



**HAL**  
open science

# Un nouveau système de coordonnées pour les équations de Darcy-Muskat diphasiques en milieux poreux hétérogènes isotropes à deux dimensions.

Franck Plouraboué

► **To cite this version:**

Franck Plouraboué. Un nouveau système de coordonnées pour les équations de Darcy-Muskat diphasiques en milieux poreux hétérogènes isotropes à deux dimensions.. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1998, 326 (12), pp.827-832. 10.1016/S1251-8069(99)80035-0 . hal-03485138

**HAL Id: hal-03485138**

**<https://hal.science/hal-03485138>**

Submitted on 17 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un nouveau système de coordonnées pour les équations de Darcy–Muskat diphasiques en milieux poreux hétérogènes isotropes à deux dimensions

Franck PLOURABOUÉ

Institut de mécanique des fluides, UMR CNRS 5502, allée du Pr-C.-Soula 31400 Toulouse, France

**Résumé.** Nous formulons les équations de Darcy–Muskat pour les écoulements diphasiques en milieu poreux hétérogène à l'aide d'équations non linéaires couplées entre la saturation et la *fonction de courant globale* (ou la *pression globale*). À deux dimensions, le système de coordonnées associé à la *fonction de courant globale* et la *pression globale* monophasique équivalente dans la limite des nombres capillaires infinis permet de décrire l'évolution de la saturation des phases comme unidimensionnelle. Nous montrons comment ce système de coordonnées permet, à grand nombre capillaire, la mise en œuvre d'une méthode de calcul numérique performante, pour le problème diphasique complet. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

**milieux poreux hétérogènes / écoulements diphasiques / nombre capillaire / coordonnées curvilignes**

***A new coordinate system for two-phase Darcy–Muskat flows in heterogeneous isotropic porous media in two dimensions***

**Abstract.** *We address the formulation of two-phase flows in the context of a Darcy–Muskat (DM) model in terms of a saturation/global stream-function (or global pressure) coupling in heterogeneous isotropic porous media. In two dimensions the coordinate system, associated with some infinite capillary limit global stream function-global pressure, allows the saturation evolution to be unidimensional. We show that the complete (DM) model projected on this coordinate system can be very efficiently solved numerically.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

***heterogeneous porous media / diphasic flows / capillary number / curvilinear coordinates***

### Abridged English Version

We study a two dimensional Darcy–Muskat (DM) two-phase flow model and introduce a new system of coordinates which permits one to generalised the unidimensional projection of the saturation equation of the (DM) model.

Generalization of the Darcy law for two-phase flows with associated pressure gradient  $\nabla P_i$ , and Darcy flow  $\vec{v}_i$ , with gravity, reads (when neglecting the coupling between phases):

$$\vec{v}_i(\vec{x}) = -\frac{K(\vec{x})k_{ri}}{\mu_i} (\vec{\nabla} P_i(\vec{x}) + \rho_i \vec{g}) \quad (1)$$

Where  $\mu_i$  is the phase  $i$  viscosity,  $K$  the intrinsic porous media permeability,  $k_{ri}$  and  $\rho_i$  are the phase  $i$  relative permeability and density. We consider the relative permeability  $k_{ri} \equiv k_{ri}(S_i)$  a function of the saturation  $S_i$  only [11]. Coupling between phase saturation and the pressure difference between phases is described by some phenomenological single valued capillary pressure curves:  $P_-(\vec{x}, S_2(\vec{x})) = P_2(\vec{x}) - P_1(\vec{x}) = P_c(\vec{x}, S_2(\vec{x}))$ . This model can be expressed in short formulation with the use of a global stream-function [7, 6, 2] or a global pressure [4]. Since the total flux has a free-divergence, a global stream-function  $\vec{\Psi}_+$  can be defined  $\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+(\vec{x}) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . This model can be written with non-dimensional parameters following Leverett [1, 9], we introduce a non-dimensional capillary pressure  $p_-(\vec{x}, S_2) = \sqrt{\langle K \rangle} P_-(\vec{x}, S_2)/\sigma$  where  $\sigma$  is the interfacial tension between fluids and  $\langle K \rangle$  the averaged permeability. We define a capillary number  $Ca = (\bar{\mu}v_+/\sigma) (\ell/\sqrt{\langle K \rangle})$  constructed from the averaged Darcy flux,  $v_+ = \langle \|\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+\| \rangle$ , the mean viscosity  $\bar{\mu}$  is the ratio between the typical correlation length of the heterogeneity  $\ell$  and the typical pore size  $\sqrt{\langle K \rangle}$ . The saturation evolution is governed by a non-linear convection-diffusion equation which is usually [13, 8] written:

