



HAL
open science

Résolution faible des EDP's elliptiques linéaires cours de Master I Contrôle Optimal théorie et approximation et approximation

Rahima Atmania

► **To cite this version:**

Rahima Atmania. Résolution faible des EDP's elliptiques linéaires cours de Master I Contrôle Optimal théorie et approximation et approximation. Master. Algérie. 2022. hal-03476434v2

HAL Id: hal-03476434

<https://hal.science/hal-03476434v2>

Submitted on 21 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Résolution faible des EDPs elliptiques linéaires

Cours de Master I : Contrôle Optimal Théorie et Approximation

Dr. ATMANIA RAHIMA

LMA, Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Université Badji-Mokhtar d'Annaba, Algérie.

Email : atmanira@yahoo.fr

2021/2022

Table des matières

1	Rappels	5
1.1	Principaux opérateurs différentiels	5
1.2	Espaces fonctionnels	6
1.3	Application linéaire et inclusion	7
1.4	Intégration	8
1	Les distributions	11
1	Introduction	11
1.1	Notations	11
2	Espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$	12
2.1	Définition	12
2.2	Propriétés	12
3	Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$	14
3.1	Support d'une distribution	15
3.2	Types de distributions	16
3.3	Opérations sur \mathcal{D}'	23
4	Conclusion	28
2	Espaces de Sobolev	29
1	Définitions et Notations	29
1.1	$W^{m,p}$: espaces de Sobolev en général	29
1.2	Les espaces $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$	30
1.3	Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$	31
2	Propriétés de certains espaces de Sobolev	32
2.1	Espace $H^1(\Omega)$	32
2.2	Espace $H_0^1(\Omega)$: une adhérence	33
2.3	Espace $H^{-1}(\Omega)$: un dual	34
2.4	Espace $H^2(\Omega)$	35
3	Notions importantes	35

3.1	Opérateurs de trace	35
3.2	Opérateurs de prolongement	37
3.3	Formules de Green	38
3	Etude mathématique des EDPs elliptiques linéaires	39
1	Généralités	39
1.1	Modèles de la physique	40
1.2	Modèles mathématiques fondamentaux : Laplace et Poisson	41
1.3	Principe du maximum	43
2	Résolution formelle des équations de Laplace sur $\mathbb{R}^n, n \geq 2$	44
2.1	Cas de domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	44
2.2	Cas de domaine non borné $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^2$	47
2.3	Coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^n	48
3	Fonctions harmoniques	49
3.1	Fonctions harmoniques sur un borné	49
3.2	Fonctions harmoniques sur \mathbb{R}^n	52
4	Solution faible pour équation de Poisson	53
4.1	Solution fondamentale	54
4.2	Solution faible	55
4.3	Fonction de Green	56
5	Formulation variationnelle	57
5.1	Théorème de Lax-Milgramm	58
5.2	Problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson	61
5.3	Problème de Neumann pour l'équation de Poisson	68
5.4	Autres équations elliptiques du second ordre	71
6	Conclusion	76

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) sont des équations que doivent satisfaire une fonction inconnue u à plusieurs variables (x_1, x_2, \dots, x_n) et certaines de ses dérivées partielles. Le plus haut degré de dérivation qui intervient est dit ordre de l'équation. Les EDPs se divisent en deux types linéaires et non linéaires et aussi en deux familles les EDPs stationnaires où l'inconnue ne dépend pas de la variable temps et les EDPs d'évolution où l'inconnue dépend de la variable temps noté t .

Les EDPs d'ordre deux sont classées en trois grandes classes fondamentales : elliptique, parabolique et hyperbolique. Les équations elliptiques sont des EDPs stationnaires qui décrivent des phénomènes d'équilibre, les équations paraboliques décrivent des phénomènes de diffusion alors que les équations hyperboliques décrivent les phénomènes de propagation et ces deux classes sont des problèmes d'évolution.

L'objet de ce cours sont les EDPs elliptiques linéaires. Les prérequis pour la bonne compréhension du module sont :

- 1- La dérivation et l'intégration des fonctions réelles à une ou à plusieurs variables ;
- 2- les espaces fonctionnels, ceux de Banach (espaces normés complets), ceux de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty]$ définis par la notion de presque partout (p.p.) et ceux de Hilbert munis de produits scalaires ;
- 3- les outils de résolution des EDPs de la physique spécialement l'analyse de Fourier (séparation de variables, série et transformation de Fourier).

Le cours comporte trois chapitres avec les objectifs d'apprentissage suivants :

- 1-nouvelles notions : les distributions et leurs propriétés ; la solution faible ;
- 2-nouvelles connaissances : les espaces de Sobolev ; l'opérateur trace et l'opérateur de prolongement, théorème de Lax-Milgram pour l'existence et l'unicité de la solution faible ;
- 3-nouvelle méthode : la formulation faible et la formulation variationnelle pour la détermination solution faible.

Après des rappels nécessaires, le chapitre un introduit la notion de distributions avec certaines de ces propriétés présentées dans un cadre général. Le chapitre deux est un exposé très simplifié sur les espaces de Sobolev. Le troisième chapitre est le contenu visé de ce cours où on présente une étude mathématique plus ou moins générale des EDPs elliptiques linéaires du second ordre suivi de la formulation variationnelle de certains problèmes classiques.

1 Rappels

Nous allons rappeler certains outils d'analyse et présenter des notations qui seront utilisées dans la suite du cours.

1.1 Principaux opérateurs différentiels

Pour toute fonction $F = (F_1, F_2, \dots, F_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 , on note la matrice Jacobienne de F au point x :

$$Jac(F(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Si $p = n$, F est dite champ de vecteurs, sa matrice Jacobienne est une matrice carrée. On définit alors la divergence de F par :

$$div(F(x)) = tr(Jac(F(x))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Dans le cas où $p = 1$, pour une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , le gradient de f est défini par :

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Si f est de classe C^2 on définit sa matrice Hessienne ainsi

$$Hess(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

et le Laplacien par

$$\Delta f(x) = tr(Hess(f(x))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = div(\nabla f(x)) = tr(Jac(\nabla f(x))).$$

Remarque 1.1 *La divergence et le Laplacien sont invariants par le changement de base.*

On note $\vec{\eta}(x)$ la normale extérieure au bord $\partial\Omega$ càd un vecteur perpendiculaire au plan tangent à $\partial\Omega$ en un point x , dirigé vers l'extérieur de Ω et est de norme 1.

Définition 1.1 Si f est une fonction assez régulière définie sur $\overline{\Omega}$, la dérivée normale de f sur $\partial\Omega$ est donnée par

$$\frac{df}{d\vec{\eta}}(x) = \nabla f(x) \cdot \vec{\eta}(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.2 Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles sur Ω telles que f est mesurable et $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$.

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables bornées presque partout (p.p) sur Ω .

$L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty)$ est un espace de Banach càd normé complet une fois muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

De même pour $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme du sup essentiel

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)| = \inf \{ M \geq 0; |f(x)| \leq M, \text{ p. p. sur } \Omega \}.$$

$C(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ la fermeture de Ω , est un espace de Banach une fois muni de la norme

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par $C^n(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $f \in C^{n-1}(\overline{\Omega})$ telles que $f^{(n)} \in C(\overline{\Omega})$, et on le munit de la norme

$$\|f\|_{C^n(\overline{\Omega})} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

De plus, on a $C(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega})$.

Rappelons la définition d'un Hilbertien.

1. Rappels

Définition 1.3 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et qui est complet pour la norme $\|f\|_H = \sqrt{\langle f, f \rangle_H}$.*

Un produit scalaire $\langle f, g \rangle_H$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive.

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx.$$

Le théorème de représentation de Riez suivant est un des plus importantes caractéristiques des Hilbertiens.

Théorème 1.1 *(de Riez) Soit l une forme linéaire continue sur H un Hilbertien, alors, il existe un unique élément $f \in H$ tel que, $l(f) = \langle f, v \rangle_H, \forall v \in H$. De plus, $\|f\|_H = \|l\|_{H'}$ avec H' le dual de H .*

Une version pour les espaces de Lebesgue.

Théorème 1.2 *Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $1 < p < \infty$ et $l \in (L^p(\Omega))'$. Alors, il existe un unique $f \in L^q(\Omega)$ pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tel que*

$$\langle l, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega)$$

$$\text{et } \|f\|_{L^q(\Omega)} = \|l\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Ceci permet d'identifier tout dual d'un Hilbertien à lui même càd $H = H'$ et aussi le dual de $L^p(\Omega)$ à $L^q(\Omega)$ càd $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$ pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.3 Application linéaire et inclusion

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(X, \|\cdot\|_X)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans X . On peut alors considérer E comme un sous-espace vectoriel de X et on note $E \hookrightarrow X$.

Définition 1.4 *Une inclusion est dite :*

(i) continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in E$ on a $\|u\|_X \leq C \|u\|_E$.

(ii) compacte, si de toute suite bornée dans E (pour la norme de E), il est possible d'extraire une sous-suite qui converge dans X (pour la norme de X).

(iii) dense si pour tout $u \in X$ il existe une suite $(u_n)_{n \geq 0} \subset E$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ pour la norme de X .

1.4 Intégration

On commence par les formules de Green qui sont un outil fondamental pour la formulation faible des EDP's.

Formules de Green

Une généralisation de la formule de Green-Riemann dans \mathbb{R}^2 est la suivante dite formule de Stokes ou Green-Ostrogradsky.

Théorème 1.3 (de la divergence) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert à bord régulier de classe C^1 et F un champ de vecteurs de classe C^1 à support borné sur $\bar{\Omega}$.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x)) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{\eta}(x) dS$$

où $\vec{\eta}(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x))$ est la normale au point x de $\partial\Omega$, extérieure à Ω et dS est l'élément de surface sur $\partial\Omega$.

Pour f une fonction scalaire de classe C^1 à support compact sur $\bar{\Omega}$, on a

$$\int_{\Omega} \nabla(f(x)) dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot \vec{\eta}(x) dS$$

La première formule du théorème suivant coïncide, en dimension 1, avec l'intégration par parties.

Théorème 1.4 (de Green) Soit Ω un ouvert borné à bord de classe C^1 . Alors, pour toutes fonctions u et $v \in C^1(\bar{\Omega})$ on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \vec{\eta}(x) dS - \int_{\Omega} u(x) \nabla v(x) dx$$

où dS est la mesure surfacique et pour toutes fonctions u et $v \in C^2(\bar{\Omega})$ on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{d\vec{\eta}}(x) v(x) dS - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Remarque 1.2 La mesure surfacique dS est parfois noté $d\sigma(x)$; $x \in \partial\Omega$.

Intégration en coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^n

On note S^{n-1} la sphère unité de \mathbb{R}^n càd

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = \sqrt{\sum_{i=1, \dots, n} x_i^2} = 1 \right\}$$

On définit la fonction surjective $\phi : \mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\phi(r, \sigma) = r\sigma = x$ où les variables (r, σ) sont appelées les coordonnées sphériques. On passe donc des coordonnées cartésiennes $x = (x_1, \dots, x_n)$ aux coordonnées sphériques grâce aux relations :

$$r = |x| \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{x}{|x|}.$$

Pour tout Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , on pose $\tilde{\Omega} = \phi^{-1}(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ l'image réciproque de Ω par ϕ qui n'est pas forcément ouvert .

Proposition 1.1 Pour tout $1 \leq p < +\infty$, l'application $f \rightarrow \tilde{f} = f \circ \phi$ est une isométrie de $L^p(\Omega, dx)$ sur $L^p(\tilde{\Omega}, r^{n-1} dr d\sigma)$ et on a donc :

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\tilde{\Omega}} f(r\sigma) r^{n-1} dr d\sigma.$$

Dans \mathbb{R}^2 , la sphère $S^1 = \partial B(0, 1)$ est paramétrée par $\theta \in [0, 2\pi] \rightarrow (\cos \theta, \sin \theta) = \sigma \in S^1$. Dans ce cas, $\tilde{\Omega} = I \times J \subset \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ et la formule de la proposition devient :

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\tilde{\Omega}} f(r(\cos \theta, \sin \theta)) r dr d\theta = \int_J \int_I f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Remarque 1.3 Sur \mathbb{R}^2 , (r, θ) sont dit coordonnées polaires.

Inégalités et intégrale

Proposition 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient deux fonctions $f, g \in L^2(\Omega)$, alors on a :

$$\left| \int_{\Omega} f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} g^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Elle s'écrit aussi $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de l'Hilbertien $L^2(\Omega)$.

Proposition 1.3 (Inégalité de Holder) Soient deux fonctions f, g à valeurs réelles telles que $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^r(\Omega)$ pour

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

et on a

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

En plus des inégalités de Holder, de Cauchy-Schwarz, nous avons l'inégalité de Jensen.

Proposition 1.4 (Inégalité de Jensen) Soit Ω est un ouvert borné dans \mathbb{R}^n de mesure $\text{mes}(\Omega) = 1$. Pour toute fonction $f \in L^1(\Omega, I)$, et toute fonction $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et convexe, on a :

$$\varphi \left(\frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx \right) \leq \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(f(x)) dx.$$

Chapitre 1

Les distributions

1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons introduire la notion de distribution. Les raisons d'utilisation de cette notion sont d'ordre purement physique, expérimental et aussi mathématique.

Le but de cette théorie est de pouvoir obtenir des solutions de problèmes d'EDPs au sens faible en utilisant des formes de problèmes évalués dans des champs tests ou presque partout au lieu de leurs formes classiques dites fortes.

1.1 Notations

Soit le vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ appelé multi-indice et on note $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ la longueur du multi-indice avec

$$x^\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ de norme euclidienne $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^m on note toute dérivée partielle de f d'ordre $|\alpha| \leq m$ pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

avec $D^\alpha f(x) = f(x)$ si $|\alpha| = 0$.

Dans la suite on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le produit de dualité entre un espace E et son dual E' qui coïncide sur L^2 avec le produit scalaire.

2 Espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$

2.1 Définition

Les fonctions tests sont des fonctions très régulières et à support compact, dites aussi fonctions d'essai. Elles forment un espace vectoriel défini par :

$$C_c^m(\Omega) = \{\phi \in C^m(\Omega) \text{ à support compact inclus dans } \Omega\}$$

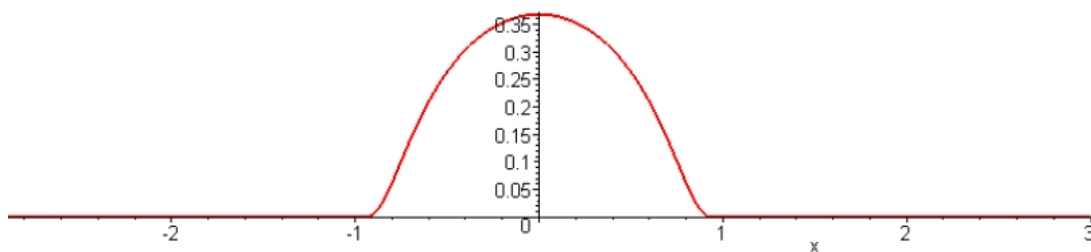
avec $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ où $\text{supp}\phi = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}} \subset \Omega$ où l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.1 Plusieurs espaces de fonctions test sont possibles et en général, on utilise l'espace des fonctions tests pour $m = \infty$ qu'on note $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$.

Exemple 2.1 Une des fonction d'essai les plus connues

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{(a^2 - x^2)}\right); & |x| < a \\ 0; & |x| \geq a > 0. \end{cases}$$

C'est une fonction paire, continue, croissante sur $[-a, 0]$, décroissante sur $[0, a]$ et de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Voici son graphe pour $a = 1$.



2.2 Propriétés

Une des propriétés les plus importantes à savoir est que $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega), \forall p \in [1, +\infty]$. De plus, c'est un espace localement convexe non-métrisable.

2. Espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2.1 (Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$) On dit que $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers ϕ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ ssi il existe un compact K dans Ω tel que les $\text{supp}\phi_j \subset K$, $j \in \mathbb{N}$ et $\text{supp}\phi \subset K$ et pour tout α tel que $|\alpha| \leq m$

$$\|D^\alpha \phi_j - D^\alpha \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ quand } j \rightarrow \infty.$$

Ceci veut dire que la suite $(\phi_j)_{j \geq 1}$ et les suites de toutes ses dérivées partielles $(D^\alpha \phi_j)_{j \geq 1}$, $|\alpha| \leq m$, convergent vers la fonction ϕ et ses dérivées partielles $D^\alpha \phi$, $|\alpha| \leq m$, respectivement.

