la solution \vec{u}_ε du problème régularisé. Ainsi, par itération et tant que la force \vec{f} est correctement définie, on obtient alors des solutions \vec{u}_ε globales en temps : autrement dit, si $\vec{f} \in L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ avec $0 < T^* \leq +\infty$ et si $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ est une donnée initiale, alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, les équations

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{f}), \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, \quad \text{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

admettent une solution \vec{u}_ε qui vérifie $\vec{u}_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

E) Passage à la limite et retour aux équations de Navier-Stokes

Une fois que nous avons obtenu des solutions globales en temps \vec{u}_ε nous devons réaliser le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour récupérer les équations de Navier-Stokes usuelles :

$$\begin{aligned}
\partial_t \vec{u}_\varepsilon &= \Delta \vec{u}_\varepsilon - \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon + \mathbb{P}(\vec{f}), \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
\partial_t \vec{u} &= \Delta \vec{u} - \mathbb{P}([\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{f}),
\end{aligned}$$

...mais cette opération n'est pas totalement triviale comme nous allons le voir.

En effet, puisque pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a par l'inégalité d'énergie (5.29) que la famille $(\vec{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ reste bornée dans l'espace $L^\infty([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, alors nous pouvons obtenir sans trop de problème (par le Théorème 2.5.6 de Banach-Alaoglu, page 37) que la suite $(\vec{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge dans un sens faible- $*$ vers une fonction \vec{u} , mais cela n'implique pas forcément que cette fonction limite \vec{u} vérifie les équations de Navier-Stokes et le point délicat est bien évidemment lié au terme non linéaire car il s'agit de donner un sens à la quantité $([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Rappelons que le produit de deux distributions n'est pas défini en général et en particulier, si φ est une fonction de test en temps et en espace on sera amené à étudier des quantités du type

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (u_{j,\varepsilon} * \theta_\varepsilon)(\partial_{x_j} u_{k,\varepsilon}) \varphi \, dx dt,$$

pour $1 \leq j, k \leq 3$ et la présence de cette fonction test φ ne permet pas de conclure que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (u_{j,\varepsilon} * \theta_\varepsilon)(\partial_{x_j} u_{k,\varepsilon}) \varphi \, dx dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} u_j(\partial_{x_j} u_k) \varphi \, dx dt, \quad (5.31)$$

car nous n'avons qu'une seule fonction test et deux termes $u_{j,\varepsilon} * \theta_\varepsilon$ et $\partial_{x_j} u_{k,\varepsilon}$ dont il faut étudier la convergence.

Nous aurons donc besoin d'un argument supplémentaire qui fournira un peu de convergence forte pour un de ces deux termes, de sorte que la double convergence (5.31) ci-dessus se transforme en un problème qui ne fait intervenir qu'une seule convergence faible.

Pour cela nous allons présenter dans les lignes ci-dessous un résultat général qui permet d'obtenir cette convergence forte, mais avant de rentrer dans le vif du sujet, il est utile de rappeler que nous avons les points suivants :

- Etant donné que nous avons $\vec{u}_\varepsilon \in L_t^2 \dot{H}_x^1$ on peut déduire sans problème que l'on a $\Delta \vec{u}_\varepsilon \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$.
- par les propriétés de la fonction θ (voir page 151), on a $\|\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}$, et grâce à cette estimation, en suivant les calculs exposés entre les formules (5.10)-(5.11) page 150, on obtient que le terme non linéaire $([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon$ appartient à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-\frac{3}{2}}$, pour tout $\varepsilon > 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-\frac{3}{2}}} &\leq C \|\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \\ &\leq C \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_\varepsilon\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que la quantité $([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon$ est bornée dans l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-\frac{3}{2}}$.

- Par hypothèse nous avons $\vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$.

Maintenant, en utilisant d'une part les inclusions d'espace $\dot{H}^{-1} \subset H^{-1} \subset H^{-\frac{3}{2}}$ et d'autre part les inclusion $\dot{H}^{-\frac{3}{2}} \subset H^{-\frac{3}{2}}$ (voir les inclusions (2.40), page 30 et (2.32), page 27), nous obtenons que tous les termes ci-dessus appartiennent à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-\frac{3}{2}}$ (on se souviendra que le projecteur de Leray est continu dans ces espaces).

Ainsi, puisque \vec{u}_ε est solution du problème approché

$$\partial_t \vec{u}_\varepsilon = \Delta \vec{u}_\varepsilon - \mathbb{P}([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\varepsilon + \mathbb{P}(\vec{f}),$$

le terme $\partial_t \vec{u}_\varepsilon$ appartient à l'espace $L_t^2 H_x^{-\frac{3}{2}}$, et ce pour tout sous-intervalle borné $[0, T]$ et pour tout $\varepsilon > 0$.

Maintenant, comme nous disposons de l'inégalité d'énergie (5.29), on a des contrôles uniformes en ε des normes $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 \dot{H}_x^1$ du terme \vec{u}_ε , ce qui avec ces points précédents nous permet d'écrire¹, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(I \times \mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} \|\varphi \vec{u}_\varepsilon\|_{L^2([0, T], H^1(\mathbb{R}^3))} &< +\infty, \\ \sup_{\varepsilon > 0} \|\varphi \partial_t \vec{u}_\varepsilon\|_{L^2([0, T], H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))} &< +\infty. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Ces deux points seront les hypothèses du résultat suivant qui nous permettra comme indiqué d'obtenir un critère de convergence forte. Plus précisément nous avons :

Lemme 5.3.3 (Rellich-Lions-Kondrashov) *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine ouvert borné à bord régulier. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur $I \times \Omega$ telles que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$ on ait les estimations :*

- 1) pour $\alpha > 0$: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi f_n\|_{L^2(I, H^\alpha(\mathbb{R}^3))} < +\infty$ et,
- 2) pour $\beta > 0$ et $1 < p \leq 2$: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi \partial_t f_n\|_{L^p(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))} < +\infty$,

alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge fortement vers une fonction limite $f \in (L_t^2 L_x^2)_{loc}$: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$ on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x)^2 |f_{n_k}(t, x) - f(t, x)|^2 dx dt = 0.$$

Preuve. Fixons une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(I \times \Omega)$ et posons $v_n = \varphi f_n$. Nous avons alors par construction $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|_{L^2(I, H^\alpha(\mathbb{R}^3))} < +\infty$ et nous avons également

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\partial_t v_n\|_{L^p(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))} < +\infty, \tag{5.33}$$

en effet, on a $\|\partial_t v_n\|_{L^p(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))} \leq \|(\partial_t \varphi) f_n\|_{L^p(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))} + \|\varphi \partial_t f_n\|_{L^p(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))}$ et par hypothèse le deuxième terme vérifie $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi \partial_t f_n\|_{L^p(I, H^{-\beta}(\Omega))} < +\infty$. Pour le premier terme, par

les inclusions d'espaces $H^\alpha \subset L^2 \subset H^{-\beta}$ donnée dans les formules (2.29) et (2.32), page 26, et en posant $\partial_t \varphi = \psi$, on obtient $\|(\partial_t \varphi) f_n(t, \cdot)\|_{H^{-\beta}(\mathbb{R}^3)} = \|\psi f_n(t, \cdot)\|_{H^{-\beta}(\mathbb{R}^3)} \leq \|\psi f_n(t, \cdot)\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^3)}$ puis en prenant la norme L^p en variable de temps il vient

$$\|(\partial_t \varphi) f_n\|_{L^p(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))} \leq \|\psi f_n\|_{L^p(I, H^\alpha(\mathbb{R}^3))} \leq C \|\psi f_n\|_{L^2(I, H^\alpha(\mathbb{R}^3))},$$

où nous avons utilisé pour la dernière estimation le support compact en temps de la fonction ψ et les inégalités de Hölder avec le fait que $1 < p \leq 2$. Ainsi, avec cette majoration et avec

1. On vérifiera sans problème que sur un intervalle de temps borné, si une fonction appartient à l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$, alors elle appartient à l'espace non-homogène $L_t^2 H_x^1$.

la première hypothèse nous obtenons alors sans problème le contrôle (5.33).

On considère maintenant la fonction $\theta(t) = c|t|^{r-1}$ avec $0 < \frac{1}{p} - \frac{1}{2} < r < 1$ dont la transformée de Fourier est $\widehat{\theta}(\tau) = |\tau|^{-r}$ et avec cette fonction auxiliaire, en notant par \star le produit de convolution dans la variable de temps, nous pouvons écrire par les inégalités de Young (avec $1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{p}$)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\theta \star \partial_t v_n\|_{L^2(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))} \leq \|\theta\|_{L^a} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\partial_t v_n\|_{L^p(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))} < +\infty,$$

et on remarquera que l'on a bien $\|\theta\|_{L^a} < +\infty$ puisque $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} < r$.

Nous allons maintenant étudier en variable de Fourier (en temps et en espace) les quantités $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|_{L^2(I, H^\alpha(\mathbb{R}^3))}$ et $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\theta \star \partial_t v_n\|_{L^2(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))}$: d'une part nous avons par la formule de Plancherel

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|_{L^2(I, H^\alpha(\mathbb{R}^3))} \simeq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^\alpha d\tau d\xi < +\infty, \quad (5.34)$$

d'autre part, en remarquant que l'on a $|\mathcal{F}_{t,x}(\partial_t v_n)(\tau, \xi)| = |\tau| |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|$, nous obtenons

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\theta \star \partial_t v_n\|_{L^2(I, H^{-\beta}(\mathbb{R}^3))} \simeq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |\tau|^{-2r} (|\tau| |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|)^2 (1 + |\xi|^2)^{-\beta} d\tau d\xi < +\infty,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\tau|^2)^{1-r} |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{-\beta} d\tau d\xi < +\infty. \quad (5.35)$$

Avec ces estimations uniformes et avec les inégalités de Hölder nous allons vérifier que l'on a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\tau|^2 + |\xi|^2)^\gamma |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^2 d\tau d\xi < +\infty, \quad (5.36)$$

où $0 < \gamma = \frac{(1-r)\alpha}{1-r+\alpha+\beta}$. En effet, on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\tau|^2 + |\xi|^2)^\gamma |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^2 d\tau d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\tau|^2)^\gamma (1 + |\xi|^2)^\gamma |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^2 d\tau d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\tau|^2)^\gamma |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^{\frac{2\alpha}{1-r+\alpha+\beta}} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha\beta}{1-r+\alpha+\beta}} \\ &\quad \times |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^{\frac{2(1-r+\beta)}{1-r+\alpha+\beta}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{\alpha(1-r+\beta)}{1-r+\alpha+\beta}} d\tau d\xi, \end{aligned}$$

et si l'on pose $\delta = \frac{1-r+\alpha+\beta}{\alpha} > 1$ et $\delta' = \frac{1-r+\alpha+\beta}{1-r+\beta}$, on a bien $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} = 1$ et il vient alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\tau|^2 + |\xi|^2)^\gamma |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^2 d\tau d\xi &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\tau|^2)^{1-r} |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{-\beta} d\tau d\xi \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{F}_{t,x}(v_n)(\tau, \xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^\alpha d\tau d\xi \right)^{\frac{1}{\delta'}}. \end{aligned}$$

Ainsi, avec les contrôles uniformes (5.34) et (5.35) on obtient bien que la quantité (5.36) est bornée.

A partir de ce résultat on déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Sobolev $H^\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$, de plus, comme le support des fonctions $v_n = \varphi f_n$ est contenu dans un compact fixe (déterminé par la fonction auxiliaire φ), alors on peut appliquer le Lemme Rellich-Kondrashov usuel (donné dans le Théorème 2.5.7, page 38) pour obtenir une sous-suite qui converge fortement dans l'espace $L_t^2 L_x^2$. Tout ce raisonnement dépend de la fonction test utilisée initialement, alors pour finir il suffit de considérer un recouvrement par des ensembles compacts de l'ensemble $I \times \Omega$, d'associer à chacun de ces compacts des fonctions test $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I \times \Omega)$ puis d'utiliser le procédé d'extraction diagonal de Cantor. ■

Ce résultat est fondamental car, comme nous le voyons, il nous fournit une convergence forte (même si ce n'est que localement) pour une sous-suite de fonctions pour lesquelles on dispose d'un contrôle adéquat, ce qui est exactement le cas pour la suite $(\vec{u}_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$. En effet, par les estimations (5.32) que nous avons obtenu précédemment, on peut alors déduire qu'il existe une sous-suite $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et une fonction \vec{u} telles que l'on ait (localement) la limite forte $\vec{u}_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \vec{u}$ dans $L_t^2 L_x^2$.

Avec ce résultat de convergence, étudions maintenant en détail le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et récapitulons les informations que nous disposons à présent :

- Grâce à l'inégalité d'énergie (5.29) valable pour les solutions \vec{u}_ε et aux contrôles uniformes qui s'en déduisent, on a dans chaque sous-intervalle borné $[0, T]$ que la suite $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers \vec{u} dans l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^1$ et faiblement étoile vers \vec{u} dans l'espace $L_t^\infty L_x^2$:

$$\vec{u}_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{u}_{\varepsilon_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \vec{u}$$

- Ainsi, nous avons également la convergence faible

$$\Delta \vec{u}_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \Delta \vec{u} \quad (5.37)$$

- Nous avons vu dans la page précédente que le terme $\partial_t \vec{u}_\varepsilon$ reste borné dans l'espace $L_t^2 H_x^{-\frac{3}{2}}$, on obtient donc la convergence faible :

$$\partial_t \vec{u}_{\varepsilon_n} \rightharpoonup \partial_t \vec{u} \quad (5.38)$$

- Comme nous vérifions les hypothèses (5.32) du Lemme 5.3.3 de Rellich-Lions-Kondrashov, nous avons que la sous-suite $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans l'espace $(L_t^2 L_x^2)_{loc}$ et alors la quantité $\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}$ converge fortement vers \vec{u} dans l'espace $(L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)))_{loc}$ mais aussi dans $(L^p([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)))_{loc}$ pour tout $2 \leq p < +\infty$ (car on a l'inclusion $L_{loc}^p \subset L_{loc}^2$).
- De plus, comme la sous-suite $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ reste également bornée dans $L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, nous avons que $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\varepsilon_n}$ converge faiblement vers $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ dans $L_{loc}^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$.