$$\frac{\phi}{v_+} \frac{\partial S_2}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+ \cdot \vec{\nabla} F(S_2) = \frac{1}{Ca} \text{div} (\bar{\mu} G(S_2) \vec{\nabla} p_-) \quad (2)$$

Where  $\phi$  is the rock porosity,  $\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+ = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+/v_+$  is a non-dimensional global stream function,  $F(S_2)$  and  $G(S_2)$  are:

$$F(S_2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_{r2} \mu_1}{k_{r1} \mu_2}\right)} G(S_2) = \frac{1}{\left(\frac{\mu_1}{k_{r1}} + \frac{\mu_2}{k_{r2}}\right)} \quad (3)$$

In two dimensions, Darcy–Muskat [equation (1)] imposes a coupling between the global stream function and the saturation. Let us now define the bidimensional stream function  $\vec{\psi}_+^0(x, y) = (0, 0, \psi_+^0)$  and the adimensional global pressure  $p_+^0(x, y)$  at infinite capillary number where viscous forces dominate such that:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\psi}_+^0 = k k_{r+}(S_2) \vec{\nabla} p_+^0 \quad (4)$$

Where  $k r_+ = \frac{k r_1}{\mu_1} + \frac{k r_2}{\mu_2}$ , and  $k = K/\langle K \rangle$ . Darcy–Muskat relation (4) implies the orthogonality between the global stream function  $\vec{\nabla} \psi_+^0$  and the global pressure  $\vec{\nabla} p_+^0$ .  $(p_+^0, \psi_+^0)$  define an orthogonal curvilinear coordinate system which permits one to generalised the ‘stream-tube’ projection method

[2] to non-infinite capillary numbers. The non-linear right hand side of equation (2) is a perturbation term due to capillary effects which is responsible for some variations of the saturation along the  $p_+^0$  coordinate. These important capillary effects can be computed accurately by a projection in our coordinate system. Beyond this efficient and precise projection for the resolution of the elliptic equation (2), the explicit dynamical computation of coordinates  $(p_+^0, \psi_+^0)$  also allows for a better resolution of the advection-diffusion operator. This operator can be written in the proposed coordinates  $(p_+^0, \psi_+^0)$  for which different properties can be noted.

- In the case of tensorised permeability in  $(p_+^0, \psi_+^0)$  coordinates, one can use a direct successive diagonal method to solve it.
- In the case of periodic permeability, one can keep the  $n$  first mode of the discrete Fourier transform of  $k$  in  $(p_+^0, \psi_+^0)$  coordinates. This allows one to solve with direct method the discrete  $((n+1) \times (n+1))$  diagonal linear system.
- In the general case, the projected operator is adapted to a new preconditioning for an iterative resolution that will be proposed in a future publication.

Nous introduisons un nouveau système de coordonnées pour le calcul des écoulements diphasiques de Darcy–Muskat (DM) en milieux poreux hétérogènes à deux dimensions, qui permet de généraliser la projection unidimensionnelle de la saturation (méthodes tubes de courant) aux nombres capillaires non infinis.