Remarque 2.2 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'a pas de structure topologique, on utilise alors en général sur cet espace la norme supess de $L^\infty(\Omega)$.

Proposition 2.1 $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

- 1- $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$ de façon unique où $\psi \in C^\infty$.
- 2- Si $f \in C^\infty$ on a $f\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- 3- La translatée : $\tau_h \phi(x) = \phi(x-h) \in \mathcal{D}(\Omega)$; $h \in \mathbb{R}^n$
et la dilatée : $d_a \phi(x) = \phi\left(\frac{x}{a}\right) \in \mathcal{D}(\Omega)$; $a \in \mathbb{R}$.

Définition 2.2 On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_k)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $k \geq 1$, on a

$$\text{supp}\rho_k \subset B\left(0, \frac{1}{k}\right); \rho_k \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n; \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x) dx = 1.$$

Proposition 2.2 Soit la suite régularisante $(\rho_k * f)_{k \geq 1}$.

- 1- Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ alors $(\rho_k * f)_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et y converge uniformément vers f càd $\rho_k * f \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ sur tout compact de \mathbb{R}^n .
- 2- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, +\infty]$ alors on a convergence de $(\rho_k * f)_{k \geq 1}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ càd

$$\|\rho_k * f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

Définition 2.3 $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit sa normalisée $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ par

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \varepsilon > 0 \text{ telle que } \text{supp}\phi_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon).$$

Alors, $\forall f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\forall K$ un compact de Ω , on définit $f_\varepsilon = f * \phi_\varepsilon$ telle que $\text{supp}f_\varepsilon \subset K$.
 f_ε est dite régularisée de f et ϕ_ε est dite approximation de l'identité.

Proposition 2.3 Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ on a $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On conclut par un important résultat.

Théorème 2.1 $\mathcal{D}(\Omega)$ est *dense* dans $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

3 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 3.1 On appelle *distribution* sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et on note $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) définie ainsi

$$T(\phi) = \langle T, \phi \rangle \in \mathbb{k}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de dualité. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace (vectoriel) des distributions.

$\mathcal{D}'(\Omega) \subset \mathcal{D}^*(\Omega)$ le dual algébrique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 3.2 T linéaire : $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\langle T, \alpha\phi + \psi \rangle = \alpha \langle T, \phi \rangle + \langle T, \psi \rangle$.

T continue (séquentiellement) : si $\phi_j \rightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $\langle T, \phi_j \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle$ quand $j \rightarrow \infty$.

Remarque 3.1 Notons qu'il est impossible de définir le produit de deux distributions dans beaucoup de cas.

Exemple 3.1 Soit T définie par $T(\phi) = \langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Vérifions que T est une distribution :

1- T est une forme de $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ comme

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = \int_{\text{supp}\phi=[c,d]} \phi(x) dx \in \mathbb{R}$$

car $\phi = 0$, $x \notin \text{supp}\phi = [c, d]$ un compact.

2- T est linéaire comme l'intégrale est linéaire. (facile à vérifier).

3- T est aussi continue comme si $\phi_j \rightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (revoir la définition de la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$) ceci implique que $(\phi_j)_{j \geq 1}$ converge uniformément vers ϕ et il existe $K = [a, b]$ tel que les $\text{supp}\phi_j \subset K$, $j \in \mathbb{N}$ et $\text{supp}\phi \subset K$ alors

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T, \phi_j \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_j(x) dx = \int_{[a,b]} \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(x) dx = \int_{[a,b]} \phi(x) dx = \langle T, \phi \rangle .$$

3. Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Nous avons ce théorème qui donne une définition alternative d'une distribution.

Théorème 3.1 *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$, T est une distribution ssi pour tout compact $K \subset \Omega$, $\exists m \in \mathbb{N}$ et $\exists C > 0$ telle que*

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi\|_{L^\infty}; \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \text{supp} \phi \subset K;$$

ou encore

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{C^m(K)} = C \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \phi\|_{C(K)}.$$

Définition 3.3 *Si m ne dépend pas de K , m est dit ordre de la distribution.*

Remarque 3.2 $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Les fonctions tests sont donc des distributions.

Définition 3.4 (Convergence des distributions) *La suite $(T_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ssi pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$.*

3.1 Support d'une distribution

Définition 3.5 *Soit $U \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

On dit que T est nulle sur U ssi $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp} \phi \subset U$ alors $\langle T, \phi \rangle = 0$.

Le complément de U est dit support de T .

Définition 3.6 *On note $\text{supp} T = \{x \in \Omega : T \neq 0 \text{ sur } \Omega \cap B(\varepsilon, x) \text{ pour tout } \varepsilon > 0\}$.*

Remarque 3.3 *Aussi, si on a $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{supp} \phi \cap \text{supp} T = \emptyset \implies \langle T, \phi \rangle = 0$.*

Proposition 3.1 $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on a

$$\text{supp} D^\alpha T \subseteq \text{supp} T \quad \text{et pour } f \in C^\infty, \quad \text{supp} fT \subset \text{supp} T \cap \text{supp} f.$$

Remarque 3.4 *Il est clair que pour $T = \sum_{|\alpha| \leq m} c_{|\alpha|} D^\alpha \delta_a$ avec $\sum_{|\alpha| \leq m} |c_{|\alpha|}| > 0$, on a $\text{supp} T = \{a\}$.*

Ce qui est étonnant c'est l'implication inverse dans ce théorème et qui ressemble à un développement de telles distributions.

Théorème 3.2 Si $a \in \Omega$ tel que pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on a $\text{supp}T = \{a\}$ alors

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_a$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}$ et une suite appropriée de constantes $c_\alpha \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).

Théorème 3.3 Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et la suite de boules ouvertes $(B_j)_{j \geq 1}$ telle que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Alors, $T_1 = T_2$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ ssi $T_1 = T_2$ dans tout $\mathcal{D}'(B_j)$ pour tout $j \geq 1$.

Ceci implique que comme pour les fonctions les distributions peuvent être recouvertes de leurs restrictions sur tout B_j . En effet, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors T_{B_j} sa restriction sur B_j est dans $\mathcal{D}'(B_j)$.

3.2 Types de distributions

1-Distribution régulière :

Définition 3.7 Une distribution T_f associée à une fonction f définie par $T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$ est dite régulière.

Une distribution n'a pas de valeur ponctuelle comme une fonction mais on peut définir des distributions qui généralisent les fonctions au sens où les complexes généralisent les réels (on plonge \mathbb{R} dans \mathbb{C} ainsi $x \in \mathbb{R} \rightarrow x + i0 \in \mathbb{C}$; c'est un morphisme injectif de corps) ainsi :

Théorème 3.4 $\forall f \in L^1_{loc}(\Omega)$, l'application $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} définie par $T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$ est une distribution.

Théorème 3.5 $\forall f, g \in L^1_{loc}(\Omega) : T_f = T_g \iff f(x) = g(x) \text{ p. p. } x \in \Omega$
càd $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ (injection). De plus, $L^1_{loc}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Remarque 3.5 Remarquons que la somme de deux distributions régulières est une distribution régulière et de même pour la multiplication par une constante.

Exemple 3.2 $f(x) = A, A \in \mathbb{R}$. On remarque que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} A \phi(x) dx = A \int_{\text{supp}\phi=[c,d]} \phi(x) dx \in \mathbb{R}.$$

3. Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

La linéarité est facile à vérifier et

$$|T_f(\phi)| < A \int_{\text{supp}\phi=[c,d]} \sup_{x \in K} |\phi(x)| dx = A(d-c) \|\phi\|_{C(K)};$$

avec $\text{supp}\phi \subset K$, un compact. Ici la distribution est d'ordre $m = 0$, un ordre fini.

Remarque 3.6 Pour tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a $\text{supp}T_f = \text{supp}f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Une distribution est dite de classe C^∞ si elle est associée à une fonction C^∞ . Ces distributions forment une classe particulière de distributions.

Notons que $\mathcal{D}(\Omega) \subset C^\infty \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty]$

Concernant la convergence, nous avons ces résultats.

Proposition 3.2 Si $f_k \rightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$ ou $L^2(\Omega)$ alors $f_k \rightarrow f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Il arrive qu'une suite de fonctions converge au sens des distributions sans converger simplement.

Exemple 3.3 $\cos nx$ et $\sin nx$ convergent vers 0 au sens des distributions sans converger simplement.

2-Distribution à support compact :

Ces distributions forment un espace vectoriel noté

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) : \text{supp}T \subset \Omega \text{ est compact}\}.$$

Comme le support de la distribution est compact, on peut ignorer les fonctions test en dehors du support de la distribution. Ceci permet d'étendre la dualité et de considérer les distributions à support compact comme les formes linéaires continues sur l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$. Alors $\mathcal{E}'(\Omega)$ est le dual de l'espace des fonctions test $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ d'où $\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ sachant que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. Ces distributions sont d'ordre fini.

Proposition 3.3 Le fait que $\text{supp}T \subset \Omega$ soit compact implique qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi(x) = 1$ pour $x \in \text{supp}T$.

Proposition 3.4 Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\Omega)$, la valeur $\langle T, \chi_U \phi \rangle$ est indépendante du choix de $\chi_U \in \mathcal{D}(\Omega)$, χ_U est la fonction caractéristique, U un voisinage ouvert de $\text{supp}T$. On définira donc $\langle T, \phi \rangle = \langle T, \chi_U \phi \rangle, \forall \phi \in C^\infty(\Omega)$.

Exemple 3.4 La distribution définie par

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-1}^1 \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{]-1,1[} \phi(x) dx,$$

T est à support $[-1, 1]$ compact.

3-Distribution singulière :

Définition 3.8 Toute distribution non associable à une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ est dite singulière.

Exemple 3.5 δ_0 dite masse de Dirac définie par

$$\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

est non associable à une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ et est une distribution d'ordre 0 sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Remarque 3.7 Cette distribution est une distribution très importante et admet une version plus générale $\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.8 Certains par abus parlent de fonction de Dirac nulle partout et infinie en zéro et note $\delta_{x_0} = \delta(x - x_0)$ avec $\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0)$.

On peut avoir des fonctions non localement intégrables et qui définissent des distributions singulières discontinues après régularisation de l'intégrale $\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$ qui diverge.

Exemple 3.6 Pour la fonction $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on régularise l'intégrale en considérant la valeur principale de Cauchy de $\frac{1}{x}$ ainsi

$$\langle Vp \frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Pour contourner la singularité 0, on retire l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ puis on fait tendre vers 0.

3. Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Nous avons aussi les définitions équivalentes

$$\begin{aligned} \langle Vp \frac{1}{x}, \phi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx \\ &= \int_{[-c, c]} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx \text{ où } \text{supp} \phi \subset [-c, c]. \end{aligned}$$

Exemple 3.7 De même, pour $\frac{1}{x^2} \notin L_{loc}^1(\mathbb{R})$ on définit la partie finie de $\frac{1}{x^2}$ ainsi

$$\langle Pf \frac{1}{x^2}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\phi(0)}{\varepsilon} \right)$$

avec les définitions équivalentes

$$\begin{aligned} \langle Pf \frac{1}{x^2}, \phi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{[-c, c]} \frac{\phi(x) - \phi(0) - x\phi'(0)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Remarque 3.9 On peut approcher toute distribution singulière et toute distribution en général par une suite de distributions régulières associées à des fonctions tests càd \mathcal{D} est dense dans \mathcal{D}'

4- Distribution discrète :

Ce sont des distributions dont le support est dénombrable et qui sont en général basées sur la masse de Dirac qui est discrète comme $\text{supp} \delta_{x_0} = \{x_0\}$.

Exemple 3.8 $T = \sum_{i \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}} c_{n_i} \delta_{x_i}^{(n)}$ est à support $\{x_i, i \in \mathbb{N}^*\}$.

Remarque 3.10 La fonction de Dirac, peut être définie comme la limite de diverses suites de fonctions définies par morceaux réglées et intégrables et même très régulières.

Exemple 3.9 Soit la suite $w_n(x) = \begin{cases} n; & |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0; & |x| > \frac{1}{2n} \end{cases}$ pour $n > 0$. On a,

$$\int_{\mathbb{R}} w_n(x) dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} n dx = 1.$$

Il est clair que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^*$ alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$\langle \lim_{n \rightarrow \infty} w_n, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/2n}^{1/2n} n \phi(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(y/n) dy = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle.$$

On remarque que pour $x = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = \infty$.

Exemple 3.10 La fonction noyau de la chaleur

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \lambda \exp(-\pi \lambda^2 x^2)$$

est de classe C^∞ mais admet des points singuliers quand $t \rightarrow 0^+$. Si on pose $\lambda = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}$ le noyau s'écrira $\lambda \exp(-\pi \lambda^2 x^2)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \exp(-\pi \lambda^2 x^2) = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

En effet, pour $y = \sqrt{\pi} \lambda x$ et avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle \lambda \exp(-\pi \lambda^2 x^2), \phi \rangle &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \exp(-\pi \lambda^2 x^2) \phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{y}{\lambda \sqrt{\pi}}\right) \frac{dy}{\sqrt{\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) \frac{dy}{\sqrt{\pi}} \phi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \phi(0) \\ &= \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Remarquons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \exp(-\pi \lambda^2 x^2) dx = 1$.

3. Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Proposition 3.5 Soient $(h_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle positive, $h > 0$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite complexe.

1- Si $h_n \rightarrow h$ alors $\delta_{h_n} \rightarrow \delta_h$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2- $T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \delta_{nh}$ est une distribution qui à tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ associe $\langle T, \phi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \phi(nh)$. En plus, cette somme est à support fini.

Définition 3.9 Lorsque $\lambda_n = 1$, la distribution $\Delta_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{nh}$ définie par

$$\langle \Delta_h, \phi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nh), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ est dite peigne de Dirac}$$

Proposition 3.6 Soit $h > 0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} h \Delta_h = 1 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0^+} h f \Delta_h = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Nous avons une formule très utile dite sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n a x} = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n/a}$$

qui induit le développement en série de Fourier d'un peigne de Dirac $\Delta_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}$.

5- Distribution tempêrée :

Rappelons que l'espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide est défini par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall m \in \mathbb{N}, \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{|\beta| \leq m, x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \right\}$$

ce qui implique que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha D^\beta f(x)| = 0$; ou encore mieux

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{k/2} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f(x)| < \infty; \forall k, m \in \mathbb{N}, \right\}.$$

La topologie de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas définie par une norme, mais par une famille dénombrable de normes pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\mathcal{N}_m(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|, \forall m \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Exemple 3.11 Notons que $\exp(-|x|^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une Gaussienne qui n'est pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 3.11 On vérifie facilement que si une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists M_p > 0 : |f(x)| \leq \frac{M_p}{1+|x|^p}$ donc f est bornée et est dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sachant que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors par dualité on a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions dites **tempérées** ou à croissance lente.

Exemple 3.12 $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Aussi, l'échelon de Heaviside défini par

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

induit la distribution tempérée $T_H(\phi) = \langle H, \phi \rangle = \int_0^{+\infty} \phi(x) dx, \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
 $\text{supp}T_H = \mathbb{R}^+$ et la distribution est dite causale.

Exemple 3.13 Les fonctions $1+x^2, \cos x, \sin x$ sont des distributions tempérées alors que $\exp x$ ne l'est pas.

Théorème 3.6 Toute distribution à support compact est tempérée $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3.7 Toute fonction de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ définit une distribution tempérée : $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$ dans le sens où $T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx, \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Pour voir si une distribution définie par une fonction est tempérée ou non, il ne suffit pas d'étudier la croissance à l'infini du module de cette fonction. En pratique, on cherche si elle est une distribution à support compact, fonction de $L^p(\mathbb{R}^n)$, fonction à croissance polynômiale càd majorée par un polynôme $|f(x)| \leq c(1+|x|)^m; m \geq 0$ ou encore on a ce théorème.

Théorème 3.8 Toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est de la forme

$$T = D^\alpha \left((1+|x|^2)^m f \right), \alpha \in \mathbb{N}^n, m \in \mathbb{N}$$

au sens des distributions où f est une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^n .

Exemple 3.14 Tout polynôme arbitraire $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ aussi si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a $fP \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

3. Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Proposition 3.7 Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors f s'identifie à une distribution tempérée si f vérifie une de ces conditions :

- 1- f est à croissance polynômiale dite lente,
- 2- $f = f_1 + f_2$ telles que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et f_2 est à croissance lente,
- 3- f est périodique.