Grâce à toutes ces observations (et en particulier par les deux derniers points ci-dessus) nous avons la majoration suivante dans laquelle on a utilisé les calculs réalisés dans l'expression (5.10) page 150 et les inégalités de Hölder dans la variable de temps :

$$\|([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_n}\|_{(L_t^q H_x^{-\frac{3}{2}})_{loc}} \leq \|\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}\|_{(L_t^p L_x^2)_{loc}} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\varepsilon_n}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{loc}},$$

avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ et $1 < q < 2$ et cette majoration nous montre que l'on a bien la convergence faible de $([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_n}$ vers $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ dans $(L_t^q H_x^{-\frac{3}{2}})_{loc}$: le premier terme $\|\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}\|_{(L_t^p L_x^2)_{loc}}$ converge fortement (par le lemme de Rellich-Lions-Kondrashov), tandis que le deuxième terme $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\varepsilon_n}\|_{(L_t^2 L_x^2)_{loc}}$ converge faiblement. Observons que nous avons également que la quantité $([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_n}$ reste bornée uniformément dans $(L_t^2 H_x^{-\frac{3}{2}})_{loc}$ (voir la Remarque 5.1) et on obtient ainsi la convergence faible de ce terme vers $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ dans cet espace :

$$([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_n} \rightharpoonup_{(L_t^2 H_x^{-\frac{3}{2}})_{loc}} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}. \quad (5.39)$$

Pour finir, nous savons que le projecteur de Leray \mathbb{P} est continu dans tous ces espaces ce qui nous donne la convergence faible de la quantité $\mathbb{P}([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_n}$ vers $\mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u})$ dans l'espace $(L_t^2 H_x^{-\frac{3}{2}})_{loc}$.

Avec les convergences (5.37), (5.38) et (5.39) nous avons obtenu une sous-suite $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$, solution du problème approché

$$\partial_t \vec{u}_{\varepsilon_n} = \Delta \vec{u}_{\varepsilon_n} - \mathbb{P}([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_n} + \mathbb{P}(\vec{f}),$$

qui converge faiblement (dans \mathcal{S}' en variable de temps et d'espace) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ vers une fonction $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ solution des équations

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}). \quad (5.40)$$

Remarque 5.8 *Nous insistons sur le fait que, lors du passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, nous sommes forcés de raisonner par sous-suites extraites et cela pose un inconvénient majeur : nous avons bien des solutions définies globalement mais le prix à payer est l'unicité, nous obtenons donc toute une famille de solutions et il n'y a aucun critère qui permette de privilégier une solution particulière.*

F) Etude de la pression

N'oublions pas qu'une solution des équations de Navier-Stokes est un couple vitesse-pression. Nous rappelons alors, qu'une fois qu'on a fixé une vitesse \vec{u} , alors la pression associée se déduit par l'expression

$$p = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right), \quad (5.41)$$

et nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 5.3.4 *Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale à divergence nulle et soit une force extérieure $\vec{f} \in L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ avec $T^* > 0$. Si $\vec{u} \in L^\infty([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ est une solution des équations (5.40) alors la pression p donnée à partir de l'équation (5.41) appartient à l'espace $L^2([0, T^*[, H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$.*

Preuve. En considérant tout d'abord la variable d'espace nous avons :

$$\begin{aligned} \|p(t, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}} &\leq \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}((\vec{u}(t, \cdot) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(t, \cdot)) \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\vec{f})(t, \cdot) \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\ &\leq \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))(t, \cdot) \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \vec{f}(t, \cdot) \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \\ &\leq \|\vec{u}(t, \cdot) \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}} + \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \vec{f}(t, \cdot) \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

On observe maintenant que par les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev données dans le Corollaire 2.4.7 page 31, nous avons l'inclusion $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, d'autre part, pour la force extérieure, on a aussi l'inclusion $L^2(\mathbb{R}^3) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (voir la formule (2.32), page 27), de sorte que l'on peut écrire

$$\|p(t, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \leq C \|\vec{u}(t, \cdot) \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}} + \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \vec{f}(t, \cdot) \right\|_{L^2}$$

et en utilisant les inégalités de Hölder (avec $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$) et les inclusions $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|p(t, \cdot)\|_{H^{-\frac{1}{2}}} &\leq \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^6} + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}} \\ &\leq C \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1} + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}. \end{aligned}$$

En prenant la norme L^2 en variable de temps il vient alors

$$\|p\|_{L_t^2 H_x^{-\frac{1}{2}}} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}},$$

et cette quantité est bien bornée car la solution de Leray \vec{u} appartient à l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ et la force extérieure appartient à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$. ■

Remarque 5.9 Si la force extérieure est à divergence nulle (ou a fortiori si elle est nulle), alors on peut vérifier très facilement que l'on a $p \in L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}$.

En effet, si l'on a $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$, alors l'expression (5.41) devient $p = \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})$ et nous pouvons écrire (avec les mêmes arguments utilisés ci-dessus)

$$\begin{aligned} \|p(t, \cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}} &= \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u}(t, \cdot) \otimes \vec{u}(t, \cdot))) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}} \simeq \|\vec{u}(t, \cdot) \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^6} \leq C \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}, \end{aligned}$$

et en prenant la norme L^2 en variable de temps il vient $\|p\|_{L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} < +\infty$.

G) Inégalité d'énergie pour les solutions faibles.

L'inégalité d'énergie (5.29) obtenue précédemment page 158 a été déduite à partir des propriétés de la solution \vec{u}_ε du problème approché :

$$\|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds.$$

Remarquons que chaque terme de cette inégalité est bien défini car d'une part on a la continuité en variable de temps (puisque $\vec{u}_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$), en particulier la quantité $\|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}$ est bien définie ponctuellement pour $0 < t < T$) et d'autre part on a $\vec{u}_\varepsilon \in L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, ce qui donne un sens à la première intégrale de la partie de gauche de l'estimation ci-dessus.

Nous allons voir maintenant que cette inégalité d'énergie se maintient lors du passage à la limite et nous souhaitons montrer que l'on a la majoration suivante

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds, \quad (5.42)$$

où cette fois-ci on a uniquement $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ car nous n'avons plus le contrôle $\mathcal{C}([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$. Pour cela il est nécessaire de mettre en place une étape supplémentaire et nous considérons tout d'abord $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty([-1, 1])$ une fonction positive telle qu'on ait $\int_{\mathbb{R}} \omega(t) dt = 1$ et pour tout $\eta > 0$ on pose $\omega_\eta(t) = \frac{1}{\eta} \omega(t/\eta)$. Ainsi, si pour un certain $\varepsilon > 0$ on considère \vec{u}_ε une solution du problème régularisé (5.15), sur l'intervalle de temps $[\eta, T - \eta]$ (sur lequel on peut considérer la convolution en variable de temps $\omega_\eta \star \vec{u}_\varepsilon$) nous avons alors l'inégalité

$$\|\omega_\eta \star \vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}} \omega_\eta(t - \tau) \vec{u}_\varepsilon(\tau, x) d\tau \right|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}} \omega_\eta(t - \tau) |\vec{u}_\varepsilon(\tau, x)| d\tau \right)^2 dx,$$

et avec l'inégalité de Jensen donnée dans le Lemme 2.5.4, page 36, on obtient

$$\|\omega_\eta \star \vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \omega_\eta \star \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2. \quad (5.43)$$

Maintenant, si l'on utilise l'égalité d'énergie (5.27) nous avons l'identité

$$\begin{aligned} \omega_\eta \star \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2\omega_\eta \star \int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds &= \omega_\eta \star \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2\omega_\eta \star \int_0^t \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}_\varepsilon(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds \\ &= \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2\omega_\eta \star \int_0^t \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}_\varepsilon(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds, \end{aligned} \quad (5.44)$$

puisque $\|\omega_\eta\|_{L^1} = 1$. On remarque à présent que l'on a la convergence faible de $\omega_\eta \star \vec{u}_\varepsilon$ vers $\omega_\eta \star \vec{u}$ dans $L_t^2 \dot{H}_x^1$ et la convergence forte de $\omega_\eta \star \vec{u}_\varepsilon$ vers $\omega_\eta \star \vec{u}$ dans $(L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)))_{loc}$, donc avec le contrôle que nous avons sur la norme L^2 en variable d'espace, nous avons également la convergence faible de $\omega_\eta \star \vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)$ vers $\omega_\eta \star \vec{u}(t, \cdot)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Nous pouvons alors écrire (propriété de Fatou) :

$$\omega_\eta \star \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2\omega_\eta \star \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\omega_\eta \star \|\vec{u}_{\varepsilon_n}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2\omega_\eta \star \int_0^t \|\vec{u}_{\varepsilon_n}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right),$$

ce qui nous donne avec les estimations (5.43) et (5.44) l'inégalité

$$\|\omega_\eta \star \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2\omega_\eta \star \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2\omega_\eta \star \int_0^t \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds.$$

Nous avons obtenu l'inégalité recherchée avec une régularisation en temps supplémentaire et nous devons maintenant nous défaire de cette régularisation.

Rappelons ici qu'un point de *point de Lebesgue* d'une application localement intégrable $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un point t_0 tel que l'on ait la limite

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta} \int_{B(t_0, \eta/2)} |\varphi(\tau) - \varphi(t_0)| d\tau = 0,$$

de plus, par le théorème de différentiation de Lebesgue (voir page 37) cette relation a lieu presque partout. Ainsi, si t_0 est un point de Lebesgue de l'application $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ (qui est localement intégrable car on sait que $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2$), alors en faisant $\eta \rightarrow 0^+$ on obtient l'inégalité

$$\|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^{t_0} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^{t_0} \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds,$$

ce qui correspond bien à l'inégalité recherchée (5.42).

Maintenant, si $t_0 > 0$ n'est pas un point de Lebesgue, on considère $(t_n)_{n \geq 1} > 0$ une suite de points de Lebesgue telle que l'on ait $t_n \rightarrow t_0$ et telle que

$$\|\vec{u}(t_n, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^{t_n} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^{t_n} \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds.$$

Ainsi, étant donné que l'application $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ est faiblement-* continue, on a d'une part l'inégalité $\|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\vec{u}(t_n, \cdot)\|_{L^2}^2$ et d'autre part puisqu'on dispose des identités

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{t_n} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \\ \text{et } \int_0^{t_0} \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{t_n} \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^{t_0} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\vec{u}(t_n, \cdot)\|_{L^2}^2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \int_0^{t_n} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \\ &\leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \int_0^{t_n} \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds, \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir l'inégalité d'énergie (5.42) pour ce type de points.

La démonstration du Théorème 5.3.1 est maintenant terminée. ■

Les solutions que nous venons d'obtenir sont le point de départ de nombreux développements. En particulier, lorsqu'on est intéressé par des données grandes et des temps long, cette approche est (essentiellement) la seule que nous disposons actuellement pour obtenir des solutions des équations de Navier-Stokes. Pour cette raison nous introduisons la définition suivante.

Définition 5.3.5 (Solutions faibles de Leray) Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale à divergence nulle et soit $\vec{f} \in L^2([0, T^*], \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$, avec $0 < T^* \leq +\infty$, une force extérieure.

Nous dirons qu'une solution faible \vec{u} des équations de Navier-Stokes

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}), \quad \text{div}(\vec{u}) = 0,$$

associée aux données initiales (\vec{u}_0, \vec{f}) est une solution faible de Leray si elle vérifie :

- $\vec{u} \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ pour tout $0 < T < T^*$.
- Pour tout $0 < t < T$ on a l'inégalité d'énergie

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds.$$

Remarque 5.10 *Observons que les solutions globales en temps que nous venons d'obtenir vérifient les équations de Navier-Stokes au sens faible dans les deux variables de temps et d'espace.*

Notons en particulier que l'application $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ n'est pas fortement continue, elle appartient uniquement à l'espace $L_t^\infty([0, +\infty[)$ et non pas à l'espace $\mathcal{C}_t([0, +\infty[)$. Toutefois, à l'origine $t = 0$ nous avons le résultat suivant :

Corollaire 5.3.6 (Continuité forte en 0) *Soit \vec{u} une solution faible de Leray au sens de la Définition 5.3.5 ci-dessus. Alors on a la propriété de continuité à l'origine suivante :*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2.$$

Preuve. Par convergence faible nous avons d'une part l'inégalité

$$\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 \leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2,$$

mais par l'inégalité d'énergie nous avons le contrôle $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2$, à partir duquel on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2,$$

ce qui nous donne bien la propriété de continuité à l'origine recherchée puisque l'on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2$. ■

5.4 Inégalité forte d'énergie

Comme nous venons de le voir, les inégalités d'énergie sont un instrument particulièrement important dans l'analyse des équations de Navier-Stokes car elles permettent d'étendre le temps d'existence des solutions et donne un cadre de travail naturel pour un certain nombre de développements. Ces inégalités d'énergie que nous venons obtenir peuvent être précisées en considérant le résultat qui suit :

Théorème 5.4.1 (Inégalité forte d'énergie) *Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale à divergence nulle et soit $\vec{f} \in L^2([0, T^*], \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)) \cap L^1([0, T^*], L^2(\mathbb{R}^3))$, avec $0 < T^* \leq +\infty$, une force extérieure également à divergence nulle et soit $\vec{u} \in L^\infty([0, T^*], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T^*], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ une solution faible de Leray (au sens de la Définition 5.3.5 ci-dessus).*

Alors pour presque tout $0 < t_0 < T^$ et pour tout $t \in]t_0, T^*[$ on a l'inégalité d'énergie*

$$\|\vec{u}(t_1, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds.$$

La principale différence entre les inégalités d'énergie de Leray et les inégalités fortes d'énergie réside sur le fait que dans ces dernières nous ne sommes pas obligés de considérer une intégration en temps à partir de l'origine ($t_0 = 0$) et cette particularité permet d'obtenir certaines propriétés intéressantes comme nous le verrons par la suite.

Démonstration. Fixons tout d'abord un temps $t_0 > 0$ et un temps t_1 tel que $t_0 < t_1 < T^*$. Nous allons reprendre certains calculs réalisés dans la page 157, ainsi, pour un $\varepsilon > 0$ fixé et

pour une solution \vec{u}_ε de l'équation (5.14), nous avons l'inégalité d'énergie (5.28) donnée page 158 :

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq -\|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2.$$

Etant donné que par la Remarque 5.7 on a $\vec{u}_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T^*], L^2(\mathbb{R}^3))$, alors la quantité $\|\vec{u}_\varepsilon(t_0, \cdot)\|_{L^2}$ a bien un sens et nous pouvons intégrer (en variable de temps) l'inégalité précédente sur l'intervalle $[t_0, t]$ pour obtenir

$$\|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_{t_0}^t \|\vec{u}_\varepsilon(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_\varepsilon(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_{t_0}^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds.$$

On considère maintenant pour $\eta > 0$ une fonction auxiliaire $\phi_\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \varphi(\frac{t-t_1}{\eta})$ où la fonction positive $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([-1, 1])$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 dt = 1$, ainsi à partir de l'estimation précédente et par les propriétés de normalisation de la fonction ϕ_η , nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\phi_\eta(t)|^2 \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt + \int_{\mathbb{R}} |\phi_\eta(t)|^2 \left(\int_{t_0}^t \|\vec{u}_\varepsilon(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right) dt &\leq \|\vec{u}_\varepsilon(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 \\ &+ \int_{\mathbb{R}} |\phi_\eta(t)|^2 \left(\int_{t_0}^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right) dt. \end{aligned}$$

En prenant la limite $\varepsilon_k \rightarrow 0$ (on se rappellera qu'on raisonne par sous-suite extraites) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\phi_\eta(t)|^2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt + \int_{\mathbb{R}} |\phi_\eta(t)|^2 \left(\int_{t_0}^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right) dt \\ \leq \liminf_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi_\eta(t)|^2 \|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt + \int_{\mathbb{R}} |\phi_\eta(t)|^2 \left(\int_{t_0}^t \|\vec{u}_\varepsilon(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right) dt \right), \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est majorée par :

$$\leq \liminf_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}} |\phi_\eta(t)|^2 \left(\int_{t_0}^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right) dt.$$

Etant donné que l'application $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ est mesurable et localement intégrable (car on a $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2$), alors par le Théorème 2.5.5 de différentiation de Lebesgue donné page 37, en faisant tendre $\eta \rightarrow 0$, on obtient pour tout point de Lebesgue t_1 tel que $t_1 > t_0$, la majoration

$$\|\vec{u}(t_1, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \liminf_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds,$$

et cette estimation ce maintient pour tout point $t_1 > t_0$ par la continuité faible de l'application $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$.