La généralisation de l'équation de Darcy aux écoulements de plusieurs phases  $i$  en milieu poreux s'écrit en préservant la proportionnalité entre le gradient de pression  $\vec{\nabla} P_i$  dans chaque phase et la vitesse de filtration associé  $\vec{v}_i$ , en présence de gravité (en négligeant les couplages entre phases) :

$$\vec{v}_i(\vec{x}) = -\frac{K(\vec{x})k_{ri}}{\mu_i} (\vec{\nabla} P_i(\vec{x}) + \rho_i \vec{g}) \quad (1)$$

Où  $\mu_i$  représente la viscosité de la phase  $i$ ,  $K$  est la perméabilité intrinsèque du milieu poreux,  $k_{ri}$  et  $\rho_i$  sont les perméabilités relatives de la densité de la phase  $i$ ,  $\vec{g}$  le champ de pesanteur. Nous considérons le cas où les perméabilités relatives  $k_{ri}(S_i)$  dépendent seulement de la saturation  $S_i$  qui est le taux de présence normalisé entre 0 et 1 de la phase  $i$  [1]. La conservation de la masse exprimée pour chaque phase s'écrit, pour des fluides isodensités :

$$\phi \frac{\partial S_i(\vec{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(\vec{v}_i(\vec{x})) = 0 \quad (2)$$

où  $\phi$  est la porosité. Dans le cas de deux phases 1 et 2, les champs de saturation vérifient :

$$S_1(\vec{x}, t) + S_2(\vec{x}, t) = 1 \quad (3)$$

Nous noterons  $P_-$  la différence de pression entre les deux phases et  $P_c$  la courbe de pression capillaire :

$$P_-(\vec{x}, S_2(\vec{x})) = P_2(\vec{x}) - P_1(\vec{x}) = P_c(\vec{x}, S_2(\vec{x})) \quad (4)$$

Celle-ci dépend dans le cas général de l'histoire du champ de saturation, mais nous ignorerons ces effets d'hystérésis. On sait depuis plusieurs années [2, 3] que le modèle (DM) défini par les équations (1), (2), (3) et (4) peut être réduit à l'aide de deux variables, dont l'une peut être

soit la *fonction de courant globale* [4–6], soit la pression globale [2, 3] D’après (2) et (3) le flux global  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$  est à divergence nulle : il y a conservation du débit total le long des lignes de courant. On peut donc définir une fonction de courant globale  $\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+$  telle que  $\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+(\vec{x}) = \vec{v}_1(\vec{x}) + \vec{v}_2(\vec{x})$ . Exprimons la relation de Darcy–Muskat à l’aide des variables  $P_+ = P_2 + P_1$ ,  $P_-$ , des mobilités composées,  $kr_+ = \frac{kr_1}{\mu_1} + \frac{kr_2}{\mu_2}$  et  $kr_- = \frac{kr_2}{\mu_2} - \frac{kr_1}{\mu_1}$  et des densités composées  $\rho_+ = \rho_1 + \rho_2$  et  $\rho_- = \rho_2 - \rho_1$  :

$$\frac{1}{K(\vec{x})kr_+} \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} P_+(\vec{x}) + \frac{kr_-}{kr_+} \vec{\nabla} P_-(\vec{x}, S_2) + \left( \rho_+ + \rho_- \frac{kr_-}{kr_+} \right) \vec{g} \right) \quad (5)$$