Exemple 3.15 $T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta_k$ est tempérée si la suite $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est à croissance polynômiale. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $c_k = O(|k|^p)$ lorsque $|k| \rightarrow \infty$; d'où $|c_k| = C(1 + |k|^{2p})$. On a, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\langle T, \phi \rangle| &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(1 + |k|^{2p}) |\phi(k)| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C}{1 + k^2} (1 + k^2 + |k|^{2p} + |k|^{2p+2}) |\phi(k)| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C}{1 + k^2} \mathcal{N}_m(\phi) < C_1 \mathcal{N}_m(\phi). \end{aligned}$$

3.3 Opérations sur \mathcal{D}'

1- Translation et autres :

Définition 3.10 On définit la translation d'une distribution ainsi $\tau_h T(\phi) = T(\tau_{-h}\phi)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ càd

$$\langle \tau_h T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\phi \rangle; \quad h \in \mathbb{R}^n$$

et sa dilatation par

$$\langle d_a T, \phi \rangle = \langle T, |a| d_{1/a}\phi \rangle, \quad a \neq 0$$

avec $\tau_{-h}\phi(x) = \phi(x + h)$ et $d_{1/a}\phi(x) = \phi(ax)$.

Remarque 3.12 On a spécialement, $\tau_h \delta_0 = \delta_h$ et $d_a \delta_0 = |a| \delta_0$.

Définition 3.11 (Parité) Pour Ω symétrique par rapport à 0, on définit la symétrisée de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par $\tilde{T} = d_{-1}T$ avec

$$\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \tilde{\phi} \rangle$$

où $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$ est la symétrisée de $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

T est paire si $\tilde{T} = T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et T est impaire si $\tilde{T} = -T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple 3.16 $Vp_x^{\frac{1}{x}}$ est impaire, δ_0 est paire, $H(x)$ n'a pas de parité.

Proposition 3.8 Toute distribution T s'écrit de façon unique

$$T = \frac{T + \tilde{T}}{2} + \frac{T - \tilde{T}}{2}.$$

2- Les produits :

En général, on ne peut pas définir le produit de deux distributions mais si $f \in C^\infty, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec

$$\langle fT, \phi \rangle = \langle T, f\phi \rangle \quad \text{et} \quad \text{supp}fT \subset \text{supp}T \cap \text{supp}f.$$

Proposition 3.9 Soit $f \in C^\infty, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ alors

- 1- $\tau_h(fT) = \tau_h f \tau_h T$;
- 2- $f\delta_0 = f(0)\delta_0$.
- 3- Si $xT = 0$ alors $T = c\delta_0$.

Remarque 3.13 La propriété (2) pour $f(x) = x$ donne $x\delta_0 = 0$ ce qui induit (3).

Définition 3.12 (Produit tensoriel) Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors $T_f, T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et leur produit tensoriel $T_f \otimes T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ où

$$\langle T_f \otimes T_g, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f \otimes g \phi(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) g(y) \phi(x, y) dx dy$$

sachant que $f(x)g(y) = f \otimes g$.

En général, $\langle S_x \otimes T_y, \phi(x, y) \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \phi(x, y) \rangle \rangle$.

Définition 3.13 (Produit de convolution) Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\langle T_f * T_g, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z) g(y) \phi(z + y) dy dz$$

sachant que $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$.

Plus généralement, pour $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T * S, \phi \rangle = \langle T_x; \langle S_y, \phi(x + y) \rangle \rangle.$$

Remarque 3.14 $(f * g)(x)$ n'existe pas toujours.

3. Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Proposition 3.10 *Le produit de convolution satisfait ce qui suit :*

- 1- $(*)$ est associatif et commutatif sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
- 2- δ_0 est l'élément neutre pour le produit de convolution et en plus $T * \delta_a = \tau_a T$.
- 3- Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, on a

$$T * \phi(x) = \langle T, \phi(x-y) \rangle = \langle T, \tau_{-x} \tilde{\phi} \rangle.$$

- 4- En plus, $\text{supp}(T * \phi) \subset \text{supp}T + \text{supp}\phi$ et

$$D^\alpha(T * \phi) = D^\alpha T * \phi = T * D^\alpha \phi.$$

Remarque 3.15 *Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ on a $T * \phi_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.*

3- Dérivation :

La dérivation sur $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, est dite dérivation faible ou aussi au sens des distributions.

Définition 3.14 *Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et*

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \rangle = - \langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle; i = 1, \dots, n; \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Plus généralement, $\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Toutes les distributions sont dérivables et chaque dérivée est elle-même une distribution. Les distributions sont en fait toutes indéfiniment dérivables.

Exemple 3.17 *Sachant que la fonction partie entière $[x]$ n'est pas dérivable au sens classique, calculons sa dérivée au sens des distributions.*

La dérivée de la distribution associée $\langle T_{[x]}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} [x] \phi(x) dx = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} n \phi(x) dx$ est

$$\begin{aligned} \langle T', \phi \rangle &= - \langle T, \phi' \rangle = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \int_n^{n+1} \phi'(x) dx \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n [\phi(n+1) - \phi(n)] \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1) \phi(n+1) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \phi(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta_n, \phi \rangle. \end{aligned}$$

La dérivée de la fonction partie entière est le peigne de Dirac $\Delta_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$.

Proposition 3.11 La dérivation au sens des distributions vérifie :

- 1- $\mathcal{D}'(\Omega)$ est stable par dérivation.
- 2- La convergence d'une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ implique la convergence de ses dérivées et le support est réduit par dérivation ($\text{supp} D^\alpha T \subset \text{supp} T$).
- 3- Si T est d'ordre m alors $D^\alpha T$ est d'ordre $m + |\alpha|$.

Proposition 3.12 Toute fonction localement intégrable est indéfiniment dérivable au sens des distributions.

Proposition 3.13 Pour une distribution réelle, on a

- 1- Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ alors $(T_f)' = T_{f'}$.
- 2- Si $f \in C^1$ par morceaux avec $(a_i)_{i=1, \dots, N}$ points de discontinuités, alors

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^N (f(a_i^+) - f(a_i^-)) \delta_{a_i}.$$
- 3- $T' = 0$ ssi $T = A \in \mathbb{R}$ une constante.
- 4- $\tau_h T' = (\tau_h T)'$, la translation et la dérivation commutent.
- 5- Si $f \in C^\infty$ alors $(fT)' = f'T + fT'$.

Remarque 3.16 $(ST)' \neq ST' + S'T$ pour S, T et ST tous dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Par analogie aux fonctions nous avons la primitive d'une distribution est une distribution dans le sens où $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est primitive de $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ssi $S' = T$.

Proposition 3.14 Toute distribution a une infinité de primitives. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sont deux primitives de S , alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle $T_1 = T_2 + C$.

Transformée de Fourier d'une distribution

Rappelons qu'à tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on associe sa transformée de Fourier

$$TF(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-2i\pi x \xi} dx = \widehat{\phi}(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$$

avec $TF : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une application linéaire et bijective. Aussi,

$$TF^{-1}(\widehat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi = \phi(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 3.15 Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on définit la transformée de Fourier de T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ainsi

$$\langle \widehat{T}, \phi \rangle = \langle T, \widehat{\phi} \rangle$$

d'où $\widehat{\widehat{T}}(\phi) = TF(T(\phi)) = T(\widehat{\widehat{\phi}})$ où $\widehat{\widehat{\phi}} = TF(\phi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Aussi, la transformée inverse est définie par

$$\langle TF^{-1}(T), \phi \rangle = \langle T, TF^{-1}(\phi) \rangle.$$

Proposition 3.15 La transformée de Fourier et son inverse applique $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans lui même et sont bijectives càd $TF(T), TF^{-1}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $TF^{-1}(TF(T)) = T$ et $TF(TF^{-1}(T)) = T$.

Proposition 3.16 Pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; on a

$$1- D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), TF(D^\alpha T) = (2i\pi)^{|\alpha|} x^\alpha TF(T)$$

$$\text{et } TF\left((-2i\pi)^{|\alpha|} x^\alpha T\right) = D^\alpha TF(T).$$

$$2- \text{Pour } h \in \mathbb{R}^n, \text{ on a } TF(\tau_h T) = e^{2i\pi h} TF(T) \text{ et } TF(e^{-2i\pi h} T) = \tau_h TF(T).$$

Exemple 3.18 $TF(\delta_0) = 1$. En effet, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle \widehat{\delta_0}, \phi \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-2i\pi x \cdot 0} dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = \langle 1, \phi \rangle$$

d'où $\widehat{\delta_0} = 1$ au sens des distributions.

Exemple 3.19 On a $TF(1) = \delta_0$. En effet,

$$\langle \widehat{1}, \phi \rangle = \langle 1, \widehat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(x) dx = \widehat{\widehat{\phi}}(0) = TF^{-1}(\phi)(0) = \phi(0).$$

$$\text{Aussi, } TF(\delta_\lambda) = e^{-2i\pi\lambda y}; TF(e^{-2i\pi\lambda x}) = \delta_\lambda, TF(x^\alpha) = (2\pi i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_0; \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Exemple 3.20 $TF(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi \xi^2}$, cette Gaussienne est invariante par la TF.

Proposition 3.17 Du fait que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, +\infty]$, on a les restrictions de TF et TF^{-1} à $L^2(\mathbb{R}^n)$ génèrent des opérateurs unitaires et on a :

$$1- TF^{-1}(TF(f)) = f \text{ et } TF(TF^{-1}(f)) = f \text{ pour } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$$2- \langle TF(\phi), TF(\psi) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \phi, \psi \rangle, \forall \phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$$3- TF \text{ est une isométrie sur } L^2(\mathbb{R}^n). \text{ En effet, pour } f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\|TF(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

4 Conclusion

En physique, certains objets, appelés par abus fonctions, sont mal définies ponctuellement. Par exemple, la mesure de Dirac, qui, si elle est considérée comme une fonction, est nulle en dehors de 0, infinie en 0 ce qui n'a pas de sens. En fait, une valeur ponctuelle pour une quantité physique est impossible à mesurer avec un appareil de mesure. Ceci nécessite une étendue (spatiale) et ne fournira pas une valeur ponctuelle $f(x)$. On utilise alors une mesure appliquée à des fonction test par dualité et qui exprime physiquement que $\langle T, \phi \rangle$ est la mesure par ϕ de la distribution T .

Ces distributions généralisent les fonctions dans un certain sens quoiqu'elles n'aient pas de valeurs ponctuelles.

La distribution de Dirac qui est une distribution singulière d'une grande importance, en est un exemple, en plus des distributions régulières qui s'identifient à des fonctions localement intégrables et des distributions tempérées qui agissent sur l'espace de Schwartz et admettent des transformées de Fourier et leurs inverses.

L'une des applications de la notion de distribution est de pouvoir dériver des fonctions qui ne sont pas obligatoirement dérivables au sens classique et de pouvoir appliquer des transformées comme celle de Fourier dans un sens faible dit sens des distributions.

Toutes ces propriétés aident à résoudre des problèmes différentiels au sens faible.

Chapitre 2

Espaces de Sobolev

Dans ce chapitre nous allons utiliser les distributions pour définir les espaces de Sobolev. Pour s'en passer on peut utiliser la notion de presque partout. Les Sobolev sont des espaces de fonctions dont les puissances et celles de leurs dérivées (au sens faible) sont intégrables.

Le but de ceci est de pouvoir étudier la régularité des solutions de problèmes d'EDPs au sens faible et les classer dans des espaces.

1 Définitions et Notations

1.1 $W^{m,p}$: espaces de Sobolev en général

Définition 1.1 Soit $p \in [1, +\infty]$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, on définit l'espace vectoriel

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_i \in L^p(\Omega), \partial_{x_i} u = g_i, i = 1, \dots, n \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\}.$$

Donc, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ et toutes ses dérivées partielles d'ordre un au sens faible $\partial_{x_i} u = g_i$ sont dans $L^p(\Omega)$. Ceci est équivalent à dire que $u \in L^p(\Omega)$ et $\nabla u \in (L^p(\Omega))^n$.

$W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach (normé complet) muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}} &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^n}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Cette définition peut se généraliser à l'espace vectoriel

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_\alpha \in L^p(\Omega), D^\alpha u = g_\alpha \text{ pour } |\alpha| \leq m \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\}$$

qui est un Banach muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=0}^m \|\partial^{|\alpha|}u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} ; & p \in [1, +\infty[\\ \max_{|\alpha| \leq m} \left(\|\partial^{|\alpha|}u\|_{L^p(\Omega)} \right) ; & p = \infty. \end{cases}$$

Une norme équivalente à la précédente pour $p \in [1, +\infty[$ est

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=1}^m \|\partial^{|\alpha|}u\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^m \|\partial^{|\alpha|}u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Proposition 1.1 $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,q}(\Omega)$ si $q \leq p$ et $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ si $m \leq k$.

Ces inclusions sont des injections.

Remarque 1.1 Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Aussi, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Les espaces $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$

Définition 1.2 On note les espaces $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ spécialement $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ et $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Remarque 1.2 On a $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et ainsi $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$.

$H^1(\Omega)$ est un espace de Banach et est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire (cas réel)

$$\langle f; g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_{x_i}f(x)\partial_{x_i}g(x)dx. \quad (2.2)$$

De même, pour les $H^m(\Omega)$, le produit scalaire (cas réel) est

$$\langle f; g \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^m \int_{\Omega} \partial^{|\alpha|}f(x)\partial^{|\alpha|}g(x)dx.$$

Remarque 1.3 La norme est $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Remarque 1.4 Il est clair que $H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ avec injection continue.

Notons que les fonctions de H^m ne sont régulières que dépendemment de m et n . En fait, plus m est grand, plus les fonctions de H^m sont régulières.

Théorème 1.1 *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 et $m > n/2$ alors $H^m(\Omega)$ est un sous-espace de l'espace $C(\overline{\Omega})$.*

Sachant que $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ mais n'y est pas dense alors on définit d'autres types d'espaces de Sobolev $H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}_{H^m(\Omega)}$ et son dual par rapport à $L^2(\Omega)$ est noté $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. cette injection est continue dans le sens où une suite convergente dans $H^{-m}(\Omega)$ est convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.3 Les espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$

Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ on généralise la définition des espaces de Sobolev par l'analyse de Fourier en utilisant les distributions tempérées de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.3 *On définit pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ (ou } u \in L^2(\mathbb{R}^n)) : [1 + |\xi|^2]^{s/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

qui est un Banach pour la norme

$$\|u\|_{H^s} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} [1 + |\xi|^2]^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \text{ où } \xi \in \mathbb{R}^n, \widehat{u}(\xi) = TF(u(x)).$$

et un Hilbertien pour le p.s.

$$\langle u; v \rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} [1 + |\xi|^2]^s |\widehat{u}(\xi)| |\widehat{v}(\xi)| d\xi.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ qui à son tour est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.2 *Soient $s, t \in \mathbb{R}$.*

- 1- *Si $s < t$ alors $H^t(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\|u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^t}$ pour $u \in H^t(\mathbb{R}^n)$.*
- 2- *Si $s > 0$ alors $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Remarque 1.5 *Pour $s = m \in \mathbb{N}$ les deux définitions coïncident.*

Le théorème suivant présente un résultat important qui sous entend que pour s assez grand, les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^n)$ admettent un représentant continu.

Théorème 1.2 (Théorème d'injection de Sobolev). Pour $s > \frac{n}{2}$ les éléments de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sont des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

On utilise dans la preuve l'astuce $\widehat{u}(\xi) = [1 + |\xi|^2]^{s/2} \widehat{u}(\xi) [1 + |\xi|^2]^{-s/2}$ avec $[1 + |\xi|^2]^{-s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si $s > \frac{n}{2}$.

2 Propriétés de certains espaces de Sobolev

2.1 Espace $H^1(\Omega)$

Presque toutes les propriétés que nous allons voir pour $H^1(\Omega)$ sont vraies pour $W^{1,p}(\Omega)$; $p \in [1, +\infty[$. Nous traitons le cas $p = 2$ car c'est un cas très important pour les EDPs elliptiques.

De (2.1), on voit que pour $u \in H^1(\Omega)$ on a $\|u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H^1}$. Aussi,

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Proposition 2.1 Soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si il existe $C > 0$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\left| \int_{\Omega} u(x) \partial_{x_i} \varphi(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci est dû à la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 2.2 Si $u, v \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ alors $uv \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$\partial_{x_i}(uv) = u \partial_{x_i} v + v \partial_{x_i} u.$$

Remarque 2.1 $(\varphi_k)_k$ converge vers φ dans $H^1(\Omega)$ càd $\|\varphi_k - \varphi\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

Proposition 2.3 (Injections de Sobolev). On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est borné et régulier, ou $\Omega = \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$, $p \in [2, +\infty[$ et si $n \geq 3$, $p \in [2, 2^*]$ où $2^* = 2n/(n-2)$. Alors l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est continue. Si Ω est borné, alors l'injection est également compacte.