Il ne reste plus qu'à vérifier qu'il existe une sous-suite ε_j de ε_k telle que l'on ait la convergence (dans $L_{loc}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$) de $\|\vec{u}_{\varepsilon_j}(t_0, \cdot)\|_{L^2}$ vers $\|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{L^2}$ pour presque tout $t_0 > 0$. Pour cela nous souhaitons établir la limite

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt = 0, \quad (5.45)$$

ce qui nous permettra d'extraire une sous-suite $(\vec{u}_{\varepsilon_j})_{j \in \mathbb{N}}$ telle que l'on ait, presque partout, la limite $\lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \|\vec{u}_{\varepsilon_j}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} = 0$.

Afin d'étudier la limite (5.45), on considère une fonction positive $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\phi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\phi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Ainsi, pour $R > 1$ on pose $\phi_R(x) = \phi(x/R)$ et on notera alors que pour R fixé on a $\text{supp}(\phi_R) \subset B(0, 2R)$ et de plus on a $\lim_{R \rightarrow +\infty} \phi_R(x) = 1$.

Comme nous avons par le Lemme de Rellich-Lions-Kondrashov (voir page 165 pour l'utilisation de ce lemme) la convergence forte (locale)

$$\lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|\phi_R(\cdot)(\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot))\|_{L^2}^2 dt = 0,$$

nous pouvons écrire (puisque par construction on a $\phi_R(\cdot) + [1 - \phi_R(\cdot)] \equiv 1$)

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt &= \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|(\phi_R(\cdot) + [1 - \phi_R(\cdot)])(\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot))\|_{L^2}^2 dt \\ &\leq \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|\phi_R(\cdot)(\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot))\|_{L^2}^2 dt + \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|[1 - \phi_R(\cdot)](\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot))\|_{L^2}^2 dt, \end{aligned}$$

et par la limite ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt &\leq \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|[1 - \phi_R(\cdot)](\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot))\|_{L^2}^2 dt \\ &\leq (T_1 - T_0) \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \sup_{T_0 < t < T_1} \|[1 - \phi_R(\cdot)](\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot))\|_{L^2}^2 \\ &\leq (T_1 - T_0) \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \sup_{T_0 < t < T_1} \left(\|[1 - \phi_R(\cdot)]\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|[1 - \phi_R(\cdot)]\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Etant donné que l'on a par construction la limite $\lim_{R \rightarrow +\infty} [1 - \phi_R(\cdot)] = 0$ et que l'on a $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2$, on en déduit que $\limsup_{R \rightarrow +\infty} \|[1 - \phi_R(\cdot)]\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = 0$, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{T_0}^{T_1} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot) - \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 dt &\leq \\ &(T_1 - T_0) \limsup_{R \rightarrow +\infty} \limsup_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \sup_{T_0 < t < T_1} \|[1 - \phi_R(\cdot)]\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Maintenant, pour la limite ci-dessus nous allons étudier l'évolution dans le temps de la quantité $[1 - \phi_R(\cdot)]\vec{u}_{\varepsilon_k} = \vec{u}_{R, \varepsilon_k}$. Rappelons tout d'abord que la variable \vec{u}_{ε_k} est solution de l'équation régularisée (5.14) donnée page 154 :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_{\varepsilon_k} = \Delta \vec{u}_{\varepsilon_k} - ([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_k} - \vec{\nabla} p_{\varepsilon_k} + \vec{f}, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, \quad \text{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases}$$

où l'on a $\vec{u}_{\varepsilon_k} \in \mathcal{C}([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$ (voir la Remarque 5.7, page 159) et où la pression p_{ε_k} peut être définie par l'expression (car $\text{div}(\vec{f}) = 0$)

$$p_{\varepsilon_k} = \frac{1}{(-\Delta)} \text{div}(\text{div}([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \otimes \vec{u}_{\varepsilon_k})).$$

On remarquera alors sans problème que l'on a $p_{\varepsilon_k} \in \mathcal{C}([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$, en effet, par la continuité des transformées de Riesz $\frac{\partial_j}{\sqrt{(-\Delta)}}$ dans les espaces L^2 , nous avons les estimations

$$\begin{aligned} \|p_{\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2} &= \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \text{div}(\text{div}([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \otimes \vec{u}_{\varepsilon_k}))(t, \cdot) \right\|_{L^2} \leq C \|([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \otimes \vec{u}_{\varepsilon_k})(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &\leq C \|[\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}](t, \cdot)\|_{L^\infty} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\theta_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2} \\ &\leq C_{\varepsilon_k} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^2}, \end{aligned}$$

qui nous permettent d'obtenir que l'on a bien $p_{\varepsilon_k} \in \mathcal{C}([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3))$: ceci nous permettra de donner un sens au produit $p_{\varepsilon_k} \vec{u}_{\varepsilon_k}$.

Ainsi, en revenant à l'évolution dans le temps de la quantité $\vec{u}_{R,\varepsilon_k} = [1 - \phi_R] \vec{u}_{\varepsilon_k}$ (et en se rappelant les informations obtenues page 157), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \partial_t \vec{u}_{R,\varepsilon_k} &= \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot (\partial_t([1 - \phi_R] \vec{u}_{\varepsilon_k})) = \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot ([1 - \phi_R] (\partial_t \vec{u}_{\varepsilon_k})) \\ \frac{1}{2} \partial_t |\vec{u}_{R,\varepsilon_k}|^2 &= \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \left([1 - \phi_R] (\Delta \vec{u}_{\varepsilon_k} - ([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_k} - \vec{\nabla} p_{\varepsilon_k} + \vec{f}) \right) \\ &= \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot ([1 - \phi_R] (\Delta \vec{u}_{\varepsilon_k})) - \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \left([1 - \phi_R] ([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_k} \right) \\ &\quad - \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot ([1 - \phi_R] (\vec{\nabla} p_{\varepsilon_k})) + \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot ([1 - \phi_R] \vec{f}), \end{aligned} \quad (5.47)$$

et puisqu'on a les identités

$$\begin{aligned} [1 - \phi_R] (\Delta \vec{u}_{\varepsilon_k}) &= \Delta([1 - \phi_R] \vec{u}_{\varepsilon_k}) - \vec{u}_{\varepsilon_k} (\Delta[1 - \phi_R]) - 2 \sum_{j=1}^3 (\partial_j [1 - \phi_R] \partial_j \vec{u}_{\varepsilon_k}) \\ &= \Delta \vec{u}_{R,\varepsilon_k} - \vec{u}_{\varepsilon_k} (\Delta[1 - \phi_R]) - 2 \sum_{j=1}^3 (\partial_j [1 - \phi_R] \partial_j \vec{u}_{\varepsilon_k}), \end{aligned}$$

en intégrant en espace et en temps l'expression (5.47), il vient

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2} &= \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(0, \cdot)\|_{L^2} + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \Delta \vec{u}_{R,\varepsilon_k}}_{(1)} - \underbrace{\vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \vec{u}_{\varepsilon_k} (\Delta[1 - \phi_R])}_{(2)} dx ds \\ &\quad - 4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \sum_{j=1}^3 (\partial_j [1 - \phi_R] \partial_j \vec{u}_{\varepsilon_k})}_{(3)} dx ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot ([1 - \phi_R] ([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_k})}_{(4)} dx ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot ([1 - \phi_R] (\vec{\nabla} p_{\varepsilon_k}))}_{(5)} dx ds - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot ([1 - \phi_R] \vec{f})}_{(6)} dx ds. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Nous allons maintenant étudier chacun des termes de l'identité (5.48) ci-dessus.

- Pour le premier terme de (5.48), par une intégration par parties on obtient

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \Delta \vec{u}_{R,\varepsilon_k} dx ds = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{R,\varepsilon_k}|^2 dx ds = - \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 ds.$$

- Pour le deuxième terme de (5.48) on remarque que l'on a la propriété de support suivante

$$\text{supp}(\Delta[1 - \phi_R]) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : R \leq |x| \leq 2R\} = \mathcal{C}_R.$$

Par dualité $\dot{H}^1 - \dot{H}^{-1}$, il vient alors

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \vec{u}_{\varepsilon_k} (\Delta[1 - \phi_R]) dx ds &\leq \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1} \|\vec{u}_{\varepsilon_k} (\Delta[1 - \phi_R])\|_{\dot{H}^{-1}} ds \\ &\leq \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1} \|\vec{u}_{\varepsilon_k} (\Delta[1 - \phi_R])\|_{L^{\frac{6}{5}}} ds, \end{aligned}$$

où nous avons appliqué l'injection de Hardy-Littlewood-Sobolev $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$. Maintenant, en gardant trace du support de la fonction $\Delta[1 - \phi_R]$, par les inégalités de Young pour la somme et par les inégalités de Hölder avec $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \frac{1}{4} \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 + 4 \|\vec{u}_{\varepsilon_k}(\Delta[1 - \phi_R])\|_{L^{\frac{6}{5}}}^2 ds \\ &\leq \int_0^t \frac{1}{4} \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 + 4 \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_R}\|_{L^6}^2 \|\Delta[1 - \phi_R]\|_{L^{\frac{3}{2}}}^2 ds \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 ds + C \|\Delta[1 - \phi_R]\|_{L^{\frac{3}{2}}}^2 \int_0^t \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_R}\|_{L^6}^2 ds, \end{aligned}$$

on remarque maintenant que par homogénéité (car $\phi_R(\cdot) = \phi(\cdot/R)$) on a l'identité $\|\Delta[1 - \phi_R]\|_{L^{\frac{3}{2}}} = \|\Delta[1 - \phi]\|_{L^{\frac{3}{2}}} < +\infty$, de sorte que l'on obtient

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \vec{u}_{\varepsilon_k}(\Delta[1 - \phi_R]) dx ds \leq \frac{1}{4} \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 ds + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_R}\|_{L_t^2 L_x^6}^2.$$

- Pour le troisième terme de (5.48), on note tout d'abord la propriété de support suivante

$$\text{supp}(\partial_j[1 - \phi_R]) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : R \leq |x| \leq 2R\} = \mathcal{C}_R,$$

donc par l'inégalité de Hölder avec $1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, en gardant trace du support des fonctions $\partial_j[1 - \phi_R]$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \sum_{j=1}^3 (\partial_j[1 - \phi_R] \partial_j \vec{u}_{\varepsilon_k}) dx ds &\leq C \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_R}\|_{L^6} \|\vec{\nabla}[1 - \phi_R]\|_{L^3} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1} ds \\ &\leq C \| [1 - \phi_R] \|_{L^\infty} \int_0^t \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_R}\|_{L^6} \|\vec{\nabla}[1 - \phi_R]\|_{L^3} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1} ds, \end{aligned}$$

en remarquant que par homogénéité on a $\|\vec{\nabla}[1 - \phi_R]\|_{L^3} = \|\vec{\nabla}[1 - \phi]\|_{L^3} < +\infty$ et que l'on a $\|[1 - \phi_R]\|_{L^\infty} = 1$, il vient

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \sum_{j=1}^3 (\partial_j[1 - \phi_R] \partial_j \vec{u}_{\varepsilon_k}) dx ds \leq C \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{\mathcal{C}_R}\|_{L_t^2 L_x^6} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1},$$

où nous avons appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la variable de temps.

- Pour le quatrième terme de (5.48), on obtient par une intégration par parties et en utilisant le fait que $\text{div}(\vec{u}_{\varepsilon_k}) = 0$:

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \left([1 - \phi_R] \left(([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_k} \right) \right) dx ds \\ &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} [1 - \phi_R] \vec{\nabla}[1 - \phi_R] \cdot (\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}) |\vec{u}_{\varepsilon_k}|^2 dx ds \\ &\leq \int_0^t \| [1 - \phi_R] \|_{L^\infty} \|\vec{\nabla}[1 - \phi_R]\|_{L^6} \|\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^6}^2 ds, \end{aligned}$$

où nous avons appliqué les inégalités de Hölder avec $1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \left([1 - \phi_R] \left(([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_k} \right) \right) dx ds &\leq C \int_0^t \|\vec{\nabla}[1 - \phi_R]\|_{L^6} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^6}^2 ds \\ &\leq C \|\vec{\nabla}[1 - \phi_R]\|_{L^6} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6}^2. \end{aligned}$$

On remarque que l'on a par homogénéité $\|\vec{\nabla}[1 - \phi_R]\|_{L^6} = R^{-\frac{1}{2}}\|\vec{\nabla}[1 - \phi]\|_{L^6} = CR^{-\frac{1}{2}}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \left([1 - \phi_R] \left(([\vec{u}_{\varepsilon_k} * \theta_{\varepsilon_k}] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\varepsilon_k} \right) \right) dx ds \leq CR^{-\frac{1}{2}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6}^2.$$

- Pour le cinquième terme de (5.48) on remarque que l'on a l'identité

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \left([1 - \phi_R] (\vec{\nabla} p_{\varepsilon_k}) \right) dx ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} ([1 - \phi_R] \vec{u}_{\varepsilon_k}) \cdot \left([1 - \phi_R] (\vec{\nabla} p_{\varepsilon_k}) \right) dx ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} [1 - \phi_R]^2 \vec{u}_{\varepsilon_k} \cdot \vec{\nabla} p_{\varepsilon_k} dx ds, \end{aligned}$$

et en utilisant la propriété de divergence nulle de \vec{u} nous avons, par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} [1 - \phi_R]^2 \vec{u}_{\varepsilon_k} \cdot \vec{\nabla} p_{\varepsilon_k} dx ds &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} p_{\varepsilon_k} \vec{u}_{\varepsilon_k} \cdot \vec{\nabla} ([1 - \phi_R]^2) dx ds \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |p_{\varepsilon_k}| |\vec{u}_{\varepsilon_k}| |[1 - \phi_R]| |\vec{\nabla} [1 - \phi_R]| dx ds \\ &\leq \|[1 - \phi_R]\|_{L^\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |p_{\varepsilon_k}| |\vec{u}_{\varepsilon_k}| |\vec{\nabla} [1 - \phi_R]| dx ds. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder avec $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &\leq \|[1 - \phi_R]\|_{L^\infty} \int_0^t \|p_{\varepsilon_k}\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^6} \|\vec{\nabla} [1 - \phi_R]\|_{L^6} ds \leq CR^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \|p_{\varepsilon_k}\|_{L^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^6} ds \\ &\leq CR^{-\frac{1}{2}} \|p_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6}, \end{aligned}$$

où l'on a par construction $\|[1 - \phi_R]\|_{L^\infty} = 1$ et $\|\vec{\nabla} [1 - \phi_R]\|_{L^6} = CR^{-\frac{1}{2}}$. On notera en particulier que, comme on a par hypothèse $\operatorname{div}(f) = 0$, par la Remarque 5.9, page 167, nous avons l'information $p \in L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}$.