Il est intéressant d’adimensionnaliser le modèle (DM) en introduisant suivant Leverett [7, 8] une pression capillaire adimensionnelle  $p_-(\vec{x}, S_2) = \sqrt{\langle K \rangle} P_-(\vec{x}, S_2) / \sigma$  où  $\sigma$  est la tension interfaciale entre les deux fluides, et  $\langle K \rangle$  la perméabilité moyenne de la roche. Soit le nombre capillaire  $Ca = (\bar{\mu} v_+ / \sigma) (\ell / \sqrt{\langle K \rangle})$  bâti sur la vitesse moyenne de Darcy,  $v_+ = \langle \|\vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+\| \rangle$ , la viscosité moyenne  $\mu$ , et le rapport entre l’échelle typique de corrélation du champ de perméabilité  $\ell$  et la taille moyenne  $\sqrt{\langle K \rangle}$  d’un pore. Calculons le rotationnel de l’expression (5) en introduisant la fonction de courant sans dimension  $\vec{\nabla} \times \vec{\psi}_+ = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi}_+ / v_+$ ,

$$\vec{\nabla} \times \left( \left( \frac{1}{k(\vec{x})kr_+} \vec{\nabla} \times \vec{\psi}_+(\vec{x}) \right) \right) = -\frac{1}{Ca} \vec{\nabla} S_2(\vec{x}) \times (\vec{\nabla}_x p_c(\vec{x}, S_2) + Bo \vec{e}_g) \frac{d(k_r / k_{r+})}{dS} \quad (6)$$

Le terme  $\vec{\nabla}_x p_c$  qui est lié à l’hétérogénéité capillaire des roches rencontrées est une donnée du problème, le nombre  $Bo = \rho_- g \langle K \rangle^2 / \sigma$  est le nombre de Bond estimant le rapport entre effets gravitaires et effets capillaires,  $\vec{e}_g$  la direction de la gravité, et nous avons adimensionné la perméabilité par sa valeur moyenne ( $k \equiv K / \langle K \rangle$ ). On définit de plus une pression globale  $P_+^*$  dont le gradient vérifie  $\vec{\nabla} P_+^* = 1/2 \left( \vec{\nabla} P_+(\vec{x}) + \frac{kr_-}{kr_+} (S_2) (\vec{\nabla} P_-(\vec{x}, S_2) - \vec{\nabla}_x p_c(\vec{x}, S_2)) \right)$ . L’équation (5) imposée à la pression globale sans dimension  $p_+^* = P_+^* / \langle \vec{\nabla} P_+^* \rangle$  permet d’écrire :

$$\text{div} (k(\vec{x})kr_+ \vec{\nabla} p_+^*) = -\frac{1}{Ca} \text{div} (k(\vec{x}) \bar{\mu} kr_- (\vec{\nabla}_x p_-(\vec{x}, S_2) + Bo \vec{e}_g)) \quad (7)$$

Il est par ailleurs usuel [9, 10] de compléter ce couplage par l’équation obtenue à partir des équations (2), (3) et (4) sur la saturation :

$$\frac{\phi}{v_+} \frac{\partial S_2}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\psi}_+ \cdot \vec{\nabla} F(S_2) = \frac{1}{Ca} \text{div} (\bar{\mu} G(S_2) \vec{\nabla} p_-) \quad (8)$$

où  $\phi$  est la porosité et  $F(S_2)$  et  $G(S_2)$  sont définies par :

$$F(S_2) = \frac{1}{\left( 1 + \frac{k_{r2} \mu_1}{k_{r2} \mu_2} \right)} \quad G(S_2) = \frac{1}{\left( \frac{\mu_1}{k_{r1}} + \frac{\mu_2}{k_{r2}} \right)} \quad (9)$$

Les équations (6) – respectivement (7) – et (8) constituent un jeu d’équations couplées non linéaires entre débit global – respectivement pression globale – et saturation, établi dans le cas général de milieux poreux à perméabilité et mouillabilité hétérogènes, à toute dimension. À très grand nombre

capillaire, lorsque les effets visqueux sont prépondérants, le membre de gauche domine et la saturation est gouvernée par la « convection » de Buckley–Leverett [11, 12]. Nous allons maintenant montrer comment utiliser cette formulation pour mettre en place une technique numérique efficace dans le cas bidimensionnel. À deux dimensions, l'équation (6) sur la fonction de courant globale devient :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{\nabla} \psi_+(\vec{x})}{k(\vec{x}) kr_+} \right) = -\frac{1}{Ca} \left( \vec{\nabla} S_2(\vec{x}) \times \left( \vec{\nabla}_x P_c(\vec{x}, S_2) + Bo \vec{e}_g \right) \frac{d(kr/k r_+)}{dS} \right) \cdot \vec{e}_z \quad (10)$$