Les injections compactes sont d'une grande utilité quand on cherche à approcher une EDP. Le contrôle des dérivées induit l'équi-continuité pour les notions de dérivée et continuité au sens faible.

Proposition 2.4 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger) Supposons Ω un ouvert borné connexe de classe C^1 . Alors, il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que pour $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u - m(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

où $m(u) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_\Omega u(x) dx$ désigne la moyenne de u sur Ω et $\text{mes}(\Omega) = \int_\Omega dx$.

2.2 Espace $H_0^1(\Omega)$: une adhérence

$\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$ pour Ω borné. On définit alors son adhérence ainsi.

Définition 2.1 On définit l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ ainsi

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \exists \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega) : \varphi_k \rightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \right\}.$$

C'est un espace de Sobolev et un Banach muni de la norme de $H^1(\Omega)$ ou de la norme équivalente

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)};$$

$H_0^1(\Omega)$ est un Hilbertien muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Remarque 2.2 La norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ sur $H_0^1(\Omega)$ est une semi-norme sur $H^1(\Omega)$.

Remarque 2.3 Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ alors $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Toute fonction peut s'écrire sous cette forme $u = u^+ + u^-$ où $u^+ = \max(u, 0)$ et $u^- = \min(u, 0)$.

Lemme 2.1 Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ et $u^- \in H_0^1(\Omega)$ avec

$$\begin{cases} \nabla u^+ = 1_{u>0} \nabla u \text{ p.p. sur } \Omega \text{ avec } 1_{u>0} = 1 \text{ où } u > 0 \text{ et nulle ailleurs,} \\ \nabla u^- = 1_{u<0} \nabla u \text{ p.p. sur } \Omega \text{ avec } 1_{u<0} = 1 \text{ où } u < 0 \text{ et nulle ailleurs.} \end{cases}$$

Proposition 2.5 (Inégalité de Poincaré) Supposons Ω est un ouvert borné. Alors, il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'où, $H_0^1(\Omega) \underset{\text{fermé}}{\subset} H^1(\Omega)$ strictement.

Cas unidimensionnel : $\Omega = I =]a, b[$

Théorème 2.1 (Injection de Sobolev en dimension un). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert ou $I = \mathbb{R}$. Il existe une constante $C > 0$ (dépendante de I) telle que pour $u \in H^1(I)$ on ait

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{H^1(I)}$$

càd $H^1(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue. Si de plus I est borné, alors l'injection $H^1(I) \subset C(\bar{I})$ est compacte.

Remarque 2.4 Pour des dimensions supérieures, ceci n'est pas vrai comme déjà vue.

On dit alors que les éléments de $H^1(I)$ sont des fonctions continues dans le sens où on peut identifier tout élément de $H^1(I)$ à son représentant continu par le biais du théorème suivant.

Théorème 2.2 Soit $u \in H^1(I)$. Il existe une unique fonction $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ telle que $u = \tilde{u}$ presque partout, et pour tous $x, y \in I$ on a $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(s) ds$.

Corollaire 2.1 Si I est non borné et $u \in H^1(I)$ on a $u(x) \rightarrow 0$, pour $|x| \rightarrow \infty$.

2.3 Espace $H^{-1}(\Omega)$: un dual

Le dual de $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ noté $H^{-1}(\Omega)$ et peut être aussi défini par H^s pour $s = -1$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$. On peut identifier $H_0^1(\Omega)$ à $H^{-1}(\Omega)$ selon le théorème de représentation de Riez mais dans la pratique on ne le fait pas du fait que $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Théorème 2.3 L'espace $H^{-1}(\Omega)$ satisfait

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \exists f_0, f_i \in L^2(\Omega) : u(x) \underset{\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)}{=} f_0(x) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i(x) \right\}.$$

Les $f_i; i = 0, 1, \dots, n$ ne sont pas uniques alors on définit la norme

$$\|u\|_{H^{-1}} = \inf_{\{f_i; i=0,1,\dots,n\}} \sum_{i=0}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}$$

et de produit scalaire (cas réel)

$$\langle u, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} f_0(x) v(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i(x) \partial_{x_i} v(x) dx.$$

2.4 Espace $H^2(\Omega)$

C'est un espace de Sobolov des fonctions de $L^2(\Omega)$ telles que leurs dérivées d'ordre ≤ 2 sont toutes dans $L^2(\Omega)$.

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial^{|\alpha|}u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 2 \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega)\}.$$

Remarque 2.5 Supposons $n = 1$ càd $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ alors $|\alpha| \leq 2$ implique que α est un de ces vecteurs $(1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0), (0, 2)$.

D'où, $\partial^{|\alpha|}u$ est égale à une de ces dérivées respectivement

$$\partial_{x_1}u, \partial_{x_2}u, \partial_{x_1x_2}^2u, \partial_{x_1x_1}^2u, \partial_{x_2x_2}^2u.$$

Une propriété importante qui limite la vérification.

Proposition 2.6 Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors $u \in H^2(\Omega)$ si $\Delta u = \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_{x_i x_i}^2 u \in L^2(\Omega)$.

3 Notions importantes

3.1 Opérateurs de trace

Définition 3.1 Pour $u \in C(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord noté $\partial\Omega$ et $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. L'opérateur trace est noté $\gamma_0 : C(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\partial\Omega)$ définie par $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$.

La trace de u sur le bord $\partial\Omega$ est alors l'application linéaire $\gamma_0 u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\gamma_0 u(x) = u(x)$, $x \in \partial\Omega$.

Les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas obligatoirement continues pour de telles fonctions sur un ouvert borné Ω à bord régulier, on définit l'opérateur trace ainsi.

Proposition 3.1 L'application trace $\gamma_0 : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\partial\Omega)$ se prolonge par continuité en un opérateur linéaire continu borné $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ tel que $\gamma u(x) = u(x)$ p.p. sur $\partial\Omega$ (pour la mesure de Lebesgue $(n-1)$ -dimensionnelle) et $\exists C > 0$,

$$\|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

pour tout $u \in C(\Omega)$ qui est dense dans $H^1(\Omega)$.

La notion de trace n'a pas de sens sur $L^2(\Omega)$ en général càd

$$\nexists C > 0 : \|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exemple 3.1 A titre d'exemple pour

$$u(x) = \frac{1}{(1 - |x|^2)^{1/4}} \in L^2(B(0, 1))$$

mais quand x tend vers les points du bord $\partial B(0, 1)$ les valeurs de $u(x)$ tendent vers $+\infty$.

Toute fonction de $L^2(\partial\Omega)$ n'est pas nécessairement trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$. En effet,

Proposition 3.2 L'image par la trace de $H^1(\Omega)$ est $\gamma(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\partial\Omega)$ sachant que $H^{1/2}(\partial\Omega) \underset{\text{dense}}{\subset} L^2(\partial\Omega)$ est un Banach muni de la norme

$$\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{u \in H^1(\Omega) : \gamma(u)=v} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus, le noyau de la trace est $\text{Ker}\gamma = H_0^1(\Omega)$.

On peut alors redéfinir H_0^1 ainsi.

Proposition 3.3 $H_0^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur le bord $\partial\Omega$,

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\}.$$

Proposition 3.4 Sur $H^m(\Omega)$ avec $\partial\Omega$ de classe C^k telle que $k \geq m$, on a :

$$\text{Ker}\gamma = H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } \text{Im}\gamma = \gamma(H^m(\Omega)) = H^{m-1/2}(\partial\Omega) \underset{\text{dense}}{\subset} L^2(\partial\Omega).$$

Notons que $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}_{H^m(\Omega)} = H_0^m(\Omega) \subset H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Aussi, la norme de $H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ est $\|u\|_{H^{m-1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{v \in \gamma^{-1}(u)} \|v\|_{H^m(\Omega)}$.

Remarque 3.1 Pour $n = 1$, $H_0^m(I)$ est l'espace des fonctions telles que

$$\gamma u = \gamma u' = \dots = \gamma u^{(m-1)} = 0.$$

Cette caractéristique n'est pas vraie pour $n \geq 1$.

La notion de trace a aussi un sens sur les demi-plans

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$

de bord $\partial\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ qu'on peut identifier à \mathbb{R}^{n-1} .

Remarque 3.2 Donc, pour $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ avec $\partial\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$, on a

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^n)}.$$

3.2 Opérateurs de prolongement

Le résultat suivant montre qu'une fonction de $H^m(\Omega)$ peut être approximée par des fonctions qui sont C^∞ jusqu'au bord de Ω .

Théorème 3.1 Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à frontière de classe C^1 . Alors, $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

Corollaire 3.1 Soient $m, p \in \mathbb{N}$ tels que $p > n/2 + m$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à frontière régulière. Alors, on a $H^p(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$, avec inclusion continue.

Théorème 3.2 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est de classe C^m alors il existe un opérateur de prolongement linéaire continu $P : H^m(\Omega) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$ tel que $Pu|_\Omega = u$ et $\exists C_\Omega > 0$

$$\|Pu\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}.$$

Théorème 3.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 . $\forall u \in H^1(\Omega)$, on a équivalence entre ces assertions :

$$1- u \in H_0^1(\Omega); 2- \tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n); 3- \gamma_0 u = 0; 4- \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x); & x \in \Omega \\ 0; & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

On peut ainsi écrire $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)\}$.

Une autre version de ce théorème est la suivante.

Théorème 3.4 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 . $\forall u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire $u = u_1 + u_2$ telle que $u_1 = u|_\Omega$ et $u_2 = u|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega}$ et on :

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n) \iff \begin{cases} u_1 \in H^1(\Omega) \\ u_2 \in H^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \\ \gamma u_1 = \gamma u_2. \end{cases}$$

Nous avons alors ce Lemme.

Lemme 3.1 Soit Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbb{R}^n tels que $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. Alors l'opérateur de prolongement P défini par

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x); & x \in \Omega_1 \\ 0; & x \in \Omega_2 \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega_1)$ est une isométrie de $H_0^1(\Omega_1)$ à $H_0^1(\Omega_2)$ càd $\|Pu\|_{H_0^1(\Omega_2)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega_1)}$.

3.3 Formules de Green

Les formules données dans $C^1(\overline{\Omega})$ ou $C^2(\overline{\Omega})$ sont valables sur $H^1(\Omega)$ ou $H^2(\Omega)$ respectivement, en utilisant la notion de trace.

Théorème 3.5 (Théorème de Green) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert à bord $\partial\Omega$ de classe C^1 (ou $\Omega = \mathbb{R}_+^n$). Alors $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ on a pour $i = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u(x) \cdot v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \cdot \partial_{x_i} v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u(x) \cdot \gamma v(x) \eta_i dS; \quad (2.3)$$

où dS est la mesure surfacique ; $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$.

Remarque 3.3 Pour $n = 1$, ceci est l'intégration par parties sachant que $\int_{\Omega} u(x) dx = \int \int_{\Omega} \dots \int u(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

La somme de (2.3) donne la première formule de Green et l'application de cette formule à $\Delta u \cdot v = \nabla(\nabla u) \cdot v$ au lieu de $\nabla u \cdot v$ donne la deuxième formule de Green.

Corollaire 3.2 La première formule de Green pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u(x) \cdot \gamma v(x) \vec{\eta} dS.$$

La deuxième formule de Green pour tout $u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du}{d\vec{\eta}}(x) \cdot \gamma v(x) dS.$$

où dS est la mesure surfacique, $\frac{du}{d\vec{\eta}}(x) = \sum_{i=1}^n \gamma(\partial_{x_i} u) \cdot \eta_i = \gamma(\nabla u) \cdot \vec{\eta}$.

De plus, pour $u, v \in H^2(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x) dx - \int_{\Omega} u(x) \cdot \Delta v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{du}{d\vec{\eta}}(x) \cdot \gamma v(x) - \gamma u(x) \cdot \frac{dv}{d\vec{\eta}}(x) \right] dS.$$

Remarque 3.4 En général, on écrit les formules sans noter γ on note

$$\int_{\partial\Omega} \gamma u(x) \cdot \gamma v(x) dS = \int_{\partial\Omega} u(x) \cdot v(x) \vec{\eta} dS$$

et on sous entend que u et v prennent leurs valeurs pour $x \in \partial\Omega$. Aussi, pour la condition de Neumann on a

$$\frac{du}{d\vec{\eta}}(x) = \nabla u \cdot \vec{\eta}.$$

Chapitre 3

Etude mathématique des EDPs elliptiques linéaires

1 Généralités

La démarche d'analyse pour la résolution d'un problème réel passe, en général, par ces étapes :

1- La mise en équations dite modélisation connaissant les données du problème et les inconnues à déterminer, ceci en utilisant les lois de la physique. On arrive à construire le problème continu (le système d'EDP).

2- L'analyse mathématique du problème posé. (Existence, unicité et propriétés de la solution).

3- La conception d'une méthode numérique et son analyse. (Problème discrétisé, choix de méthodes et étude de leur stabilité, convergence, précision).

4- Algorithmique et mise en oeuvre sur ordinateur.

L'intervention des mathématiques pures se fait au niveau des étapes 2 et 3.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'analyse mathématique des équations aux dérivées partielles de classe elliptique qui correspondent à des modèles physiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps.

L'objectif est de présenter quelques problèmes classiques et de donner une stratégie générale permettant de les résoudre ou de montrer qu'ils sont bien posés c-à-d qu'ils admettent une solution, unique et stable.

1.1 Modèles de la physique

Il est utile d'avoir à l'esprit un modèle physique lié aux EDPs elliptiques, sujet de ce cours. Les équations elliptiques modélisent des problèmes stationnaires, d'équilibre, définis sur un domaine spatial Ω généralement borné de frontière $\partial\Omega$ sur laquelle l'inconnue est connue directement ou par son flux. Nous allons présenter deux exemples les plus classiques.

Déformation d'une membrane élastique :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une membrane élastique horizontale à l'équilibre se déformant sous un chargement vertical $f(x)$ et maintenue dans une position fixe sur le bord. L'altitude de la membrane u c'est son déplacement vertical, est alors solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où $c(x)$ représente les caractéristiques du matériau de la membrane, c 'est le coefficient d'élasticité et $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est un opérateur différentiel du second ordre dit le Laplacien. Ce problème est elliptique.

Notons que pour un problème d'élasticité comme il en est le cas ici, il peut s'agir de trouver la solution qui minimise les efforts subits par la membrane élastique sous la contrainte f . La résolution de l'EDP elliptique peut alors être associée à la recherche d'un équilibre en terme d'énergie. (voir chapIII).

En électrostatique :

En électrostatique un champ électrique E dans l'espace est un champ de vecteur représentant la force électrostatique par unité de charge. Selon les équations de Maxwell, E est relié à la densité de charge f par l'équation $\operatorname{div} E = f$ et satisfait également $\operatorname{rot} E = 0$. Seul le rotationnel d'un gradient est nul, donc du moins localement, $E = \nabla(-u)$, $-u$ est déterminée à une constante additive près et est appelée potentiel électrostatique. Par conséquent, on a $\operatorname{div} \nabla(-u) = -\Delta u(x) = f(x)$. Le Laplacien relie donc le potentiel u à la densité de charges électriques f . Si on cherche à déterminer le potentiel u dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ lorsque u est connue sur le bord. u satisfait alors le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u(x) = \phi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

On verra que ce problème est bien posé.

1.2 Modèles mathématiques fondamentaux : Laplace et Poisson

Rappelons que la forme générale d'une EDP est $Lu = f$; où L est un opérateur différentiel.

Définition 1.1 Si L est linéaire ($L(\alpha u) = \alpha Lu$ et $L(u + v) = Lu + Lv$) l'EDP est dite linéaire. Aussi, si $Lu = 0$, l'EDP est dite linéaire homogène ou sans second membre et si $Lu = f$ où f est une fonction non identiquement nulle, l'EDP est dite linéaire non homogène ou avec second membre.