- Le dernier terme de (5.48) est simple à traiter car on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{R,\varepsilon_k} \cdot \left([1 - \phi_R] \vec{f} \right) dx ds &\leq \int_0^t \|[1 - \phi_R] \vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|[1 - \phi_R] \vec{f}\|_{L^2} ds \\ &\leq \|[1 - \phi_R]\|_{L^\infty} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|[1 - \phi_R] \vec{f}\|_{L_t^1 L_x^2} \\ &\leq C \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|[1 - \phi_R] \vec{f}\|_{L_t^1 L_x^2}. \end{aligned}$$

Avec toutes ces estimations pour les termes de l'expression (5.48), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2} &\leq \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(0, \cdot)\|_{L^2} - 2 \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 ds + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{C_R}\|_{L_t^2 L_x^6}^2 \\ &\quad + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{C_R}\|_{L_t^2 L_x^6} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} + CR^{-\frac{1}{2}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6}^2 \\ &\quad + CR^{-\frac{1}{2}} \|p_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6} + \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|[1 - \phi_R] \vec{f}\|_{L_t^1 L_x^2}, \end{aligned}$$

que nous réécrivons comme

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2} + \frac{3}{2} \int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 ds &\leq \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(0, \cdot)\|_{L^2} + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{C_R}\|_{L_t^2 L_x^6}^2 \\ &\quad + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{C_R}\|_{L_t^2 L_x^6} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} + CR^{-\frac{1}{2}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6}^2 \\ &\quad + CR^{-\frac{1}{2}} \|p_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6} + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|[1 - \phi_R] \vec{f}\|_{L_t^1 L_x^2}, \end{aligned}$$

de plus, la quantité $\int_0^t \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}\|_{\dot{H}^1}^2 ds$ étant positive, il vient

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(t, \cdot)\|_{L^2} &\leq \|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(0, \cdot)\|_{L^2} + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{C_R}\|_{L_t^2 L_x^6}^2 + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{C_R}\|_{L_t^2 L_x^6} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \\ &\quad + CR^{-\frac{1}{2}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6}^2 + CR^{-\frac{1}{2}} \|p_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}} \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6} \quad (5.49) \\ &\quad + C \|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2} \|[1 - \phi_R] \vec{f}\|_{L_t^1 L_x^2}. \end{aligned}$$

Nous remarquons maintenant que l'on a un contrôle uniforme en ε_k pour les normes $L_t^2 L_x^6$, $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 \dot{H}_x^1$ de \vec{u} ainsi que pour la norme $L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}$ de p , de sorte que les termes $\|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^6}$, $\|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^\infty L_x^2}$, $\|\vec{u}_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}$ et $\|p_{\varepsilon_k}\|_{L_t^2 L_x^{\frac{3}{2}}}$ vont rester bornés et par toute la théorie de passage à la limite présentée dans les pages précédentes on pourra contrôler ces quantités lorsque $\varepsilon_k \rightarrow 0$. De plus les termes $\|\vec{u}_{\varepsilon_k} \mathbf{1}_{C_R}\|_{L_t^2 L_x^6}$ et $\|[1 - \phi_R] \vec{f}\|_{L_t^1 L_x^2}$ vont tendre vers 0 si $R \rightarrow +\infty$ par convergence dominée (on a par hypothèse $\vec{f} \in L_t^1 L_x^2$). Finalement, on a $\|\vec{u}_{R,\varepsilon_k}(0, \cdot)\|_{L^2} = \|[1 - \phi_R] \vec{u}_0\|_{L^2}$ qui lui aussi va tendre vers 0 si $R \rightarrow +\infty$. Nous obtenons donc que tous les termes de droite de l'inégalité (5.49) ci-dessus vont tendre fortement vers 0 si $R \rightarrow +\infty$.

Nous en déduisons que la limite (5.46) tend vers 0, ce qui implique à son tour la limite (5.45) et nous avons donc obtenu l'inégalité d'énergie forte annoncée. \blacksquare

5.5 Unicité Fort-Faible

Si nous récapitulons le résultat principal de ce chapitre avec les théorèmes précédents, nous avons les deux situations suivantes :

- D'une part, si on applique un argument de point fixe dans un bon cadre fonctionnel, nous obtenons des solutions uniques des équations de Navier-Stokes, mais l'existence n'est garantie que sur un petit intervalle de temps, disons $[0, T]$ et nous ne pouvons pas prolonger dans le temps les solutions ainsi obtenues (à moins de considérer des données initiales suffisamment petites).
- D'autre part, si on considère maintenant les solutions faibles que nous venons de construire, nous pouvons exhiber des solutions qui existent dans un intervalle de temps quelconque, mais le prix à payer est l'unicité.

La question que l'on se pose dans cette section est de savoir quelle est la différence entre les solutions obtenues par point fixe (les solutions *mild*) et les solutions faibles. Bien sûr, cette question n'a un sens que dans l'intervalle de temps dans lequel les solutions qui proviennent d'un point fixe existent. En fait, nous allons voir que dans l'intervalle de temps commun d'existence de ces solutions, les solutions faibles *coïncident* avec les solutions obtenues par un point fixe : et ainsi la perte d'unicité apparaît *après* le temps maximal d'existence des

solutions *mild*.

Théorème 5.5.1 (Unicité Fort-Faible) Soient $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ avec $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ une donnée initiale et $\vec{f} \in L^2([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ une force extérieure. Si le problème de Navier-Stokes associé à ces données initiales

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}), & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

admet une solution \vec{u}_M sur l'ensemble $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ avec $0 < T < +\infty$ et qui appartient à l'espace fonctionnel $L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ ainsi qu'une solution de Leray \vec{u}_L sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$, au sens de la Définition 5.3.5, alors sur l'intervalle de temps $[0, T]$ on a l'égalité

$$\vec{u}_M = \vec{u}_L.$$

Observons avant de passer au détail des calculs, qu'avec ces données initiales nous sommes bien en mesure de construire des solutions *mild* en utilisant le Théorème 4.4.1 de Fujita-Kato, donné page 114, et des solutions faibles de Leray en utilisant le Théorème 5.3.1, présenté page 153.

Démonstration. On pose tout d'abord

$$\vec{w} = \vec{u}_L - \vec{u}_M,$$

on a alors $\operatorname{div}(\vec{w}) = \operatorname{div}(\vec{u}_L) - \operatorname{div}(\vec{u}_M) = 0$ et comme par hypothèse on a $\vec{u}_L \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ et $\vec{u}_M \in L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ (et donc en particulier on a $\vec{u}_M \in L_t^\infty H_x^1 \subset L_t^\infty L_x^2$), alors on obtient sans problème que $\vec{w} \in L_t^\infty L_x^2$. Ainsi, en utilisant la structure hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$, on a les identités

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &= \|(\vec{u}_L - \vec{u}_M)(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|\vec{u}_L(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2}^2 - 2\langle \vec{u}_M(t, \cdot), \vec{u}_L(t, \cdot) \rangle_{L^2 \times L^2} \\ &= \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 - \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2\langle \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

A partir de cette identité, nous allons utiliser les contrôles dont on dispose sur les termes de droite pour pouvoir appliquer le lemme de Grönwall et ainsi obtenir l'unicité recherchée, *i.e.* $\vec{w} = 0$. Pour mener à bien ce programme, nous aurons besoin d'établir les deux identités suivantes.

Lemme 5.5.2 Dans le cadre des hypothèses du Théorème 5.5.1 ci-dessus, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_M \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \quad (5.51)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds, \quad (5.52)$$

Preuve. On aura besoin de rassembler quelques informations sur les fonctions \vec{u}_M et \vec{u}_L . On remarque que l'on a pour le terme \vec{u}_M :

- Puisque l'on travaille sur un intervalle de temps fini $[0, T]$, alors on a

$$\vec{u}_M \in L_t^2 H_x^1,$$

car tout simplement on écrit $\|\vec{u}_M\|_{L_t^2 H_x^1} \leq T^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}_M\|_{L_t^\infty H_x^1}$.

- Vérifions maintenant que l'on a $\partial_t \vec{u}_M \in L_t^2 H_x^{-1}$. En effet, comme on a l'équation

$$\partial_t \vec{u}_M = \Delta \vec{u}_M - \mathbb{P}((\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M) + \mathbb{P}(\vec{f}), \quad (5.53)$$

il suffira de vérifier que chacun des termes de droite appartient à l'espace $L_t^2 H_x^{-1}$. Comme on a l'information $\vec{u}_M \in L_t^2 \dot{H}_x^2$, on en déduit que l'on a $\Delta \vec{u}_M \in L_t^2 L_x^2 \subset L_t^2 H_x^{-1}$ et par hypothèse on a $\vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1} \subset L_t^2 H_x^{-1}$. Il ne reste plus qu'à étudier le terme non linéaire $\mathbb{P}((\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M)$. On observe que puisque $\vec{u}_M \in L_t^2 \dot{H}_x^2$ est une solution mild, alors par la Remarque 4.5 page 122 on a $\vec{u}_M \in L_t^2 L_x^\infty$, et donc $\vec{u}_M \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 L_x^\infty$, ce qui nous permet d'écrire par l'inégalité d'interpolation entre espaces de Lebesgue (voir l'inégalité (2.19), page 20) :

$$\|\vec{u}_M\|_{L_t^4 L_x^4} \leq C \|\vec{u}_M\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}_M\|_{L_t^2 L_x^\infty}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Ainsi, il vient alors

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}((\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M)\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} &\leq C \|(\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} = C \|\operatorname{div}(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M)\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \\ &\leq C \|\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \|\vec{u}_M\|_{L_t^4 L_x^4} \|\vec{u}_M\|_{L_t^4 L_x^4} < +\infty, \end{aligned}$$

et comme $L_t^2 \dot{H}_x^{-1} \subset L_t^2 H_x^{-1}$, on obtient bien que $\mathbb{P}((\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M) \in L_t^2 H_x^{-1}$. Donc, puisque tous les termes de droite de l'équation (5.53) ci-dessus appartiennent à l'espace $L_t^2 H_x^{-1}$, on obtient finalement

$$\partial_t \vec{u}_M \in L_t^2 H_x^{-1}.$$

Etudions maintenant les informations disponibles sur le terme \vec{u}_L .

- Par hypothèse on a $\vec{u}_L \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$, et comme l'intervalle de temps est borné, on a également $\vec{u}_L \in L_t^2 L_x^2$ puisque $\|\vec{u}_L\|_{L_t^2 L_x^2} \leq CT^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}_L\|_{L_t^\infty L_x^2}$, ce qui nous permet d'écrire que l'on a

$$\vec{u}_L \in L_t^2 H_x^1.$$

- Vérifions que l'on a $\partial_t \vec{u}_L \in L_t^2 H_x^{-2}$: en utilisant l'équation

$$\partial_t \vec{u}_L = \Delta \vec{u}_L - \mathbb{P}((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L) + \mathbb{P}(\vec{f}), \quad (5.54)$$

il suffira de montrer que chacun des termes à droite de celle-ci appartiennent à l'espace $L_t^2 H_x^{-2}$. On a bien $\Delta \vec{u}_L \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1} \subset L_t^2 H_x^{-1} \subset L_t^2 H_x^{-2}$ et de même pour la force extérieure on a $\vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1} \subset L_t^2 H_x^{-1} \subset L_t^2 H_x^{-2}$. Maintenant, pour le terme non linéaire $(\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L$ on écrit (en utilisant les inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ puis les inégalités de Hölder ainsi que les injections de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$) :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L)\|_{L_t^2 H_x^{-2}} &\leq \|\mathbb{P}((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L)\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-2}} \leq C \|\operatorname{div}(\vec{u}_L \otimes \vec{u}_L)\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-2}} \\ &\leq C \|\vec{u}_L \otimes \vec{u}_L\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq C \|\vec{u}_L \otimes \vec{u}_L\|_{L_t^2 L_x^{\frac{6}{5}}} \\ &\leq C \|\vec{u}_L\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_L\|_{L_t^2 L_x^6} \leq C \|\vec{u}_L\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\vec{u}_L\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} < +\infty, \end{aligned}$$

et on obtient bien $\mathbb{P}((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L) \in L_t^2 H_x^{-2}$. Ainsi, grâce à toutes ces estimations pour les termes de l'équation (5.54), nous avons obtenu

$$\partial_t \vec{u}_L \in L_t^2 H_x^{-2}.$$

Remarque 5.11 On notera que l'on a $\partial_t \vec{u}_M \in L_t^2 H_x^{-1} \subset L_t^2 H_x^{-2}$ et donc

$$\partial_t \vec{w} = \partial_t \vec{u}_L - \partial_t \vec{u}_M \in L_t^2 H_x^{-2},$$

et de même on a $\vec{w} = \vec{u}_L - \vec{u}_M \in L_t^2 H_x^1$.