Définissons maintenant la fonction de courant  $\vec{\psi}_+^0(x, y) = (0, 0, \psi_+^0)$  et la pression adimensionnelle  $p_+^0(x, y)$  associées à la limite des nombres capillaires infinis telles que :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\psi}_+^0 = kkr_+(S_2) \vec{\nabla} p_+^0 \quad (11)$$

Nous avons, à deux dimensions :

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{kkr_+(S_2)} \vec{\nabla} \psi_+^0 \right) = \operatorname{div} (kkr_+(S_2) \vec{\nabla} p_+^0) = 0 \quad (12)$$

La relation (11) implique l'orthogonalité entre la fonction de courant  $\vec{\nabla} \psi_+^0$  et le gradient de pression  $\vec{\nabla} p_+^0$  :  $\vec{\nabla} \psi_+^0 \cdot \vec{\nabla} p_+^0 = 0$ .  $(p_+^0, \psi_+^0)$  définit un système de coordonnées orthogonales curvilignes, alors que  $(p_+^*, \psi_+^*)$  vérifie :  $\vec{\nabla} \psi_+^* \cdot \vec{\nabla} p_+^* \sim \frac{1}{Ca^2}$ . Nous allons maintenant montrer que le système de coordonnées  $(p_+^0, \psi_+^0)$  permet de simplifier la résolution numérique des équations (7), (8) et (10). En effet, dans la limite hyperbolique de l'équation de transport (8) considérée ici, le membre de droite peut être traité comme une perturbation non linéaire agissant sur la variation unidimensionnelle de la saturation. Cette propriété est implicitement prise en compte dans les méthodes « stream-tubes » [6] permettant la résolution dans la limite de Buckley–Leverett à nombre capillaire infini de (8). L'utilisation numérique du système de coordonnées curvilignes proposé permet d'étendre l'esprit de cette méthode de projection à tous les régimes de grands nombres capillaires où les effets capillaires contenus dans le membre de droite jouent un rôle capital dans la mise en place des phases. Le système de coordonnées proposé s'adapte alors de façon dynamique à l'évolution temporelle du front de saturation par le couplage implicite de l'équation (12). Par ailleurs, le calcul explicite du système de coordonnées  $(p_+^0, \psi_+^0)$  doit permettre, dans la mise en œuvre numérique, un calcul plus rapide et plus précis de la projection du gradient de saturation, que les méthodes d'interpolation précédemment utilisées [6]. Examinons enfin l'avantage du système de coordonnées proposé pour la résolution de l'opérateur de transport intervenant dans les équations (7) et (10).

Soient  $(h_{+1}(p_+^0, \psi_+^0), h_{+2}(p_+^0, \psi_+^0))$ , les éléments diagonaux du tenseur métrique associés au système de coordonnées curvilignes  $(p_+^0, \psi_+^0)$ . L'équation (11) écrite dans le système de coordonnées  $(p_+^0, \psi_+^0)$  conduit à :

$$kkr_+(p_+^0, \psi_+^0) = \frac{\|\nabla \psi_+^0\|}{\|\nabla p_+^0\|} = \frac{h_{+1}}{h_{+2}} \quad (13)$$

On en déduit que l'opérateur utilisé dans les équations (7) et (10), appliqué à une fonction  $f$  s'écrit :

$$\operatorname{div} (kkr_+ \vec{\nabla} f) = \frac{1}{h_{+1} h_{+2}} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p_+^0{}^2} + \frac{\partial}{\partial \psi_+^0} \left( \left( \frac{h_{+1}}{h_{+2}} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial \psi_+^0} \right) \right) \quad (14)$$

Cette écriture présente les avantages suivants.