Un modèle général des équations elliptiques d'ordre deux est le suivant :

$$\mathcal{L}u(x) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(x) \partial_{x_j} u(x)) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3.1)$$

où les fonctions $a_{ij}(x)$ sont données sur l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Définition 1.2 L'opérateur \mathcal{L} est dit (uniformément) elliptique dans l'ouvert Ω si et seulement si, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\sum_{i=1, j=1}^n a_{ij}(x) x_i x_j \geq \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda |x|^2, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega. \quad (3.2)$$

Remarque 1.1 Sur \mathbb{R}^2 , ce procédé est équivalent au calcul du déterminant de la première partie de l'EDP

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = a_{1,1}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + 2a_{1,2}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + a_{2,2}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x)$$

avec $a_{2,1}(x) = a_{1,2}(x)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$, le déterminant de l'équation elliptique vérifie

$$(a_{1,2}(x))^2 - a_{1,1}(x) a_{2,2}(x) < 0.$$

L'étude de telles équations sur Ω un ouvert borné, nécessite des conditions aux bords $\partial\Omega$ qui peuvent être de différents types dont les plus classiques sont des types suivants :

- Les conditions de **Dirichlet** homogènes $u = 0$ sur $\partial\Omega$ ou non homogènes $u(x) = \phi(x)$; $x \in \partial\Omega$;

- Les conditions de **Neumann** homogènes $\frac{du}{d\vec{\eta}} = 0$ sur $\partial\Omega$ ou non homogène $\frac{du}{d\vec{\eta}}(x) = \varphi(x)$; $x \in \partial\Omega$ où $\vec{\eta}$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$,

- Les conditions de **Robin** dites **mixtes** $\alpha u + \beta \frac{du}{d\vec{\eta}} = \psi(x)$; $x \in \partial\Omega$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
ou $u = u_0$ sur Γ_1 et $\frac{du}{d\vec{\eta}} = u_1$ sur Γ_2 : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$.

On s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution faible, sa régularité et sa stabilité.

Remarque 1.2 Si Ω n'est pas borné on considère des conditions aux limites nulles, exemple pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ on a $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

Une conséquence importante de la linéarité est la superposition des solutions.

Théorème 1.1 Soit L un opérateur différentiel linéaire, soient u_1, \dots, u_m, m solutions de $Lu = 0$. Alors $u = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$ est aussi solution de $Lu = 0$ pour tout choix des constantes c_1, \dots, c_m .

Remarque 1.3 On peut aussi superposer un nombre infini de solutions sous réserve de convergence de la série obtenue.

L'étude d'un problème d'EDP traite une notion importante la stabilité.

Définition 1.3 Un problème est stable si une « petite » variation des conditions aux bords entraîne une « petite » variation de la solution.

On aboutit alors au concept de problème bien posé au sens de Hadamard.

Définition 1.4 Un problème est dit bien posé si pour toute donnée la solution existe est unique et dépend continûment de la donnée, sinon il est dit mal posé.

Equations de Laplace et de Poisson

Dans (3.1), si

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{alors } \mathcal{L}u = -\sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_i}^2 u = -\Delta u.$$

Définition 1.5 $-\Delta u = 0$ est dite équation de Laplace et $-\Delta u = f(x)$ est dite équation de Poisson.

Définition 1.6 La solution cherchée est dite classique si elle est dans $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, faible si elle est dans $H^1(\Omega)$ et vérifie l'équation au sens des distributions et forte si elle est dans $H^2(\Omega)$ et vérifie l'équation p.p. sur Ω .

Définition 1.7 On définit l'énergie de l'équation de Laplace par

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

L'énergie de l'équation de Poisson est définie par

$$E(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \int_{\Omega} f(x) u(x) dx ; \langle f, u \rangle.$$

Un problème est dit à énergie finie si $E(u) < \infty$.

1.3 Principe du maximum

Le principe du maximum est une propriété naturelle du point de vue physique : par exemple dans le contexte de l'équation stationnaire de la chaleur $-\Delta u = f$, si on chauffe une plaque, la température intérieure est toujours plus petite que la température au bord. Le principe du maximum reste valable si on remplace le Laplacien par l'opérateur plus général (3.3) à coefficients variables avec conditions aux bords de Dirichlet ou de Neumann. Le principe du maximum est spécifique aux équations elliptiques du second ordre scalaire. En d'autres termes, il tombe généralement en défaut pour les systèmes d'équations et les équations elliptiques d'ordre plus élevé. Il admet différentes versions concernant les extrémas (max et min).

Dans le cas général d'une EDP elliptique linéaire, l'opérateur différentiel utilisé est

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \quad (3.3)$$

où $A(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ est une matrice symétrique telle que ses valeurs propres sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives ou encore $x^T A x \geq \lambda |x|^2$ càd (3.2) est satisfaite .

Théorème 1.2 (Principe du maximum fort) Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que $\mathcal{L}u \geq 0$ pour \mathcal{L} défini par (3.3) sur Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $b_i \in C(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$ telle que $c(x) \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$. Si $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$ alors $u \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$.

Lemme 1.1 Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ pour \mathcal{L} défini par (3.3) sur Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $b_i \in C(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$ telle que $c(x) \geq 0$. Alors

1- Si $\mathcal{L}u \leq 0$ sur $\overline{\Omega}$ alors $\max_{x \in \overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} (u^+)$ où $u^+ = \max(u, 0)$.

2- Si $\mathcal{L}u \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$ alors $\min_{x \in \overline{\Omega}} u \leq \min_{\partial\Omega} (u^-)$ où $u^- = \min(u, 0)$.

3- Si $\mathcal{L}u = 0$ sur $\overline{\Omega}$ alors $\max_{x \in \overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|$

4- si $c(x) = 0$ sur Ω alors u atteint son maximum sur $\partial\Omega$ seulement.

Le principe du maximum reste valable sous des hypothèses de régularité plus faibles, $u \in H^2(\Omega)$ et $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$.

Ce principe permet alors ces résultats de comparaison et d'unicité.

Corollaire 1.1 Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ pour \mathcal{L} défini par (3.3) sur Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $b_i \in C(\overline{\Omega})$, $c \in C(\overline{\Omega})$ telle que $c(x) \geq 0$. Alors

1- Si $\mathcal{L}u \geq \mathcal{L}v$ sur Ω et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ alors $u \leq v$ sur $\overline{\Omega}$.

2- Si $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$ sur Ω et $u = v$ sur $\partial\Omega$ alors $u = v$ sur $\overline{\Omega}$.

Remarque 1.4 Il est clair que le principe est valable dans le cas des équations de Laplace et Poisson.

2 Résolution formelle des équations de Laplace sur $\mathbb{R}^n, n \geq 2$

La résolution analytique de l'équation de Laplace et aussi celle de Poisson sur \mathbb{R}^2 est possible, le travail se complique pour $n \geq 3$ et nécessite un cadre abstrait de l'étude.

2.1 Cas de domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Coordonnées cartésiennes

On prend comme exemple l'équation de Laplace avec des conditions de Dirichlet homogènes sur les bords $x = 0$, $x = L$, $y = 0$ et non homogène sur $y = l$ càd

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur }]0, L[\times]0, l[\\ u(0, y) = u(L, y) = 0 = u(x, 0) \\ u(x, l) = f(x), \quad x \in [0, L]. \end{cases}$$

Par séparation de variables on a $\Delta u(x, y) = 0$ donne les équations

$$\begin{cases} X'' = -\lambda^2 X \\ X(0) = 0 = X(L) \end{cases} \text{ et } Y'' = \lambda^2 Y;$$

de solutions

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2; \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right); \quad Y_k(y) = A_k \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{L}y\right).$$

D'où la solution est une série de Fourier

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{L}y\right).$$

Pour déterminer les constantes A_k on a si $f \in L^2$

$$\begin{aligned} u(x, L) &= f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{L}L\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \\ A_k \operatorname{sh}(k\pi) &= \frac{\langle f, \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \rangle}{\langle \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \rangle} = \frac{L}{2} \int_{[0, L]} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = f_k \end{aligned}$$

où les f_k sont les coefficients de Fourier de $f(x)$. D'où, la solution est

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{L}L\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k\pi}{L}y\right).$$

Propriétés de la solution :

1- La solution vérifie le principe du maximum comme on a :

$$\max_{(x, y) \in [0, L] \times [0, l]} |u(x, y)| \leq \max_{x \in [0, L]} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right| \leq \max_{x \in [0, L]} |f(x)|.$$

2- Si $f(x) = 0$ la solution est nulle.

3- La régularité de la solution dépend de celle de f . On doit étudier la convergence des dérivées de la série et on peut parler de solution faible au sens des distributions pour une convergence dans H .

Coordonnées polaires

La problème écrit en coordonnées polaires sur

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$$

$$\begin{cases} \Delta v(r, \theta) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}, & 0 < r < R, \theta \in [0, 2\pi[\\ v(R, \theta) = g(\theta), & r = R. \end{cases}$$

La résolution par séparation de variables donne, pour $v(r, \theta) = \Theta(\theta) \Gamma(r)$, la série

$$v(r, \theta) = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^c \cos(k\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^s \sin(k\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^k \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} g_0 &= \langle g, 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} g(\theta) d\theta; \\ g_k^c &= \langle g, \cos(k\theta) \rangle; \quad g_k^s = \langle g, \sin(k\theta) \rangle. \end{aligned}$$

Un développement de cette série donne une solution convolution

$$v(r, \theta) = K(r, \theta) * g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} K(r, \theta - s) g(s) ds$$

où $K(r, \theta)$ dit noyau de Laplace sur le disque, est donné par

$$K(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}.$$

Propriétés de la solution :

- 1- La solution dépend presque partout de g et si $g(\theta) = 0$ la solution est nulle.
- 2- La solution vérifie le principe du maximum comme on a :

$$\max_{r \in]0, R[; \theta \in [0, 2\pi[} |v(r, \theta)| \leq C \max_{\theta \in [0, 2\pi[} |g(\theta)| \quad \text{où } C = \frac{1}{2\pi} \max_{r \in]0, R[; \theta \in [0, 2\pi[} \int_{[0, 2\pi[} |K(r, \theta - s)| ds.$$

- 3- La régularité de la solution ne dépend pas de celle de g , même si g est dans L^1 (ou C) la solution peut être de classe C^∞ car le noyau $K(r, \theta)$ l'est pour $r \in]0, R[; \theta \in [0, 2\pi[$. C'est l'effet régularisant du Lapalcien.

2.2 Cas de domaine non borné $\Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^2$

Le demi-plan

Soit le demi-plan $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \text{ et } u(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Alors, par transformation de Fourier par rapport à $x \in \mathbb{R}$, on a le problème

$$\begin{cases} (2i\pi\xi)^2 \hat{u} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} = 0, & \xi \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi), & \xi \in \mathbb{R} \text{ et } \hat{u}(\xi, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0; \end{cases}$$

de solution

$$\hat{u}(\xi, y) = C(\xi) \exp(-2\pi |\xi| y)$$

avec

$$\exp(-2\pi |\xi| y) = TF \left(\frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \right) \text{ et } C(\xi) = TF(g(x)).$$

Donc

$$\hat{u}(\xi, y) = TF \left(\frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \right) TF(g(x)) = TF \left(\left(\frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \right) * g(x) \right).$$

On peut alors écrire

$$u(x, y) = K(x, y) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi((x-z)^2 + y^2)} g(z) dz$$

où $K(x, y)$ est dit noyau de Laplace sur le demi-plan.

Propriétés de la solution :

- 1- La solution dépend presque partout de g et si $g(x) = 0$ la solution est nulle.
- 2- u vérifie le principe du maximum
- 3- u a une régularité forte (C^∞) indépendamment de g (L^1) car $K(x, y)$ est très régulière.

Le Plan \mathbb{R}^2

La solution peut être obtenue en faisant tendre $R \rightarrow \infty$ en utilisant les coordonnées polaires. Dans la solution (3.4) si $r = 0$ ou $R \rightarrow \infty$ la solution est la constante

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi[} g(\theta) d\theta = \text{constante} < \infty.$$

C'est une propriété des fonctions harmoniques.

2.3 Coordonnées sphériques sur \mathbb{R}^n

Si $\Omega = \mathbb{R}^n, n \geq 2$, on le traite comme une boule de centre zéro ou quelconque et de rayon infini ainsi $\mathbb{R}^n = \lim_{R \rightarrow \infty} B(x_0, R)$. On passe alors aux coordonnées sphériques ainsi définies

$$r = |x - x_0| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2 \right)^{1/2} \text{ et } \sigma = \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Remarque 2.1 En général on prend $x_0 = 0$.

Définition 2.1 La sphère unité de \mathbb{R}^n notée

$$\partial B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = S^{n-1}$$

de surface (dite aussi volume) $\omega_n = \int_{S^{n-1}} d\sigma$, sa mesure surfacique noté dS satisfait

$$dx = dr dS = r^{n-1} dr d\sigma.$$

On décompose le Laplacien pour $u(x) = v(r, \sigma)$

$$\Delta_x u(x) = \Delta_r v(r, \sigma) + \frac{1}{r^2} \Delta_\sigma v(r, \sigma),$$

où la forme de Δ_σ n'est explicite que pour $n = 2$ ou $n = 3$. Notons que

$$\Delta_r v(r, \sigma) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} v(r, \sigma) \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r, \sigma) + \frac{(n-1)}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(r, \sigma)$$

Remarque 2.2 Le Laplacien étant invariant par translation et rotation, alors les solutions des équations elliptiques en général et celles de Laplace et Poisson spécialement sont des fonctions **radiales** càd elles ne dépendent que de $r = |x|$ d'où $\Delta_x = \Delta_r$.

3 Fonctions harmoniques

Rappelons que si $\Delta u = 0$, u est dite harmonique. Nous allons voir deux cas en notant que tous les résultats sont valables sur $H^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et Ω de bord de classe C^2 .

3.1 Fonctions harmoniques sur un borné

Une conséquence de la deuxième formule de Green est la suivante.

Corollaire 3.1 *Si u est harmonique sur Ω alors $\int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\vec{\eta}} dS = 0$.*

Ce théorème donne des propriétés importantes d'une fonction harmonique qui assure l'unicité de la solution dans le cas de problème à valeurs aux bords.

Théorème 3.1 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Alors, on a :*

- 1- *Si u est harmonique sur Ω telle que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $u = 0$ sur $\overline{\Omega}$.*
- 2- *Si u est harmonique sur Ω et $\frac{du}{d\vec{\eta}} = 0$ sur $\partial\Omega$ alors $u = c$; constante sur Ω .*

Propriété de la moyenne sphérique

Une autre propriété remarquable des fonctions harmoniques est donnée par le **théorème de la moyenne** : la valeur de u au centre d'une sphère est la moyenne des valeurs prises par u à l'intérieur de la sphère.

Théorème 3.2 (*de la moyenne*). *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, harmonique sur Ω . Alors, pour tout $x \in \Omega$, $r > 0$ tels que $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$ une boule fermée, on a*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(z) d\sigma(z) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy, \quad (3.5)$$

où $|B(x, r)| = \omega_n r^n$ est la mesure de Lebesgue de la boule, $|\partial B(x, r)| = n\omega_n r^{n-1}$ est la mesure de surface de la sphère de centre x et de rayon $r > 0$, $\omega_n = |B(0, 1)|$ la mesure de Lebesgue de la sphère unité de \mathbb{R}^n .

Remarque 3.1 *Si on pose $y = x + rw$ avec $w \in \partial B(0, 1)$, on a*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(0, 1)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rw) d\sigma(z) = \Phi(r), \quad (3.6)$$

et on peut vérifier facilement que $\Phi'(r) = 0$ càd $\Phi(r)$ est constante.