Toutes ces contrôles montrent que les termes de droite des expressions (5.51) et (5.52) ci-dessus sont, individuellement, bien définis. Venons-en à l'obtention de ces identités : pour la deuxième d'entre elles puisqu'on a

$$\partial_t(\vec{u}_M \cdot \vec{u}_L) = \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L + \vec{u}_M \cdot \partial_t \vec{u}_L,$$

en intégrant par rapport à la variable spatiale il vient alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t(\vec{u}_M \cdot \vec{u}_L) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \partial_t \vec{u}_L dx \\ \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx &= \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} + \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}}, \end{aligned}$$

et encore une fois chacun de ces termes est bien défini par les informations obtenues ci-dessus. En intégrant maintenant par rapport à la variable de temps, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_{0,M} \cdot \vec{u}_{0,L} dx + \int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds,$$

mais les deux solutions \vec{u}_M et \vec{u}_L proviennent de la même donnée initiale \vec{u}_0 , ce qui donne bien l'identité (5.52) recherchée. L'identité (5.51) se vérifie de manière totalement similaire de sorte que les détails sont laissés au lecteur. ■

Maintenant, en utilisant la relation $\vec{w} = \vec{u}_L - \vec{u}_M$ (et comme on a $\vec{w} \in L_t^2 H_x^1$ ainsi que $\partial_t \vec{w} \in L_t^2 H_x^{-2}$ par la Remarque 5.11) on applique les identités (5.51) et (5.52) au dernier terme de (5.50) et l'on obtient

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &= \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 - \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2\langle \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{L^2 \times L^2} + 2\langle \vec{u}_M, \vec{u}_M \rangle_{L^2 \times L^2} \\ &= \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 - \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2 \left(\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \right) \\ &\quad + 2 \left(\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_M \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \right) \\ &= \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 - \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2 \left(\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \right), \end{aligned}$$

et nous allons étudier séparément chacun des termes ci-dessus.

- Pour le terme $\|\vec{u}_L\|_{L^2}^2$ on dispose par construction de l'inégalité d'énergie de Leray :

$$\|\vec{u}_L(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds - 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds. \quad (5.55)$$

- Pour le terme $\|\vec{u}_M\|_{L^2}^2$, étant donné que l'on dispose de plus de régularité (il s'agit d'une solution *mild* qui appartient à l'espace $L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$), nous avons en revanche l'identité

$$\|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u}_M \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds - 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds. \quad (5.56)$$

Pour s'en convaincre on considère l'équation (5.53) vérifiée par \vec{u}_M , on la multiplie par \vec{u}_M et on intègre en variable d'espace pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx - \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{P}((\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M) \cdot \vec{u}_M dx + \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{P}(\vec{f}) \cdot \vec{u}_M dx,$$

ce qui se réécrit par les propriétés du projecteur de Leray et par la condition de divergence nulle $\operatorname{div}(\vec{u}_M) = 0$ comme

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{u}_M dx,$$

or, on sait par les calculs précédents que $(\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \in L_t^2 H_x^{-1}$ et $\vec{u}_M \in L_t^2 H_x^1$, la quantité $\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx$ est donc bien définie, mais comme on a par ailleurs l'information $\vec{u}_M \in L_t^2 H_x^2$, on dispose d'assez de régularité pour faire des intégrations par parties (voir la formule (4.48), page 134) et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx = - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M + |\vec{u}_M|^2 \operatorname{div}(\vec{u}_M) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx,$$

ce qui nous permet d'affirmer que ce terme est nul et que l'on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{u}_M \cdot \vec{u}_M dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{u}_M dx,$$

donc par des intégrations par parties on a

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = -2 \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \langle \vec{f}, \vec{u}_M \rangle_{H^{-1} \times H^1},$$

et une intégration en variable de temps nous permet d'obtenir l'identité (5.56).

Remarque 5.12 *On notera ici que si l'on dispose de suffisamment de régularité (un cadre mild $L_t^\infty H_x^1 \cap L_t^2 \dot{H}_x^2$ par exemple), alors on obtient une égalité d'énergie et non pas une inégalité. Le cadre $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ n'offre pas ces conditions, on doit alors régulariser et passer à la limite pour obtenir une inégalité.*

- Pour le terme $\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds$, nous utilisons l'équation vérifiée par $\partial_t \vec{u}_M$. En effet, nous avons encore une fois $\partial_t \vec{u}_M = \Delta \vec{u}_M - \mathbb{P}((\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M) + \mathbb{P}(\vec{f})$, et donc nous écrivons, en utilisant le fait que \vec{w} est à divergence nulle :

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds &= \int_0^t \langle \Delta \vec{u}_M - \mathbb{P}((\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M) + \mathbb{P}(\vec{f}), \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds \\ &= - \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds - \int_0^t \langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds. \end{aligned}$$

- Finalement, pour le terme $\int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds$ nous utilisons la relation $\partial_t \vec{w} = \Delta \vec{w} - \mathbb{P}((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M)$ pour obtenir

$$\int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds = \int_0^t \langle \vec{u}_M, \Delta \vec{w} - \mathbb{P}((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M) \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds,$$

puis, comme \vec{u}_M est à divergence nulle nous avons, par les propriétés du projecteur de Leray :

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds &= - \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds - \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Ainsi, avec les expressions (5.55) et (5.57), nous revenons à l'identité (5.55) pour écrire

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq \left(\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds - 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds \right) \\ &\quad - \left(\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u}_M \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds - 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds \right) \\ &\quad + 2 \left(\int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds + \int_0^t \langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds \right) \\ &\quad + 2 \left(\int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \right), \end{aligned}$$

et nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds + 4 \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds. \end{aligned}$$

Mais, en utilisant le fait $\operatorname{div}(\vec{u}_M) = \operatorname{div}(\vec{u}_L) = 0$ on a les identités

$$\langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} = - \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}},$$

et comme on a $\langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds + 4 \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds, \end{aligned}$$

où nous avons fait apparaître artificiellement les deux dernières quantités. Ainsi on obtient,

par la bilinéarité de la quantité $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$:

$$\begin{aligned}
\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds + 4 \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds \\
&\quad - 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^{-2} \times H^2} ds + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \\
&\quad + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \\
&\leq -2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds + 4 \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds \\
&\quad + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds,
\end{aligned}$$

maintenant on remarque que l'on a l'identité $\langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} = -\langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}}$, qui s'obtient par une intégration par parties et en utilisant les propriétés de divergence nulle : on en déduit que $\langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} = 0$ et alors, il vient

$$\begin{aligned}
\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds + 4 \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds \\
&\quad + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds.
\end{aligned}$$

On note maintenant que par l'identité (5.50), appliquée à la quantité $\vec{\nabla} \otimes \vec{w}$, on obtient la majoration

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq -2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds.$$

A ce stade, on applique les inégalités de Hölder dans la dernière intégrale pour obtenir (on se rappellera que comme $\vec{u}_M \in L_t^2 \dot{H}_x^2$ est une solution mild, alors par la Remarque 4.5, page 122, on a $\vec{u}_M \in L_t^2 L_x^\infty$) :

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq -2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\vec{u}_M\|_{L^\infty} \|\vec{w}\|_{L^2} \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1} ds,$$

et en utilisant l'inégalité de Young pour la somme, nous avons

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq -2 \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_{L^2}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\vec{u}_M\|_{L^\infty}^2 \|\vec{w}\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1}^2 ds,$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{L^\infty}^2 \|\vec{w}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds.$$

Pour finir, on observe que l'on a (toujours par la Remarque 4.5, page 122) :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{L^\infty}^2 \|\vec{w}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds &\leq \|\vec{w}\|_{L_t^\infty L_x^2}^2 \|\vec{u}_M\|_{L_t^2 L_x^\infty}^2 \\
&\leq C(\|\vec{u}_L\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\vec{u}_M\|_{L_t^\infty L_x^2})^2 \|\vec{u}_M\|_{L_t^2 H_x^2}^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

d'autre part on a également $\int_0^t \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{L^\infty}^2 ds \leq \|\vec{u}_M\|_{L_t^2 L_x^\infty}^2 \leq C \|\vec{u}_M\|_{L_t^2 H_x^2}^2$, il suffit alors d'appliquer le Lemme 2.5.3 de Grönwall (voir la Remarque 2.9 page 36) pour obtenir l'identité $\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = 0$ ce qui nous donne l'unicité recherchée. ■

Ce théorème couplé avec l'inégalité forte d'énergie admet un corollaire intéressant qui nous donne une idée du comportement en temps long des solutions faibles de Leray.

Corollaire 5.5.3 *Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale à divergence nulle et considérons $\vec{f} \in L^2([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ une force extérieure. Alors toute solution \vec{u} du problème de Navier-Stokes*

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}), & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

qui a été obtenue par le Théorème 5.3.1 vérifie le comportement dans le temps suivant

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} = 0. \quad (5.58)$$

Preuve. Notre point de départ est une fonction \vec{u} , obtenue par le processus de régularisation de Leray, qui appartient à l'espace $L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ qui est solution des équations de Navier-Stokes. Observons qu'étant donné que \vec{u} appartient à l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$, alors, par interpolation entre ces espaces nous avons que la solution faible \vec{u} appartient également à l'espace $L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}$ et on en déduit sans problème que pour un certain $\varepsilon_0 > 0$, l'ensemble des temps t tels que $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \geq \varepsilon_0$ est de mesure finie (cas contraire la fonction $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}_x^{\frac{1}{2}}}^4$ ne serait pas intégrable). A présent, on note que l'on a par hypothèse $\vec{f} \in L_t^2 L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$, donc par interpolation on a aussi $\vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-\frac{1}{2}}$, et on en déduit que l'on a la limite :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 ds = 0.$$

Ainsi, comme le complémentaire de l'ensemble des points de Lebesgue de l'application en temps $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ est de mesure nulle, il existe un point $t_0 > 0$ tel que l'on a :

- $\|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{H^1} < +\infty$, car on est $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$, donc $\vec{u}(t, \cdot) \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ et $\vec{u}(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ presque partout,
- $\|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon_0$,
- $\int_{t_0}^{+\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 ds < \varepsilon_0^2$,
- \vec{u} est une solution de Leray sur l'intervalle de temps $[t_0, +\infty[$, en particulier, par le Théorème 5.4.1, pour tout $t \in]t_0, +\infty[$ on a l'inégalité

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_{t_0}^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_{t_0}^t \langle f(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds.$$

Rappelons maintenant que, par le Théorème 4.6.2, page 132, si l'on a pour un certain temps $t_0 > 0$ l'information $\vec{u}(t_0, \cdot) \in H^1(\mathbb{R}^3)$ et $\vec{f} \in L^2([t_0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([t_0, +\infty[, \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$

et si de plus on a les conditions

$$\|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{+\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}} ds < \varepsilon_0^2,$$

pour une constante $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petite, alors le problème de Navier-Stokes ci-dessus avec les données initiales $(\vec{u}(t_0, \cdot), \vec{f})$ admet une solution *mild* globale \vec{u}_M définie sur l'intervalle de temps $[t_0, +\infty[$ qui appartient à l'espace $\mathcal{C}([t_0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([t_0, +\infty[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

Ainsi, dans ce cadre nous pouvons appliquer le Théorème 5.5.1 d'unicité fort-faible et nous avons alors que la solution faible de Leray \vec{u} coïncide sur $[t_0, +\infty[$ avec la solution *mild* \vec{u}_M qui appartient à l'espace $\mathcal{C}([t_0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([t_0, +\infty[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

De la sorte, pour démontrer la formule (5.58), il suffira de vérifier que l'on a cette propriété pour la solution *mild* \vec{u}_M :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} = 0.$$

Ainsi, pour $t_0 < \tau < t$ on peut écrire

$$\vec{u}_M(t, x) = \mathbf{g}_{t-\tau} * \vec{u}_M(\tau, x) - \int_{\tau}^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M))(s, x) ds + \int_{\tau}^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds,$$

et nous avons

$$\|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|\mathbf{g}_{t-\tau} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} + \left\| \int_{\tau}^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M)) ds \right\|_{L^2} + \left\| \int_{\tau}^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds \right\|_{L^2},$$

en utilisant les calculs de la Proposition 5.1.2, page 148, et la continuité du projecteur de Leray, nous pouvons écrire

$$\|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|\mathbf{g}_{t-\tau} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} + C \left(\int_{\tau}^t \|(\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(\int_{\tau}^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

en utilisant l'inclusion d'espace $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3) \subset \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ et les inclusions $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3)$, nous avons les majorations

$$\|(\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M\|_{\dot{H}^{-1}} \leq C \|(\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq C \|\vec{u}_M\|_{L^3} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2} \leq C \|\vec{u}_M\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \|\vec{u}_M\|_{\dot{H}^1},$$

et à partir de ces estimations, il vient :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} &\leq \|\mathbf{g}_{t-\tau} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} + C \left(\int_{\tau}^t \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(\int_{\tau}^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\mathbf{g}_{t-\tau} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} + C \sup_{s > t_0} \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\tau}^t \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(\int_{\tau}^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant faire tendre $t \rightarrow +\infty$ dans cette estimation et pour cela on remarque tout d'abord que l'on a par convergence dominée la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{g}_{t-\tau} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} = 0$, en effet, en passant en variable de Fourier, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{g}_{t-\tau} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2}^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2(t-\tau)|\xi|^2} |\widehat{\vec{u}_M}(\tau, \xi)|^2 d\xi = 0,$$

nous pouvons alors écrire :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \sup_{s > t_0} \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\tau}^{+\infty} \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(\int_{\tau}^{+\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour finir il suffit maintenant de faire tendre τ vers $+\infty$ pour obtenir que l'on a effectivement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} = 0,$$

étant donné que l'on a l'unicité fort-faible entre la solution *mild* \vec{u}_M et la solution faible de Leray \vec{u} , on en déduit sans problème le comportement annoncé dans l'expression (5.58) et la preuve du corollaire est donc terminée. ■

Ce résultat nous indique que *toutes* les solutions faibles de Leray (obtenues par le Théorème 5.3.1, page 153) tendent en norme L_x^2 à zéro lorsque le temps tends à l'infini et on obtient de cette manière l'unicité des solutions en temps grand. Ainsi, si l'on part de données grandes, nous sommes en mesure d'obtenir l'existence et l'unicité de solutions des équations de Navier-Stokes en temps petit et en temps (très) grand, mais entre ces deux extrêmes on ne dispose que de la notion de solutions faibles de Leray pour lesquelles on ne sait (toujours) pas (au XXIème siècle) si elles sont uniques.

5.6 Le cas de la dimension $n = 2$

Dans l'analyse des équations de Navier-Stokes, il existe une différence fondamentale entre la dimension $n = 3$ et la dimension $n = 2$. Dans toutes les pages précédentes nous nous sommes focalisé uniquement sur la dimension $n = 3$ (qui est la plus intéressante, non seulement du point de vue physique, mais aussi du point de vue mathématique) et nous avons obtenu, soit des solutions classiques ou *mild* (uniques mais non globales en temps pour des données grandes), soit des solutions faibles de Leray (globales en temps mais non uniques). Nous avons vu également que les différents arguments de point fixe induisaient, *par construction*, une relation entre la taille des données initiales et la constante de continuité de l'application bilinéaire en jeu, et cette relation est indépendante de la dimension : pour s'en convaincre il suffit de voir le résultat de base de cette approche qui est donné par le Théorème 4.1.1, page 104. De plus, nous avons vu dans ce chapitre que pour *prolonger* le temps d'existence, on peut exploiter une inégalité d'énergie, mais nous savons également que les quantités qui interviennent dans cette inégalité d'énergie ne permettent pas de fermer l'argument de point fixe et c'est précisément ici qu'intervient la dimension (voir la Section 5.1, page 149). En effet, par l'inégalité d'énergie on contrôle la quantité $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$, et alors, si l'on se place en dimension $n = 3$, par les inégalités de Sobolev on obtient une information dans l'espace $L^6(\mathbb{R}^3)$ ce qui n'est pas suffisant comme on a pu le constater dans les calculs réalisés à la page 149.