– Si le champ de perméabilité peut s'écrire comme le produit de deux fonctions de  $p_+^0$  et  $\psi_+^0$  (cas des milieux stratifiés), alors on peut utiliser une méthode directe très efficace de diagonalisation successive pour résoudre l'opérateur (14).

– On peut toujours décomposer la transformée de la perméabilité  $k(p_+^0, \psi_+^0)$  périodique en modes de Fourier (e.g.  $n$ ) discrets. Il est alors possible d'utiliser une méthode directe efficace pour la résolution de l'opérateur (14), qui s'écrit dans l'espace de Fourier des variables  $(p_+^0, \psi_+^0)$  comme un système linéaire  $((n+1) \times (n+1))$  diagonal couplant  $n$  modes. La réduction du champ de perméabilité à quelques modes caractéristiques est une vieille quête du calcul numérique en milieux poreux [13], qui est ici formulée sous un jour nouveau.

– Soulignons enfin que, dans le cas général, la formulation (14) de l'opérateur se prête particulièrement bien à un préconditionnement que nous proposerons dans une publication ultérieure.

En conclusion, nous introduisons un nouveau système de coordonnées à deux dimensions qui permet une résolution numérique efficace de l'équation de transport hyperbolique de la saturation, généralisant les méthodes de projections de type « stream-tubes » aux nombres capillaires non infinis. Ce travail ouvre de nouvelles perspectives pour l'élaboration de codes numériques performants dans ce domaine.

**Remerciements.** Nous remercions A. Bergeon, M. Azaiez et G. Labrosse pour leurs remarques et leurs discussions, J. Hinch, S. Bories et M. Prat pour leurs lectures du manuscrit.

## References

- [1] Muskat M., The theory of potentiometric models, Trans AIME 179 (1948) 216–221.
- [2] Chavent G., Jaffré J., Mathematical models and finite elements for reservoir simulation, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [3] Verruijt A., Barends F.B.J., The global pressure, a new concept for the modelization of compressible two-phase flow in porous media, in: G. Chavent (Ed.), Flow and transport in Porous Media, Barends Eds., Balkeman, Rotterdam, 1981.
- [4] Higgins R.V., Leighton A.J., A computer method to calculate two-phase flow in any irregular bounded porous medium, J. Petroleum Technol. 14 (1962) 679–683.
- [5] Glimm J., Isaacson E., Marchesin D., McBryan O., A front tracking reservoir simulator, five spot validation studies and the water coning problem, The mathematics of reservoir simulations, 1983, pp. 107–136.
- [6] Blunt M.J., Luit K., Thiele M.R., A generalized streamline method to predict reservoir flows, Petroleum Geosciences 2 (1996) 259–269.
- [7] Bear J., Bachmat Y., Introduction to modeling of transport phenomena in Porous Media, Dover Publications, Elsevier Publishing Company, NY, 1991.
- [8] Leverett M.C., Capillary behavior in porous solid, J. Pet. Tech. 2 (1940) 1–17.
- [9] Wooding R.A., Morrel-Seytoux H.J., Multiphase flow through porous media, Ann. Rev. Fluid. Mech. 8 (2) (1976) 233–274.
- [10] Homsy G.M., Viscous fingering in porous media, Ann. Rev. Fluid. Mech. 19 (1987) 271–311.
- [11] Buckley S.E., Leverett M.C., Mechanism of fluid displacement in sands, Trans. AIME, 249 (1941) 107–116.
- [12] Dullien F.A.L., Porous media: fluid transport and pore structure, Academic Press, New York, 1979.
- [13] Mehrabi A.R., Sahimi M., Coarsening of heterogeneous media: application of wavelets, Phys. Rev. Lett. 79 (22) (1997) 4385–4388.