Remarque 3.2 Nous savons que le volume de la sphère unité de \mathbb{R}^n est lié à sa surface par

$$\omega_n = |B(0, 1)| = \int_{B(0,1)} dy = \int_{\partial B(0,1)} \int_{(0,1)} r^{n-1} dr d\sigma = \frac{|\partial B(0, 1)|}{n}.$$

Ainsi, $|B(x, r)| = \omega_n r^n$ et $|\partial B(x, r)| = n\omega_n r^{n-1}$

Preuve. Dans la 2^{ième} formule, $v = 1$ donne sur $\Omega = B(y, \rho)$ avec $0 < \rho \leq r$

$$0 = \int_{B(y,\rho)} \Delta u(x) dx = \int_{\partial B(y,\rho)} \frac{du}{d\vec{\eta}}(x) dS.$$

On a pour $x = y + \rho w$, $w \in \partial B(0, 1)$ et $\vec{\eta} = w$,

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = w \nabla u(y + \rho w) = \frac{du}{d\vec{\eta}} \text{ et } dS = d\sigma(x) = \rho^{n-1} d\sigma(w).$$

Alors, en coordonnées sphériques,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B(y,\rho)} \frac{du}{d\vec{\eta}}(x) dS = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\partial B(0,1)} u(y + \rho w) d\sigma(w) \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{1-n} \int_{\partial B(y,\rho)} u(x) d\sigma(x) \right] = \rho^{n-1} \Phi'(\rho) \end{aligned}$$

où on a remplacé $w = \frac{x-y}{\rho}$. $\Phi'(\rho) = 0$ implique $\Phi(\rho)$ est constante donc pour tout $0 < \rho \leq r$ et on a

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B(y,\rho)} u(x) d\sigma(x) = r^{1-n} \int_{\partial B(y,r)} u(x) d\sigma(x).$$

D'un autre côté, $u \in C^2(\Omega)$ implique $u(y + \rho w) = u(y) + O(\rho)$, d'où

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B(y,\rho)} u(x) d\sigma(x) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B(y,\rho)} [u(y) + O(\rho)] d\sigma(x) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B(y,\rho)} d\sigma(x) [u(y) + O(\rho)] \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B(0,1)} \rho^{n-1} d\sigma(w) [u(y) + O(\rho)] \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1-n} n\omega_n \rho^{n-1} [u(y) + O(\rho)] = n\omega_n u(y). \end{aligned}$$

Par suite, on a la première égalité

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(y,r)} u(x) d\sigma(x). \quad (3.7)$$

Pour la deuxième égalité, on intègre $\int_{\partial B(y,r)} u(x) d\sigma(x)$ par rapport à $\rho \in (0, r)$,

$$\begin{aligned} \int_{B(y,r)} u(x) dx &= \int_{\partial B(y,r)(0,r)} \int u(x) d\rho d\sigma(x) \\ &= \int_0^r \int_{\partial B(0,1)} u(y + w\rho) d\sigma(w) \rho^{n-1} d\rho \\ &= u(y) n\omega_n \int_0^r \rho^{n-1} d\rho = u(y) n\omega_n \frac{r^n}{n} \end{aligned}$$

et l'intégrale de (3.7) donnera

$$u(y) = \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{B(y,r)} u(x) dx.$$

■

Nous avons un résultat dans l'autre sens et qui assure que toute fonction harmonique de classe C^2 est de classe C^∞ et vérifie l'égalité de la moyenne.

Théorème 3.3 Soit $u \in C(\overline{\Omega})$ tel que pour tout $x \in \Omega$ et tout $r > 0$ avec $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$, on a

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma(y).$$

Alors, $u \in C^\infty(\Omega)$ et est harmonique.

Principe du maximum

La formule de la moyenne sphérique permet de montrer que toute fonction harmonique une propriété remarquable des fonctions harmoniques, le **principe du maximum**. Si u est harmonique alors elle atteint ses extremas (maximum et minimum) seulement sur le bord de Ω .

Théorème 3.4 (Principe du maximum) Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, est harmonique sur Ω , ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n , alors :

- 1- soit u est constante dans $\overline{\Omega}$;
- 2- soit $\inf_{x \in \partial\Omega} u(x) < u(x) < \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$; pour tout $x \in \Omega$.

Preuve. On suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = u(x_0) = M$. On note Ω_{\max} l'ensemble des $z \in \Omega$ tels que $u(z) = M$. On remarque que $\Omega_{\max} = u^{-1}(M) \neq \emptyset$ et u est continue donc Ω_{\max} est fermé dans Ω . On peut appliquer la formule de la moyenne à la fonction harmonique $u - M$ dans la boule $B(r, x_0)$ pour $x_0 \in \Omega_{\max}$,

$$u(x_0) - M = 0 = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} [u(y) - M] dy.$$

On sait que $[u(y) - M] \leq 0$ et est continue dans $B(r, x_0)$ donc $u(y) = M$ sur $B(r, x_0)$. D'où, $B(r, x_0) \subset \Omega_{\max} \subset \Omega$ et Ω_{\max} est un ouvert. Ω_{\max} est alors un ouvert fermé non vide d'un connexe Ω , ce qui implique $\Omega_{\max} = \Omega$. On conclut que $u = M$ sur $\bar{\Omega}$, la première alternative ou que $x_0 \in \partial\Omega$ et on a la deuxième alternative. ■

Corollaire 3.2 *Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, est harmonique sur Ω , un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n , alors*

$$\min_{x \in \partial\Omega} u(x) = \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \quad \text{et} \quad \max_{x \in \partial\Omega} u(x) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x).$$

Théorème 3.5 (Principe du maximum fort) *Soit $u \in C^2(\Omega)$ telle que $-\Delta u \leq 0$ ($-\Delta u \geq 0$) sur Ω . Si u atteint son maximum en un point $x_0 \in \Omega$ alors u est constante dans Ω .*

Théorème 3.6 (Principe du maximum faible) *Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0 \quad (-\Delta u \geq 0) & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \gamma u \leq 0 \quad \text{p. p. sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $u \leq 0$ ($u \geq 0$) presque partout dans $\bar{\Omega}$.

u est dite sur et sous harmonique dans ces deux cas respectivement.

3.2 Fonctions harmoniques sur \mathbb{R}^n

Si $\Omega = \mathbb{R}^n, n \geq 2$, on le traite comme une sphère de centre zéro ou quelconque et de rayon infini ainsi $\mathbb{R}^n = \lim_{R \rightarrow \infty} B(x_0, R)$.

Nous avons ce théorème très important et qui implique que les fonctions harmoniques vérifient le principe du maximum.

Théorème 3.7 (de Liouville)

- 1- Si u est harmonique sur \mathbb{R}^n et u est bornée alors u est constante.
- 2- Si u est harmonique sur \mathbb{R}^n et u tend vers 0 à l'infini alors u est nulle.

Fonctions harmoniques radiales

Définition 3.1 Une fonction ne dépendant que du module $r = |x|$ est dite **radiale**.

Le Laplacien étant invariant par translation et rotation, alors les solutions des équations elliptiques en général et celles de Laplace et Poisson spécialement sont des fonctions **radiales** càd elles ne dépendent que de $r = |x|$ d'où

$$\Delta_x = \Delta_r = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(n-1)}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Le Laplacien pour les fonctions radiales $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ (ou $H^2(\mathbb{R}^n)$) : $v(r) = v(|x - x_0|) = u(x)$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $r = |x - x_0|$ est donc donné par

$$\Delta_x u(x) = \Delta_r v(r) = v''(r) + \frac{(n-1)}{r} v'(r).$$

Nous avons alors ce résultat.

Proposition 3.1 $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si et seulement si $v(r) = ar^{2-n} + b$ si $n \geq 3$ et $v(r) = a \ln r + b$ si $n = 2$ avec a, b des constantes.

4 Solution faible pour équation de Poisson

On commence par un résultat général concernant l'unicité de la solution classique.

Théorème 4.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné avec bord $\partial\Omega$ de classe C^2 , $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C$, la solution classique du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.8)$$

est unique. De même pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ \frac{du}{d\vec{\eta}} = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

la solution est unique à une constante près. Ceci pour f et g pouvant être nulles.

Pour qu'il existe une solution au problème de Neumann (3.9) dans Ω il est nécessaire que g satisfasse la condition de compatibilité suivante

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(x) dx.$$

Si $f(x) = 0$ la condition devient $\int_{\partial\Omega} g(x) dx = 0$. Ceci est dû à la formule de Green pour $v = 1$

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{d\vec{\eta}} dx.$$

4.1 Solution fondamentale

Définition 4.1 La solution vérifiant $-\Delta F = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ où δ_0 est l'impulsion de Dirac, est dite fondamentale.

C'est une solution au sens des distributions dite aussi faible.

Théorème 4.2 La solution fondamentale de l'équation de Laplace est radiale et est donnée pour $x \in \mathbb{R}^n$ càd $r \in [0, +\infty)$ par

$$F_n(|x|) = F_n(r) = \begin{cases} \frac{C_1}{r^{n-2}}; & n \geq 3 \text{ où } C_1 = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \\ C_2 \ln r; & n = 2 \text{ où } C_2 = \frac{-1}{2\pi} \end{cases} \quad (3.10)$$

avec $\omega_n = |S^{n-1}|$ est la surface de la sphère unité S^{n-1} de \mathbb{R}^n .

Remarque 4.1 $\omega_n = \int_{S^{n-1}} d\sigma = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = |S^{n-1}|$ où la sphère unité $S^{n-1} = B(0, 1)$.

Remarque 4.2 La restriction de F_n à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est harmonique càd $-\Delta F_n(|x|) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

4. Solution faible pour équation de Poisson

Preuve. Pour tout fonction radiale $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on pose $\phi(x) = \psi(|x|)$ avec $\nabla\phi(x) = \psi'(|x|) \frac{x}{|x|}$ et on a pour $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
 & \langle -\Delta F_n, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla F_n(|x|) \nabla \phi(x) dx \\
 & = \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} \nabla \left(\frac{C_1}{r^{n-2}} \right) \nabla \psi(r) \left(\frac{x}{r} \right)^2 r^{n-1} dr d\sigma \\
 & = |S^{n-1}| \int_0^{+\infty} \frac{(2-n)C_1}{r^{n-1}} \psi'(r) r^{n-1} dr \\
 & = -|S^{n-1}| (n-2) \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_0^{+\infty} \psi'(r) dr \\
 & = \psi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle .
 \end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on a même chose

$$\begin{aligned}
 \langle -\Delta F_2, \phi \rangle & = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla F_2(|x|) \nabla \phi(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \nabla (C_2 \ln r) \nabla \psi(r) \left(\frac{x}{r} \right)^2 r dr d\theta \\
 & = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{C_2}{r} \psi'(r) r dr = - \int_0^{+\infty} \psi'(r) dr = \psi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle .
 \end{aligned}$$

■

4.2 Solution faible

Définition 4.2 Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. On appelle une fonction $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) (H^1(\mathbb{R}^n))$ une solution faible du problème

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \tag{3.11}$$

si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$-\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx. \tag{3.12}$$

C'est une solution au sens des distributions.

Remarque 4.3 $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ implique que $u(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

Théorème 4.3 Supposons $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et que $f(x) \ln|x| \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si $n = 2$. Alors $u = f * F_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est une solution localement intégrable unique de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soit F_n la solution fondamentale définie par (3.10) ; alors comme $-\Delta F_n = \delta_0$ et en supposant que u et f sont radiales

$$-\Delta u(r) = f(r) = f(r) * \delta_0 = f(r) * (-\Delta F_n(r)) = -\Delta (f * F_n)(r)$$

donc la solution faible de $-\Delta u = f$ sur $\Omega = \mathbb{R}^n$ est $u(r) = (F_n * f)(r)$ au sens des distributions selon (3.12) et est radiale.

Soient u_1 et u_2 deux solutions de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alors $T = u_1 - u_2$ est harmonique dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et comme $\lim_{|x| \rightarrow \infty} T = 0$ donc selon théorème de Liouville on a $T = 0$ d'où l'unicité. ■

4.3 Fonction de Green

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à bord très régulier. On considère l'équation de Poisson munie de condition de Dirichlet dite problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.13)$$

On sait que ce problème admet au plus une solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. On cherche à obtenir l'existence d'une solution au sens faible si Ω est une boule.

A noter qu'on peut définir le noyau de Laplace ainsi $K(x, y) = F_n(|x - y|)$ solution de

$$\Delta_x K(x, y) = \delta_y, \quad x, y \in \Omega,$$

au sens des distributions qui est très régulier pour $x \neq y$.

Théorème 4.4 Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (ou $H^2(\Omega)$) alors $\forall x \in \Omega$

$$u(x) = -\int_{\Omega} K(x, y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[K(x, y) \frac{du}{d\vec{\eta}}(y) - u(y) \frac{dK}{d\vec{\eta}}(x, y) \right] dS.$$

Afin de supprimer le terme contenant $\frac{du}{d\vec{\eta}}(y)$, l'idée est d'introduire pour x fixé, une fonction correctrice $\phi(x, y)$. (à construire)

Théorème 4.5 $\exists \phi \in C^2(\Omega \times \overline{\Omega})$ tel que pour $\forall x \in \Omega$ on a

$$\begin{cases} \Delta_y \phi(x, y) = 0, & y \in \Omega \\ \phi(x, y) = K(x, y), & y \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

Définition 4.3 - $\phi(x, y)$ est dite fonction correctrice.

- $G(x, y) = K(x, y) - \phi(x, y)$ est dite fonction de Green pour Ω .
- $\frac{dG}{d\eta}(x, y)$, $x \in \Omega, y \in \partial\Omega$ est appelé noyau de Poisson.

Remarque 4.4 Le problème de construction de la fonction $\phi(x, y)$ et donc de celle Green G est difficile et qui ne peut pas être faite explicitement en général.

Théorème 4.6 Pour $f \in C(\overline{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. On suppose que (3.14) est vérifiée. Soit G la fonction de Green pour Ω . Alors la fonction $u \in C(\overline{\Omega})$ définit par

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{dG}{d\eta}(x, y) dS \quad (3.15)$$

est solution faible du problème de Dirichlet (3.13).

Proposition 4.1 (Estimation à priori) La solution du problème (3.13) donnée par (3.15) satisfait

$$\max_{x \in \Omega} |u| \leq C_{\Omega} \max_{x \in \Omega} |f| + \max_{x \in \partial\Omega} |g|.$$

Propriétés de la fonction de Green

1- Si on fixe $x \in \Omega$ alors

$$\begin{cases} \Delta_y G(x, y) = \delta_x, & y \in \Omega \\ G(x, y) = 0, & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

au sens des distributions.

2- G est symétrique càd $\forall x, y \in \Omega$ on a $G(x, y) = G(y, x)$.

3- $\int_{\Omega} G(x, y) dy = 1$.

4- G est harmonique et $G(x, y) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow y \in \partial\Omega$.

5 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle (FV) d'un problème d'EDP, dite aussi formulation faible, est une forme équivalente à ce problème d'EDP sous sa forme classique dite aussi formulation forte. On cherche à passer d'une formulation ponctuelle à une formulation appréciée à travers des produits scalaires où on est moins exigeant sur la régularité de la solution.. Cette notion est cruciale pour comprendre la méthode

numérique des éléments finis. En mécanique, la formulation variationnelle est connue sous le nom de “principe des travaux virtuels”. En physique, on parle d’équation de bilan.

Nous allons montrer des résultats d’existence et d’unicité des solutions pour certains problèmes elliptiques et un certain nombre de propriétés : principe du maximum et régularité.

5.1 Théorème de Lax-Milgram

Le principe est de remplacer l’EDP par une formulation équivalente (FV) obtenue en intégrant l’équation après l’avoir multiplier par une fonction quelconque, dite test sur un espace fonctionnel. Plusieurs questions importantes se posent :

- 1- Dans quel espace fonctionnel les fonctions test v sont admissibles ?
- 2- Sous quelles conditions la FV possède-t-elle une solution unique ?
- 3- Sous quelles conditions la FV est-elle équivalente à la formulation forte ?

C’est le théorème de Lax-Milgram qui assure l’existence et l’unicité de la solution de cette FV du problème.

Nous donnons ici des définitions nécessaires pour la FV.

Définition 5.1 Une forme bilinéaire sur un Hilbertien V est une application qui associe à un couple $(u, v) \in V \times V$ un scalaire noté $a(u, v)$ linéaire en chacun de ses 2 arguments u et v .

Définition 5.2 Une forme bilinéaire a sur un Hilbertien V est dite continue sur s’il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall (u, v) \in V \times V \quad (3.16)$$

Définition 5.3 Une forme bilinéaire a sur un Hilbertien V est dite coercive ou elliptique, s’il existe une constante strictement positive $\lambda > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq \lambda \|u\|_V^2.$$

Remarque 5.1 Une forme bilinéaire coercive est une généralisation de la notion de matrice définie positive.

Définition 5.4 a est dite symétrique si $a(u, v) = a(v, u)$.

Définition 5.5 Une formulation variationnelle est la donnée :

- d’un espace de Hilbert V où on cherche la solution ;

- d'une forme bilinéaire continue coercive $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$;
 - d'une forme linéaire continue $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ càd $l \in V'$;
- et consiste à trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$, $a(u, v) = l(v)$.

Remarque 5.2 Quand on prend $v = u$ dans $a(u, v) = l(v)$, on obtient une égalité dite d'énergie.

Théorème 5.1 Si a est une forme bilinéaire, continue et coercive sur un Hilbertien V , l est une forme linéaire continue. Alors le problème variationnel précédent admet une unique solution.

De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire l dans le sens où $\exists B > 0 : \|u\|_V \leq B \|l\|_{V'}$.