La situation est totalement différente si l'on se place en dimension $n = 2$. En effet, si l'on étudie les quantités $\|\cdot\|_{\dot{H}^s}$ pour $0 < s < 1$, alors par les inégalités de Sobolev énoncées dans le Théorème 2.4.6, page 30, les espaces de Sobolev $\dot{H}^s(\mathbb{R}^2)$ s'injectent continûment dans des espaces de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^2)$ pour des indices q différents à ceux utilisés jusqu'à présent : nous avons alors toute une famille d'inégalités qui peuvent s'exploiter de manière naturelle comme nous allons le voir dans les pages ci-dessous.

A) Les équations de Navier-Stokes en dimension $n = 2$

Les lignes qui suivent ont pour but de mettre en lumière les différences et les similitudes entre la dimension $n = 3$ étudiée jusqu'à présent et la dimension $n = 2$. Ainsi, si $\vec{u} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs, si $p : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles et si $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une force extérieure, alors les équations de

Navier-Stokes en dimension $n = 2$ ont la formulation

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}) = \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 = 0, \\ \begin{bmatrix} \partial_t u_1 \\ \partial_t u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1 \partial_{x_1} u_1 + u_2 \partial_{x_2} u_1 \\ u_1 \partial_{x_1} u_2 + u_2 \partial_{x_2} u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial_{x_1} p \\ \partial_{x_2} p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Ce problème se réécrit bien sûr comme

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0.$$

En dimension $n = 2$, nous avons également les définitions suivantes : si \vec{a} et \vec{b} sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 , le produit tensoriel $\vec{a} \otimes \vec{b}$ est donné par

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{bmatrix}.$$

De plus si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ est la matrice 2×2 associée à un tenseur, on définit la divergence de ce tenseur par la formule

$$\operatorname{div}(A) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} a_{11} + \partial_{x_2} a_{12} \\ \partial_{x_1} a_{21} + \partial_{x_2} a_{22} \end{bmatrix}.$$

En particulier, si \vec{f} et \vec{g} sont deux champs de vecteurs à divergence nulle, on a bien l'identité

$$(\vec{f} \cdot \vec{\nabla}) \vec{g} = \operatorname{div}(\vec{g} \otimes \vec{f}).$$

Le projecteur de Leray se définit de la même manière : $\mathbb{P}(\vec{f}) = \vec{f} + \vec{\nabla} \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ et toutes ses propriétés se maintiennent dans \mathbb{R}^2 . Comme on peut le voir, les objets vectoriels sont essentiellement les mêmes en 3D ou en 2D.

B) Le cas de données initiales petites

Lorsque la donnée initiale \vec{u}_0 et la force extérieure \vec{f} sont suffisamment petites, nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.6.1 Soit $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une donnée initiale telle que $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et soit $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une force extérieure telle que l'on ait $\vec{f} \in L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2))$ avec $0 < T^* \leq +\infty$. Si on a l'estimation

$$\|\vec{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\vec{f}\|_{L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2))} < \varepsilon,$$

pour $\varepsilon > 0$ un réel suffisamment petit, alors il existe une unique solution \vec{u} , globale en temps qui appartient à l'espace $L^\infty([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ du problème

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}), & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x). \end{cases}$$

Démonstration. On considère la formulation *mild*

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u})(s, x) ds + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds,$$

et on cherche à appliquer un argument de point fixe dans l'espace

$$E = L^\infty([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)),$$

muni de la norme

$$\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|\cdot\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}.$$

On commence par remarquer que si $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ alors $\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L^2} \leq \|\mathfrak{g}_t\|_{L^1} \|\vec{u}_0\|_{L^2} = \|\vec{u}_0\|_{L^2}$. De même, on a $\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{\dot{H}^1} \leq C \|\vec{u}_0\|_{L^2}$, et cette estimation est une conséquence directe du Lemme 4.4.3, page 115, dont la démonstration ne fait pas intervenir la dimension. On obtient alors

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_E \leq C_1 \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Pour la force extérieure on a également l'inégalité

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_E \leq C_2 \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}, \quad (5.59)$$

en effet, on notera que la dimension n'intervient pas dans la vérification de la Proposition 5.1.2 donnée page 148 et la majoration ci-dessus suit alors les mêmes arguments.

Finalement, pour le terme bilinéaire on a

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})(s, \cdot) ds \right\|_E \leq C_3 \|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_E.$$

Au vu de la majoration (5.59) précédente, il vient

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})(s, \cdot) ds \right\|_E \leq C \|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}},$$

et il suffit de vérifier que l'on a $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$. Nous écrivons alors

$$\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} = \|\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{v})\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \simeq \|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 L_x^2},$$

et par les inégalités de Hölder en temps et en espace on a

$$\|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq \|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4} \|\vec{v}\|_{L_t^4 L_x^4}.$$

Maintenant, par les inégalités de Sobolev en dimension $n = 2$ (voir le Théorème 2.4.6, page 30), si $\vec{u}(t, \cdot) \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ nous avons

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^4} \leq C \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}},$$

et on remarque que l'on a, par interpolation (voir la Proposition 2.4.8, page 31)

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq C \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.60)$$

ainsi on a

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^4}^4 \leq C \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^4 \leq C \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2,$$

et en intégrant par rapport au temps, il vient

$$\|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.61)$$

On a donc

$$\|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq \|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4} \|\vec{v}\|_{L_t^4 L_x^4} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}},$$

ce qui, compte tenu de la définition de la norme $\|\cdot\|_E$ nous donne la majoration

$$\|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_E.$$

Nous avons donc obtenu les inégalités

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})(s, \cdot) ds \right\|_E \leq C \|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq C_3 \|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_E. \quad (5.62)$$

Ainsi, si nous avons la relation

$$C_1 \|\vec{u}_0\|_{L^2} + C_2 \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} < \frac{1}{4C_3}, \quad (5.63)$$

alors, en utilisant l'hypothèse de petitesse des données, la condition ci-dessus est vérifiée et nous sommes en mesure (en dimension $n = 2$) de fermer l'argument de point fixe dans l'espace fonctionnel $E = L^\infty([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ (voir le Théorème 4.1.1, page 104), ce qui termine la preuve du Théorème 5.6.1. \blacksquare

Remarque 5.13 *On notera ici que dans la condition (5.63) qui permet de fermer l'argument de point fixe, le temps n'intervient pas contrairement à ce qui se passe en dimension 3. En effet, tant pour les solutions mild de Fujita-Kato (voir la condition (4.33) page 122) que pour les solutions régularisées de Leray (voir la condition (5.24), page 157), nous avons une dépendance par rapport à la variable temporelle. Dans les deux cas le temps d'existence était relié à la taille des données initiales mais ici, grâce à l'estimation (5.63) nous pouvons appliquer directement le théorème de point fixe dans l'espace $E = L^\infty([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ tout entier : tant que la force extérieure est correctement définie et suffisamment petite (ainsi que la donnée initiale), on peut construire des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension 2.*

C) Le cas de données initiales grandes

On notera qu'une application directe des estimations de Sobolev en dimension $n = 2$ permet de fermer sans aucun problème l'argument de point fixe, mais uniquement pour des données petites (avec l'avantage de solutions globales en temps). Pour traiter le cas de données initiales grandes, il sera nécessaire de modifier légèrement nos arguments. On commencera par le lemme qui suit.

Lemme 5.6.2 *Soit $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$. Alors pour tout $0 < t < T \leq +\infty$ on a l'estimation*

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Preuve. On écrit tout simplement

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}}^4 &= \int_0^T \|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{\dot{H}_x^{\frac{1}{2}}}^2 \|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{\dot{H}_x^{\frac{1}{2}}}^2 dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi| e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\chi| e^{-2t|\chi|^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\chi)|^2 d\chi \right) dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} |\xi| |\chi| e^{-2t(|\xi|^2 + |\chi|^2)} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 |\widehat{\vec{u}_0}(\chi)|^2 dt d\xi d\chi, \end{aligned}$$

et avec le changement de variable $\tau = 2t(|\xi|^2 + |\chi|^2)$, il vient

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}}^4 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi||\chi|}{2(|\xi|^2 + |\chi|^2)} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 |\widehat{\vec{u}_0}(\chi)|^2 d\xi d\chi,$$

mais puisque $|\xi||\chi| \leq 2(|\xi|^2 + |\chi|^2)$, on a

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}}^4 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\chi)|^2 d\chi \right) = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^4,$$

ce qui nous donne bien l'estimation recherchée. \blacksquare

Voici une conséquence de ce résultat :

Corollaire 5.6.3 *Soit $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $\kappa_0 > 0$ un réel, il existe alors une constante $\rho_0 = \rho(\kappa_0, \vec{u}_0) > 0$ telle que pour $0 < t < T$ on ait l'estimation*

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{C}{\kappa_0} + C(\rho_0^2 T)^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Preuve. On commence par fixer un réel $\rho_0 = \rho(\kappa_0, \vec{u}_0)$ tel que

$$\left(\int_{\{|\xi| \geq \rho_0\}} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\kappa_0}.$$

On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 &= \int_{\{|\xi| \geq \rho_0\}} |\xi| e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi + \int_{\{|\xi| < \rho_0\}} |\xi| e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\xi| e^{-2t|\xi|^2} \mathbf{1}_{\{|\xi| \geq \rho_0\}} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi + \rho_0 \int_{\{|\xi| < \rho_0\}} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \left\| \mathfrak{g}_t * \left(\mathbf{1}_{\{|\cdot| \geq \rho_0\}} |\widehat{\vec{u}_0}(\cdot)| \right)^\vee \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 + \rho_0 \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\int_0^T \|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^4 dt \leq C \left\| \mathfrak{g}_t * \left(\mathbf{1}_{\{|\cdot| \geq \rho_0\}} |\widehat{\vec{u}_0}(\cdot)| \right)^\vee \right\|_{L_t^4 \dot{H}_t^{\frac{1}{2}}}^4 + C \rho_0^2 T \|\vec{u}_0\|_{L^2}^4,$$

et en utilisant la conclusion du lemme précédent pour estimer le premier terme à droite de l'estimation ci-dessus, il vient

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{|\xi| \geq \rho_0\}} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + C(\rho_0^2 T)^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}_0\|_{L^2} \leq \frac{C}{\kappa_0} + C(\rho_0^2 T)^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}_0\|_{L^2},$$

ce qui termine la preuve du corollaire. \blacksquare

Nous aurons besoin d'un résultat similaire pour la force extérieure.

Lemme 5.6.4 *Soit $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction qui appartient à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$.*

1) *Nous avons l'estimation*

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}},$$

2) Si $\kappa_1 > 0$ est un réel, il existe une constante $\rho_1 = \rho(\kappa_1, \vec{f}) > 0$ telle que pour $0 < t < T$ on ait l'estimation

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{C}{\kappa_1} + C \rho_1^3 T^{\frac{3}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

Preuve. La vérification du premier point se base sur l'inégalité (5.60), à partir de laquelle on obtient sans difficulté la majoration générique suivante :

$$\|\vec{\varphi}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq C \|\vec{\varphi}\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{\varphi}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}}.$$

Il vient alors :

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq C \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}},$$

et en utilisant le contrôle (5.59) sur les normes $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 \dot{H}_x^1$, on obtient sans problème

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq C \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

Pour le deuxième point, on fixe un réel $\rho_1 = \rho(\kappa_1, \vec{f})$ tel que

$$\left(\int_0^T \int_{\{|\xi| \geq \rho_1\}} \frac{1}{|\xi|^2} |\widehat{\vec{f}}(t, \xi)|^2 d\xi dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\kappa_1}, \quad (5.64)$$

et on écrit

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi| \left| \left(\int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right)^\wedge(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi| \left| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \widehat{\mathbb{P}(\vec{f})}(s, \xi) ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En introduisant la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\{|\xi| \geq \rho_1\}}$ et en utilisant les propriétés du projecteur de Leray en variable de Fourier (voir la formule (4.6), page 107) il vient,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi| \left| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \left(Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right) \cdot \widehat{\vec{f}} \mathbb{1}_{\{|\xi| \geq \rho_1\}}(s, \xi) ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi| \left| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \left(Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right) \cdot \widehat{\vec{f}} \mathbb{1}_{\{|\xi| < \rho_1\}}(s, \xi) ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.65) \end{aligned}$$

et pour la dernière intégrale ci-dessus on a, par l'inégalité de Minkowski continue :

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi| \left| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \left(Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right) \cdot \widehat{\vec{f}} \mathbb{1}_{\{|\xi| < \rho_1\}}(s, \xi) ds \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi| \mathbb{1}_{\{|\xi| < \rho_1\}} e^{-2(t-s)|\xi|^2} \left| Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right|^2 |\widehat{\vec{f}}(s, \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} ds, \end{aligned}$$

puis, en introduisant le poids $\frac{1}{|\xi|^2}$ on obtient

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^3 \mathbf{1}_{\{|\xi| < \rho_1\}} e^{-2(t-s)|\xi|^2} \left| Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right|^2 \frac{|\widehat{f}(s, \xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \rho_1^3 \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right|^2 \frac{|\widehat{f}(s, \xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} ds, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathbf{1}_{\{|\xi| < \rho_1\}} e^{-2(t-s)|\xi|^2} \leq 1$ et $0 < t < T$. Maintenant, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz en variable de temps on a

$$\begin{aligned} \rho_1^3 \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right|^2 \frac{|\widehat{f}(s, \xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} ds &\leq \rho_1^3 T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left| Id_{3 \times 3} - \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right|^2 \frac{|\widehat{f}(s, \xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \rho_1^3 T^{\frac{1}{2}} \|\mathbb{P}(\vec{f})\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq C \rho_1^3 T^{\frac{1}{2}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}, \end{aligned}$$

et avec cette majoration, en revenant à l'expression (5.65) on a

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P} \left(\widehat{f} \mathbf{1}_{\{|\xi| \geq \rho_1\}} \right)^\vee ds \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + C \rho_1^3 T^{\frac{1}{2}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

On construit maintenant la norme L^4 en variable de temps dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P} \left(\widehat{f} \mathbf{1}_{\{|\xi| \geq \rho_1\}} \right)^\vee ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} + C \rho_1^3 T^{\frac{3}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}},$$

et donc, par le premier point de ce lemme nous avons

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} &\leq C \left\| \left(\widehat{f} \mathbf{1}_{\{|\xi| \geq \rho_1\}} \right)^\vee \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} + C \rho_1^3 T^{\frac{3}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \\ &\leq C \left(\int_0^T \int_{\{|\xi| \geq \rho_1\}} \frac{1}{|\xi|^2} |\widehat{f}(t, \xi)|^2 d\xi dt \right)^{\frac{1}{2}} + C \rho_1^3 T^{\frac{3}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \\ &\leq \frac{C}{\kappa_1} + C \rho_1^3 T^{\frac{3}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le contrôle (5.64). La preuve du deuxième point de ce lemme est donc terminée. \blacksquare

Avec ces résultats, nous allons étudier maintenant comment obtenir des solutions globales en temps pour les équations de Navier-Stokes en dimension 2.

Théorème 5.6.5 Soit $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une donnée initiale qui appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ et telle que $\operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0$ et soit $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une force extérieure qui appartient à l'espace $L^2([0, +\infty[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2))$.

Alors il existe une unique solution globale en temps $\vec{u}(t, x)$ des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}), & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \end{cases} \quad (5.66)$$

qui appartient à l'espace $L^4([0, +\infty[, \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ et qui appartient également à l'espace

$$C([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)).$$

De plus cette solution vérifie l'égalité d'énergie

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{\dot{H}^{-1} \times \dot{H}^1} ds.$$

Démonstration. On commence par considérer la formulation intégrale des équations de Navier-Stokes

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds$$

et par appliquer un argument de point fixe dans l'espace $L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}$. On remarque alors que l'on a les estimations suivantes :

- avec le Corollaire 5.6.3 :

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{C}{\kappa_0} + C(\rho_0^2 T)^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}_0\|_{L^2}. \quad (5.67)$$

- en utilisant le deuxième point du Lemme 5.6.4 :

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot)) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{C}{\kappa_1} + C\rho_1^3 T^{\frac{3}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}. \quad (5.68)$$

- En utilisant l'inégalité $\|\cdot\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq C \|\cdot\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\cdot\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}}$ qui provient de l'estimation (5.60), on écrit

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} &\leq C \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne avec les majorations (5.62) :

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq C \|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq C \|\vec{u} \otimes \vec{v}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4} C \|\vec{v}\|_{L_t^4 L_x^4},$$

et en utilisant les injections de Sobolev $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2) \subset L^4(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v})(s, \cdot) ds \right\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq \mathfrak{C} \|\vec{u}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \|\vec{v}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.69)$$

Ainsi, pour appliquer le Théorème 4.1.1 de contraction de Banach-Picard donné page 104, à partir des estimations (5.67), (5.68) et (5.69) nous devons vérifier la condition

$$\frac{C}{\kappa_0} + C(\rho_0^2 T)^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}_0\|_{L^2} + \frac{C}{\kappa_1} + C\rho_1^3 T^{\frac{3}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} < \frac{1}{4\mathfrak{C}},$$

et donc, si l'on fixe les constantes κ_0 et κ_1 telles que l'on ait $\frac{C}{\kappa_0} \leq \frac{1}{16\mathfrak{C}}$ et $\frac{C}{\kappa_1} \leq \frac{1}{16\mathfrak{C}}$, la condition précédente s'écrit

$$C(\rho_0^2 T)^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}_0\|_{L^2} + C\rho_1^3 T^{\frac{3}{4}} \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} < \frac{1}{8\mathfrak{C}}. \quad (5.70)$$

On observe alors que si les données sont grandes (c'est à dire si l'on a $\|\vec{u}_0\|_{L^2} \gg 1$ et $\|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \gg 1$), alors le temps d'existence T doit être petit pour que cette relation ci-dessus ait lieu et on obtient de la sorte une unique solution des équations de Navier-Stokes dans l'espace de résolution $L^4([0, T[, \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))$ qui s'écrit

$$\vec{u}(t, x) = \mathbf{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds - \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds,$$

et qui appartient donc à l'espace $L^\infty([0, T[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0, T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$: en effet, sous cette expression, la vitesse \vec{u} vérifie les estimations :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1} &\leq \|\mathbf{g}_t * \vec{u}_0\|_{L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1} + \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\vec{f})(s, x) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathbf{g}_{t-s} * \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(s, x) ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1} \\ &\leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2} + C\|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} + C\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}, \end{aligned}$$

et puisqu'on a les majorations

$$\|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \leq C\|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C\|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4} \|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4},$$

avec les estimations (5.61) données page 187, on obtient bien que la vitesse \vec{u} appartient à l'espace $L^\infty([0, T[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0, T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ et de plus, par cette même formulation intégrale on obtient sans problème la continuité de la fonction $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$.

Il s'agit maintenant de prolonger le temps d'existence de ces solutions et pour cela on utilise la structure des équations de Navier-Stokes : ainsi, en multipliant les équations

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) + \mathbb{P}(\vec{f}),$$

par \vec{u} et en intégrant en variable d'espace, il vient

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \vec{u}(t, x) \cdot \vec{u}(t, x) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})(t, x) \cdot \vec{u}(t, x) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(\vec{f})(t, x) \cdot \vec{u}(t, x) dx,$$

ce qui s'écrit avec les propriétés du projecteur de Leray

$$\frac{d}{dt} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = -2 \int_{\mathbb{R}^2} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t, x)|^2 dx - 2 \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(t, x) \cdot \vec{u}(t, x) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} \vec{f}(t, x) \cdot \vec{u}(t, x) dx,$$

et par une intégration en la variable de temps, il vient

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds &= \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \vec{f}(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds, \end{aligned}$$

Cette expression est pour l'instant purement formelle, mais contrairement au cas de la dimension 3, nous pouvons justifier sans problème cette écriture : en effet, nous savons par les calculs précédents que l'on a $\vec{u}_0 \in L^2$, $\vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$ et $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$, ce qui donne un sens à tous les termes ci-dessus mis à part la quantité $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds$ que l'on étudie composante par composante : cela revient à traiter des termes de la forme

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} u_j(s, x) \partial_{x_j} u_k(s, x) u_\ell(s, x) dx ds,$$

pour $1 \leq j, k, \ell \leq 3$, et par les inégalités de Hölder en temps et en espace on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} u_j(s, x) \partial_{x_j} u_k(s, x) u_\ell(s, x) dx ds \right| &\leq \|u_j\|_{L_t^4 L_x^4} \|\partial_{x_j} u_k\|_{L_t^2 L_x^2} \|u_\ell\|_{L_t^4 L_x^4} \\ &\leq C \|u_j\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|u_j\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}_k\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \|u_\ell\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|u_\ell\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}} < +\infty, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le contrôle (5.61) qui n'est valable qu'en dimension 2.

Ainsi, puisque la quantité trilineaire $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds$ est bien définie, on peut utiliser les identités vectorielles et la propriété $\operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds \\ &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\vec{u}(s, x)|^2 \operatorname{div}(\vec{u})(s, x) dx ds \\ &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u})(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds. \end{aligned}$$

et à partir de cette identité on obtient alors que la quantité $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds$ est en réalité nulle, ce qui nous permet d'obtenir l'égalité d'énergie

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \vec{f}(s, x) \cdot \vec{u}(s, x) dx ds, \quad (5.71)$$

et nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, x)|^2 dx ds &\leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \\ &\leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}^2 + \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^2, \end{aligned}$$

ce qui nous donne le contrôle uniforme en temps suivant

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}^2 < +\infty,$$

qui nous indique que les normes $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 \dot{H}_x^1$ sont bien préservées dans le temps.

Ainsi, à l'instant T d'existence maximal dans l'espace $L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}$, on peut prendre comme donnée initiale la quantité $\|\vec{u}(T, \cdot)\|_{L^2}$ (car cette application est continue) et réappliquer les arguments ci-dessus pour obtenir l'existence d'une unique solution $\vec{u} \in L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}$ dans un intervalle de temps $[T, T + \delta]$. Etant donné que les normes impliquées sont préservées, nous sommes donc en mesure, de proche en proche, d'obtenir des solutions des équations de Navier-Stokes qui seront globales en temps dans l'espace $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 \dot{H}_x^1$. ■

Remarque 5.14

- 1) On remarquera que le point fixe est réalisé ici dans l'espace $L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}$ qui est un espace plus grand que l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ (on a bien $\|\vec{u}\|_{L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}} \leq \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}}$, voir les estimations (5.60)-(5.61) données page 187), l'utilisation de cet espace est uniquement motivée par la nécessité d'introduire une dépendance par rapport à la variable de temps afin de considérer des données initiales grandes.
- 2) En dimension 2 on a le contrôle (5.61) qui nous donne suffisamment d'intégrabilité pour obtenir l'égalité d'énergie (5.71) : il n'est alors pas nécessaire de réaliser une régularisation de l'équation comme dans le cas 3D, il n'y a donc pas de passage à la limite à considérer.

L'introduction de cet espace $L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}$ correspond au besoin de faire apparaître une dépendance par rapport au temps, non pas dans la constante de continuité de l'application bilinéaire, mais plutôt dans les estimations des données initiales (voir la condition (5.70)). On pourrait croire que cette dépendance par rapport au temps est très gênante, mais son avantage est qu'elle nous permet de considérer des données initiales grandes : le prix à payer étant un temps d'existence petit, toutefois ce problème est finalement très relatif car grâce à l'inégalité d'énergie on peut prolonger le temps d'existence des solutions et l'on obtient ainsi des solutions uniques qui sont globales en temps (en dimension 2).

Pour finir, étudions les propriétés de la pression dans le cadre de la dimension 2. Nous avons toujours la même équation pour la pression

$$p = \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{f}) \right), \quad (5.72)$$

et alors il vient :

Corollaire 5.6.6 Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une donnée initiale à divergence nulle et soit une force extérieure $\vec{f} \in L^2([0, T^*[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2))$ avec $T^* > 0$. Si $\vec{u} \in L^\infty([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2))$ est une solution des équations (5.66) alors la pression p donnée à partir de l'équation (5.72) appartient à l'espace $L^2([0, T^*[, L^2(\mathbb{R}^2))$.

Preuve. On écrit

$$\begin{aligned} \|p(t, \cdot)\|_{L^2} &\leq \left\| \frac{1}{(-\Delta)} \left(\operatorname{div}(\operatorname{div}(\vec{u}(t, \cdot) \otimes \vec{u}(t, \cdot))) \right) \right\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \vec{f}(t, \cdot) \right\|_{L^2} \\ &\leq \|\vec{u}(t, \cdot) \otimes \vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} + \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \vec{f}(t, \cdot) \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\|p(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^4} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^4} + \|\vec{f}(t, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}},$$

puis, en prenant la norme L^2 en variable de temps :

$$\|p\|_{L_t^2 L_x^2} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4} \|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4} + \|\vec{f}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^{-1}}.$$

Cette quantité est bien bornée car, d'une part, en dimension 2 nous avons l'estimation (5.61) :

$$\|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1}^{\frac{1}{2}}.$$

et la solution de Leray \vec{u} appartient à l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ et, d'autre part, la force extérieure appartient à l'espace $L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$: on a donc bien le contrôle annoncé pour la pression p . ■

Notes et compléments

Les solutions construites par J. Leray en 1934 constituent, rétrospectivement, une avancée fondamentale dans la compréhension des équations de Navier-Stokes et elles sont le point de départ de la plupart des axes de recherche actuels sur le sujet. Rappelons que ces solutions se caractérisent par les trois points suivants : il s'agit tout d'abord de solutions faibles (les informations sont mesurées au sens faible dans les deux variables, temps et espace), ce sont en plus des solutions globales en temps (ces solutions ont été construites pour cela) et, finalement, elles vérifient l'inégalité d'énergie de Leray qui donne des informations très utiles sur cette équation. Toutefois, ces solutions présentent un inconvénient majeur : nous ne savons pas si elles sont uniques et l'étude de l'unicité des solutions de Leray est un défi mathématique particulièrement difficile (il s'agit d'un problème du millénaire!).

Indiquons pour finir qu'il est possible de considérer des solutions des équations de Navier-Stokes encore plus générales (mais avec moins de propriétés, voir par exemple le livre [45]) mais leur étude déborde du cadre de cet ouvrage.

5.7 Exercices

Exercice 5.1 Soit $0 < \theta_0, \theta_1 < 1$. On définit les indices p_0, q_0, p_1 et q_1 par les relations :

$$\frac{1}{q_0} = \frac{\theta_0}{2} + \frac{1 - \theta_0}{6}, \quad \frac{1}{p_0} = \frac{1 - \theta_0}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_1} = \frac{\theta_1}{2} + \frac{1 - \theta_1}{6}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1 - \theta_1}{2},$$

on remarquera qu'il s'agit des conditions d'interpolation entre les espaces $L_t^\infty L_x^2$ et $L_t^2 L_x^6$ données dans (5.9), page 150.

1. Montrer que si l'on souhaite avoir la relation $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2}$ (donnée dans l'expression (5.8), page 149) alors cela implique que l'on doit avoir $\theta_0 + \theta_1 = 1$.
2. Vérifier que la condition $\theta_0 + \theta_1 = 1$ est incompatible avec la condition $\frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{2}$.

Ces calculs montrent que si $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 L_x^6$, alors on ne peut avoir $\vec{u} \in L_t^{p_0} L_x^{q_0}$ et $\vec{u} \in L_t^{p_1} L_x^{q_1}$ où l'on a $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 5.2 Soit $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ une solution de Leray des équations de Navier-Stokes. On suppose en plus que l'on a $\vec{u} \in L_t^4 L_x^4$.

1. A l'aide de l'exercice précédent, vérifier que la condition $L_t^4 L_x^4$ demandée ici est une vraie hypothèse supplémentaire qui ne peut pas se déduire à partir du cadre des solutions faibles de Leray.

2. Montrer que dans ce cas, la quantité $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \cdot \vec{u}(t, x) dx dt$ est bien définie. On vérifiera, par exemple, que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \cdot \vec{u}(t, x) dx dt \leq \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \|\vec{u}\|_{L_t^4 L_x^4}.$$

3. Avec l'estimation ci-dessus, étudier la quantité définie dans l'expression (5.26), page 158. Avec l'information $L_t^4 L_x^4$, est-il nécessaire de régulariser l'équation pour donner un sens à la quantité $\langle (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}, \vec{u} \rangle$?

4. Vérifier que dans le cadre considéré ici, on a bien $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \cdot \vec{u}(t, x) dx dt = 0$.