Preuve. L'application $a : v \rightarrow a(u, v) \forall u \in V$ est une forme linéaire continue sur V . Du théorème de représentation de Riesz, on déduit que

$$\exists! A(u) \in V \text{ tel que } a(u, v) = \langle A(u), v \rangle, \forall v \in V.$$

L'application $A : u \rightarrow Au$ est linéaire du fait de la bilinéarité de $a(u, v)$. En prenant $v = A(u)$ dans (3.16) on a

$$|a(u, A(u))| = \|A(u)\|_V^2 \leq C \|u\|_V \|A(u)\|_V$$

d'où $\|A(u)\|_V \leq C \|u\|_V$ et A est continue sur V . De plus, du théorème de représentation de Riesz, on déduit que

$$\exists! f \in V \text{ tel que } l(v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in V \text{ et } \|f\|_V = \|l\|_{V'}.$$

Par conséquent, la formulation variationnelle est équivalente à : trouver $u \in V$ tel que $A(u) = f$. Il faut donc montrer que l'opérateur $A : V \rightarrow V$ est bijectif ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution et que son inverse A^{-1} est continu ce qui prouve la dépendance continue de u par rapport à l .

De la coercivité de $a(u, v)$ on a

$$\lambda \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = \langle A(u), u \rangle \leq C \|u\|_V \|A(u)\|_V$$

d'où l'injectivité de A du fait que

$$\|u\|_V \leq \frac{C}{\lambda} \|A(u)\|_V, \quad \forall u \in V. \quad (3.17)$$

Reste à montrer que A est surjectif càd $\text{Im}(A) = V$. Il suffit de montrer que $\text{Im}(A)$ est fermé dans V et que $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$.

Soit $A(u_n)$ une suite dans $\text{Im}(A)$ qui converge vers $w \in V$. De (3.17), on a

$$\|u_p - u_q\|_V \leq \frac{C}{\lambda} \|A(u_p) - A(u_q)\|_V,$$

qui tend vers 0 quand p et q tendent vers l'infini. Donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est aussi une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert V et converge vers une limite $z \in V$. De la continuité de A on déduit que $w = A(z)$ et donc $w \in \text{Im}(A)$ qui est alors fermé. D'autre part, la coercivité de $a(u, v)$ implique que $\forall v \in \text{Im}(A)^\perp$,

$$\lambda \|v\|_V^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v \rangle = 0$$

càd $v = 0$ et $\text{Im}(A)^\perp = \{0\}$. Ceci prouve que A est bijectif et on remarque que

$$V = \{0\}^\perp = \left(\text{Im}(A)^\perp\right)^\perp = \overline{\text{Im } A} = \text{Im } A.$$

Finalement, de (3.17) on conclut que A^{-1} l'inverse de A est continu et que la solution u dépend continûment de f comme $\|A(u)\|_V = \|f\|_V = \|l\|_{V'}$.

Ceci complète la preuve. ■

Problème énergétique

Proposition 5.1 *Si a est en plus symétrique, alors u est l'unique minimiseur de la fonctionnelle*

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v),$$

càd $E(u) = \inf_{v \in V} E(v)$.

Remarque 5.3 *L'étude de cet axe de minimisation d'énergie est laissé pour d'autres cours.*

Problème spectral

Si a est en plus symétrique et soit H un espace de Hilbert tel que $V \underset{\text{dense}}{\subset} H$ avec injection compacte càd de toute suite bornée de V on peut extraire une sous-suite convergente dans H .

Nous considérons le problème variationnel de valeurs propres suivant dit spectral : trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e \in V \setminus \{0\}$ tels que

$$a(e, v) = \lambda \langle e, v \rangle, \forall v \in V. \tag{3.18}$$

Définition 5.6 λ est dite valeur propre du problème variationnel spectral (3.18) et que e est dit vecteur propre associé.

Théorème 5.2 Soient V et H deux espaces de Hilbert réels de dimension infinie tels que $V \subset_{\text{dense}} H$ avec injection compacte. Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue, coercive et symétrique sur V . Alors il existe une suite de valeurs propres de (3.18), croissante $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs qui tend vers l'infini et il existe une famille de vecteurs propres associés $(e_k)_{k \geq 1}$ qui forme une base hilbertienne de H , càd $a(e_k, v) = \lambda_k \langle e_k, v \rangle, \forall v \in V$.

De plus, $(u_k = e_k / \sqrt{\lambda_k})_{k \geq 1}$ est une base hilbertienne de V pour la forme a et $a(u_i, u_j) = \delta_{i,j}$.

Remarque 5.4 L'étude de cet axe de théorie spectrale est laissé pour d'autres cours.

L'intérêt ici c'est la construction d'une solution série du problème

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle = l(v) = \langle f, v \rangle \quad (3.19)$$

ainsi $u = \sum_{k \geq 1} f(u_k) u_k$ avec $f(u_k) = \frac{\langle f, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$ et $Au_k = \lambda_k u_k$ où $u_k = e_k / \sqrt{\lambda_k}$.

Notons que λ_k et $e_k, k \geq 1$ sont les valeurs propres et fonctions propres respectivement du problème $Au = \lambda u$.

5.2 Problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson

Problème de Dirichlet homogène

Un problème de Dirichlet est une équation de Poisson avec conditions aux limites de type Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.20)$$

Le cadre classique serait de considérer $f \in C(\overline{\Omega})$ et chercher une solution $u \in C^2(\Omega)$. La FV sert à déterminer une fonction u dans un certain espace fonctionnel V telle que le problème soit satisfait pour f donnée dans un certain espace fonctionnel H . On utilise pour ceci les espaces de Sobolev et les dérivées au sens des distributions et la condition aux limites au sens de la théorie des traces.

Nous avons des formulations équivalentes au problème (3.20).

Proposition 5.2 Soit $f \in L^2(\Omega)$, alors les problèmes suivants sont équivalents :

i- Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ càd $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\int_{\Omega} -u(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx. \quad (3.21)$$

ii- Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.22)$$

iii- Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (3.23)$$

dite principe de Dirichlet.

Définition 5.7 Une solution à un des problèmes équivalents formulés dans la proposition ci-dessus est appelée une solution faible du problème de Dirichlet (3.20).

Définition 5.8 Le problème (ii) est la FV du problème de Dirichlet avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx \\ l(v) &= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \end{aligned}$$

et sa solution est dite solution variationnelle du problème de Dirichlet (3.20).

Remarque 5.5 On remarque que $a(u, v)$ est déterminée par l'inconnue u alors que $l(v)$ déterminée par les données ici f et $u_{\partial\Omega} = 0$.

Remarque 5.6 La formulation (3.22) est obtenue sachant que $\mathcal{D}(\Omega) \underset{\text{dense}}{\subset} H_0^1(\Omega)$ et par le théorème de Green.

La formulation (3.22) nécessite une régularité plus faible que celle de l'équation d'origine (3.20) et ne lui est équivalente sauf si $u \in H^2(\Omega)$.

Remarque 5.7 L'équation (3.22) pour $v = u$ exprime l'égalité entre une énergie stockée dans le domaine et une énergie potentielle associée à f .

5. Formulation variationnelle

L'approche variationnelle pour étudier problème de Dirichlet (3.20) est constituée de trois étapes

Etape 1 : Établissement d'une formulation variationnelle.

On multiplie l'équation $-\Delta u = f$ par v une fonction test, on intègre sur Ω et on applique le théorème de Green :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\vec{\eta}} v(x) dS = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on choisit un espace de Hilbert V tel que toute fonction $v \in V$ vérifie aussi $v = 0$ sur $\partial\Omega$. Ce qui donne l'équation (3.22) avec ∇u et ∇v qui doivent être dans $L^2(\Omega)$ alors les fonctions tests sont $v \in H_0^1(\Omega)$ qui est un Hilbertien.

Etape 2 : Existence et unicité de la solution de la FV.

Théorème 5.3 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n avec un bord régulier et soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une solution unique au problème (3.22).*

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C \|f\|_{L^2}. \quad (3.24)$$

Preuve. On applique le théorème de Lax-Milgram pour (3.22) avec $V = H_0^1(\Omega)$ et $\|v\|_{H_0^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{1/2}$; $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx$ et $l(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$.

Il est clair que la forme $a(u, v)$ est bilinéaire comme $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, w, v, z \in V$, on a

$$\begin{cases} a(\alpha u + \beta w, v) = \alpha a(u, v) + \beta a(w, v); \\ a(u, \alpha v + \beta z) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, z). \end{cases}$$

Aussi, montrons que a est continue. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x) \nabla v(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H_0^1} \|u\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

sachant que $0 < c \leq \sqrt{c^2 + d^2}$. Donc a est continue. Vérifions que $a(u, v)$ est coercive (elliptique). On utilise l'inégalité de Poincaré :

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C_2 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

en rajoutant le même terme de part et d'autre, on obtient

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq (1 + C_2) \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx;$$

alors

$$|a(u, u)| = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{1 + C_2} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right) = \frac{1}{1 + C_2} \|u\|_{H_0^1}^2.$$

La forme l est linéaire comme $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall w, v \in V$ on a

$$l(\alpha w + \beta v) = \alpha l(w) + \beta l(v).$$

l est aussi continue du fait que

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \int_{\Omega} |f(x)v(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C_1 \|v\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

où $C_1 = C_2 \|f\|_{L^2}$.

Le théorème de Lax-Milgram est vérifié donc la solution faible unique du problème (3.20) existe dans $V = H_0^1(\Omega)$.

Montrons l'inégalité (3.24), on a

$$\frac{1}{1 + C_2} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq |a(u, u)| = |l(u)| \leq C_2 \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1};$$

alors après simplification

$$\|u\|_{H_0^1} \leq (1 + C_2) C_2 \|f\|_{L^2} = C \|f\|_{L^2}.$$

■

Remarque 5.8 *Il est aussi possible de prendre $\|v\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2}$.*

Remarque 5.9 *L'inégalité (3.24), dite estimation d'énergie, garantit que l'énergie de la solution est contrôlée par celle de la donnée f . Elle induit la stabilité de la solution.*

Théorème 5.4 *Le problème (3.20) est bien posé dans $H_0^1(\Omega)$.*

Preuve. Comme la solution (faible) existe et est unique. Reste à vérifier la stabilité de u en rapport avec f dans ce sens

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|f_1 - f_2\|_{L^2} < \delta \text{ alors } \|u_1 - u_2\|_{H_0^1} < \varepsilon.$$

En effet, pour u_1, u_2 solutions du problème (3.20) avec les données f_1, f_2 respectivement alors on a $w = u_1 - u_2$ est solution du problème (3.20) avec la donnée $F = f_1 - f_2$. Donc, on a

$$\|w\|_{H_0^1} \leq C \|F\|_{L^2}$$

d'où l'inégalité de stabilité

$$\|u_1 - u_2\|_{H_0^1} \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2}$$

et $\|u_1 - u_2\|_{H_0^1} \rightarrow 0$ si $\|f_1 - f_2\|_{L^2} \rightarrow 0$. ■

Étape 3 : Équivalence avec l'équation.

Cette étape délicate consiste à retourner à l'équation. Pour $f \in L^2(\Omega)$ on a $-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ alors $l(v) = \langle f, v \rangle_{L^2}$ avec Ω de bord régulier de classe C^2 . Dans ce cas, on procède par les mêmes intégrations par parties qui ont conduit à la FV, mais en sens inverse, et en les justifiant. On suppose que la solution u de la FV est régulière $u \in H^2(\Omega)$ et que l'ouvert est aussi régulier. Par la formule de Green, on a pour $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx &= - \int_{\Omega} \Delta u v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\vec{\eta}} v(x) dS \\ &= - \int_{\Omega} \Delta u v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

On déduit que $-\Delta u = f$ dans $L^2(\Omega)$ ceci pour $f \in L^2(\Omega)$ et on a avec $u \in H_0^1(\Omega)$, la formulation forte

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{p.p. } x \in \Omega; \\ u(x) = 0 & \text{p.p. } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est dite solution forte.

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ et n'est pas dans $L^2(\Omega)$ comme $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ alors $l(v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$, nous aurons les mêmes résultats sauf que $u \notin H^2(\Omega)$ avec Ω à bord régulier de classe C^1 . On utilise alors le fait que V un champ vectoriel de composante dans $L^2(\Omega)$ admet une divergence au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} V(x) \nabla \phi(x) dx = - \int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx$$

avec $\nabla u = V$ et $\text{div} \nabla = \Delta$.

Une version du **principe du maximum** pour ce problème est la suivante.

Théorème 5.5 *Si $f \geq 0$ presque partout dans Ω , alors la solution de (3.20) vérifie $u \geq 0$ presque partout dans Ω .*

Preuve. On utilise la FV (3.22) avec $v = u^- = \min(u, 0) \in H_0^1(\Omega)$ (voir chapII) sachant que $u = u^+ + u^-$ où $u^+ = \max(u, 0) \in H_0^1(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) u^-(x) dx &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla u^-(x) dx = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \cdot 1_{u \leq 0} dx \\ &\geq \int_{\Omega} \nabla u^-(x) \nabla u^-(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Comme $u^- \leq 0$ et $f \geq 0$ p. p. sur Ω et $u^- \in H_0^1(\Omega)$ donc $u^- = 0$ sur Ω . On en déduit que $u \geq 0$ p. p. sur Ω . ■

Ce théorème renseigne sur la positivité de la solution.

La régularité de la solution dépend de celle de la donnée f et du domaine Ω .

Théorème 5.6 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^{m+2} , $m \in \mathbb{N}$. Si $f \in H^m(\Omega)$ alors, $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de (3.20) est dans $H^{m+2}(\Omega)$. De plus, $\exists C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C \|f\|_{H^m}.$$

Pour $m = 0$, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et on est dans le cas précédent $u \in H^2(\Omega)$.

Remarque 5.10 *Les solutions faibles des EDPs elliptiques sont des solutions fortes ou classiques, si les données Ω et f sont très régulières.*

Problème de Dirichlet non homogène

Soit le problème de Dirichlet avec conditions aux limites non homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.25)$$

où f et g sont deux fonctions données.

La remarque à faire est que si on définit

$$V = \{v \in H^1 : \gamma v = g \text{ sur } \partial\Omega\}$$

ce n'est pas un espace fonctionnel linéaire. La théorie des traces nous assure que si $\partial\Omega$ est de classe C^1 et si $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ alors il existe une fonction $G \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma G = g$ sur $\partial\Omega$ (g est la trace de G sur $\partial\Omega$). En posant $u = w + G$, on peut reformuler le problème (3.25) comme suit :

$$\begin{cases} -\Delta w = f + \Delta G, & \text{sur } \Omega \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.26)$$

On appelle cette astuce le relèvement des conditions aux limites. Remarquons alors que si $G \in H^1(\Omega)$, bien entendu $\Delta G \notin L^2(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \Delta G(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla G(x) \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{dG(x)}{d\vec{\eta}} v(x) dS = - \int_{\Omega} \nabla G(x) \nabla v(x) dx$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$. La FV de (3.26) est de trouver $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla G(x) \nabla v(x) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ a(w, v) = l(v). \end{array} \right. \quad (3.27)$$

D'où, la FV de (3.25) est de trouver $u = w + G \in H^1(\Omega)$ tel que $G \in H^1(\Omega)$ est donné avec $\gamma G = g$ et $w \in H_0^1(\Omega)$ satisfait $a(w, v) = l(v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Théorème 5.7 *Si Ω un ouvert borné à bord de classe C^1 , le problème (3.25) admet une unique solution faible $u \in H^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. De plus, La solution vérifie*

$$\|u\|_{H^1} \leq B \left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right) \quad (3.28)$$

où $B > 0$.

Preuve. Sachant que le problème (3.25) est équivalent au problème (3.26). Pour utilisant le théorème de Lax-Milgram pour la FV (3.27) où

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla v(x) dx \text{ et } l(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx - \int_{\Omega} \nabla G(x) \nabla v(x) dx.$$

a est bilinéaire étant un produit scalaire, continue et coercive (preuve précédente). $l(v)$ est linéaire et est continue. En effet, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \int_{\Omega} |f(x) v(x)| dx + \int_{\Omega} |\nabla G(x) \nabla v(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |\nabla G(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq C_0 (\|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}) \leq C \|v\|_{H_0^1}; \end{aligned}$$

avec $C_0 = \max(\|f\|_{L^2}; \|\nabla G\|_{L^2})$; $C = C_0 C_1$ où C_1 est la constante d'équivalence entre les deux normes sur H^1 : $\|v\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}$ et $\sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2}$.