Exercice 5.3 Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, à divergence nulle. On suppose qu'il existe une solution \vec{u} de l'équation

$$\vec{u}(t, x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * (\mathbb{P} \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}))(s, x) ds$$

telle que $\vec{u} \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^4([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

1. Montrer que pour $f \in H^1(\mathbb{R}^3)$ on a $\|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}}$. En déduire que si l'on a $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ alors $\mathfrak{g}_t * f_0 \in L_t^4 \dot{H}_x^{\frac{1}{2}}$.

2. En déduire que si $g \in L^{\frac{4}{3}}([0, T[, \dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$ alors $\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * g(s, x) ds \in L^\infty([0, T[, L^2(\mathbb{R}^3))$.

3. En écrivant pour $0 \leq t_1 \leq t$, $\vec{u}(t, \cdot) = \mathfrak{g}_{t-t_1} * \vec{u}(t_1, \cdot) - \int_{t_1}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P} \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u})(s, x) ds$ montrer que

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|\mathfrak{g}_{t-t_1} * \vec{u}(t_1, \cdot)\|_{L^2} + C \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \|\vec{u}\|_{L^4([t_1, +\infty[, \dot{H}^1)}.$$

4. En conclure que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C \|\vec{u}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \|\vec{u}\|_{L^4([t_1, +\infty[, \dot{H}^1)},$$

puis que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} = 0$.

Exercice 5.4 (Equations de la Magnéto-Hydrodynamique - MHD) On considère le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = \operatorname{div}(\vec{f}) = 0, \\ \partial_t \vec{b} = \Delta \vec{b} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{g}, & \operatorname{div}(\vec{b}) = \operatorname{div}(\vec{g}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0 \text{ et } \vec{b}(0, x) = \vec{b}_0(x), \operatorname{div}(\vec{b}_0) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (5.73)$$

où $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\vec{b}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ sont des données initiales et où $\vec{f}, \vec{g} \in L^2([0, +\infty[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ sont des forces extérieures.

1. Pour $\epsilon > 0$ fixé on considère les équations

$$\begin{aligned}\vec{u}(t, x) &= \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \vec{f}(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P} \left(([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + ([\vec{b} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \right) (s, x) ds \\ \vec{b}(t, x) &= \mathfrak{g}_t * \vec{b}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \vec{g}(s, x) ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P} \left(([\vec{u} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + ([\vec{b} * \theta_\epsilon] \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) (s, x) ds,\end{aligned}$$

où $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}^3} \theta(x) dx = 1$ et $\theta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^3} \theta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Montrer que ce système d'équation admet une solution mild locale $(\vec{u}_\epsilon, \vec{b}_\epsilon)$ en temps dans l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$.

1. A partir du système (5.73), obtenir des estimations d'énergie semblable à la formule (5.29) pour le couple $(\vec{u}_\epsilon, \vec{b}_\epsilon)$.
2. Obtenir des solutions mild globales $(\vec{u}_\epsilon, \vec{b}_\epsilon)$.
3. Passer à la limite pour obtenir des solutions faibles de l'équation (5.73).

Exercice 5.5 (Equation Micro-Polaire) On considère le système

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{w} + \vec{f}, & \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t \vec{w} = \Delta \vec{w} + \vec{\nabla} \operatorname{div}(\vec{w}) - \vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{u}, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \vec{w}(0, x) = \vec{w}_0(x) & \text{et } \operatorname{div}(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \quad (5.74)$$

avec $\vec{u}_0, \vec{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $\vec{f} \in L_t^2 \dot{H}_x^{-1}$.

1. Appliquer le projecteur de Leray dans la première équation.
2. Régulariser les termes $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ et $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}$.
3. Utiliser un argument de point fixe pour le problème régularisé dans l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et obtenir une solution (\vec{u}, \vec{w}) (ces solutions dépendent de ϵ). On pourra utiliser les estimations

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \vec{\nabla} \wedge \vec{w} ds \right\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq CT^{\frac{1}{2}} \|\vec{w}\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \quad \text{et} \quad \left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \vec{\nabla} \wedge \vec{w} ds \right\|_{L_t^2 \dot{H}_x^1} \leq CT^{\frac{1}{2}} \|\vec{w}\|_{L_t^\infty L_x^2}$$

4. Si \vec{u} est à divergence nulle (mais \vec{w} ne l'est pas), montrer que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} \cdot \vec{w} dx = - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} \cdot \vec{w} dx,$$

et en déduire que ce terme est nul (on supposera que \vec{u} et \vec{w} sont suffisamment régulières, ce qui est le cas lorsqu'on traite le problème régularisé). Montrer également que l'on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w} dx$$

5. En considérant que tout est suffisamment régulier (ce qui est le cas lorsqu'on a introduit les régularisations), multiplier l'équation (5.74) par le vecteur (\vec{u}, \vec{w}) et intégrer en variable d'espace puis en variable de temps pour obtenir l'estimation

$$\begin{aligned}\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left(\|\vec{u}(s, \cdot)\|_{H^1}^2 + 2\|\vec{w}(s, \cdot)\|_{H^1}^2 + 2\|\operatorname{div}(\vec{w})(s, \cdot)\|_{L^2}^2 \right) ds \\ \leq C \int_0^t \|\vec{w}(s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds + C' \int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{H^{-1}}^2 ds + \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{w}_0\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

6. En utilisant le Lemme de Grönwall obtenir l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left(\|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2\|\vec{w}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2\|\operatorname{div}(\vec{w})(s, \cdot)\|_{L^2}^2 \right) ds \\ \leq C' \left(\int_0^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds + \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\vec{w}_0\|_{L^2}^2 \right) e^{Ct}. \end{aligned}$$

7. Prolonger les solutions approchées et obtenir par un passage à la limite des solutions faibles (\vec{u}, \vec{w}) de type Leray dans l'espace $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$.

Bibliographie

- [1] R. Aris. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover, 1962.
- [2] H. Beirão da Veiga. On the suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations in the whole space. *J. Math. Pures et Appl.*, 64 :77–86, 1985.
- [3] D. Bernoulli. Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum comentarii. *Strasbourg*, 1738.
- [4] J.-M. Bony. *Cours d'analyse*. Ecole Polytechnique, 2001.
- [5] J.-M. Bony. *Intégration et Analyse Hilbertienne*. Ecole Polytechnique, 2001.
- [6] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [7] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 :771–831, 1982.
- [8] X. Cai and Q. Jiu. Weak and strong solutions for the incompressible Navier-Stokes equations with damping. *J. Math. Anal. Appl.*, 343 : :799–809, 2008.
- [9] M. Cannone and F. Planchon. On the non stationary Navier-Stokes equations with an external force. *Adv. Differential Equations*, (4) :697–730, 1999.
- [10] A Carson, J. Jaffe and A. Wiles. The millennium prize problems. *American Mathematical Society*, 2006.
- [11] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, volumen 1*. Number 1 in Colección de Matemáticas Universitarias. Editorial AMARUN, 2017.
- [12] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, volumen 2*. Number 2 in Colección de Matemáticas Universitarias. Editorial AMARUN, 2017.
- [13] D. Chamorro, O. Jarrín, and P.-G. Lemarié-Rieusset. Some Liouville theorems for stationary Navier-Stokes equations in Lebesgue and Morrey spaces. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire(C)*, 2020.
- [14] D. Chamorro and B. Poggi. On an almost sharp Liouville type theorem for fractional Navier-Stokes equations. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03867798/document>, 2022.
- [15] J.-Y. Chemin. Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible. *SIAM J. Math. Anal.*, (23) :20–28, 1992.
- [16] O. Darrigol. *Worlds of Flow : A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University Press, 2005.
- [17] A. Dobrokhotov, D. et Shafarevitch. Some integral identities and remarks on the decay at infinity of the solutions to the Navier-Stokes equations in the entire space. *Russ. J. Math. Phys.*, 2 :133–135, 1994.
- [18] L. Euler. Principes généraux du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Acad. des Sciences de Berlin*, 3 :93–143, 1749.

- [19] L. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, second edition, 2010.
- [20] H. Fujita and T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, I(16) :269–315, 1964.
- [21] P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations : Steady-State Problems*. Springer Verlag, 2011.
- [22] I. Gallagher and P. Paicu. Remarks on the blow-up of solutions to a toy model for the Navier-Stokes equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137 :2075–2083, 2009.
- [23] F. Golse. *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. Ecole Polytechnique, 2010.
- [24] L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Pearson, 2004.
- [25] C. Herz. Lipschitz spaces and Bernstein’s theorem on absolutely convergent Fourier transforms. *J. Math. Mech.*, 1, 8 :283–323, 1968.
- [26] Vasile I. Istratescu. *Fixed Point Theory : An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [27] N. Jacob. *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes*, volume I. Imperial College Press, 2001.
- [28] O. Jarrin. *Etude déterministe de la turbulence*. PhD thesis, Université d’Evry, 2018.
- [29] T. Kato. Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^m with applications to weak solutions. *Math. Z.*, (187) :471–480, 1984.
- [30] A. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynold numbers (en russe). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, (30) :9–13, 1941.
- [31] V. Kolokoltsov. *Markov Processes, Semigroups and Generators*. Number 38 in studies in mathematics. De Gruyter, 2011.
- [32] O. Ladyzhenskaya. Unique solvability in large of a three-dimensional Cauchy problem for the Navier–Stokes equations in the presence of axial symmetry. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 7 :155–177, 1968.
- [33] A. Le Jan, Y. et Sznitman. Cascades aléatoires et équations de Navier-Stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324(Série I) :823–826, 1997.
- [34] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.*, Volume 63 :193–248, 1934.
- [35] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics : Volume 1 : Incompressible Models*. Clarendon press, 1996.
- [36] S Montgomery-Smith. Finite time blow up for a Navier–Stokes like equation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129 :3017–3023, 2001.
- [37] C.-L. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l’Acad. des Sciences de l’Institut de France*, (6) :389–440.
- [38] C.-L. Navier. Mémoire sur les lois de l’équilibre et du mouvement des corps élastiques. *Mémoires de l’Acad. des Sciences de l’Institut de France*, (7) :375–394, 1827.
- [39] M. O’Leary. Conditions for the local boundedness of solutions of the Navier-Stokes system in three dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, 28 :617–636, 2003.
- [40] F. Oru. *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d’analyse non linéaire*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.
- [41] C. Oseen. Sur les formules de green généralisées qui se présentent dans l’hydrodynamique et sur quelques unes de leurs applications. *Acta Math.*, (34) :205–284, 1911.

-
- [42] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 1983.
- [43] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans. Royal Soc. London*, (174) :935–982, 1883.
- [44] P.-G. Lemarié Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. CRC press, 2002.
- [45] P.-G. Lemarié Rieusset. *The Navier-Stokes problem in the 21st Century*. CRC press, 2016.
- [46] T. Runst and W. Sickel. *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 3, 2011.
- [47] G. Seregin. Liouville type theorem for stationary Navier-Stokes equations. *Nonlinearity*, 29 :2191–2195, 2015.
- [48] J. Serrin. On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 9 :187–195, 1962.
- [49] E. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1970.
- [50] E. Stein. *Topics in Harmonic Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [51] M. Struwe. On partial regularity results for the Navier–Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 :437–458, 1988.
- [52] S. Takahashi. On interior regularity criteria for weak solutions of the Navier–Stokes equations. *Manuscripta Math.*, 69 :237–254, 1990.
- [53] F. Weissler. The Navier-Stokes initial value problem in L^p . *Arch. Ration. Mech. Anal.*, (74) :219–230, 1981.
- [54] C. Zuily. *Problèmes de Distributions*. Hermann, 1986.

Index

- Application compacte, 246
- Beirão da Veiga, 207
- Bernoulli, 2
- Cadre
 - Eulérien, 4
 - Lagrangien, 3
- Cauchy, 3
- Conservation
 - de la densité, 6
- Contre exemple de Serrin, 279
- Convolution, 21
- Critère
 - d'explosion, 131
 - de régularité de Serrin, 266
- Décomposition de Helmholtz, 56
- Divergence
 - d'un tenseur, 16
 - d'un vecteur, 15
- Equation
 - de Navier-Stokes simplifiée, 228
 - de Stokes, 58
 - de Euler, 10
 - de l'hydrodynamique, 8
 - de la chaleur, 45
 - de Laplace, 49
 - de Navier-Stokes, 8
 - de Navier-Stokes locale, 265
 - de Navier-Stokes stationnaire, 243
 - de Poisson, 50
- Equations de Navier-Stokes
 - solutions *mild*, 113
 - solutions classiques, 66
 - solutions faibles, 167
- Espace
 - de Fourier-Herz, 145
 - de Lebesgue, 17
 - de Lebesgue temps-espace, 19
 - de Lorentz, 40
 - de Sobolev, 24
 - homogènes, 27
 - non homogènes, 24
- Euler, 2
- Formulation intégrale, 112
- Grönwall, lemme, 36
- Gradient, 14
- Helmholtz, 56
- Hyperviscosité, 209
- Inégalité
 - de Hardy-Littlewood-Sobolev, 31, 34
 - de Hedberg, 39
 - de Jensen, 36
 - de Minkowski continue, 20
 - de Sobolev, 30, 34
 - de Young pour la convolution, 21
 - de Young pour le produit, 37
- Incompressible, 6
- Indice de viscosité ν , 10
- Interpolation
 - espaces de Lebesgue, 18
 - espaces de Sobolev, 31
- Jensen, inégalité, 36
- Kolmogorov, 3
- Laplacien, 14
 - fractionnaire, 25
- Lemme
 - de Grönwall, 36
 - de Rellich-Kondrashov, 37
 - de Rellich-Lions-Kondrashov, 177
- Liouville, 254
- Lois de produit, 32
- Modèle d'hyperviscosité, 209
- Navier, 2

- Noyau
 - de Green, 50
 - de la chaleur, 45
- Pascal, 2
- Point fixe, 104, 208, 246
- Poisson, 3
- Pression, 7
- Principe de contraction, 104
- Problème de type Liouville, 254
- Produit
 - tensoriel, 16
 - vectorel, 15
- Projecteur de Leray, 106
- Régularisation de Leray, 165
- Régularité Maximale
 - du bi-Laplacien, 215
 - du noyau de la chaleur, 115
- Reynolds, 3
- Riesz, transformées, 35
- Rotationnel, 15
- Schaefer, point fixe, 247
- Serrin, 266
- Solution
 - mild*, 112
 - classique, 66
 - faible de Leray, 167
 - stationnaire, 248
- Solution Fondamentale
 - pour l'équation de la chaleur, 45
 - pour l'équation de Laplace, 50
- Stokes, 3
- Temps d'existence, 130
- Tenseur d'Oseen, 61
- Théorème
 - d'unicité fort-faible, 186
 - de Beirão da Veiga, 210
 - de convection, 6
 - de Fujita-Kato, 113
 - de Leray, 167
 - de Serrin, 266
- Transformées de Riesz, 35
- Transformation de Fourier, 22
- Unicité fort-faible, 186
- Viscosité, 8
- Vorticité, 269