Le théorème de Lax-Milgram est vérifié donc w la solution faible unique du problème (3.26) existe dans $V = H_0^1(\Omega)$. Par contre u dépend du choix de G . Il convient

donc de montrer que $u = w + G$ est unique. On considère donc un autre relèvement G_1 et la solution w_1 de la FV (3.27) correspondant à G_1 est unique. Alors, $u = w + G$, $u_1 = w_1 + G_1$ vérifient $-\Delta(u - u_1) = 0$ sur Ω et $u - u_1 = g - g = 0$ sur $\partial\Omega$ alors par le théorème de Green on a

$$\int_{\Omega} \nabla(u(x) - u_1(x)) \nabla v(x) dx = 0$$

où on peut prendre $v = u - u_1 \in H_0^1(\Omega)$ car $\gamma(u - u_1) = 0$, donc

$$\int_{\Omega} |\nabla(u(x) - u_1(x))|^2 dx = 0.$$

Ainsi, $u(x) - u_1(x) = b$, une constante de trace nulle ($\gamma b = 0$) donc $b = 0$, ce qui induit l'unicité de la solution faible u du problème (3.25) dans $H^1(\Omega)$.

Montrons maintenant (3.28), on a en premier

$$\frac{1}{1 + C_2} \|w\|_{H_0^1}^2 \leq |a(w, w)| = |l(w)| \leq C_1 (\|f\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2}) \|w\|_{H_0^1}$$

d'où,

$$\|w\|_{H_0^1}^2 \leq (1 + C_2) C_1 (\|f\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2}).$$

Alors pour $u = w + G$ telle que $\gamma G = g$, on a

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &\leq \|w\|_{H_0^1} + \|G\|_{H^1} \leq (1 + C_2) (\|f\|_{L^2} + \|\nabla G\|_{L^2}) + \|G\|_{H^1} \\ &\leq (1 + C_2) \|f\|_{L^2} + (2 + C_2) \|G\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Sachant que la norme de l'espace de Banach $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est

$$\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \min \{ \|G\|_{H^1} : G \in H^1(\Omega) \text{ et } \gamma G = g \}$$

par suite, on a

$$\|u\|_{H^1} \leq B \left(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right),$$

où $B = (2 + C_2)$. ■

5.3 Problème de Neumann pour l'équation de Poisson

Pour des conditions aux limites de type Neumann, le problème s'énonce ainsi :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{sur } \Omega \\ \frac{du}{d\vec{\eta}} = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.29)$$

Nous traitons le problème non homogène car il n'est pas aussi compliqué que le cas homogène. Remarquons que toute solution est définie à une constante près et donc non unique pour $g = 0$ ou $g \neq 0$. Le problème est donc mal posé (au sens d'Hadamard). Pour assurer l'unicité de la solution, nous supposons que $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ vérifient une condition de compatibilité et une contrainte sur la solution : la moyenne de u est nulle

$$\int_{\Omega} u(x) dx = 0.$$

La formule de Green donne

$$-\int_{\Omega} \Delta uv(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\eta} v(x) dS$$

alors

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) dS.$$

Remarque 5.11 *On dit que la condition de Neumann est naturelle (implicite) comme elle est incluse dans la FV alors que celle de Dirichlet est essentielle (ou explicite) car elle est incluse dans l'espace des fonctions test.*

Pour donner un sens à tous les termes de cette égalité, on pourrait choisir $V = H^1(\Omega)$. Comme si u est solution, alors $u + C$ est aussi solution, on va lever l'indétermination de cette constante additive en utilisant des fonctions de $H^1(\Omega)$ de moyenne nulle, on pose

$$H_m^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v(x) dx = 0 \right\}$$

qui est un sous espace fermé de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$ et est donc un espace de Hilbert. Cette condition aidera aussi à assurer la coercivité de $a(u, v)$.

La FV de (3.29) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_m^1(\Omega) \text{ telle que } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx \\ = l(v) = \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) dS + \int_{\Omega} f(x) v(x) dx, \forall v \in V \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Théorème 5.8 *Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^n régulier de classe C^1 de \mathbb{R}^n . Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ qui vérifient la condition de compatibilité*

$$\int_{\partial\Omega} g(x) dS + \int_{\Omega} f(x) dx = 0. \quad (3.31)$$

Alors, il existe une unique solution variationnelle $u \in H_m^1(\Omega)$ de (3.29).

De plus, u satisfait

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq K \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \quad (3.32)$$

Preuve. Pour utiliser le théorème de Lax-Milgram pour la FV (3.30), posons

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx \text{ et } l(v) = \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) dS + \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

On vérifie le théorème de Lax-Milgram sur $H^1(\Omega)$ facilement et en utilisant le théorème de Poincaré-Wirtinger (chapII) au lieu de celui de Poincaré pour la coercivité de $a(u, v)$ sur $H^1(\Omega)$.

Pour obtenir (3.32), de la continuité de l et la coercivité de a , on a

$$\alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |a(u, u)| = |l(u)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

L'application trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ est continue, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}$ et on sait que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ alors

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right) \leq K \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right);$$

où $K = \max\left(\frac{1}{\alpha}; \frac{C}{\alpha}\right)$.

La condition (3.31) s'obtient de l'intégration de $\Delta u + f = 0$ sur Ω et par la formule de Green on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u(x) dx + \int_{\Omega} f(x) dx &= - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla(1) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\vec{\eta}} dS + \int_{\Omega} f(x) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} g(x) dS + \int_{\Omega} f(x) dx = 0. \end{aligned}$$

L'étape 3 de la FV est de revenir vers l'équation d'origine en utilisant les distributions.

■

Théorème 5.9 Si l'unique solution $u \in H^1(\Omega)$ de la FV (3.30) appartient à $H^2(\Omega)$, elle est solution forte de (3.29) au sens où

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{p.p. sur } \Omega \\ \frac{du(x)}{d\vec{\eta}} = g(x) & \text{p.p. sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Preuve. il est clair que pour $u \in H^2(\Omega)$ et le théorème de Green, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx &= - \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du(x)}{d\vec{\eta}} v(x) dS \\ &= \int_{\partial\Omega} g(x) v(x) dS + \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \end{aligned}$$

On déduit alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u(x) - f(x)) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \left(g(x) - \frac{du(x)}{d\vec{\eta}} \right) v(x) dS$$

et $(-\Delta u - f(x)) = 0$ sur $L^2(\Omega)$ si $g(x) - \frac{du(x)}{d\vec{\eta}} = 0$ sur $L^2(\partial\Omega)$ d'où le problème est vérifié p.p. ■

Remarque 5.12 Ces résultats restent vraies aussi pour $g(x) = 0 = \frac{du(x)}{d\vec{\eta}}$ sur $\partial\Omega$.

5.4 Autres équations elliptiques du second ordre

Problème elliptique général

Pour le problème du second ordre de forme générale

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(x) \partial_{x_j} u) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_{x_i} u + c(x) u(x) = f(x) \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.33)$$

où Ω ouvert borné de classe C^1 , $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, la FV est de trouver $u \in H_0^1(\Omega)$; $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ on a $a(u, v) = l(v)$ avec

$$\begin{cases} a(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \cdot \partial_{x_i} v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \partial_{x_i} u \cdot v dx + \int_{\Omega} c(x) u \cdot v dx \\ l(v) = \int_{\Omega} f v dx. \end{cases}$$

Théorème 5.10 Soient Ω ouvert borné de classe C^1 , $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.

1- Pour $b = (b_i)_{i=1, \dots, n}$, si $\text{div} b \leq 0$ au sens des distributions et $c(x) \geq c_0 \geq 0$ p.p. sur Ω , alors le problème (3.33) admet une unique solution variationnelle $u \in H_0^1(\Omega)$.

2- Ou s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $b_1 + c_1 \leq \varepsilon$ avec $b_1 = \max_{i=1, \dots, n} \|b_i\|_{L^\infty}$, $c_1 = \|c\|_{L^\infty}$, alors le problème (3.33) admet une unique solution variationnelle $u \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve. Il est clair que $l(v)$ est linéaire et continue. $a(u, v)$ est bilinéaire en tant que somme de produit scalaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et celle de Poincaré on a

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq a_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + b_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + c_1 \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (a_1 + b_1 C + c_1) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

avec $\max_{i,j=1,\dots,n} \|a_{ij}\|_{L^\infty} = a_1$. D'où $a(u, v)$ est continue. Pour la coercivité, on a de l'ellipticité de \mathcal{L} pour $c(x) > c_0 \geq 0$ et $\operatorname{div} b \leq 0$

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \cdot \partial_{x_i} u \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \partial_{x_i} u \cdot u \, dx + \int_{\Omega} c(x) u^2 \, dx \\ &\geq \lambda \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_{x_i} u|^2 \, dx - \int_{\Omega} \langle \operatorname{div} b, \frac{u^2}{2} \rangle \, dx + c_0 \int_{\Omega} u^2 \, dx \\ &\geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 + c_0 \|u\|_{L^2}^2 \geq \min(\lambda, c_0) \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

avec le fait que

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \partial_{x_i} u \cdot u \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \langle b_i(x), \partial_{x_i} \left(\frac{u^2}{2} \right) \rangle \, dx = - \int_{\Omega} \langle \operatorname{div} b, \frac{u^2}{2} \rangle \, dx \geq 0.$$

Pour le deuxième cas, on a

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i(x) \partial_{x_i} u \cdot u \, dx + \int_{\Omega} c(x) u^2 \, dx \geq -b_1 \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} - c_1 \|u\|_{L^2}^2$$

et $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (1 + C) \|\nabla u\|_{L^2}^2$ selon l'inégalité de Poincaré pour $u \in H_0^1(\Omega)$, alors,

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{(1 + C)} \|u\|_{H^1}^2.$$

Donc,

$$a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 - b_1 C \|\nabla u\|_{L^2}^2 - c_1 C \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{(\lambda - \varepsilon C)}{(1 + C)} \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

avec $[\lambda - \varepsilon C] > 0$ pour $\varepsilon < \lambda/C$ exemple $\varepsilon = \lambda/2C$. ■

Cas moins général

Considérons l'équation elliptique du second ordre

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij}(x) \partial_{x_j} u(x)) = f(x) \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.34)$$

où les fonctions $a_{ij}(x)$ sont données sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et satisfont la condition d'ellipticité de \mathcal{L} .

Théorème 5.11 (*Existence et unicité*) Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$, $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la FV

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx = \int_{\Omega} f v dx = l(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Preuve. Il est clair que $l(v)$ est linéaire et continue, $a(u, v)$ est bilinéaire, continue et aussi coercive comme

$$a(u, u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \partial_{x_i} u dx \geq \lambda \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_{x_i} u|^2 dx = \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

On a $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (1 + C) \|\nabla u\|_{L^2}^2$ selon l'inégalité de Poincaré pour $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors,

$$a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\lambda}{(1 + C)} \|u\|_{H^1}^2.$$

Par le théorème de Lax-Milgram on l'existence et l'unicité de la solution. ■

Théorème 5.12 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et u la solution variationnelle de (3.34). Si $f \geq 0$ p.p. sur Ω alors $u \geq 0$ p.p. sur Ω .

Preuve. Même preuve que la précédente en utilisant de l'ellipticité de \mathcal{L} pour $\lambda > 0$

$$0 \leq \lambda \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \cdot 1_{u \leq 0} dx \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \partial_{x_i} u^- dx = \int_{\Omega} f u^- dx \leq 0$$

donc $\int_{\Omega} f u^- dx = 0$ donne $u^- = 0$ p.p. sur Ω et $u = u^+ + u^- = u^+ \geq 0$ p.p. sur Ω . ■

Cas particulier : Problème de Dirichlet

Considérons un cas particulier

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x) u(x) = f(x) \text{ sur } \Omega \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.35)$$

Remarque 5.13 *Ce est dit de Helmholtz pour $f = 0$ et $c = k^2$.*

La FV du problème avec condition aux bords homogène pour $g = 0$ est la suivante : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$; $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ on a $a(u, v) = l(v)$ avec

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) u \cdot v dx \\ l(v) = \int_{\Omega} f v dx. \end{cases} \quad (3.36)$$

L'application de Lax-Milgram assure qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au problème variationnel.

Dans le cas où $g \neq 0$ càd pour une condition aux bords non homogène, on définit l'espace affine des éléments de $H^1(\Omega)$ passant par G dirigés par $H^1(\Omega)$ qui est un sous espace convexe fermé non vide de $H^1(\Omega)$ ainsi

$$H_g^1 = \{u \in H^1(\Omega) : u - G \in H_0^1(\Omega) \text{ et } G \in H^1(\Omega) \text{ avec } \gamma G = g\}$$

la FV de ce problème est la suivante : Trouver $u \in H_g^1$; $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ on a $a(u, v) = l(v)$ avec (3.36) satisfaite. En posant $w = u - G$, la FV peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u = w + G \in H^1(\Omega) : G \in H^1(\Omega) \text{ avec } \gamma G = g \text{ et } w \in H_0^1(\Omega) \text{ satisfait} \\ \quad a(w, v) = l(v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ où} \\ \quad a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) w \cdot v dx \\ \quad l(v) = \int_{\Omega} [f - c(x) G(x)] v dx - \int_{\Omega} \nabla G(x) \cdot \nabla v dx. \end{array} \right.$$

L'application de Lax-Milgram assure qu'il existe une unique solution au problème variationnel dans les deux cas.

Théorème 5.13 *Soient Ω un ouvert borné de classe C^2 , une fonction positive $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. Alors le problème (3.35) avec $g = 0$ admet une unique solution variationnelle $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant (3.36).*

Théorème 5.14 *Soient Ω un ouvert borné de classe C^2 , une fonction positive $c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Omega)$. Alors le problème (3.35) avec $g \neq 0$ admet une unique solution variationnelle $u \in H_g^1$ satisfaisant (3.36).*

Le principe du maximum est satisfait pour le cas homogène et on a pour $c(x) = 1$

$$\min \left(\inf_{x \in \partial\Omega} u(x), \inf_{x \in \Omega} f(x) \right) < u(x) \leq \max \left(\sup_{x \in \partial\Omega} u(x), \sup_{x \in \Omega} f(x) \right).$$

Cas particulier : Problème de Neumann

Considérons le cas particulier

$$\begin{cases} -\Delta u + u(x) = f(x) \text{ sur } \Omega \\ \frac{du}{d\vec{\eta}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.37)$$

La FV du problème avec condition aux bords homogène pour $g = 0$ est la suivante : Trouver $u \in H^1(\Omega)$; $\forall v \in H^1(\Omega)$ on a $a(u, v) = l(v)$ avec

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u \cdot v dx \\ l(v) = \int_{\Omega} f v dx. \end{cases} \quad (3.38)$$

Théorème 5.15 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^2 et $f \in L^2(\Omega)$. Alors (3.37) admet une unique solution variationnelle $u \in H^1(\Omega)$. De plus, $u \in H^2(\Omega)$.*

Preuve. L'application de Lax-Milgram au problème variationnel (3.38) est simple et assure qu'il existe une unique solution faible $u \in H^1(\Omega)$.

Dans l'autre sens, en prenant $v = \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (3.38) et en appliquant la formule de Green, on obtient pour

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi dx + \int_{\Omega} u \cdot \phi dx = \int_{\Omega} [-\Delta u + u] \cdot \phi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du}{d\vec{\eta}} \phi dS = \int_{\Omega} f \phi dx.$$

On a $-\Delta u + u = f$ au sens des distributions si $\frac{du}{d\vec{\eta}} = 0$ p.p. sur $\partial\Omega$. Donc, $u \in H^2(\Omega)$ du fait que $f \in L^2(\Omega)$. ■

6 Conclusion

En conclusion, l'intérêt de l'approche variationnelle est qu'elle permet d'aborder les problèmes d'EDPs à valeurs aux bords par des éléments théoriques (distributions, espaces de Sobolev) qui conduiront à démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans un cadre adéquat (théorème de Lax-Milgram dans un Hilbertien).

Une formulation variationnelle possède souvent une interprétation physique, en particulier la solution de la formulation variationnelle réalise le minimum d'une énergie ce qui mène aux problèmes d'optimisation pour une fonctionnelle.

De plus, cette approche permet aussi de construire la méthode des éléments finis, qui est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites elliptiques. C'est aussi un moyen d'approcher la solution qui n'est pas toujours calculable explicitement.

L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace V_h de dimension finie.

Bibliographie

- [1] G. ALLAIRE et F. ALOUGES, Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, Polycopié du cours MAP 431, Département de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, année 2015/2016.
- [2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [3] L. Boutet de Monvel, INTRODUCTION AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES, Cours de Maîtrise LBdM, fichier : EDP[2].pdf.
- [4] E. Darrigrand and F. Méhats, EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ELLIPTIQUES, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, fichier : PolyEDPEcours.pdf.
- [5] C .David et P. Gosselet, Equations aux dérivées partielles, Dunod 2012.
- [6] A. Munnier, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy- Cedex, fichier : edp-4.pdf.
- [7] M. Tucsnak, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Nancy Université/CNRS/INRIA, fichier : cours_EDP_2011.pdf.